UNIVERSIDADE DE TRÁS-OS-MONTES E ALTO DOURO

A Matemática na Natureza

Fernanda Manuela Pinheiro Mendes

Dissertação para obtenção do grau de Mestre em
Matemática e Ciências da Natureza

Vila Real, 2007

ÍNDICE

Índice de Figuras

Agradecimentos

Ao terminar a presente dissertação, cumpre-me deixar aqui expressa uma palavra de justo e sentido agradecimento a quantos colaboraram na sua execução, com destaque para as seguintes pessoas:

Professor Doutor Joaquim Anacleto, meu orientador científico, pela pronta disponibilidade que sempre manifestou na orientação deste trabalho e na paciente e profunda revisão do manuscrito, bem como pelas diversas sugestões e ajudas que em muito o enriqueceram;

Aos meus pais e ao Tójó, agradeço o constante incentivo à realização desta dissertação, a preciosa ajuda e permanente colaboração;

Ao meu irmão Fernando e à Sónia, que sempre estiveram presentes, e a todos os que de uma ou outra forma contribuíram para que este trabalho pudesse ser realizado e não foram mencionados.

Resumo

A Matemática está muito mais presente no nosso dia-a-dia do que normalmente se julga, pelo que, assim sendo, valeria a pena procurar conhecê-la mais perto, para melhor entender como funciona o mundo que nos rodeia.

É nesse propósito que a presente tese pretende identificar relações entre a Matemática e a Natureza, fomentando a interdisciplinaridade Matemática / Ciências da Natureza, na tentativa de dar um contributo (por pequeno que seja) para melhorar o processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Promover a imagem da Matemática e explicar fenómenos e manifestações da Natureza que possam revelar estruturas, organizações e regularidades matemáticas são também objectivos da dissertação.

Como aprender implica fazer, propõe-se ao longo da presente tese tarefas/actividades contextualizadas, apresentando a metodologia e estratégias a implementar em contexto escolar. Apresenta-se, também, no último capítulo uma actividade experimental concretizada: um questionário e consequente interpretação dos resultados.

Destina-se este material a ser usado na sala de aula ou em actividades extracurriculares, por exemplo, num Clube de Matemática.

Pode-se desta forma esquecer os exercícios rotineiros e fastidiosos, procurando-se uma nova forma de ensinar / aprender mais motivadora e desafiante.

Abstract

Mathematics is much more present in ours day-by-day of what is normally judged, for what, thus being, it is worth to look for to know it more close, in order to better understand the world around us.

It is with this intention that the present thesis intends to identify to relations between the Mathematics and the Nature, fomenting the Mathematics / Sciences of the Nature interdisciplinary, in the attempt to give one contribution (for small that it is) to improve the process of teach-learning of the Mathematics.

To promote the image of the Mathematics and to explain phenomena and manifestations of the Nature that can disclose mathematical structures, organizations and regularities are also aims of this thesis.

Since to learn implies to make, one considers throughout the present thesis contextualized tasks / activities, presenting the methodology and strategies to implement in school context. It is also presented in the last chapter an experimental activity: a questionnaire and consequent interpretation of the results.

This material can be used in the classroom or in extracurricular activities as well, for example, in a Club of Mathematics. In such a way it can be forgotten routine and boring exercises, looking for a new and challenging form to teach/to learn Mathematics.

1 Introdução

1.1 A relevância do estudo

As origens da Matemática perdem-se no tempo. Os mais antigos registos matemáticos de que se tem conhecimento datam de 2400 a.C. Progressivamente, o homem foi reflectindo acerca do que se sabia e do que se queria saber. Algumas tribos apenas conheciam o "um", "dois" e "muitos". Os seus problemas do quotidiano, como a contagem e a medida de comprimentos e de áreas, sugeriram a invenção de conceitos cada vez mais complexos. *Os Elementos de Euclides*[1] foram dos primeiros livros de Matemática que apresentaram de forma sistemática a construção dos teoremas da geometria e foram utilizados no ensino em todo o mundo até ao século XVII. Mesmo a antiquíssima Astrologia proporcionou o desenvolvimento da Matemática, ao exigir a construção de definições e o rigor no cálculo das posições dos astros.

Mas, o que é a Matemática?

Para Richard P. Feynman[2] *"A Matemática não é apenas outra linguagem: é uma linguagem mais o raciocínio; é uma linguagem mais a lógica; é um instrumento para raciocinar"* (Feynman, 1989).

A Matemática começou por ser *"a ciência que tem por objecto a medida e as propriedades das grandezas"* (dicionário Porto Editora), mas actualmente é cada vez mais a ciência do padrão e da estrutura dedutiva. Como afirmou P. Dirac[3], as matemáticas são a ferramenta especialmente adaptada ao tratamento das noções abstractas de qualquer natureza e, neste domínio, o seu poder é ilimitado [1].

---

[1] Obra principal de Euclides, matemático grego da Antiguidade, que viveu no século III/IV a.C. Graças ao seu trabalho, a geometria clássica foi o primeiro ramo da Matemática a consolidar-se, reunindo todo o conhecimento matemático da sua época.

[2] Richard Feynman (1918-1988) Prémio Nobel da Física em 1965.

[3] Paul Dirac (1902-1984) Prémio Nobel da Física em1933.

A Matemática sempre desempenhou um papel único no desenvolvimento das sociedades. Por exemplo, numa situação de guerra, o exército que possui mais conhecimentos de Matemática tem maior poder, que é traduzido nas máquinas mais perfeitas e melhor adaptadas.

Até ao séc. XVI apenas as pessoas com dinheiro ou os sacerdotes poderiam despender tempo no estudo da Matemática. De há quatrocentos anos para cá, a monarquia e o clero deixaram de ser os únicos a financiar a Matemática, passando este papel a ser desempenhado pelas universidades e pelas empresas (como por exemplo a IBM[4]). Ao contrário do que muitos pensam, a Matemática não consiste apenas em demonstrar teoremas ou em fazer contas, ela um autêntico tesouro para a civilização devido aos diversos conhecimentos envolvidos. E sabendo isso, actualmente poucos são os países em que não se cria Matemática nova, publicando-se assim em todo o mundo alguns milhares de revistas exclusivamente de Matemática.

Podemos encontrar a Matemática nos livros, filmes, desenhos, computadores e por toda a Natureza. A Matemática é a linguagem da Natureza.

A Matemática e a vida estão intimamente ligadas. A compreensão da evolução da vida necessita da Matemática: a divisão exacta das células e o número preciso de cromossomas em cada uma delas determinam o ser vivo gerado e a consagração, ou não, das características da sua espécie. A Matemática traz cada vez mais surpresas na compreensão do Universo.

Galileu Galilei[5], embora nunca tenha precisado o que entendia por Natureza, afirma todavia que a mesma tinha uma estrutura Matemática e só através do recurso à Matemática podia ser compreendida. A unidade fundamental da Natureza residia no seu carácter matemático, pelo que afirmou:

"O Universo (...) não pode ser compreendido a menos que primeiro aprendamos a linguagem no qual ele está escrito. Ele está escrito na linguagem Matemática e os seus caracteres são o triângulo, o círculo e outras figuras geométricas, sem as quais é impossível compreender uma palavra que seja dele: sem estes ficamos às escuras, num labirinto escuro" (Galileu Galilei, 1626).

[4] International Business Machines.

[5] Galileu Galilei (1564-1642), físico, matemático e astrónomo italiano.

Aplicar a Matemática na Natureza é uma forma de verificação dela própria. Ainda hoje, e possivelmente no futuro, matemáticos do mundo inteiro procuram, e procurarão, uma Matemática formalizada para representar factos e fenómenos da Natureza.

A Matemática está presente em quase todos os domínios científicos, nomeadamente na Física, Química, Biologia, Engenharia, Sociologia, História, mostrando e demonstrando a sua unidade no funcionamento da Natureza. Desde os caracóis aos girassóis, das imagens médicas à música podemos encontrar a ciência dos números como base de múltiplos fenómenos.

"O estudo aprofundado da Natureza é a fonte mais fecunda das descobertas matemáticas" (Joseph Fourier[6]). Assim, até parece que *"o universo impôs a Matemática à humanidade"* (Hersh, 1995).

Consideram-se, entre outras, finalidades da disciplina de Matemática no ensino básico: desenvolver a capacidade de utilizar a Matemática como instrumento de interpretação e intervenção do real; facultar processos de aprender a aprender e condições que despertem a curiosidade e o gosto pela aprendizagem permanente (retirado da Organização Curricular e Programas, Ensino Básico 2º ciclo, do Ministério da Educação); e tendo presente que a Matemática é indispensável, quer como instrumento de interpretação do real, quer como factor de desenvolvimento de uma estrutura dinâmica do pensamento e que a Matemática se aprende construindo, vivendo experiências que liguem o concreto ao abstracto e associem a sua aprendizagem a uma realidade mais vasta; este trabalho pretende ser uma contribuição no sentido de a Matemática deixe de ser “a disciplina complicada e incompreensível”, e que se devem desenvolver novos métodos motivadores do seu ensino/aprendizagem.

1.2 Enquadramento Curricular

Algumas práticas pedagógicas estão sedimentadas ao longo dos tempos e embora o Decreto-Lei nº6 de 18 de Janeiro de 2001, no seu artigo 31º, alínea c), refira explicitamente “a existência de áreas curriculares disciplinares e não disciplinares que visam a realização de aprendizagens significativas e a formação

[6] Joseph Fourier (1768-1830), matemático e físico francês.

integral dos alunos através da articulação e da contextualização dos saberes", sabe-se que a prática das últimas décadas tem-se caracterizado por um trabalho profundamente individualista, muitas das vezes cioso da sua especificidade, preterindo o todo relativamente às partes. Contribuir para a inversão desta situação torna-se, por isso, um exercício ambicioso pertencendo mais ao domínio das mentalidades do que propriamente ao da pedagogia.

Articular conteúdos programáticos que não nados e criados nessa perspectiva dificulta o processo, no entanto uma visão articulada e holística do conhecimento contribuirá, de forma substantiva, para uma maior compreensão e consolidação de conhecimentos.

As propostas de articulação curricular de conteúdos relativos aos 5º/6º anos de escolaridade, desenhadas ao longo da dissertação, e especificamente nas Actividades/Tarefas, Problemas, Curiosidades e na aplicação do Inquérito que têm como ponto de partida temas comuns a duas ou mais áreas curriculares (Matemática e Ciências da Natureza) assentam numa concepção de trabalho desafiante.

1.3 Objectivos

A presente tese tem como principais objectivos:

- Melhorar o processo de ensino-aprendizagem da Matemática relacionando-a com a Natureza;
- Fomentar a interdisciplinaridade Ciências da Natureza / Matemática;
- Promover a imagem e o gosto pela Matemática;
- Identificar relações entre a Matemática e a Natureza;
- Explicar fenómenos e manifestações da Natureza que possam revelar estruturas, organizações e regularidades matemáticas.

1.4 Estrutura da Tese

No capítulo 1 apresenta-se a Introdução onde figuram a relevância do estudo, os objectivos e estrutura da Tese.

O capítulo 2 descreve a relação entre os números e a Natureza.

No capítulo 3 é exposta a forma como a geometria está presente na Natureza, e inclui dois sub-capítulos nos quais são tratados a geometria macroscópica seguida da geometria microscópica.

Apresenta-se no capítulo 4 a Matemática no mundo animal, mais concretamente na vida das abelhas.

É explorada a relação entre a Matemática e a Música no capítulo 5.

Ao longo da dissertação, são apresentadas actividades/tarefas contextualizadas para uma possível implementação em contexto escolar.

O capítulo 6 expõe a aplicação de uma Actividade Experimental (um Questionário) e a respectiva Interpretação dos Resultados.

A Tese termina com o capítulo 7 onde se pode ler a Conclusão, seguida dos Apêndices.

2 Os Números e a Natureza

"Todas as coisas são números." Pitágoras

"O grande livro do Universo está escrito em linguagem Matemática." Galileu

2.1 Os Números

Os números são utilizados para contar, medir e calcular. Mas colocam-se questões nesta fase introdutória, nomeadamente: como surgiram os números? Como foram as primeiras formas de contagem?

Os homens primitivos não tinham necessidade de contar, pois o que necessitavam para a sua sobrevivência era retirado da própria Natureza. A necessidade de contar começou com o desenvolvimento das actividades humanas, quando o homem foi deixando de ser pescador e colector de alimentos para fixar-se no solo.

O homem começou a plantar, produzir alimentos, construir casas, protecções, fortificações e domesticar animais, usando os mesmos para obter a lã e o leite, tornando-se criador de animais domésticos, o que trouxe profundas modificações na vida humana.

As primeiras formas de agricultura de que se tem notícia, foram criadas há cerca de dez mil anos na região que hoje é denominada Médio Oriente.

A agricultura passou então a exigir o conhecimento do tempo, das estações do ano e das fases da Lua e assim começaram a surgir as primeiras formas de calendário.

No pastoreio, o pastor usava várias formas para controlar o seu rebanho. Pela manhã, ele soltava os seus carneiros e analisava ao final da tarde, se algum tinha sido roubado, fugido, perdido do rebanho ou se havia sido acrescentado um novo carneiro ao rebanho. Assim, eles tinham a correspondência um a um, onde cada carneiro correspondia a uma pedrinha que era armazenada num saco.

A palavra cálculo (que se usa hoje) deriva da palavra latina *calculus*, que significa pedrinha [2]. A correspondência unidade a unidade ainda é usada hoje em dia. Os números naturais são a expressão cultural da necessidade de contar, ou seja, de conhecer a resposta à pergunta: quantos?

O conjunto dos números naturais que se representa por $\mathbb{N}$, é constituído pelos números que se utilizam habitualmente para contar objectos:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$$

Este conjunto caracteriza-se por:

- Ter um primeiro elemento: $1 \in \mathbb{N}$.

- Cada elemento tem um seguinte. Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, existe $n+1 \in \mathbb{N}$.

- Não existe um último elemento, quer dizer, $\mathbb{N}$ tem infinitos elementos, o que equivale a dizer que a sucessão dos números naturais é infinita.

Para Pitágoras[7], o número natural era algo mágico e a base de todo o Universo. Tinha a convicção de que a harmonia, a beleza e toda a Natureza podiam expressar-se pelas relações dos números naturais. Chegou mesmo a defender em tese de que os planetas quando giram sobre as suas órbitas, criam uma harmonia celeste, fundamentada nos mencionados números. Pitágoras, que descobriu tantas ocorrências de relações numéricas simples na Natureza, concluiu que "tudo é número", desde a Música aos movimentos dos astros. A ideia que a Natureza se lê e compreende com a mediação da Matemática é Pitagórica.

Tendo em vista o problema na construção dos números, como por exemplo 31 e 301, os hindus criaram um símbolo para representar algo vazio (ausência de tudo) que foi denominado $s'\bar{u}nya$. A invenção prática do zero é atribuída, assim, aos hindus, surgindo assim o conjunto dos números inteiros $\mathbb{N}_0 = \{0,1,2,3,...\}$

À medida que o homem avança nas suas investigações depara-se com novas dificuldades, como por exemplo, resolver equações do tipo $6-8=x$ que não têm solução em $\mathbb{N}_0$. Como no conjunto dos números naturais não existe nenhum número que somando a 8 dê como resultado 6, foi necessário introduzir os números inteiros negativos. Estes estão precedidos pelo sinal menos $(-)$. Deste modo, tem solução a mencionada diferença: $6-8=-2$

A reunião entre os números naturais e inteiros negativos forma o conjunto dos números inteiros relativos designado pelo símbolo $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{...,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$$

[7] Pitágoras foi um filósofo e matemático grego que nasceu pelos anos de 571 a.C. e 570 a.C. e morreu provavelmente em 497 a.C. ou 496 a.C.

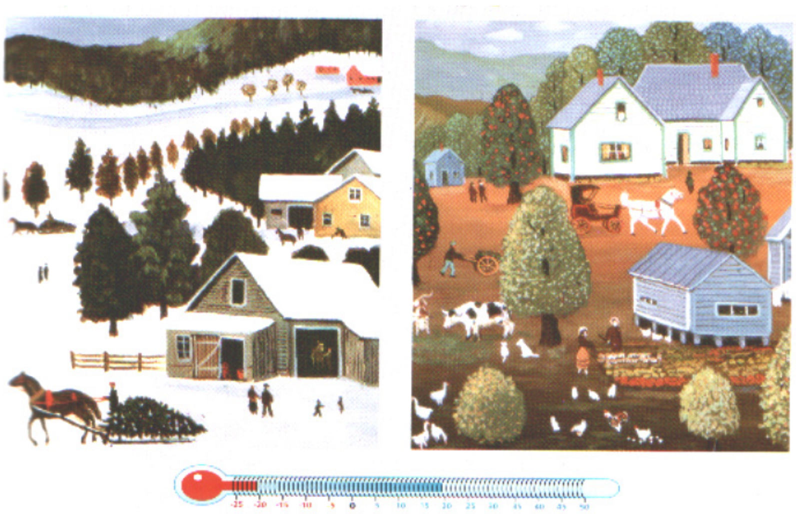


Figura 2.1: A escala Celsius[8] de temperatura é um exemplo prático da utilização dos números inteiros relativos.

Na divisão exacta de números naturais, para que o quociente seja um número natural é condição necessária que o dividendo seja múltiplo do divisor. No caso das divisões como $9:(-4)$, os matemáticos tentaram solucioná-las introduzindo uma nova classe de números, chamados fraccionários.

Denomina-se fracção a todo o par de números inteiros, dados numa certa ordem, de modo que o segundo seja diferente de zero. Para a sua representação utiliza-se a notação clássica a/b, onde a é o numerador da fracção e b o denominador. Denominam-se ambos os termos da fracção. Com o conjunto das fracções (ou seus equivalentes, os decimais de dízima periódica), obtém-se o conjunto $\mathbb{Q}$, o conjunto dos números racionais.

Do mesmo modo que, através da soma dos números negativos com os naturais poderiam resolver-se os problemas relativos à subtracção de números naturais (operação oposta à soma), com as fracções podem resolver-se os problemas derivados da divisão (operação inversa do produto).

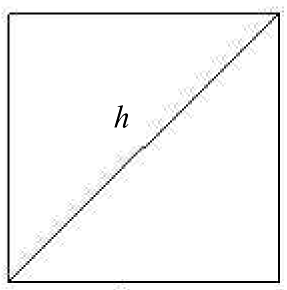
Os números racionais introduziram-se para resolver equações como: $ax = b$, e determinar o valor da incógnita x.

[8] Esta escala deve-se a Anders Celsius (1701-1744), astrónomo sueco, no entanto, a temperatura é uma grandeza física com valores apenas positivos na escala Kelvin, que é a cientificamente correcta.

$$x = \frac{b}{a} \text{ (número racional), } a \neq 0$$

Como já foi referido, os Pitagóricos rendiam verdadeiro culto místico ao conceito de número, considerando-o como essência das coisas. Acreditavam que tudo no universo estava relacionado com números inteiros ou razões de números inteiros (em linguagem actual, números racionais). Aliás, na antiguidade a designação número aplicava-se só aos inteiros maiores do que um. Esta crença foi profundamente abalada quando confrontados com o Teorema de Pitágoras no problema de calcular a medida da diagonal de um quadrado unitário.

Como eles apenas conheciam os números racionais (naturais e fracções de naturais) foi com grande surpresa e choque que descobriram que havia segmentos de recta cuja medida não pode ser expressa por um número racional. Essa descoberta é atribuída a um aluno de Pitágoras que tentava descobrir a medida da diagonal de um quadrado de lado 1.



$b = 1$ m

$$h^2 = a^2 + b^2 \Leftrightarrow h^2 = 1^2 + 1^2 \Leftrightarrow h^2 = 2 \Leftrightarrow h = \sqrt{2}\text{m}$$

$a = 1$ m

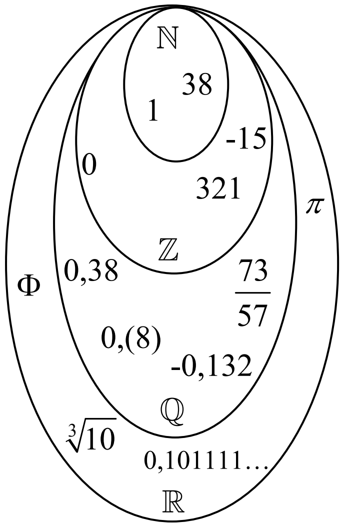
Figura 2.2: A diagonal de um quadrado com 1 m de lado mede $\sqrt{2}$m .

Ao descobrirem que a diagonal de um quadrado de lado 1 não era uma razão entre dois inteiros (em linguagem actual, que a raiz quadrada de 2 é um número irracional) os Pitagóricos consideraram quebrada a harmonia do universo, já que não podiam aceitar a raiz quadrada de dois como um número, mas não podiam negar que esta raiz era a medida da diagonal de um quadrado unitário.

Equações tais como $x^2 = 2$, que não tem solução no conjunto dos números racionais, motivaram a introdução dos números reais: $x = \pm\sqrt{2}$.

Assim, o número $\sqrt{2}$ terá sido o primeiro número irracional[9] com que a humanidade se deparou [3].

O conjunto dos números que inclui os irracionais é o conjunto $\mathbb{R}$. Sob a forma de um diagrama, pode-se representar os vários conjuntos de números e a sua relação de inclusão.



$$\mathbb{N} \subset \mathbb{N}_0 \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

Figura 2.3: Diagrama representativo dos conjuntos numéricos.

Por muitas razões, o conjunto dos números reais, $\mathbb{R}$, teve que ser ampliado mediante a introdução dos números complexos, $\mathbb{C}$.

As novas invenções da Matemática não são o resultado de um esforço individual, mas o desenvolvimento de uma evolução gradual e cautelosa, e que envolveram inúmeros cientistas ao longo dos tempos.

Não obstante, o conjunto dos números reais ainda não é suficiente para resolver alguns tipos de equações quadráticas como, por exemplo: $x^2 = -1$.

Esta equação não tem solução no conjunto dos números reais, pois não há nenhum número que elevado a dois dê um número negativo. Para resolver este tipo de equações foram introduzidos os números complexos. A solução da equação anterior é, neste novo conjunto de números, ditos complexos, $x = i \vee x = -i$, em que $i = \sqrt{-1}$.

Apesar de se provar a existência dos números complexos, eles continuam a ser estranhos para nós, pois têm menos relação com o mundo real que os outros

[9] Ver Apêndice A – Demonstração: $\sqrt{2}$ não é um número racional.

números já nossos conhecidos. Um número imaginário não serve para medir a quantidade de água num copo nem para contar o número de dedos que temos!

No entanto, existem algumas medidas no nosso mundo onde os números imaginários são medidores perfeitos. Um campo electromagnético é um exemplo: tem uma componente eléctrica e outra magnética e por isso, é preciso um par de números reais para o descrever. Este par pode ser visto como um número complexo e encontramos, assim, uma aplicação directa na Física, para a estranha regra da multiplicação de números complexos.

Existem poucas aplicações directas dos números complexos no dia-a-dia. No entanto, há muitas aplicações indirectas. Muitas propriedades dos números reais só se tornaram conhecidas quando estes foram vistos como parte do Conjunto dos Números Complexos. É como tentar perceber uma sombra. Uma sombra pertence a um mundo a duas dimensões. Portanto, só lhe é aplicável conceitos que utilizem duas dimensões. No entanto, pensarmos no objecto de três dimensões que a provoca poderá ajudar-nos a perceber certas propriedades do mundo a duas dimensões, apesar de não haver aplicação directa de um mundo no outro.

Da mesma forma, mesmo não existindo aplicação directa entre o mundo real e os números complexos, estes poderão ajudar-nos a compreender muita coisa do nosso mundo.

A próxima analogia ajudará a perceber melhor. Consideremos a população A com 236 pessoas, das quais 48 são crianças e a população B com 123 crianças em 1234 pessoas. Efectivamente, 48/236 (aprox. 0,2) é maior que 123/1234 (aprox.0,1). Portanto, a população A é mais nova que a população B. Neste exemplo são usadas fracções, números não inteiros, num problema onde não têm significado físico. Não podemos medir populações com fracções; não podemos ter meia pessoa, por exemplo! Os números que têm ligação directa com esta questão são os naturais. As fracções, neste contexto, são tão estranhas como o são os complexos na maioria das medições do mundo real. No entanto, o seu uso servir-nos para melhor entender uma situação do mundo real.

Da mesma forma, o uso dos complexos ajuda-nos a compreender vários acontecimentos que, directamente, só se relacionam com os números reais.

Por exemplo, em Engenharia, é usual ter de se resolver equações da forma $y''+by'+cy=0$, para a função desconhecida y. Uma forma de resolver passa por achar as raízes do polinómio, em r, $2r+br+c=0$. Mas, sucede diversas vezes não conseguirmos achar raízes reais e só encontramos complexas. O que se faz é achar todas as raízes no conjuntos dos números complexos e depois considerarmos apenas aquelas que, afinal, são reais. No início e no fim só consideramos reais mas, pelo meio os complexos foram precisos.

Uma vez que este tipo de equações (chamadas Equações Diferenciais) surgem constantemente em problemas que representam o mundo real, por exemplo em Engenharia, podemos afirmar que os números complexos têm utilidade na nossa vida.

2.2 Teoria dos Conjuntos

Um conjunto é uma colecção de coisas ligadas por uma ou mais propriedades comuns, podem ser maçãs, bolas, pessoas, linhas, pontos, números; é uma colecção de objectos únicos e claramente distintos.

Cantor[10] decidiu que os membros dos conjuntos com que trabalharia seriam todos números, tendo uma propriedade em comum.

Os conjuntos podem ter um tamanho finito ou um tamanho infinito. $\{1,2,3,4,5\}$ é um conjunto finito; $\{\text{Todos os números naturais}\}$ é um conjunto infinito. Foi sobre os conjuntos infinitos que Cantor se debruçou e obteve resultados surpreendentes e contra-intuitivos (perante alguns deles, terá mesmo exclamado "Eu vejo-o, mas não acredito"). As surpresas surgiram quando Cantor decidiu contar o número de elementos de conjuntos infinitos. Para contar conjuntos infinitos, Cantor imaginou uma estratégia engenhosa: comparar os conjuntos que se pretende contar com o conjunto dos números naturais. Cantor procedeu então à comparação do "tamanho" ou cardinalidade dos conjuntos emparelhando os seus elementos. Se cada elemento de um conjunto pudesse ser emparelhado com um único elemento de um outro conjunto, então os conjuntos teriam ambos a mesma cardinalidade.

Ao número de elementos do conjunto dos números naturais Cantor chamou *aleph zero*, que se representa por $\aleph_0$. *Aleph* é a primeira letra do alfabeto hebraico.

[10] Cantor (1845-1918), entre outras grandes contribuições para o desenvolvimento da Matemática, fundou e realizou importantes trabalhos na Teoria dos Conjuntos.

Para distinguir este novo número dos números finitos, ele designou-o como transfinito.

Teriam todos os conjuntos infinitos cardinal $\aleph_0$?

Considerando o conjunto dos números inteiros relativos $\mathbb{Z}$ é possível associar cada número inteiro a um número natural [4].

N^{os} Inteiros	0	1	-1	…	10	-10	…	356	-356	…
N^{os} Naturais	1	2	3	…	20	21	…	712	713	…

Tabela 2.1: Associação dos números inteiros aos números naturais.

Cantor questionou-se se existiriam outros números transfinitos, isto é, será que existem conjuntos infinitos cuja cardinalidade seja maior do que $\aleph_0$?

Aparentemente, parecem existir mais números racionais do que números inteiros, visto os racionais incluírem as fracções. No entanto, Cantor emparelhou os elementos dos dois conjuntos e descobriu que tinham a mesma cardinalidade. Há tantas fracções e números inteiros juntos quantos os números inteiros apenas! Os números racionais são o conjunto de todas as fracções da forma p/q onde p e q são dois naturais quaisquer. Pode-se construir os racionais através da Tabela 2.2:

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**…**
1/2	**2/2**	**3/2**	**4/2**	**5/2**	**6/2**	**7/2**	**8/2**	**…**
1/3	**2/3**	**3/3**	**4/3**	**5/3**	**6/3**	**7/3**	**8/3**	**…**
1/4	**2/4**	**3/4**	**4/4**	**5/4**	**6/4**	**7/4**	**8/4**	**…**
1/5	**2/5**	**3/5**	**4/5**	**5/5**	**6/5**	**7/5**	**8/5**	**…**

Tabela 2.2: Tabela de dupla entrada onde as colunas representam os numeradores e as linhas os denominadores.

Primeiramente pode-se notar que aparentemente há muito mais racionais do que naturais já que entre quaisquer dois naturais consecutivos, encontramos uma infinidade de racionais. Por exemplo: entre 5 e 6 temos todos os números da forma 5+ i/n, para qualquer natural i < n. Se n=10, tem-se:

$$5, \frac{51}{10}, \frac{26}{5}, \frac{53}{10}, \frac{27}{5}, \frac{11}{2}, \frac{28}{5}, \frac{57}{10}, \frac{29}{5}, \frac{59}{10}, 6$$

Observando a tabela dos racionais acima, pode-se esperar que o "tamanho" dos racionais seja igual quadrado do "tamanho" dos naturais, já que o número de elementos numa tabela de dupla entrada é calculado multiplicando-se o número de elementos das linhas pelo das colunas. Esperamos portanto, que a cardinalidade dos racionais seja maior do que a dos naturais. Mais uma outra surpresa do infinito nos aguarda. Seguindo as setas desenhadas na tabela dos racionais, podemos contar todos os racionais, sem perder nenhum. Desta maneira, estabelece-se uma correspondência biunívoca entre os racionais e os naturais. Isto significa que os dois "tamanhos" ou as duas cardinalidades são iguais. Ambos são conjuntos infinitos contáveis.

Antes de se considerar os números reais, que inclui o conjunto dos irracionais, convém referir alguma da teoria que Cantor já tinha à sua disposição na altura.

Em 1844, J. Liouville[11] provou que existem duas categorias de números irracionais: os algébricos e os transcendentes. Um número algébrico é aquele que pode ser raiz de uma equação algébrica; uma vez que existem infinitas equações algébricas, existe também um número infinito de suas raízes, racionais e irracionais. No entanto, há números que nunca podem ser raízes de uma equação algébrica; por exemplo, é impossível formular uma equação algébrica que tenha π como raiz, porque este número só surge através do uso de processos infinitos de análise, nunca através de processos algébricos finitos. As equações não algébricas como por exemplo exponenciais, logarítmicas ou trigonométricas não têm, por regra, raízes que sejam números algébricos. Os números não algébricos denominam-se transcendentes, e os seus representantes mais conhecidos são π e e.

Para comparar a cardinalidade do conjunto dos números inteiros com a dos números reais, Cantor fez a distinção entre os números algébricos e o mais abrangente conjunto dos reais, que comporta também os transcendentes. Primeiro tentou emparelhar os inteiros com os algébricos. Através de um engenhoso método de ordenação das equações algébricas com base nos expoentes dos seus coeficientes, Cantor conseguiu mostrar que as suas raízes, isto é, os números algébricos, podiam ser emparelhados com os números inteiros. Portanto, o conjunto dos números algébricos tem a mesma cardinalidade do dos inteiros.

[11] Liouville (1809-1882), matemático francês, é lembrado particularmente por ter demonstrado a existência de números transcendentes.

Até aqui a procura de um infinito de dimensão superior ao dos inteiros parecia não conduzir a lado nenhum. Todos os conjuntos pareciam ter a mesma cardinalidade, mas Cantor surpreendeu toda a gente - e a si próprio - quando tentou emparelhar o conjunto dos números reais com o dos inteiros e descobriu que era maior, aliás, muito maior! A cardinalidade superior do conjunto dos reais deve-se aos números transcendentes que contém. Quando foram descobertos, pensava-se que estes números eram raros, mas Cantor provou exactamente o contrário: não só eles são comuns, como existem em muito maior quantidade do que qualquer outra espécie de números.

A sua demonstração de que o conjunto dos números reais é "maior" do que o dos inteiros (ou que o dos racionais e até mesmo dos algébricos) é muito simples.

Primeiro, Cantor admitiu que existia uma correspondência perfeita entre todos os inteiros e todos os números reais de 0 a 1. (Se existir uma correspondência entre todos os inteiros e todos os reais de 0 a 1, existirá também uma correspondência entre todos os inteiros e todos os reais positivos). Para fazer esta correspondência, é preciso listar todos os números reais. Cantor assumiu que esta listagem podia ser feita, escrevendo todos esses números sob a forma de dízimas infinitas, como por exemplo:

0,1845306726...
0,2185630901...
0,2712312765...
0,4981212769...
0,7465650987...
0,9398878321...
0,9416665438...
….

Tabela 2.3: Listagem de números sob a forma de dízimas infinitas.

Depois, através de um processo de diagonalização, mostrou que esta lista não contém todos os números reais, isto é, por mais exaustiva que seja a nossa lista, há sempre números reais em falta. Por exemplo, um número real diferente de todos os listados pode ser formado do seguinte modo: escolhendo para primeiro dígito um qualquer diferente do primeiro dígito do primeiro número listado, para segundo dígito um qualquer diferente do segundo dígito do segundo número listado, para terceiro um que seja diferente do terceiro dígito do terceiro número listado, e assim sucessivamente. O número resultante terá de ser diferente de todos os que estão na lista porque difere de cada um deles em pelo menos um dígito - o que significa que ele próprio não está na lista. Assim sendo, a suposição de que todos os números reais podiam ser listados e portanto emparelhados com os inteiros está errada, porque conduz a uma contradição.

Desta forma Cantor provou que o conjunto dos números reais é "maior" do que o conjunto dos números inteiros. Mais, o processo de diagonalização pode ser usado para provar que é sempre possível encontrar conjuntos maiores e maiores - que não existe o conjunto infinito maior de todos. Assim, os números transfinitos (ou ordens de infinito), tal como os números finitos usuais, são infinitos. Cantor chamou a este segundo número transfinito - aquele que representa a cardinalidade dos números reais - C. Ainda não se conseguiu provar se C é mesmo o número transfinito a seguir a $\aleph_0$, ou se existem outros números transfinitos entre eles. Sabe-se, no entanto, que existem números transfinitos maiores do que C [5].

Poder-se-ia pensar, por exemplo, que as teorias de Cantor, que trouxeram soluções para tantos problemas de longa data, teriam sido imediatamente acolhidas entre os grandes triunfos matemáticos do século, se não mesmo de todos os tempos, mas infelizmente não foi assim que aconteceu. Foram desprezadas, ridicularizadas, consideradas até um pouco loucas, e Cantor, esgotado pela terrível contestação, enlouqueceu também.

2.3 A Natureza

A expressão Natureza aplica-se a tudo aquilo que tem como característica fundamental o facto de ser natural: ou seja, envolve todo o ambiente existente que não teve intervenção antrópica. A palavra vem do latim *natura* [6].

O estudo sistematizado dos elementos da Natureza, os seus processos, as actividades e as suas consequências faz-se através das Ciências Naturais.

Uma delas é a Biologia, sendo o estudo dos seres vivos (do grego βιος - bios = vida e λογος - logos = estudo). Debruça-se sobre as características e o comportamento dos organismos, a origem de espécies e indivíduos, e a forma como estes interagem uns com os outros e com o seu ambiente. A Biologia abrange um espectro amplo de áreas académicas frequentemente consideradas disciplinas independentes, mas que, no seu conjunto, estudam a vida nas mais variadas escalas.

Outra Ciência natural que se destaca são as Ciências da Terra (ou Geociências), sendo um termo abrangente aplicado às ciências relacionadas com o estudo do planeta Terra. As principais disciplinas historicamente aplicam conhecimentos de Física, Geografia, Matemática, Química e Biologia de modo a construir um conhecimento quantitativo das principais áreas ou esferas do sistema Terra.

A Física é também uma ciência do mundo natural que trata das componentes fundamentais do Universo, as forças que eles exercem, e os resultados destas forças. O termo vem do grego φύσις (physis), que significa Natureza. Os Físicos estudam uma vasta gama de fenómenos físicos em diversas escalas de comprimento: das partículas sub atómicas das quais toda a matéria é originada até ao comportamento do universo material como um todo (Cosmologia). Como ciência, a Física faz uso do método científico. Baseia-se essencialmente na Matemática e na lógica quando da formulação de seus conceitos.

A Química é a ciência que trata das substâncias da Natureza, dos elementos que a constituem, das suas características, das suas propriedades combinatórias, de processos de obtenção, das suas aplicações e da sua identificação. Estuda a maneira que os elementos se juntam e reagem entre si, bem como, a energia desprendida ou absorvida durante estas transformações. Diferentemente da Física, que se dedica a um estudo integral da matéria, da sua natureza e das leis fundamentais que a regem, o interesse principal da Química é focado na estrutura principal de organização da matéria: o átomo.

Assim, da noção da palavra Natureza, surge um significado mais amplo: a Natureza corresponde ao mundo material e, em extensão, ao Universo físico: toda sua matéria e energia, inseridas num processo dinâmico que lhes é próprio e cujo funcionamento segue regras próprias.

2.4 A relação dos Números com a Natureza

Neste capítulo pretende-se evidenciar a relação inseparável que existe entre os números e a Natureza.

Os números parecem surgir teimosamente em vários fenómenos da Natureza, aguçando a curiosidade de explicar todo o Universo com base na Matemática.

A Natureza é uma fonte inesgotável de números, no entanto, fez-se uma selecção daqueles que mais evidenciam esta relação, sendo eles: o número de Ouro, os números de Fibonacci, o número π (pi) e o número e.

Entre muitos, estes fornecem uma pequena imagem da comparação e da conexão estabelecida com a Natureza.

O número de Ouro é um número irracional misterioso e enigmático que surge numa infinidade de elementos da Natureza na forma de uma razão, sendo considerada por muitos como uma oferta de Deus ao mundo.

Os números de Fibonacci podem ser usados para caracterizar diversas propriedades na Natureza. A sequência de Fibonacci consiste numa sequência de números, tais que, definindo os dois primeiros números da sequência como sendo 1, os números seguintes são obtidos através da soma dos seus dois antecessores. Portanto, os números são: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, ...

O número que só foi chamado pi no século XVIII, inicia-se com o estudo da relação que existe entre o comprimento da curva mais simples que se conhece na Natureza, o círculo, e o seu diâmetro.

O número e, número irracional e transcendente e estreitamente aparentado com o número pi, base da função exponencial, modela fenómenos de importância vital, nos mais variados campos da ciência: físico-químicas, biológicas, económicas, agronómicas, geográficas, médicas e sociais.

2.4.1 O Número de Ouro

O Número de Ouro, também conhecido como rácio dourado, proporção divina ou razão áurea é um dos números mais misteriosos da Natureza. Este número irracional e enigmático surge numa infinidade de elementos da Natureza na forma de uma razão, sendo considerado por muitos uma oferta de Deus ao mundo.

A designação adoptada para este número, Φ (Phi maiúsculo, letra grega), é a inicial do nome Fídias[12] e corresponde a metade da soma da raiz quadrada de cinco com a unidade.

$$\Phi = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \tag{2.1}$$

Tratando-se de um número irracional, a sua dízima é não periódica, sendo o seu valor aproximado dado por Φ= 1,61803398…

Numa primeira análise, este número não parece ter nada de especial, sendo apenas mais um número. As surpresas começam quando se observam as situações em que ele aparece. O primeiro registo conhecido aparece na obra *Os Elementos de Euclides*. Este define aí o que chama de "divisão em extremos" e "rácio médio". Explica tratar-se da divisão de um segmento em duas partes desiguais com uma propriedade particular: o quociente entre o segmento inteiro e a parte maior é igual ao quociente entre as partes maior e menor. Esta proporção corresponde precisamente a Φ, ao Número de Ouro. Assim, quando se aplica o meio proporcional a um dado segmento [AC], obtém-se a proporção de ouro[13], tal que $\overline{AC}/\overline{AB} = \overline{AB}/\overline{BC}$, sendo $\overline{AB}$ o meio proporcional de ouro também conhecido como a secção de ouro, a razão de ouro ou a proporção de ouro.

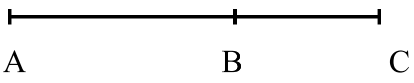


Figura 2.4: Proporção de ouro, sendo $\overline{AC} = 1$

[12] Fídias (490-430 a.C.) escultor, um dos autores do Templo o Parténon de Atenas.

[13] Para determinar o valor da razão de ouro, é necessário resolver a equação $\left(1/x\right) = \left(x/\left(1-x\right)\right)$, sendo $x = \overline{AB}, \overline{AC} = 1$ e $\overline{BC} = \left(1-x\right)$. O valor da razão de ouro, isto é, $\overline{AC}/\overline{AB}$ ou $\overline{AB}/\overline{BC}$, é $\left[\left(1+\sqrt{5}\right)/2\right] \approx 1,6$ .Ver Apêndice B.

O tema foi retomado no século XIII por Leonardo de Pisa, também conhecido por Fibonacci (1175-1250) e por Fra Luca Pacioli[14] (1445-1517), que introduziu a expressão "proporção divina". Só em meados do século XIX aparecem as designações "rácio dourado" e "número de ouro".

Uma construção geométrica muito famosa é a do chamado Rectângulo de Ouro[15]. Trata-se de um rectângulo em que os lados estão na proporção dada pelo número Φ. O Rectângulo de Ouro é um objecto matemático muito interessante e de grande valor estético que existe para além do reino da Matemática (Pappas, 1998).

Presente na arte, na arquitectura, na Natureza e até na publicidade, a sua popularidade não é acidental. Muitos testes psicológicos evidenciaram que o Rectângulo de Ouro é um dos rectângulos mais agradáveis à vista humana.

Os arquitectos da Grécia Antiga, no século V a.C., tinham consciência do seu efeito harmonioso. O Parténon é um exemplo de uma das primeiras utilizações do Rectângulo de Ouro na arquitectura. Os gregos da antiguidade conheciam a proporção de ouro, como obtê-la, como conseguir uma aproximação conveniente e como a utilizar na construção do Rectângulo de Ouro. Não foi por acaso que a proporção de ouro, Φ, foi designada segundo o nome de Fídias, famoso escultor grego. Julga-se que Fídias terá usado a proporção de ouro e o Rectângulo de Ouro nos seus trabalhos.

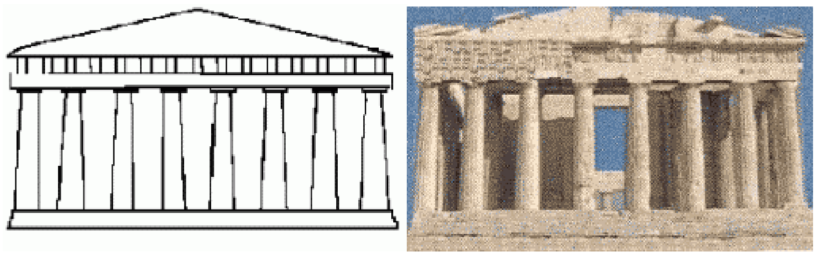


Figura 2.5: A planta do Parténon mostra que o templo foi construído tendo por base um Rectângulo de Ouro.

[14] Frade Luca Bartolomeo de Pacioli (1445-1517), monge franciscano, foi um famoso matemático italiano. É considerado o pai da contabilidade moderna.

[15] Ver Apêndice C.

Para além de influenciar a arquitectura, o Rectângulo de Ouro surge também na arte. No tratado de *De Divina Proportione,* de Luca Pacioli, publicado em 1509, Leonardo da Vinci mostrou como a proporção de ouro se encontra relacionada com a estrutura do corpo humano. Nos seus estudos de Anatomia, trabalhou com um modelo padrão (o *canon*) para a forma de um ser humano, utilizando Vitrúvio como modelo. A gravura abaixo foi analisada detalhadamente, tendo-se constatado que ilustra a utilização da secção de ouro. A notação a:b=c:d é uma proporção.

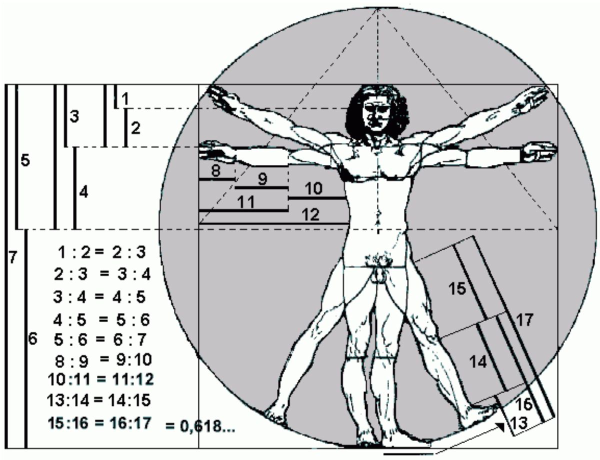


Figura 2.6: O Homem Vitruviano, de Leonardo da Vinci. As ideias de proporção e simetria aplicadas à concepção da beleza humana.

O ser humano também se adapta às dimensões áureas.

Neste mesmo livro de Luca Pacioli, são apresentados exemplos fascinantes da proporção de ouro nas geometrias plana e sólida. A figura seguinte mostra um desses exemplos, no qual três rectângulos de ouro se intersectam simetricamente e, cada um deles, perpendicularmente aos outros dois.

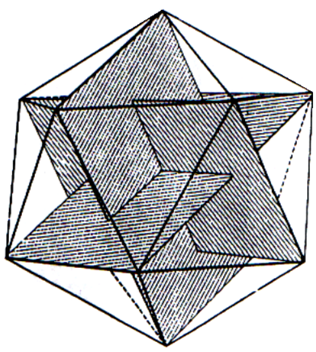


Figura 2.7: Os vértices dos três rectângulos coincidem com os dozes vértices de um icosaedro regular.

A excelência dos desenhos de Leonardo da Vinci revela os seus conhecimentos matemáticos bem como a utilização da proporção de ouro como garantia de uma perfeição, beleza e harmonia únicas. É lembrado como matemático apesar da sua mente irrequieta não se concentrar na aritmética, álgebra ou geometria o tempo suficiente para fazer uma contribuição significativa. Representa bem o homem tipo da renascença que fazia de tudo um pouco sem se fixar em nada. Leonardo da Vinci era um génio de pensamento original que usou exaustivamente os seus conhecimentos de Matemática nas suas obras de arte.

Na Mona Lisa observa-se a proporção de ouro em várias situações. Por exemplo, ao construir um rectângulo em torno de seu rosto, veremos que este possui a proporção do Rectângulo de Ouro. Pode-se também subdividir este rectângulo usando a linha dos olhos para traçar uma recta horizontal e ter de novo a proporção de ouro.

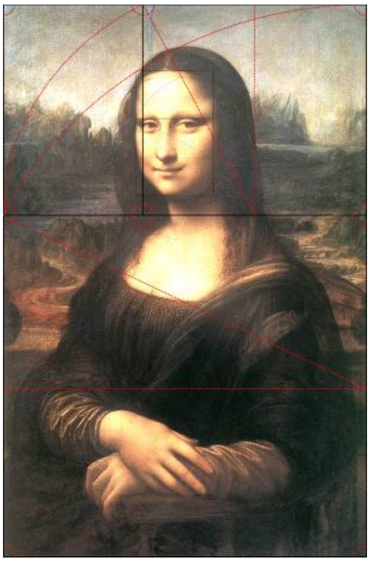


Figura 2.8: Retrato de Mona Lisa (1479-1528), também designada de Gioconda, esposa de Francesco del Giocondo. Pintado por Leonardo da Vinci (1452-1519).

A proporção de ouro encontra-se igualmente presente num trabalho inacabado, S. Jerónimo, pintado por volta de 1483. A figura de S. Jerónimo inscreve-se perfeitamente num Rectângulo de Ouro que pode ser sobreposto ao desenho. Admite-se que tal não tenha sucedido por acaso, mas porque Leonardo da

Vinci construiu a figura deliberadamente de acordo com a secção de ouro, devido ao seu grande interesse pela Matemática e pela utilização desta em muitos dos seus trabalhos e ideias.

Segundo as palavras do próprio, "*...nenhuma investigação humana pode ser considerada ciência se não abrir o seu caminho por meio da exposição e da demonstração matemáticas.*"

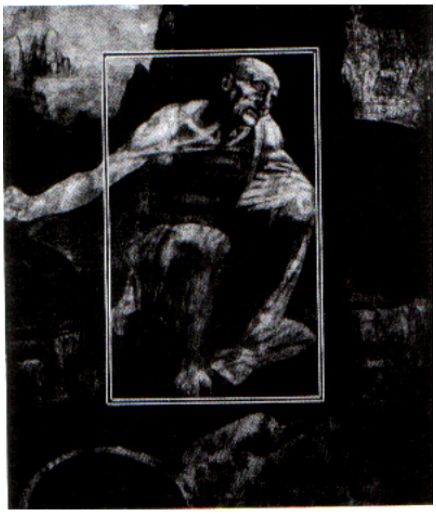


Figura 2.9: S. Jerónimo, de Leonardo da Vinci, cerca de 1483.

A utilização desta proporção na arte veio a ser designada como a técnica da simetria dinâmica. Albrecht Dürer, George Seurat, Pietter Mondrian, Leonardo da Vinci, Salvador Dali e George Bellows usaram, todos, o Rectângulo de Ouro em alguns dos seus trabalhos, para criar simetria dinâmica.

Na Figura 2.10 são destacados três rectângulos de ouro.

Figura 2.10: Os Banhistas (1859-1891), do pintor impressionista francês George Seurat.

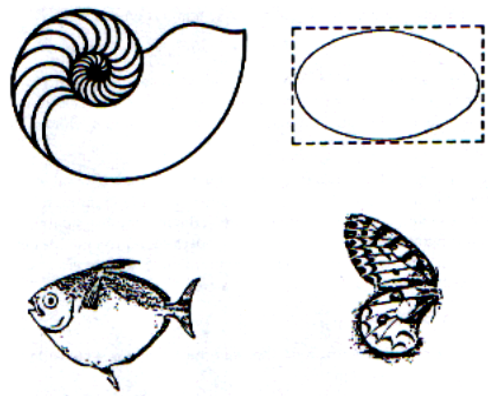


Figura 2.11: A simetria dinâmica da concha do náutilo, do ovo, do sargo e da asa de uma borboleta.

Uma das ocorrências mais espantosas do Número de Ouro encontra-se na disposição das pétalas das rosas. Elas separam-se por ângulos que são fracções de Φ. Essa disposição permite arranjar as pétalas de forma compacta e maximizar a sua exposição à luz.

O Número de Ouro fascinou os matemáticos pela sua extraordinária presença nas várias facetas da Natureza.

Actividade nº1

O Número Misterioso!!!

Introdução

Nesta actividade vais conhecer mais um exemplo de um número irracional que é considerado misterioso e enigmático.

Ele está presente em muitos elementos da Natureza desde o corpo humano a animais e plantas...

Ele aparece, ainda, na arte e na arquitectura.

Que nome terá esse número tão misterioso?

Qual a sua origem?

Em que situações está presente esse número, quer nos tempos mais antigos, quer nos mais actuais? (Observa as figuras abaixo)

Como foi descoberto? Quem o descobriu?

Como podes TU descobri-lo?

Parte à descoberta desse misterioso número!

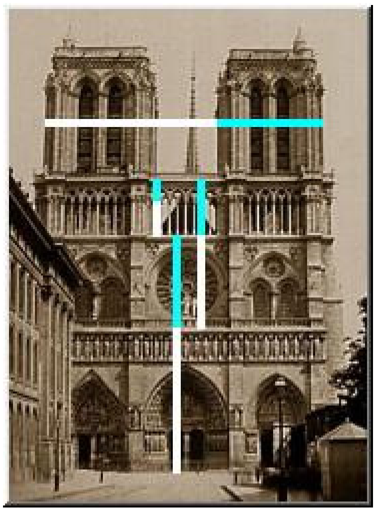


Figura 2.12:Catedral de Notre-dame.

Figura 2.13: Edifício da era moderna.

Tarefa

O número é conhecido pelo Número de Ouro. Associado a este número aparece um rectângulo considerado perfeito: o Rectângulo de Ouro! Porque se chama assim?

Para o descobrires vais ter de realizar uma tarefa...

...a tarefa é elaborar um poster, de forma criativa e original, sobre o número irracional denominado de número de ouro,...

...esse poster deve ter a forma de um rectângulo de ouro.

Nele deve constar:

- o que é o número de ouro;
- qual o seu valor numérico;
- a sua história;
- qual e porquê a designação para o número de ouro;
- como se constrói um rectângulo de ouro;
- exemplos de objectos do dia-a-dia que correspondem a rectângulos de ouro.

Processo

Para levares a cabo a tarefa proposta, segue as seguintes etapas recorrendo a sites disponíveis na Internet, que podes visitar e onde podes retirar toda a informação necessária.

Escolhe um colega para trabalhar contigo.

Lê com atenção os seguintes passos:

Começa por fazer uma pesquisa sobre o que são números irracionais e a sua origem;

Se quiseres podes consultar estas páginas:

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/numirra.htm

http://www.imagick.org.br/pagmag/themas2/piwalguir.html

Agora que já sabes o que são números irracionais vais passar a outra etapa.

Faz uma pesquisa sobre o número irracional conhecido como número de ouro.

Procura informação nos seguintes sites:

http://www.cs.arizona.edu/icon/oddsends/phi.htm
http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/ouro.htm
http://www.apm.pt/pa/index.asp?accao=showtext&id=2674

O número de ouro surge-nos em elementos da Natureza, na arte e arquitectura, em objectos do dia-a-dia, etc.

Agora vais procurar:

- elementos da Natureza onde está presente o número de ouro;
- obras de arte e de arquitectura que correspondem a rectângulos de ouro;
- objectos do teu quotidiano que correspondam a rectângulos de ouro.

Procura informação em:

http://www.apm.pt/pa/index.asp?accao=showtext&id=2674
http://www.geocities.com/templosalomao/egipcios.htm
http://mat.no.sapo.pt/investigar.htm
http://www.evolutionoftruth.com/goldensection/life.htm
http://www.evolutionoftruth.com/goldensection/neophite.htm
http://www.evolutionoftruth.com/goldensection/goldsect.htm
http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/curiosidouro.htm

É hora de mudar de etapa.

Começa por organizar toda a informação recolhida;

Elabora um pequeno dossier informativo;

Faz a lista de todo o material de que vais precisar;

Está na hora de começares a idealizar o teu poster. Escolhe as imagens e os conteúdos. O teu poster deverá ser um rectângulo de ouro. Que dimensões poderá ter?

Mãos à obra!

Avaliação

Vais agora fazer uma auto-avaliação do trabalho desenvolvido. Para tal, propomos-te seguir as seguintes questões:

- Conseguiste recolher informação necessária para responder às questões que te foram colocadas no processo?
- Organizaste convenientemente a informação para a apresentação do trabalho?
- O dossier contém todos os materiais que pesquisaste?
- Todos os colegas do teu grupo colaboraram de igual forma no desenrolar do processo?

O teu trabalho vai ser avaliado de acordo com os seguintes parâmetros:

Dossier

	Não satisfaz	**Satisfaz**	**Bom**
Informação Recolhida	Não conseguiste recolher o que te era pedido	Tudo o que te foi pedido foi encontrado	Tudo o que te foi pedido foi encontrado e analisado de forma correcta
Organização da Informação	Não organizaste devidamente a informação	Organizaste a informação de uma forma lógica	Boa organização, com lógica e explícita
Apresentação	Não conseguiste apresentar um dossier devidamente organizado	O teu dossier está bem organizado, tem a informação essencial e tem uma apresentação atractiva	Conseguiste elaborar um dossier: organizado, bem apresentado, original e bastante atractivo

Trabalho de Grupo

	Não satisfaz	Satisfaz	Bom
Desempenho no trabalho de grupo	Não tiveste uma atitude positiva e não colaboraste com os teus colegas	Tiveste uma atitude positiva, procuraste dinamizar o grupo, favoreceste a partilha de opiniões	Assumiste um papel liderante, procuraste integrar todas as opiniões, dinamizaste e incentivaste o grupo a atingir o seu objectivo

Produto Final – Poster

	Não satisfaz	Satisfaz	Bom
Elaboração do cartaz	Poster mal construído, espaço mal distribuído, pouca originalidade	Boa construção do poster, espaço bem distribuído, trabalho original	Trabalho muito original, com uma apresentação exemplar

Conclusão

Ora então chegamos ao fim?

A partir de agora quando ouvires palavras como: número de ouro, rectângulo de ouro, Fídeas, etc. vais estar dentro do assunto, de certeza, não?

2.4.2 A Sucessão de Fibonacci

Um dos grandes nomes da Matemática, que surge inevitavelmente, quando se fala da ligação da Matemática com a Natureza é o de Fibonacci[16].

Figura 2.14: Fibonacci (1175-1250).

Fibonacci foi um dos mais importantes matemáticos da Idade Média e prestou valiosos contributos para os campos da aritmética, da álgebra e da geometria. O seu nome de baptismo era Leonardo de Pisa (1175-1250) e era filho de um mercador italiano colocado em Bougie[17], no norte de África. A profissão do pai exigia que este viajasse por diversas cidades entre o Próximo e o Médio Oriente nas quais Fibonacci se familiarizou com o sistema decimal hindu-árabe, que tinha valor posicional e usava o símbolo zero. Nesta altura, em Itália, ainda era usada a numeração romana nas operações de cálculo. Fibonacci apercebeu-se do valor e da beleza dos numerais hindu-árabes e defendeu fortemente a sua adopção. Em 1202, escreveu o *Liber Abaci,* um manual completo explicando como utilizar aqueles numerais nas operações de adição, subtracção, multiplicação e divisão, indicando como resolver problemas e abordando ainda diversos temas de álgebra e de geometria. Os mercadores italianos mostraram-se relutantes em modificar os seus processos tradicionais mas, através de um contacto permanente com os Árabes e dos trabalhos de Fibonacci e de outros matemáticos, o sistema hindu-árabe acabou por ser introduzido e progressivamente aceite na Europa.

[16] Literalmente, Fibonacci significa filho de Bonacci.

[17] Actualmente conhecida por Béjaia.

O nome de Fibonacci encontra-se ligado a uma famosa sucessão numérica.

$$\begin{aligned} x_1 &= x_2 = 1 \\ x_n &= x_{n-1} + x_{n-2} \end{aligned} \qquad (2.2)$$

Cada termo da sucessão de Fibonacci é igual à soma dos dois termos anteriores. Os primeiros termos são, portanto:

Sucessão de Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

É irónico que Fibonacci seja hoje famoso devido a uma sequência numérica que resultou de um obscuro problema existente no seu livro, o *Liber Abaci.* Na altura em que escreveu o problema, considerou-o apenas como um exercício mental. No entanto, no século XIX, quando o matemático francês Edouard Lucas[18] editou um trabalho em quatro volumes sobre Matemática recreativa, ligou o nome de Fibonacci à sequência numérica que era a solução do problema do *Liber Abaci*.

O problema que dá origem à sucessão de Fibonacci é o seguinte:

1) Suponha-se que um casal de coelhos com um mês de idade (macho e fêmea) é ainda muito jovem para se reproduzir, mas que, com dois meses de idade, já têm maturidade suficiente para o fazer. Admita-se igualmente que todos os meses, a partir dos dois meses de idade, dão origem a um novo casal de coelhos (macho e fêmea).

2) Se todos os casais de coelhos se reproduzirem da mesma forma que o primeiro, quantos casais de coelhos haverá no princípio de cada mês?

[18] Edouard Lucas (1842-1891), matemático francês, foi o criador do famoso jogo matemático Torre de Hanoi.

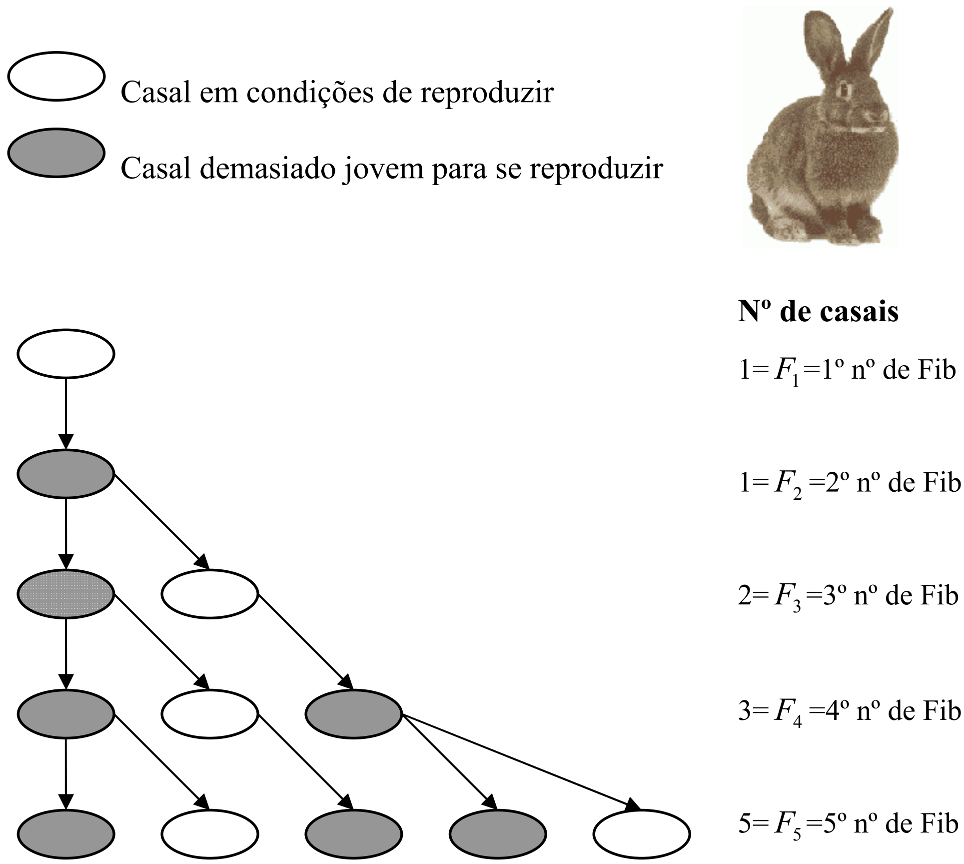


Figura 2.15 : Ilustração do problema que dá origem à sucessão de Fibonacci.

Para resolver este problema é preciso prestar atenção ao processo de procriação do par inicial de coelhos. Suponha-se que o primeiro par de coelhos nasceu no dia um de Janeiro. No dia um de Fevereiro, isto é, decorrido um mês, ainda não serão férteis. Porém, no dia um de Março já terão descendentes, e neste mês teremos um total de dois pares de coelhos. No dia um de Abril, esse segundo casal de coelhos não será ainda fértil, mas o casal inicial de coelhos voltará a ter coelhinhos, e no quarto mês teremos um total de três casais de coelhos. Dois dos quais serão férteis no dia um de Maio. Por conseguinte, para o quinto mês existirão cinco casais.

Raciocinando de modo semelhante, obtém-se que para o dia um de Junho ter-se-ão 8 casais de coelhos, para o um de Julho 13 casais, para um de Agosto 21 casais, e assim sucessivamente.

Ao cabo de um ano, isto é, no dia um de Janeiro do próximo ano, prevê-se 144 casais de coelhos.

Fibonacci não estudou na altura a sucessão resultante e não lhe foi atribuído nenhum significado especial senão no século XIX, quando alguns matemáticos se mostraram intrigados com ela, com as suas propriedades e com as áreas onde surge.

A ocorrência da sucessão de Fibonacci na Natureza é tão frequente que é difícil acreditar que é acidental.

Considera-se a lista das seguintes flores que apresentam como número de pétalas um número de Fibonacci: jarro, rosa silvestre, tormentilha, cosmo, rainúnclo amarelo, columbiana, flor-de-lis e íris.

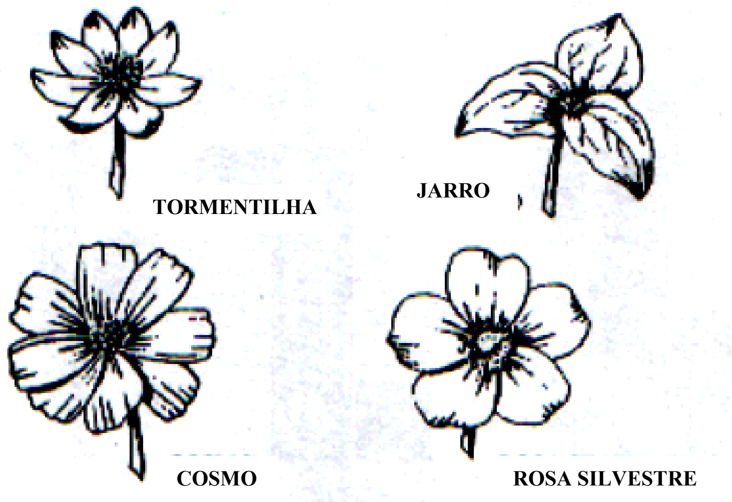


Figura 2.16: Flores que apresentam como número de pétalas um número de Fibonacci.

O áster, o cosmo e o malmequer são flores que apresentam como número de sépalas ou estames um número de Fibonacci.

Os seguintes números de Fibonacci são frequentemente associados com as pétalas de:

3	lírios e íris
5	columbinas, rainúnclos amarelos e esporas
8	delfínios
13	crisântemos
21	asteráceas
34, 55, 84	malmequeres

Certas plantas mostram os números de Fibonacci no crescimento de seus galhos. Suponha-se que nasce um novo broto de um galho a cada mês, sendo que um broto leva dois meses para produzir o seu primeiro broto.

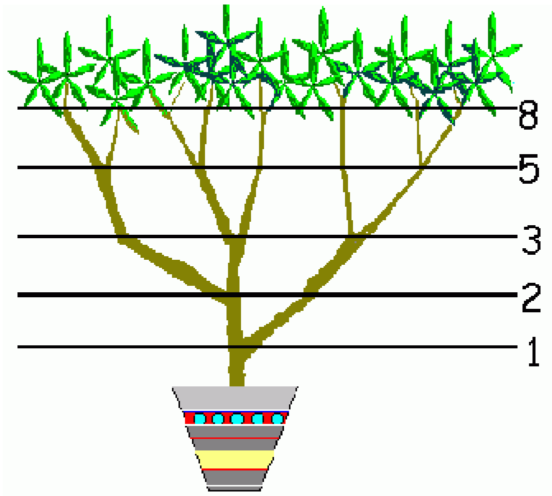


Figura 2.17: Os números de Fibonacci no crescimento dos galhos.

Existem várias plantas cujo crescimento se parecem com o descrito na Figura 2.17. A planta Achillea ptarmica possui estas características. Outras plantas que crescem de forma semelhante são a espirradeira e a cevadilha.

Os números de Fibonacci também são encontrados em arranjos de folhas (Filotaxia[19]). Considere-se que existe um padrão helicoidal (para a esquerda ou para a direita) para as folhas em torno do caule. Cada conjunto de 3 folhas consecutivas (1, 2, 3) nascem formando um mesmo ângulo entre 1 e 2 e entre 2 e 3, mantendo uma certa distância ao longo do caule. Na Figura 2.18, a folha 3 forma um mesmo ângulo com 2 da mesma forma que a folha 2 forma com 1. Admite-se o mesmo padrão para todas as folhas restantes. Neste exemplo, tem-se 5 folhas e 2 voltas. Cada volta é entendida como uma rotação de 360º para que uma folha possa se sobrepor à outra. Para que isto ocorra cada ângulo deverá ser igual a $2 \times 360^{o} \div 5 = 144^{o}$.

[19] Filotaxia é o padrão de distribuição das folhas ao longo do caule das plantas. (in Wikipédia, Enciclopédia Livre)

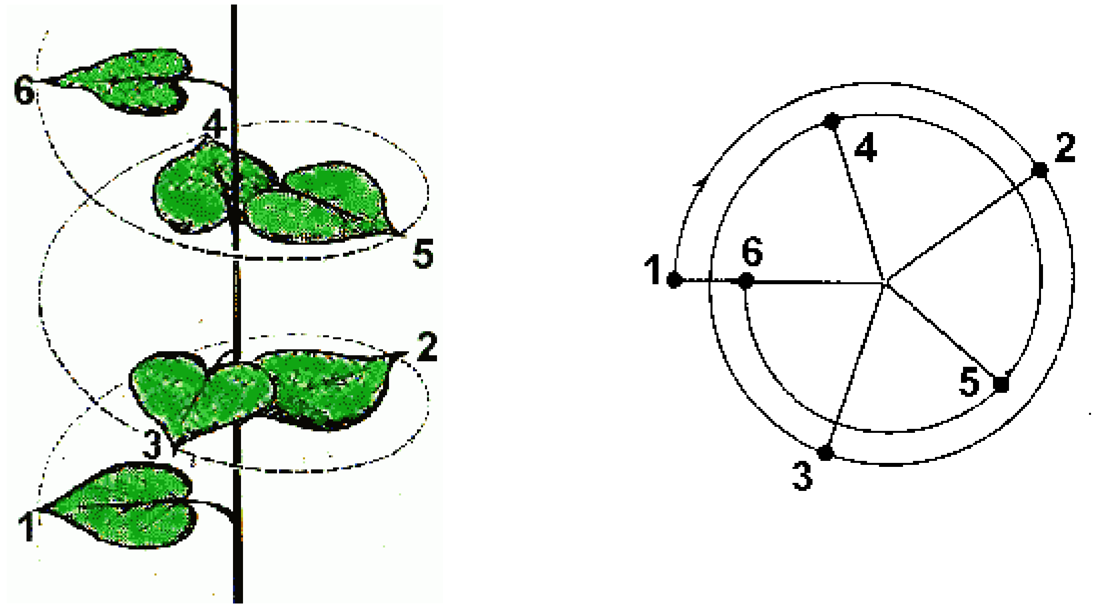


Figura 2.18: Ilustração de como se distribuem as folhas ao longo do caule de certas plantas (Filotaxia).

Identifique-se o período *p* como o número de voltas necessárias até nascer uma nova folha se sobrepondo à primeira e *m* indicará o número de folhas por período, neste caso, $p = 2$ *e* $m = 5$. Muitas experiências com plantas mostram que *p* e *m* assumem mais comummente valores como 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., que são os números da sequência de Fibonacci. Existem também excepções, mas os números de Fibonacci ocorrem tão frequentemente que não podem ser explicados como casuais. Os biólogos tentaram explicar a predominância dos números de Fibonacci na Filotaxia. A simetria das folhas pode dar equilíbrio ao caule e também facilitar a exposição à luz, mas a ciência está longe de uma explicação satisfatória.

Pode-se analisar o cone de um pinheiro e observar as pétalas que se formam no mesmo. Pode-se observar a formação de dois tipos de espirais, para a esquerda e para a direita. Tais espirais são do mesmo tipo que aquelas estudadas antes. O número de pétalas quase sempre segue os números de Fibonacci. Normalmente um cone de pinheiro possui a espiral apoiada em quadrados iniciais com lados iguais a 5 e 8 ou 8 e 13. As folhas das violetas africanas seguem o padrão de Fibonacci. Uma grande quantidade de flores segue um padrão semelhante ao padrão da sequência de Fibonacci.

Por exemplo, selecciona-se uma folha qualquer numa haste e atribui-se o número zero. A seguir, conta-se o número de folhas, assumindo que nenhuma se partiu, até chegar à que está com a mesma orientação que a folha zero. É natural que o número total de folhas seja um número de Fibonacci, assim como o número de voltas da espiral que se percorreu até chegar à última folha. A razão entre o número de folhas e o número de voltas da espiral é denominada razão de filotaxia (de uma palavra grega que significa arranjo das folhas). Acontece que a maioria destas razões corresponde a números de Fibonacci.

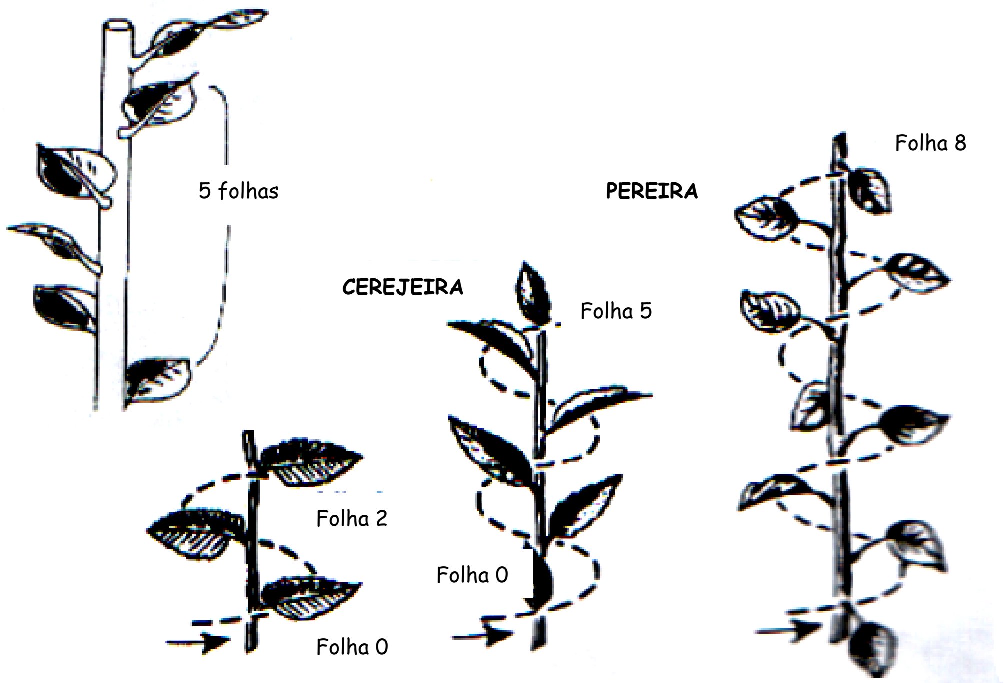


Figura 2.19: O número de voltas da espiral que se percorre até chegar à última folha é um número Fibonacci.

Os números de Fibonacci são por vezes apelidados de números das pinhas porque existe a tendência para o aparecimento, nas pinhas de termos consecutivos nas espirais para a esquerda e para a direita. No capítulo do girassol acontece o mesmo fenómeno com as sementes. Além disso, podem encontrar-se alguns números que são números de Lucas consecutivos.[20]

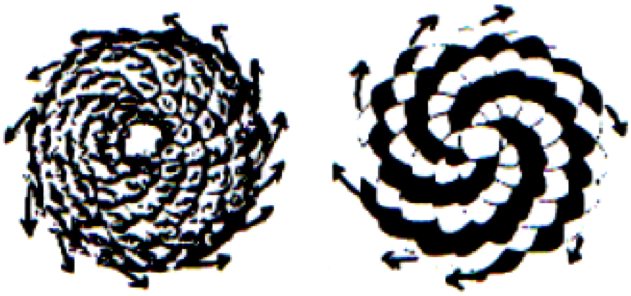


Figura 2.20: 8 espirais para a direita e 13 para a esquerda.

Figura 2.21:Capítulo do girassol com sementes.

O ananás é outra planta onde se observam números de Fibonacci. Para este fruto, conta-se o número de espirais formadas pelas escamas hexagonais da sua casca.

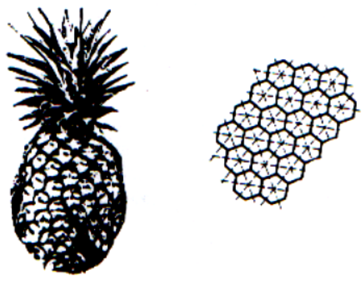


Figura 2.22: O ananás.

[20] Os números de Lucas formam uma sucessão semelhante à de Fibonacci. Os dois primeiros termos são 1 e 3, sendo os termos seguintes obtidos pela soma dos dois termos anteriores. Assim, a sucessão de Lucas é 1 ,3, 4, 7, 11, … O nome é devido a Edouard Lucas, o matemático do século XIX que atribuiu o nome à sequência de Fibonacci e que estudou sucessões formadas por processos de recorrência.

Outra maneira de mostrar a relação entre as duas sucessões é a seguinte:

0 1 1 2 3 5 8 13

1 3 4 7 11 18 …

Na Natureza há espirais. Estas são formas que aparecem em muitas facetas da Natureza, por exemplo em videiras, conchas, tornados, furacões, pinhas, na Via Láctea e em redemoinhos de água (Pappas, 1998). Algumas delas estão relacionadas com o número de ouro. É o caso da espiral de Fibonacci que é obtida usando o seguinte processo:

Anexa-se dois quadrados com $lado = 1$, tem-se um rectângulo 2×1, sendo o lado maior igual à soma dos lados dos quadrados anteriores. Anexa-se agora outro quadrado com $lado=2$ (o maior lado do rectângulo 2×1) e tem-se um rectângulo 3×2. Continuando a anexar quadrados com lados iguais ao maior dos comprimentos dos rectângulos obtidos no passo anterior. A sequência dos lados dos próximos quadrados é: 3, 5, 8, 13, ... que é a sequência de Fibonacci.

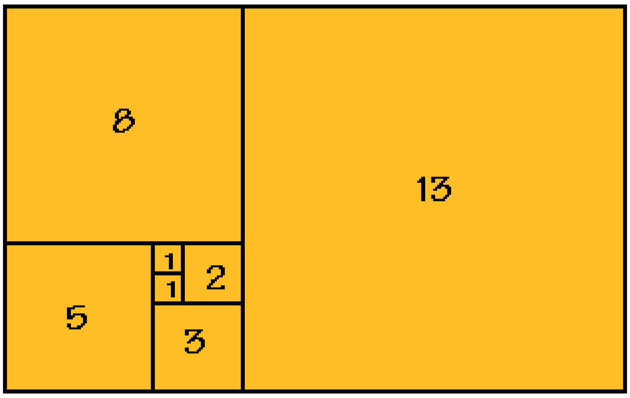


Figura 2.23: Sequência de Fibonacci presente nos sucessivos lados dos quadrados.

Usando um compasso, traça-se um quarto de círculo no quadrado de lado $l = 13$. De acordo com o desenho, traça-se quartos de círculos nos quadrados de lado $l = 8$, $l = 5$, $l = 3$, $l = 2$, $l = 1$ e $l = 1$.

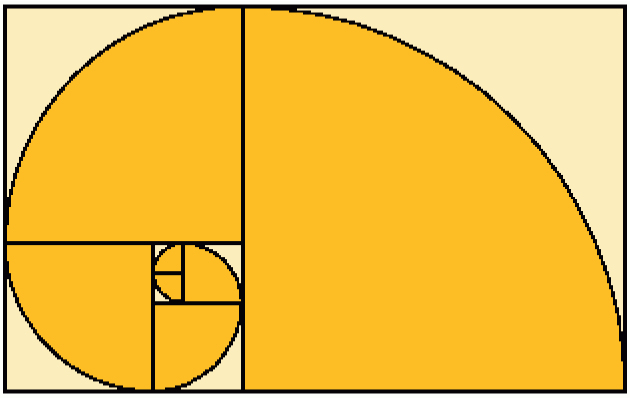


Figura 2.24: Espiral de Fibonacci.

Com as concordâncias dessas curvas, obtém-se uma espiral; a espiral de Fibonacci.

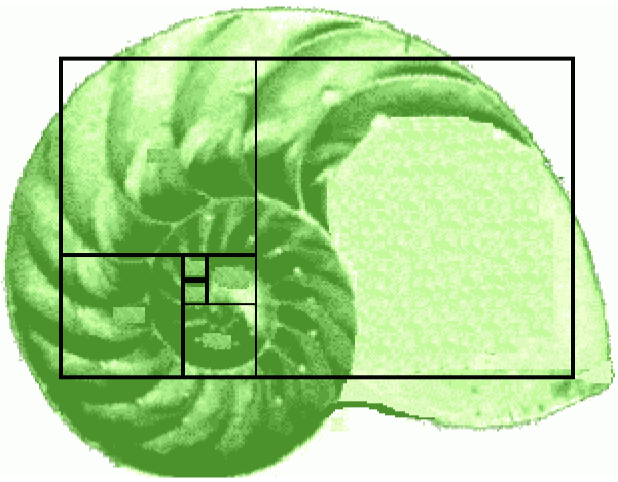


Figura 2.25: A espiral de Fibonacci presente no Nautilus marinho.

A sucessão de Fibonacci e a razão de ouro estão relacionadas. Considere-se a sucessão formada pelas razões entre números de Fibonacci consecutivos:

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots,\ \ldots,\ \frac{F_{n+1}}{F_n},\ \ldots$$

Ou na forma de dízima,

1; 2; 1,5; 1,6…; 1,625…; 1,6153…; 1,619…; 1,6176…; 1,618182…; 1,617978…; 1,618056…; 1,618026…; 1,618037…; 1,618033…

Então $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ aproxima-se cada vez mais de $\Phi \approx 1,618033989...$, isto é:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\Phi \qquad (2.3)$$

Os seus termos são alternadamente maiores ou menores que a razão de ouro, Φ. O limite desta sucessão é Φ. Esta relação implica que sempre que a razão de ouro, o Rectângulo de Ouro ou a espiral equiangular aparecem, nomeadamente nos fenómenos naturais, está também presente a sucessão de Fibonacci, e vice-versa.

Sendo assim, estes dois assuntos estão relacionados e sempre atraíram matemáticos, cientistas, artistas, etc. Em Portugal não se fugiu à regra. Vasco Graça Moura, na sua obra *"Camões e a Divina Proporção"* (1994), defendeu a utilização do rácio dourado por Luís de Camões. Na arte portuguesa, ao visitar o Tribunal de Contas de Lisboa, pode-se ver um painel de Almada Negreiros[21] dedicado a estes temas – "O Número".

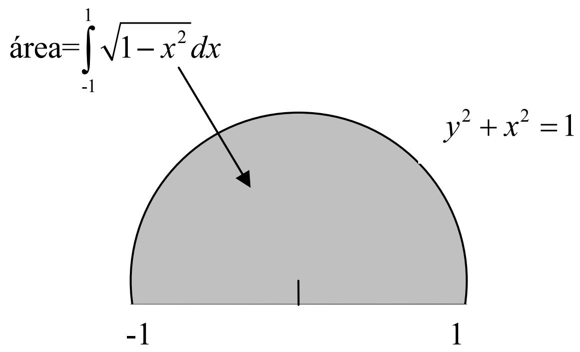
Figura 2.26: "O Número" (1958).

[21] José Sobral de Almada Negreiros, escritor e artista plástico, nasceu em 1893 e faleceu em 1970.

2.4.3 O número π

"Provavelmente, nenhum símbolo matemático evocou tanto mistério, romantismo, falsas concepções e curiosidade humana como o número pi (π)." (William L. Schaff)

O número π é definido como duas vezes a área de um semi-círculo de raio 1 (Spivak, 1994).



Por definição: $\pi = 2\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$

$$r=1$$
$$y^2+x^2=1$$
$$y=\sqrt{1-x^2}$$

Figura 2.27: Definição geométrica de π.

O número π está relacionado com o círculo, nomeadamente, através das fórmulas para o cálculo do seu perímetro e área:

$$P = 2\pi r$$

onde r = raio da circunferência

$$A = \pi r^2$$

O círculo é a forma mais simples do Universo (Blater, 2001). A forma circular aparece constantemente na Natureza ou embelezando as construções.

No nosso mundo de instrumentos precisos de alta tecnologia, onde se garante o alcance da perfeição, é difícil admitir que não se consegue resolver um problema tão simples como o de dividir o comprimento da circunferência pelo seu diâmetro. No entanto, este valor, representado pelo símbolo π, intrigou os matemáticos durante quase quatro mil anos, originando mais interesse, consumindo, relativamente a qualquer outro número, mais energia intelectual, e enchendo mais cestos de papéis com teorias refutadas.

É claro que, com uma lata e um pedaço de fio, pode determinar-se que o perímetro do círculo é um pouco maior do que o triplo do seu diâmetro. Com um bom instrumento de medição, que permita leituras com a precisão de décimos de milímetro, até se pode verificar que a razão está mesmo acima de 3,1415, a menos de uma décima de milésima. Existem métodos para calcular o valor da razão com maior precisão, possibilitando achar 3,141592653…, em que cada algarismo representa um valor dez vezes mais preciso que o anterior. No entanto, por mais que se esforce a calcular e por mais hábil que se seja a descobrir novas técnicas de medida, nunca se conseguirá encontrar o valor exacto de pi.

Qual é, então, a natureza de π?

Embora os matemáticos acreditassem, durante séculos, que o número π era irracional (insusceptível de ser expresso por meio de uma razão), foi apenas em 1761 que Johann Heinrich Lambert[22] demonstrou este facto de forma conclusiva. O seu método, embora complexo, acaba por reduzir-se ao seguinte argumento: começou por demonstrar que, se x era um número racional, então $tg(x)$ teria de ser irracional; segue-se que, se $tg(x)$ é racional, x tem de ser irracional. Como $tg(\pi/4)$ é igual a 1, então $\pi/4$ (e portanto π) tem de ser irracional.

Alguns matemáticos consideraram que a demonstração de Lambert não era suficientemente rigorosa, mas A. M. Legendre[23], em 1794, descobriu outra que os satisfez. Para além do mais, demonstrou também que π^2 era igualmente irracional.

Quando se tem um número racional, uma das perguntas que se pode formular a seu respeito é muito reveladora do seu carácter: "poderá ser expresso por uma

[22] Johann Heinrich Lambert (1728-1777), matemático de origem francesa radicado na Alemanha.

[23] Adrien Marie Legendre (1752-1833) foi um matemático francês.

equação polinomial?" Uma equação polinomial pode sempre tomar a forma de $a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$, sendo n um número finito e todos os coeficientes (a_1, a_2, etc.) números racionais. Note-se que um número pode ser irracional e, mesmo assim, ser expresso de forma polinomial. Por exemplo, $\sqrt{2}$, que é irracional, pode ser facilmente expresso na forma $x^2 - 2 = 0$. Legendre pressentia que π não poderia ser reduzido a esta forma, mas não conseguiu demonstrá-lo e acabou por morrer sem disso ter a certeza. Na verdade, foi só em 1840, sete anos após a morte de Legendre, que Joseph Liouville demonstrou de facto que os números deste tipo – denominados números transcendentais – realmente existem.

Seguidamente, em 1873, Charles Hermite[24] demonstrou rigorosamente que o número e é transcendental. Isto veio a exaltar ainda mais os meios matemáticos, atiçando a discussão sobre o facto de π ser ou não, também, verdadeiramente, transcendental. Ferdinand von Lindemann[25] demonstrou-o nove anos mais tarde. A sua demonstração apoiou-se em bases construídas durante duzentos anos sobre valiosos contributos alcançados pela Matemática. Especificamente, Hermite tinha provado que o número e era transcendental, ou seja, que não existe nenhuma equação $ae^m + be^n + ce^p + ... = 0$, em que os coeficientes $a, b, c, ...$ e os expoentes $m, n, p, ...$ sejam números racionais. Lindemann demonstrou então o teorema mais geral segundo o qual $a, b, c, ...$ e $m, n, p, ...$ também não podiam ser números polinomiais, nem sequer não reais. Isto significa que $e^{ix} + 1 = 0$ não tem solução se x for um número polinomial (sabe-se que i é polinomial). Contudo, Eüler já tinha estabelecido a equação $e^{i\pi} + 1 = 0$. Logo, π não pode ser polinomial e, portanto, tem de ser transcendental.

É pela razão existente no círculo que o pi é melhor conhecido; no entanto ele surge na Matemática, Física, Estatística, Engenharia, Arquitectura, Biologia, Astronomia e até nas Belas Artes. O pi encontra-se escondido nos ritmos das ondas sonoras e das ondas dos mares, revela-se ubíquo na Natureza e na geometria.

Existem poucas dúvidas de que, se se conhecesse melhor este número, se se pudesse descobrir uma regularidade na sucessão dos seus algarismos ou um

[24] Charles Hermite (1822-1901) foi um matemático francês.

[25] Ferdinand von Lindemann (1882-1939) foi um matemático alemão.

conhecimento mais profundo do porquê da sua presença em aspectos que à partida parecem não estar relacionados com ele, então ter-se-ia um conhecimento mais aprofundado da Matemática e da física do nosso universo. No entanto, o número nunca revelou o seu jogo, cedendo pouco campo à batalha da compreensão humana.

Actividade nº2

História do Número π (pi)

Tarefa

Através dos recursos apontados encontra informação para responder às questões:

- O que é o π ?
- Em que civilização surgiu o π ?
- Como foi encontrado o seu valor?
- Para que serve este valor?
- Quantos dígitos tem?

Recursos

Utiliza os recursos a seguir apresentados. Pede ajuda aos funcionários para acederes à Internet, se não souberes, ou para consultares os manuais e enciclopédias.

http://www.apm.pt/pa/index.asp?accao=showtext&id=2404
http://alunos.cc.fc.ul.pt/~l19660/
http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm17/pi.htm

- Manuais de Matemática do 6º ano
- Enciclopédias e dicionários

O trabalho pode ser feito em grupo ou individualmente.

Procedimento

1- Depois de recolheres a informação, faz resumos e explica por palavras tuas as respostas às questões colocadas na "Tarefa".

2- Apresenta o teu trabalho em folhas de papel A4.

3- Faz uma capa (onde escreves o nome da escola, o título do trabalho, o teu nome ou dos elementos do grupo, os números, a turma e a data).

4- Faz um índice do trabalho (onde escreves os títulos das páginas e os números).

5- Faz uma introdução (onde escreves que trabalho estás a fazer e como procedeste para o realizar).

6- Apresenta o conteúdo do trabalho (por palavras tuas).

7- Faz uma conclusão (diz o que aprendeste e se gostaste de fazer o trabalho. Podes dizer também o que correu bem e mal).

8- Faz uma bibliografia (escreves o nome dos manuais que usaste, das enciclopédias, dos dicionários e dos sites da Internet).

Avaliação

O teu desempenho vai ser avaliado pelos Professores. Estes serão os critérios usados para fazer tal avaliação:

- Esforço e empenho do aluno;
- Interesse demonstrado perante a actividade;
- Trabalho individual;
- Cooperação em grupo;
- Conhecimento que o aluno mostrou ter adquirido depois de ter realizado a tarefa;
- Apresentação do trabalho final;
- Qualidade científica do conteúdo do trabalho final.

Curiosidade nº1

A magia de π não se confina ao círculo ou à medição de arcos e curvas. Se, ao princípio, parece que é o círculo que define π, talvez no fundo seja π que define o círculo.

A aparente simplicidade do círculo impele-nos a defini-lo quando, na realidade, ele nos abre portas e portas para os mistérios infinitos que consubstanciam a criação do universo.

E, contudo, por mais que nos esforcemos, π é, em última estância, incognoscível.

Há aplicações computacionais que permitem calcular π (e qualquer número em geral) com precisão arbitrária. A quantidade de algarismos de π prolonga-se numa sequência irregular de dígitos ziguezagueando para muito longe da nossa compreensão. Ora vejamos, π com 2000 algarismos (recurso a aplicação computacional Mathematica):

```
In[2]:= N[π, 2000]

Out[2]= 3.14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899
        862803482534211706798214808651328230664709384460955058223172535940812848111745028
        410270193852110555964462294895493038196442881097566593344612847564823378678316527
        120190914564856692346034861045432664821339360726024914127372458700660631558817488
        152092096282925409171536436789259036001133053054882046652138414695194151160943305
        727036575959195309218611738193261179310511854807446237996274956735188575272489122
        793818301194912983367336244065664308602139494639522473719070217986094370277053921
        717629317675238467481846766940513200056812714526356082778577134275778960917363717
        872146844090122495343014654958537105079227968925892354201995611212902196086403441
        815981362977477130996051870721134999999837297804995105973173281609631859502445945
        534690830264252230825334468503526193118817101000313783875288658753320838142061717
        766914730359825349042875546873115956286388235378759375195778185778053217122680661
        300192787661119590921642019893809525720106548586327886593615338182796823030195203
        530185296899577362259941389124972177528347913151557485724245415069595082953311686
        172785588907509838175463746493931925506040092770167113900984882401285836160356370
        766010471018194295559619894676783744944825537977472684710404753464620804668425906
        949129331367702898915210475216205696602405803815019351125338243003558764024749647
        326391419927260426992279678235478163600934172164121992458631503028618297455570674
        983850549458858692699569092721079750930295532116534498720275596023648066549911988
        183479775356636980742654252786255181841757467289097777279380008164706001614524919
        217321721477235014144197356854816136115735255213347574184946843852332390739414333
        454776241686251898356948556209921922218427255025425688767179049460165346680498862
        723279178608578438382796797668145410095388378636095068006422512520511739298489608
        412848862694560424196528502221066118630674427862203919494504712371378696095636437
        19172874677646575739624138908658326459958133904780275901
```

Existem mnemónicas de π, poemas e outros truques para memorizar os seus dígitos.

O número de letras da cada palavra deste poema em Francês representa um dígito de π:

Que j'aime à faire apprendre ce nombre utile aux sages!
Immortel Archimède antique, ingénieur,
Qui de ton jugement peut sonder la valeur?
Pour moi ton problème eut de pareils avantages.

Traduzindo,
Como eu gostaria de ensinar este útil número aos sábios!
Antigo e imortal Arquimedes, engenheiro,
Quem, do teu julgamento, pode apreender o valor?
Para mim, o teu problema tem semelhantes vantagens.

Anónimo.

2.4.4 O número e

O número e (número de Neper), tal como o número π, é um número místico da Matemática. Ambos são irracionais e transcendentes.

Atribui-se a John Napier[26] a descoberta do número de Neper, mas a sua representação por e surgiu pela primeira vez no século XVIII com o matemático Leonhard Eüler[27].

O número e pode ser definido como o limite da sucessão $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, isto é:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \qquad (2.4)$$

Quanto ao valor numérico aproximado de e, tem-se: e=2,71828182…

É também importante referir que a base dos logaritmos naturais (logaritmos neperianos) é o número de Neper, logo e é o número cujo logaritmo natural é 1.

Pensa-se que a escolha do símbolo e para representar o número de Neper possa dever-se ao facto de ser a primeira letra da palavra "exponencial", tendo já Euler a noção da importância de que se reveste a função exponencial $y = e^x$ cuja a base é o número de Neper.

O número e é hoje importante em quase todas as áreas do conhecimento (Física, Economia, Engenharia, Biologia, Sociologia), pois a função exponencial modela fenómenos de importância vital (Burton, 2001).

As relações exponenciais surgem, por exemplo, na Biologia. É comum, no crescimento das populações, uma fase inicial de aumento exponencial.

O exemplo que se segue refere-se aos pinheiros (*Pinus sylvestris)* que cresceram e se multiplicaram há mais de 9000 anos. A bacia de sedimentação de um lago de Norfolk, Inglaterra, foi estudada por Keith Bennett (1983). Ela tinha uma sequência contínua de sedimentos que foi analisada. O conteúdo de pólen foi estimado e datado através do método do carbono radioactivo. A taxa de deposição

[26] John Napier (1550-1617), matemático, astrólogo, teólogo escocês, conhecido como o inventor do logaritmo natural ou neperiano.

[27] Leonhard Eüler (1707-1783), matemático e físico suíço.

de pólen foi tomada como indicadora da abundância das árvores que o produziam. Das sete espécies estudadas, todas mostraram grandes aumentos da abundância de pólen com o tempo, apesar de os carvalhos terem apresentado um declínio temporário entre duas fases de expansão. Os pinheiros produziram os resultados mais "bonitos", e estes encontram-se apresentados na Figura 2.28.

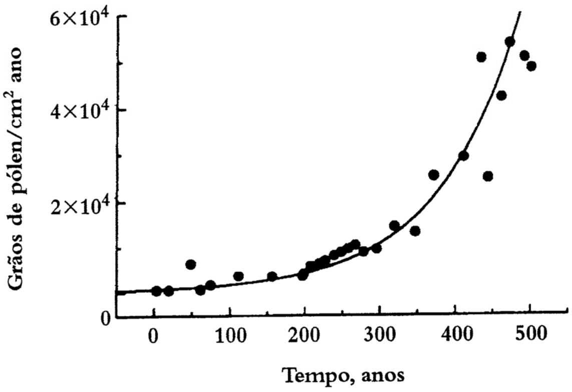


Figura 2.28: O aumento exponencial da taxa de acumulação de pólen de *Pinus sylvestris* nos sedimentos de uma bacia de sedimentação de um lago de Norfolk (Bennett, 1983).

O período inicia-se há cerca de 9550 anos, tendo sido determinado pelo método de datação pelo carbono radioactivo. A curva que se ajusta aos dados tem a fórmula:

$$\text{Taxa de acumulação de pólen (grãos de pólen/cm}^2\text{ ano)} = 650\ e^{(0{,}00932 \times \text{tempo})} \qquad (2.5)$$

Segue-se o exemplo de um declínio exponencial referente à sobrevivência de sementes de ervas daninhas no solo (Roberts, 1962). Estas experiências a longo prazo foram realizadas na National Vegetable Research Station, em Warwick, Inglaterra, em terrenos onde vários tipos de culturas foram realizados em regime rotativo. As experiências investigaram primariamente os efeitos da fertilização e de tratamentos sobre as propriedades do solo e as colheitas de vegetais. Os pormenores de cultivo não têm uma importância especial, excepto o facto dos tratamentos se destinarem a evitar que as ervas daninhas atingissem a maturidade e libertassem as sementes no solo. Como se impediu que novas sementes de ervas daninhas fossem adicionadas ao solo, observou-se um declínio gradual do número de sementes viáveis, em parte devido à morte das mesmas e em parte devido ao número das que germinaram. (Os números de sementes viáveis foram estimados retirando pequenas amostras de solo a partir do qual as sementes foram postas a germinar em vasos rasos durante dois anos). O declínio do número de sementes viáveis no solo em três destas experiências encontra-se representado no gráfico seguinte. Os dados encontram-se num gráfico com eixo logarítmico, de modo a obter-se uma relação linear. O número médio de sementes por acre (isto é, 0,40 hectares) em cada ano encontra-se perto da recta.

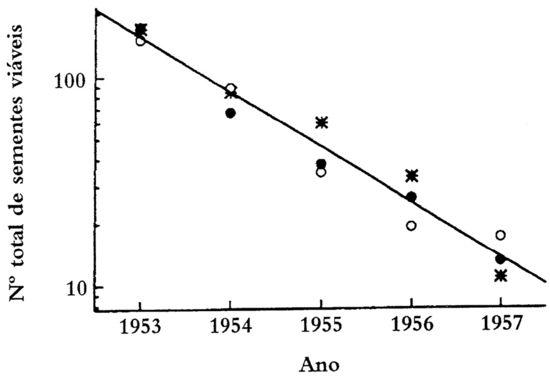


Figura 2.29: Efeito da colheita contínua de ervas daninhas sobre o número de sementes viáveis das mesmas nos 15 cm superficiais do solo (milhões por acre). Apresentam-se os resultados de três experiências (Roberts, 1962).

É de referir, também a título de exemplo, que o decaimento de uma substância radioactiva segue uma lei exponencial.

Numa substância radioactiva, cada átomo tem uma certa probabilidade, por unidade de tempo de se transformar num átomo mais leve emitindo radiação no processo. Se p representa essa probabilidade, o número médio de átomos que se transmutam, por unidade de tempo, é pN, onde N é o número de átomos existentes em cada instante. O número de átomos transmutados por unidade de tempo é também igual a menos a derivada temporal da função N

$$\frac{dN}{dt} = -pN$$

A massa dos correspondentes átomos, m, é directamente proporcional a N e assim obtemos a seguinte equação diferencial

$$\frac{dm}{dt} = -pm$$

onde p é designada por constante de decaimento. A solução geral desta equação é uma função que diminui exponencialmente até zero

$$m = m_0 \, e^{-pt}$$

onde m_0 é a massa no instante inicial ($t = 0$).

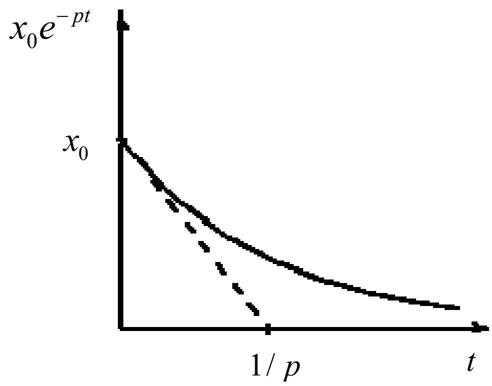


Figura 2.30: Decaimento exponencial de uma substância radioactiva com constante de decaimento p.

A meia-vida da substância define-se como o tempo necessário para a massa diminuir até 50% do valor inicial; a partir da solução obtida temos

$$0{,}5 = e^{-pt}$$

$$t = \ln 2 \, / \, p$$

Quanto maior for a constante de decaimento p, mais rápido diminuirá a massa da substância.

Uma substância radioactiva presente em todos os organismos vivos é o carbono 14 que decai transformando-se em azoto, com uma meia-vida de aproximadamente

5580 anos. O conteúdo de ^{14}C em relação ao ^{12}C de qualquer organismo vivo é o mesmo. A razão é a seguinte: no fim da cadeia alimentar dos seres vivos estão os organismos que absorvem o carbono directamente da atmosfera e portanto a relação $^{14}C/^{12}C$ nos seres vivos é a mesma que na atmosfera. Na atmosfera esta relação é estável há muitos anos; os organismos mortos, em processo de decomposição perdem ^{14}C como resultado do decaimento radioactivo e não o regeneram através da dieta. O azoto que a atmosfera ganha dos organismos em decomposição é transformado novamente em ^{14}C pelos raios cósmicos, nas camadas superiores. Uma comparação do conteúdo de carbono 14 de um organismo morto, por exemplo madeira obtida de uma árvore, com o conteúdo existente num organismo vivo da mesma espécie, permite determinar a data da morte do organismo, com uma boa precisão quando o tempo envolvido for da ordem de grandeza da meia-vida do carbono 14.

Actividade nº3

Construção de um modelo em escala do Sistema Solar

Introdução

O Sistema Solar aparece em vários livros didácticos, através de figuras esquemáticas, onde é mostrado fora de uma escala definida, dificultando assim a sua compreensão. Esta forma de apresentação do Sistema Solar pode causar uma série de confusões em relação ao tamanho dos planetas e das suas distâncias ao Sol.

Esta actividade tem por finalidade mostrar as dimensões do Sistema Solar de forma simples, com os diâmetros e as distâncias dos Planetas, numa mesma escala. Vários tamanhos de bolas, dos mais diversos materiais são usados.

Devido às pequenas dimensões dos componentes e às enormes distâncias envolvidas torna-se difícil construir uma verdadeira maquete em escala, já que seria composta quase totalmente de "vazios" sobre uma área muito extensa.

Uma solução alternativa viável, é adoptar uma **escala logarítmica** para as distâncias.

Procedimento

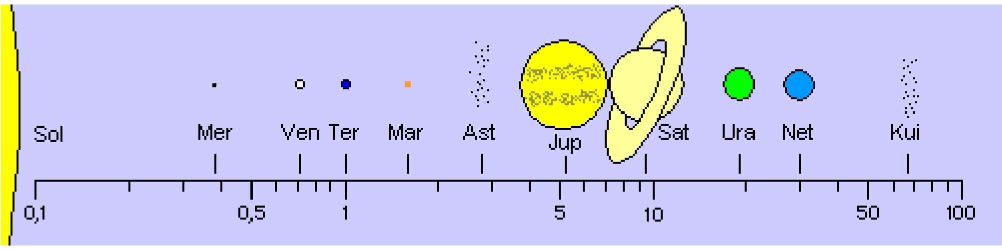
1- Adoptar uma escala onde o Sol será representado por uma esfera de 2 metros (2000 milímetros) de diâmetro que corresponderá a um comprimento da ordem de 1391900 quilómetros (que é o diâmetro do Sol);

2- Calcular os diâmetros dos planetas e as distâncias médias dos planetas ao Sol por uma simples "regra de três". As distâncias reais estão expressas em Unidades Astronómicas (1 UA = distância média da Terra ao Sol = 149598770 km);

3- Consultar e registar os valores obtidos na tabela seguinte:

Sol	1391900	2000		
Planeta	**Dia.(km)**	**Tam.(mm)**	**Raio Orb.(UA)**	**Dist.(m)**
Mercúrio	4879		0,387	
Vênus	12103		0,723	
Terra	12756		1	
Marte	6794		1,524	
Cinturão de Asteróides			2,780	
Júpiter	142984		5,203	
Saturno	120536		9,539	
Urano	51118		19,19	
Neptuno	49528		30,06	
Cinturão de Kuiper			67,11	

Eis em forma esquemática o modelo do Sistema Solar construído:



Problema nº1

À Procura do número e

A fórmula mais conhecida para obter o número de Neper é:

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Apresenta-se um pequeno problema interessante cuja solução é expressa em termos de *e*.

Um moleiro pretende transportar 100 sacas de trigo, de 100kg cada, de sua casa até o moinho que fica a 100 km de distância. Para tal usa um burro que ele sabe não suportar mais de 100 kg de peso. Ora, o problema é que o burro, quando carregado, precisa de ingerir 1 kg de trigo por cada km que percorre. Quanto trigo consegue o moleiro fazer chegar até o moinho? (As sacas têm peso nulo).

Solução

À primeira vista a solução parece ser 0 kg pois, por cada viagem que faz, o burro consome toda a sua carga. Existe, no entanto, um estratagema que o moleiro pode usar para aproveitar ao máximo o seu burro. Uma vez que o burro tem um consumo constante qualquer que seja a carga, então será desejável que, em cada instante, ele carregue o maior peso possível. Como é que isso é feito?

A solução é o moleiro dividir o caminho em troços igualmente separados ao fim dos quais ele redistribui a carga. Vejamos o caso mais simples em que ele divide o caminho em dois troços de 50 km cada. Ao fim do 1º troço ele chega com 100 sacos com 50 kg cada. Ou seja metade do trigo que tinha inicialmente. Porém, antes de realizar o 2º troço até o moinho, ele junta dois meios sacos para fazer um saco. Fica com 50 sacos de 100kg. Ao fim das 50 viagens até o moinho ele ficará com 50 sacos de 50 kg ou seja 1/4 do que tinha inicialmente.

É fácil verificar que se o nosso moleiro em vez de dividir o caminho em 2 troços o fizer em 4, conseguirá fazer chegar ao moinho não com 1/4 mas com $(3/4)\times(3/4)\times(3/4)\times(3/4)=(3/4)^4$ da quantidade inicial. Generalizando para n intervalos igualmente espaçados o moleiro conseguirá juntar no moinho $\left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ da quantidade inicial. Quando n é muito grande esta expressão aproxima-se do valor $\frac{1}{e}=0,3678$. Portanto no máximo ele irá ficar com 3678 kg de trigo.

3 A Geometria e a Natureza

"Há um enigma que desde sempre tem perturbado as mentes. Como pode a Matemática, ao fim e ao cabo um produto do pensamento humano independente da experiência, ser tão admiravelmente apropriada aos objectos da realidade?"

Albert Einstein

“A Natureza tem simplicidade e, por isso, é muito bela.” Richard Feynman

3.1 A Geometria Macroscópica

A existência de uma Natureza geométrica não passou despercebida aos sábios da Antiguidade, e já Pitágoras se referia a este fenómeno e efectuou vários estudos a esse respeito.

3.1.1 Figuras regulares

A Natureza mostra formas, figuras regulares, a todo momento. O círculo, a forma mais simples do universo (Blatner, 2001), é uma delas. Por exemplo, uma gota de chuva num lago provoca ondas em círculos que se expandem indefinidamente, até serem anuladas pelo atrito na margem, ou pelos círculos causados por outras gotas. Os ramos de uma árvore, se observados de cima, formam círculos em redor do tronco, numa tentativa de conseguirem uma área óptima para absorver os raios solares. Até os planetas[28] e as estrelas tentam formar círculos no espaço, apesar da gravidade e das forças de rotação empurrarem e puxarem as suas curvas puramente matemáticas para as formas complexas que se observam na Natureza.

Os círculos estão presentes no mundo natural e, para as gentes de civilizações antigas, os grandes círculos da Lua e do Sol eram fontes de poder e mistérios sem fim. As habitações e locais sagrados mais antigos, que datam de 8000 a.C., eram circulares, talvez devido a religiões que veneravam a Terra, a deusa-mãe.

Por outro lado, existe o quadrado – formado por quatro lados e quatro ângulos congruentes. Os quadrados são raramente encontrados na Natureza, talvez só nas estruturas cristalinas mais puras. Os quadrados tornaram-se símbolos da capacidade humana de medição, resolução e partição. Os quadrados possibilitaram que as civilizações antigas dividissem as terras, para a agricultura e para assinalar a propriedade. Já não se vive em casas circulares e prefere-se as paredes e ângulos bem definidos das modernas edificações.

[28] O planeta Terra tem aproximadamente uma forma esférica, mas a sua rotação causa uma deformação para uma forma elipsoidal (achatada nos pólos).

Para além do círculo e do quadrado apresentam-se, em seguida, outras figuras regulares presentes na Natureza.

Na disposição das três pétalas da flor da Figura 3.1, o triângulo evidencia-se.

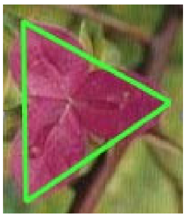


Figura 3.1: O triângulo presente na Natureza.

Outra forma interessante, o rectângulo está presente, por exemplo, na casca do ananás.

Figura 3.2: A casca do ananás.

As cinco pontas de uma estrela-do-mar formam um pentágono. Esta figura regular também se percepciona na carambola.

Figura 3.3: A estrela-do-mar.

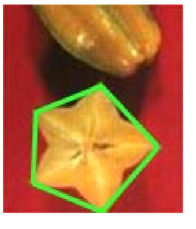


Figura 3.4: A carambola.

As figuras regulares estão intimamente ligadas ao conceito de simetria geométrica, que trataremos na secção seguinte.

3.1.2 Simetria

Todos os grandes cientistas são inspirados pela subtileza e beleza do mundo natural, que procuram entender. Cada nova partícula subatómica, cada objecto astronómico inesperado, produz deleite e espanto. É uma ideia sucintamente expressa por Bohm: "A física é uma forma de visão e, como tal, é uma forma de arte." Einstein exprimiu a sua admiração pela "beleza da… simplicidade lógica da ordem e da harmonia, de que nos apercebemos humildemente e só imperfeitamente". Centrais para a noção de beleza são a harmonia, a simplicidade e a simetria. Quando se fala da beleza e simetria da Natureza, a linguagem em que estes conceitos são expressos é a Matemática. Leonardo da Vinci escreveu outrora: "Nenhuma investigação humana pode realmente chamar-se ciência, se não puder ser matematicamente demonstrada."

Uma das primeiras características geométricas detectada na Natureza é a simetria.

A simetria na Natureza é um fenómeno único e fascinante. Esta ideia surge naturalmente ao espírito humano, remetendo-o para um equilíbrio e proporção, padrão e regularidade, harmonia e beleza, ordem e perfeição. Estes são alguns dos vocábulos que resumem reacções inerentes às simetrias que abundam na Natureza, nas formas vivas e inanimadas.

Gostamos de olhar para os objectos simétricos da Natureza, por exemplo, as esferas "perfeitamente" simétricas dos planetas e do Sol, ou cristais simétricos de flocos de neve, ou flores aproximadamente simétricas. A simetria tem qualquer coisa de fascinante para o espírito humano (Feynman, 1989).

Uma figura geométrica plana diz-se simétrica se for possível dividi-la por uma recta, de forma que as duas partes obtidas se possam sobrepor por dobragem (Simetria Bilateral). As rectas que levam a esse tipo de divisão chamam-se eixos de simetria da figura.

Um quadrado tem uma simetria particular, uma vez que, se o rodarmos de 90º, ainda fica com o mesmo aspecto. O matemático Weyl[29]deu uma excelente definição de simetria: um objecto é simétrico se depois de submetido a qualquer acção o seu aspecto se conserva.

[29] Herman Weyl, 1885-1955, matemático alemão.

Encontra-se com facilidade exemplos de simetria no seio do mundo animal. Quando se olha de frente para uma coruja, fitando-a nos olhos, está-se perante um exemplo de simetria bilateral relativamente a um eixo vertical imaginário que, passando pelo bico da ave, divide a sua cabeça em duas metades simétricas; o mesmo sucede quando se olha de cima para o corpo de um insecto e se verifica que a sua metade esquerda é como que uma imagem espelhada da metade direita.

Figura 3.5: A coruja é um exemplo de simetria bilateral.

Existem figuras que podem ter vários eixos de simetria. A simetria radial presente nos frutos de dentes-de-leão, ou a pentagonal, bastante comum entre as plantas, embora relativamente rara entre os animais, ressalvando-se, naturalmente, exemplos como a conhecida estrela-do-mar.

Figura 3.6: Os frutos de dentes-de-leão são exemplo de simetria radial.

Mas a assimetria (ou não-simetria) é uma característica que também ocorre. Verificam-se mesmo alguns casos invulgares que têm deixado intrigados os observadores, como sucede, por exemplo, com a solha, um peixe achatado que vive junto aos fundos marinhos arenosos, onde procura camuflar-se, deitando-se sobre um dos lados e confundindo-se com a areia. Apresentando nos primeiros tempos de vida os olhos situados simetricamente de cada lado da cabeça, à medida que vai crescendo e manifestando preferência por se deitar sobre um dos flancos a fim de passar despercebida, o olho do lado sobre o qual a solha se deita, e que deixaria assim de ter qualquer utilidade, vai migrando até ficar posicionado na face oposta do corpo, ficando o peixe com os dois olhos do mesmo lado da cabeça, ao mesmo tempo que também a boca vai ficando torcida.

Podemos encontrar outras formas de assimetria, mas igualmente relacionadas com a Matemática. Uma das mais frequentes, sobretudo entre as plantas, mas também presente no reino animal é a espiral, reconhecível no desenho das conchas de caracóis, búzios e afins.

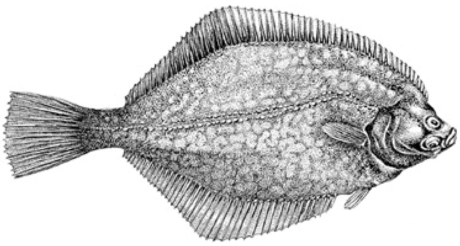


Figura 3.7: A solha é um exemplo de assimetria.

Figura 3.8: A forma espiralada exibida pela casca do caracol.

Um outro tipo de simetria é a simetria de reflexão que aparece com frequência em várias circunstâncias, seja na confecção de logotipos, nas arquitecturas, na arte, ou em situações simples, como quando nos olhamos ao espelho.

Figura 3.9: O tamanho e a forma dos olhos, nariz, boca, etc. são iguais ao da imagem reflectida no espelho. O seu rosto e a imagem dela reflectida no espelho são simétricos.

Quando estamos de frente para um espelho, podemos ver nossa imagem no espelho. A imagem forma-se sobre o espelho, mas a impressão que temos é que ela está atrás do espelho. Se nos afastarmos do espelho o tamanho da imagem diminui, dando a impressão de que ela está mais longe. Assim, podemos falar da distância da imagem ao espelho. A imagem de um objecto reflectida num espelho está localizada sobre a recta perpendicular ao espelho que passa pelo objecto, de tal forma que a distância da imagem ao espelho é igual à distância do objecto ao espelho, conforme ilustrado na figura Figura 3.10.

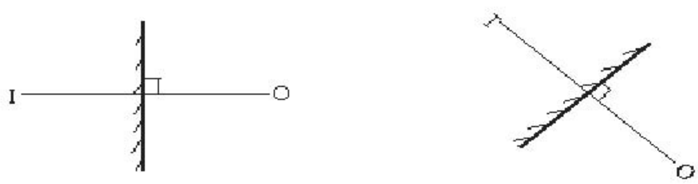


Figura 3.10: A distância da imagem ao espelho é igual à distância do objecto ao espelho.

Problema nº2

Simetria & Reflexão

1- A simetria bilateral do ser humano se refere somente a aparência externa ou o ser humano apresenta simetria interna?

2- Será que o ser humano poderia ter 33 dentes? E 34?

3- Quando duas pessoas (uma de frente para a outra) se cumprimentam com um aperto de mão (mão direita), os braços direitos cruzam-se na frente do corpo. Agora, o que acontece se uma pessoa estende a mão direita para cumprimentar sua imagem no espelho, os braços cruzam-se ou não?

4- A palavra "BOMBEIRO" é escrita na frente do carro de bombeiros de tal forma que uma pessoa que esteja no carro da frente ao olhar pelo retrovisor possa ler correctamente. Como a palavra "BOMBEIRO" deve ser escrita para conseguir este efeito?

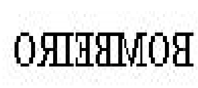
Soluções

1- A simetria bilateral do ser humano é só externa, temos um só coração e também um só fígado, ambos situados fora do eixo de simetria.

2- Por causa da simetria bilateral o número de dentes deve ser par, assim não poderia ter 33 dentes. Considerando também a simetria inferior-superior, isto é, que a disposição dos dentes no maxilar inferior (mandíbula) é a mesma que a disposição dos dentes no maxilar superior, e que nenhum par de dentes está sob o eixo de simetria bilateral, então o número de dentes deve ser um múltiplo de 4 e assim, o ser humano não poderia ter 34 dentes. O ser humano tem 32 dentes (8+8 em cada maxilar). Se houvesse um par de dentes sob o eixo de simetria bilateral, então poderíamos ter 34 dentes (assim distribuídos 8+1+8 em cada maxilar).

3- Neste caso, os braços, da pessoa e da sua imagem, não se cruzam.

4- Deve-se escrever:



3.1.3 A Esfera

A palavra esfera deriva do Latim da palavra "sphaera", ou "sphaira" do Grego. Pode ser definida como *"um sólido geométrico formado por superfície curva contínua cujos pontos estão equidistantes de um outro fixo e interior chamado centro"*, ou seja, é uma superfície fechada de tal forma que todos os seus pontos estão à mesma distância de seu centro.

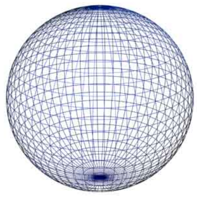


Figura 3.11: A esfera.

Sem dúvida alguma, a esfera é considerada um dos sólidos mais curiosos que existem, e sua forma tem sido extremamente útil ao homem.

É possível que os homens tenham criado a forma esférica a partir da observação e do estudo dos corpos celestes, como o Sol e a Lua.

A esfera é o sólido que apresenta maior simetria. Nele está também presente o número π, como por exemplo no seu volume e superfície:

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \text{ e } S = 4\pi r^2$$

onde r é o raio da esfera.

3.1.3.1 A medida da Terra por Eratóstenes

Eratóstenes (275-195) era bibliotecário da imensa Biblioteca de Alexandria, o que lhe permitia consultar os arquivos e documentos referentes aos acontecimentos mais importantes relativos ao calendário. Assim, chegou a saber que num certo dia do ano, ao meio-dia, a luz do Sol reflectia-se na água dum poço profundo situado nas proximidades de Siena, a actual Assuam.

Para qualquer pessoa isso teria passado inadvertido, sem ter maior importância. Porém, Eratóstenes compreendeu que era um facto notável. O que é que havia de curioso nisso?

Normalmente, os objectos têm uma sombra. Mesmo que a sombra seja tão ténue que não se possa distinguir, porque a luz circundante a dissimula, a sombra existe. Para que um objecto não tenha sombra é preciso que os raios solares caiam perpendicularmente sobre o mesmo. E, mesmo que pareça estranho, existem muitos pontos na Terra, nos quais os objectos têm sempre sombra, isto é, nos quais o Sol nunca cai perpendicularmente. Para se poder entender deve-se considerar algumas causas fundamentais. A Terra dá cada ano uma volta ao redor do sol. Neste movimento de translação a Terra descreve uma trajectória elíptica plana. O plano que contém esta trajectória recebe o nome de plano da eclíptica.

Além disso, a Terra dá cada dia uma volta completa sobre si mesma. E o eixo de rotação desse movimento não é perpendicular ao plano da eclíptica, mas forma com o mesmo um ângulo de aproximadamente 23º26'. Em cada momento os raios solares caem perpendicularmente sobre algum ponta da Terra, mas esse ponto varia ao longo do dia e do ano.

Por exemplo, no solstício de verão, os raios solares caem perpendicularmente, à medida que a Terra gira, sobre todos os pontos situados no Trópico de Câncer.

Esse é o motivo pelo qual no verão está mais calor no hemisfério norte que no hemisfério sul. Igualmente, no solstício de Inverno os raios solares caem perpendicularmente, à medida que a Terra gira sobre todos os pontos situados no Trópico de Capricórnio.

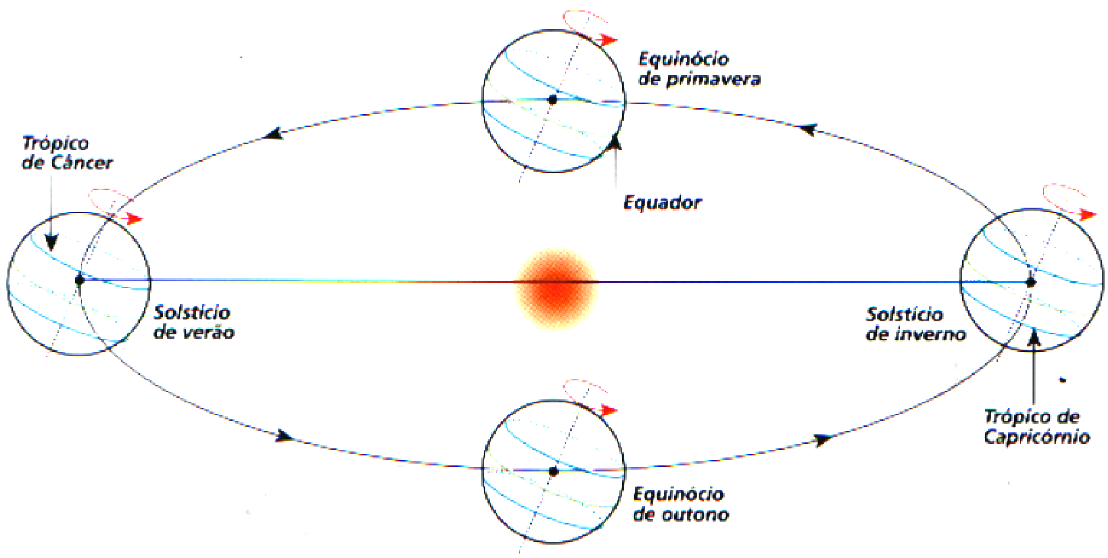


Figura 3.12: A inclinação do eixo terrestre faz com que no solstício de verão os raios caem perpendicularmente sobre os pontos situados no Trópico de Câncer, enquanto que no solstício de Inverno o fazem sobre os pontos do Trópico de Capricórnio.

Por isso, quando é Inverno no hemisfério norte, está mais calor no hemisfério sul. Finalmente, tanto no equinócio de primavera quanto no equinócio de outono os raios caem perpendicularmente, à medida que a Terra gira, sobre todos os pontos situados no equador. Por isso, nos equinócios é quando mais aquece no equador.

É interessante observar que, em qualquer ponto da Terra situado entre os dois trópicos, o sol cai perpendicularmente exactamente duas vezes ao ano; nos pontos situados na linha do Trópico de Câncer e do Trópico de Capricórnio, o sol cai perpendicularmente uma vez ao ano, e nos pontos situados ao norte do Trópico de Câncer e ao sul do Trópico de Capricórnio não cai nunca perpendicularmente. Portanto, em toda a Europa, por exemplo, os objectos projectam sempre sombra, por pequena ou ténue que seja.

Eratóstenes, um homem com educação europeia, compreendeu que, para o sol se reflectisse no fundo de um poço profundo, as paredes do poço não podiam reflectir nenhuma sombra e, por conseguinte, os raios solares deviam cair perpendicularmente sobre o mesmo.

Além de que, se este facto se observava somente num certo dia do ano, era porque este poço devia estar situado num ponto próximo à linha do trópico.

No mesmo dia, em Alexandria, que está situada a uns 800 km ao norte de Siena, Eratóstenes descobriu que na mesma hora, ao meio-dia, a sombra duma coluna situada perpendicularmente ao solo tinha uma sombra que formava um ângulo de 7º30’.

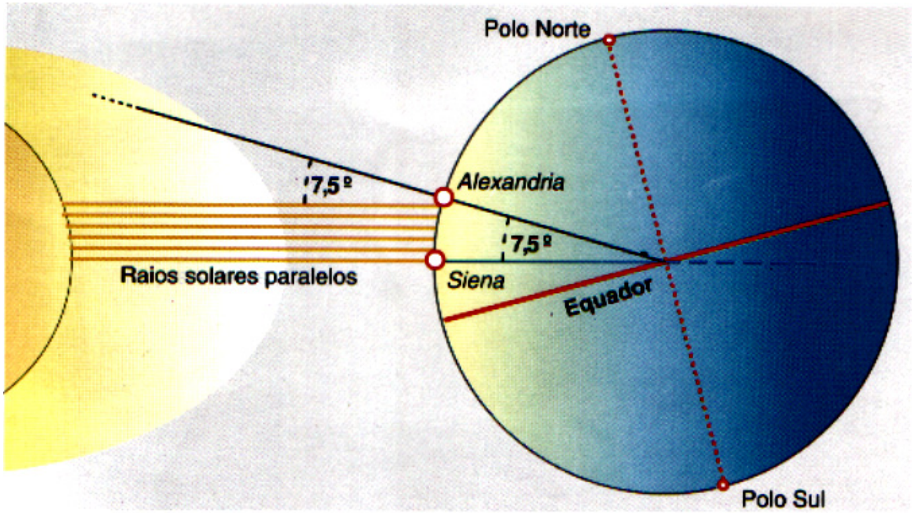


Figura 3.13: Supondo que a Terra era esférica, Eratóstenes deduziu que a diferença entre a inclinação dos raios solares entre Siena e Alexandria era equivalente ao ângulo central (com o centro no centro do globo) que abrangia estas duas cidades.

Eratóstenes supôs que os raios solares, que vinham de muito longe, chegavam praticamente paralelos a toda a Terra. Observou também que os 7º30’ cabem aproximadamente cinquenta vezes nos 360º da circunferência completa, e deduziu finalmente que a circunferência da Terra seria umas 50 vezes os 800 km que separavam Siena de Alexandria, isto é, uns 40000 km[30].

De facto, no tempo de Eratóstenes, as grandes longitudes mediam-se em estádios. Siena estava situada a 5000 estádios ao sul de Alexandria. Assim, Eratóstenes deduziu que a circunferência da Terra media aproximadamente $50 \times 5000 = 250000$ estádios. Segundo os especialistas, 1 estádio equivalia a uns 162,2 m e, por conseguinte, 250000 estádios seriam uns 40550 km. Em quanto se enganou Eratóstenes?

Hoje em dia é possível calcular a circunferência da Terra com os mais sofisticados métodos científicos, e já se sabe que mede aproximadamente 40030 km, o que significa que Eratóstenes, com o seu simples e genial método, conseguiu medir a circunferência da Terra, com uma margem de erro de 1,5 %!

[30] As medições de Clairaut (1713-1765) forneceram a primeira definição de metro: décima milionésima parte do quarto (quadrante) do meridiano terrestre.

Actividade nº4

Medição da Terra

1- Introdução

A determinação do perímetro da Terra por Eratóstenes é considerada por muitos historiadores de Ciência como uma das dez mais importantes experiências científicas.

Concebida e executada pelo sábio grego há mais de dois mil anos, consiste basicamente na obtenção da diferença de latitude entre dois locais situados no mesmo meridiano. Uma vez conhecida a distância entre esses locais, é possível determinar o perímetro da Terra.

A actividade que se propõe tem como objectivo a determinação do perímetro da Terra. Para isso, utiliza-se um procedimento semelhante ao empregue pelo sábio Eratóstenes com algumas adaptações, visando a aplicação em escolas. Apresenta grande interdisciplinaridade entre a Astronomia, a Física, a Matemática, a História e a Geografia.

Propõe-se desenvolver um método alternativo ao de Eratóstenes, que leve em conta não só a determinação da latitude, mas também a diferença em longitude, permitindo uma abrangência geográfica maior, ampliando as possibilidades de participação. Além disso, torna-se didacticamente mais satisfatório e desperta nos alunos o gosto pela investigação científica.

A actividade é coordenada de modo que várias escolas participem. Para fazer a determinação do perímetro terrestre é necessário que cada escola envolvida escolha como parceira uma outra escola, afastada, pelo menos, 500 quilómetros.

Um ponto fundamental é que os alunos devem ser preparados para que tenham total compreensão da actividade de modo que os objectivos sejam alcançados. Entre os vários tópicos que devem ser abordados estão: forma da Terra, eclipses, movimento aparente do Sol, fusos horários, relações trigonométricas e de proporcionalidade.

2- Método Proposto

Eis alguns requisitos para o desenvolvimento do método:

- Ser o mais simples possível para facilitar a aplicação em escolas.
- Levar em conta a diferença em longitude para que qualquer aluno, em qualquer lugar do planeta, pudesse participar.
- Normalizar os métodos de observação e de redução dos dados. Essa normalização é indispensável para que os resultados apresentem consistência entre si.

- Não usar mapa ou globo terrestre em nenhuma fase da actividade, porque identificando os locais dos grupos participantes no mapa o problema já estará resolvido. Não há desafio algum a ser superado.

- Aplicar o método em qualquer época do ano, e não apenas nos equinócios.

2.1- Materiais e informações necessários

Os materiais são de uso comum e de fácil obtenção: régua, relógio, calculadora, gnomon[31] (construção descrita em seguida), bola de isopor com 20 cm de diâmetro, alfinetes, caneta, fita métrica flexível e nível. Será necessário também conhecer a declinação do Sol no dia, a distância entre os dois locais e o fuso horário das duas cidades.

2.2- Etapas da Actividade

2.2.1- Preparação dos alunos

Alguns dos conceitos aplicados na actividade estão presentes nos currículos de várias disciplinas e, por isso, podem ser explorados pelos professores antes da actividade propriamente dita. Entre os tópicos que podem ser relembrados ou apresentados estão: Geografia (fusos horários, latitude, longitude, equador, meridianos, paralelos, rotação e revolução, orientação de dia e à noite), Matemática (relações trigonométricas, semelhanças de triângulos e a geometria), História (história das ciências, o tamanho da Terra e as grandes navegações, Renascimento científico), Física (luz e sombra, eclipses, método científico, bússola, relógio de sol, medidas e precisão).

2.2.2- Construção de gnomon

O gnomon pode ser uma haste fincada perpendicularmente ao solo ou fixa numa base de madeira. Pode-se usar um nível ou um esquadro para avaliar e ajustar a perpendicularidade do solo ou da base, o que é feito em dois pontos definindo segmentos de recta ortogonais entre si. A ponta da haste não deve ser "afiada", como um lápis, pois isso gera dificuldades na leitura quando o Sol estiver muito alto, o que é comum em regiões inter tropicais. Sugere-se que a haste tenha 50 cm de altura. Para medir o comprimento da sombra pode-se recorrer a uma régua que tenha sido cortada adequadamente para que não haja espaço entre o "zero" e a extremidade da régua.

---

[31] Uma haste que ao projectar a sua sombra indica a altura do Sol.

Figura 3.14: O gnomon.

2.2.3- Orientação

Para que se possa realizar a actividade, é necessário conhecer a orientação geográfica do local – a direcção norte-sul. Isso deve ser feito vários dias antes da actividade. Para isso, usa-se o conhecido método de Vitrúvio[32].

Será necessário um local ao ar livre onde incida a luz solar durante boa parte do dia. Inicialmente faz-se uma circunferência tendo como centro a base da haste e com o raio igual a metade da altura da mesma. O movimento diário do Sol fará com que a sombra da ponta da haste incida no círculo em dois momentos (um de manhã e outro à tarde); esses pontos na circunferência devem ser marcados. Eles definem a linha leste-oeste. A linha horizontal perpendicular e esta será a linha norte-sul (meridiana). O meio-dia solar corresponde ao instante em que a sombra incidir exactamente sobre a meridiana.

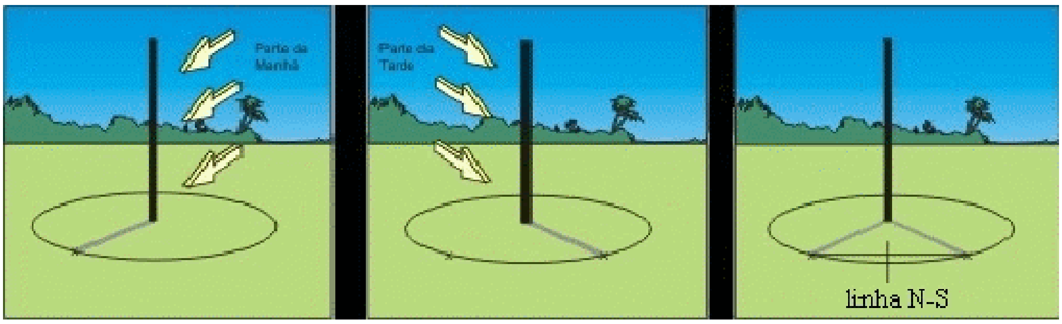


Figura 3.15: Determinação da linha norte-sul pelo método Vitrúvio.

[32] Marcus Vitruvius Pollio foi um engenheiro e arquitecto romano que viveu no século I a.C. e deixou como legado sua obra em 10 volumes, aos quais deu o nome de De Architectura (aprox. 40 a.C.).

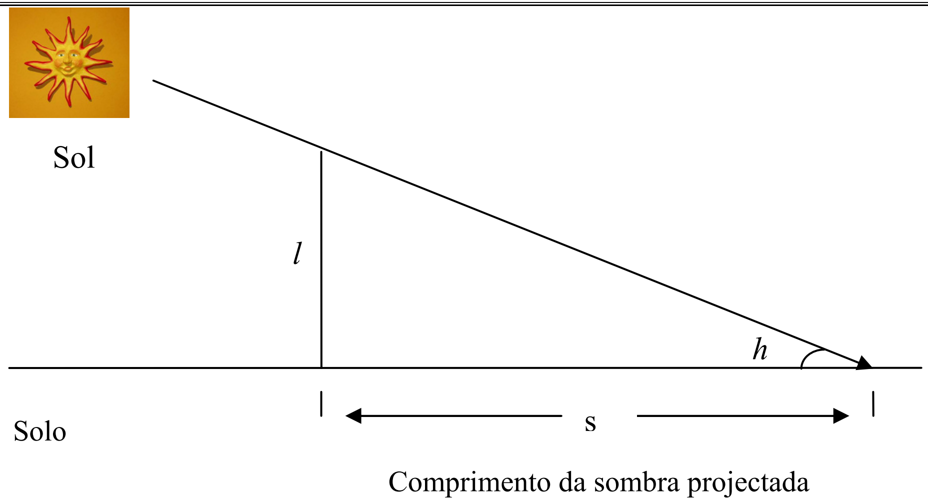


Figura 3.16: Geometria do gnomon.

2.2.4- Determinação da latitude e instante da passagem meridiana (meio-dia solar)

No dia marcado para a observação, acompanha-se a sombra do gnomon. O objectivo é determinar a altura[33] do sol quando a sombra atingir a meridiana, e o momento em que isso ocorre.

A altura do Sol pode ser conhecida através dos comprimentos da sombra (s) e da haste (*l*):

h =arctan (*l*/s)

Onde: *l*=comprimento da haste

s=comprimento da sombra

Para calcular a latitude[34] utiliza-se uma das equações:

$\varphi = \delta - \left(90^{\circ} - h\right)$ se a sombra se projecta na direcção Sul

Ou

$\varphi = \delta + \left(90^{\circ} - h\right)$ se a sombra se projecta na direcção Norte

Onde: φ =latitude do lugar

h =altura em graus do Sol na passagem meridiana

δ =declinação[35] do Sol para o dia

[33] Distância em graus a partir do horizonte até o astro, medida sobre a vertical do astro.

[34] Distância angular a partir do equador até o lugar em que a latitude é referida.

[35] Coordenada medida a partir do equador celeste até ao astro contada ao longo do círculo horário do astro.

A declinação do Sol varia ao longo ano. É zero nos equinócios, +23º27´ no solstício de Inverno e -23º27´no solstício de verão. Os valores diários da declinação do Sol podem ser encontrados na Anuário ou no site (www.oal.ul.pt).

Neste ponto deverão, então ser conhecidos os seguintes parâmetros:

Passagem meridiana (TU) – meio-dia solar

Altura da haste (*l*)

Comprimento da sombra (s)

Altura do Sol (h)

Latitude medida (φ)

2.2.5- Determinação da longitude e instante de culminação

Na verdade, não se determina as longitudes das duas cidades, mas sim a diferença entre elas. No momento em que a sombra da haste atingir a direcção N-S, anota-se a hora local e, a seguir, deve-se convertê-la para a hora universal (instante, na escala do tempo, definido como tempo médio local do meridiano de Greenwich). Para isso, soma-se a hora local ao fuso horário correspondente. A diferença entre os instantes das culminações será igual à diferença em longitude[36]. Será necessário converter a diferença de longitude para graus. Como são necessárias 24 horas para a Terra dar uma volta em relação ao Sol (360º) tem-se que numa hora ela gira 15º. Deste modo, basta multiplicar por 15º/h a diferença em longitude expressa em horas.

2.2.6- Determinação das posições das cidades numa bola de isopor.

Para esta etapa, usa-se uma bola com uns 20 centímetros de diâmetro, onde serão marcados os pólos[37] e a linha do equador (a bola de isopor é constituída por duas metades que se encaixam, a junção identifica o "equador"). É necessário medir o perímetro da bola com uma fita métrica flexível, para se obter uma escala que relacione graus com centímetros.

[36] Distância angular contada no equador a partir do meridiano de Greenwich até o meridiano do lugar.

[37] Pólo é o ponto de encontro de eixo de rotação de um astro com a sua superfície.

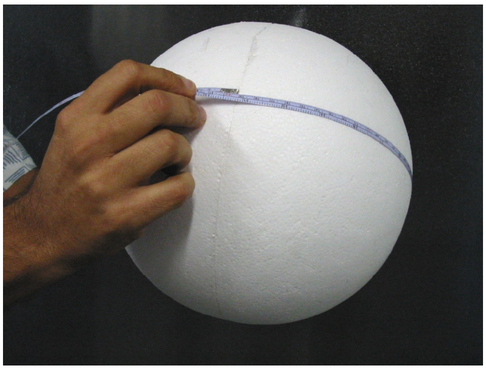


Figura 3.17: Medida do perímetro da bola para se obter a escala.

Com a latitude da cidade obtida pela observação do Sol e a escala recém-calculada, marca-se na bola o ponto correspondente à primeira cidade. A partir desse ponto, traça-se o meridiano dessa cidade até o equador. Deve-se ter em mente que os meridianos são perpendiculares ao equador e convergem para os pólos.

Figura 3.18: Marcação da primeira cidade.

No equador da bola marca-se o ângulo correspondente à diferença entre os instantes das passagens meridianas das duas cidades para localizar o meridiano da segunda cidade.

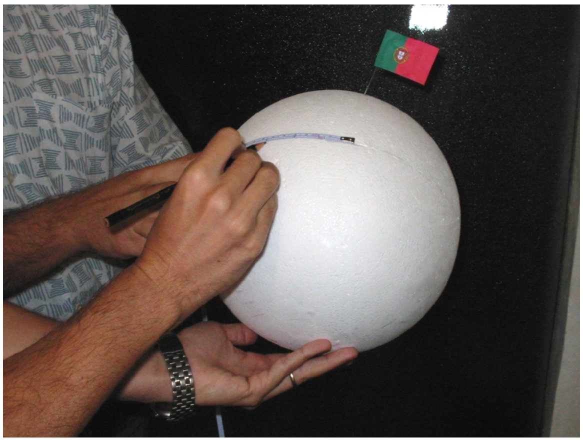


Figura 3.19: Ao longo do “equador” é assinalada a diferença em longitude.

Uma vez conhecido o meridiano, marca-se o local correspondente à sua latitude.

Figura 3.20: Marcação da segunda cidade.

2.2.7- Cálculo do perímetro da Terra

Mede-se com uma fita métrica flexível a separação entre as duas cidades na bola de isopor, de modo que a fita circunde a bola num círculo máximo[38]. O perímetro da Terra é obtido por um simples regra de três.

$$\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \qquad (3.1)$$

A = Perímetro da Terra

B = Distância entre as duas cidades

Obtida no site: http://www.wcrl.ars.usdagov/cec/java/lat-long.htm

C = Perímetro da bola de isopor

D = Distância na superfície da bola entre os pontos ("cidades")

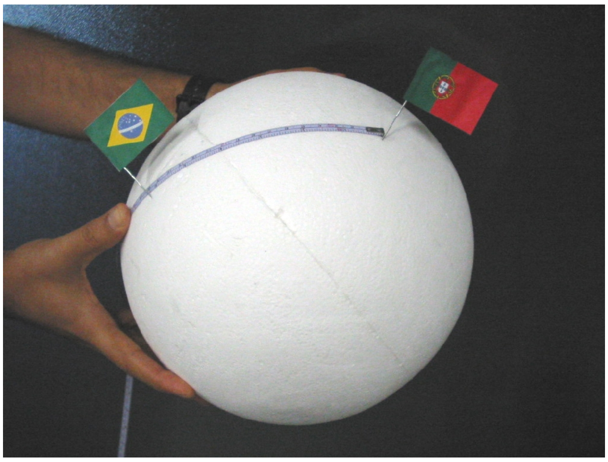


Figura 3.21: Medição da distância entre as duas cidades (sobre um círculo máximo) no modelo.

2.3- Resultados Finais

Resumo dos dados obtidos na actividade:

- Perímetro da bola
- Escala da bola
- Latitudes observadas nas cidades
- Diferença de longitude
- Distância entre as duas cidades na bola
- Distância entre as duas cidades
- Perímetro da Terra

[38] Círculo sobre a superfície de uma esfera, cujo plano contém o centro dessa esfera.

3- Conclusão

Com a realização desta actividade, demonstra-se a viabilidade de se empregar uma experiência simples e de baixo custo na introdução ao método científico, em que os professores e alunos participam activamente e podem chegar a um resultado estimulante.

Promovendo o espírito de colaboração entre os alunos, estes percepcionam da sua importância para resolver problemas. A troca de experiências, é um dos aspectos mais positivos, uma vez que o trabalho é colectivo (uso do correio electrónico) e entre instituições.

Como toda experiência científica, os resultados dependem do método, dos cuidados nos preparativos e da atenção nas medições.

Nota:

Pode-se comparar os resultados usando o Google Earth.

O Google Earth combina os sofisticados recursos de pesquisa do Google com imagens de satélite, mapas, terrenos e edificações em 3D para colocar informações geográficas do mundo todo à disposição. O Google Earth é muito mais do que um simples software de mapas. Trata-se de uma ferramenta para visualizar, criar e compartilhar informações específicas de locais que podem ser exploradas em uma interface interactiva e visualmente intuitiva.

Problema nº3

O Problema do Explorador

Um intrépido explorador decide medir a circunferência da Terra. Para isso dará uma volta ao mundo carregado com uma corda. Como prevê que pelo caminho se encontrará com alguns obstáculos (plantas que crescem pelo solo, pedras, algum animal…) decide estender a corda a 1 metro do solo. Não se sabe como, mas depois de muito tempo e após grandes peripécias consegue, efectivamente, dar a volta ao mundo com a sua corda, mas aproximadamente 6 metros antes do final descobre que a corda acabou.

Evidentemente, poderia ter acrescentado um cordel de aproximadamente 6 metros para dar fim à sua façanha, mas tocado pelo seu amor próprio não quer que na sua corda existam nós, assim decide dar outra volta à Terra, mas desta vez estenderá a corda ao nível do solo.

Conseguirá finalmente realizar a sua façanha?

Ou descobrirá que ainda lhe faltam alguns metros para unir os dois extremos?

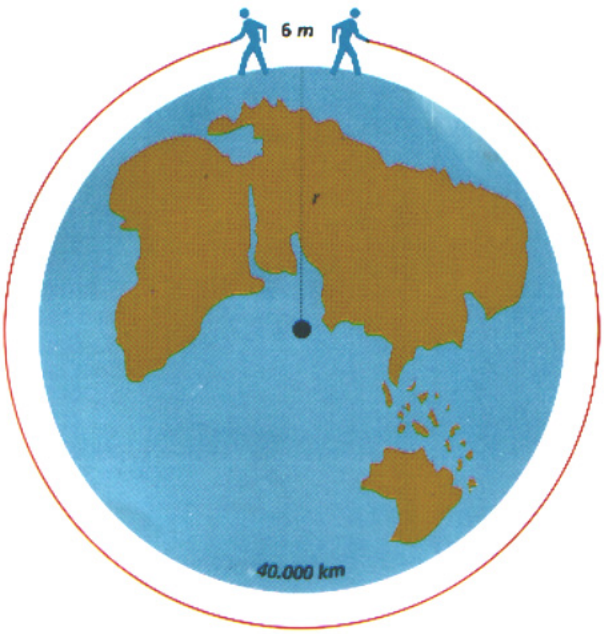


Figura 3.22: O Problema do Explorador.

Solução

À primeira vista ganhar 1 metro ao longo de tantos e tantos quilómetros teria de proporcionar ao explorador muitos metros extras. E, efectivamente, conseguirá finalmente realizar a sua façanha. Porém…

Recorda-se que o perímetro de uma circunferência se obtém a partir da fórmula:

$$\text{Perímetro} = 2\pi r \tag{3.2}$$

Por conseguinte, se se considerar r ao raio da Terra, tem-se que o perímetro da Terra é igual a $2\pi r$, e o perímetro de uma circunferência, situada a 1 metro da Terra, será igual a $2\pi\left(r+1\right)$. Ao subtrair ambos os valores obtém-se, finalmente, que:

$$2\pi r\left(r+1\right)-2\pi r=2\pi=6,28$$

Isto significa que, ao estender a corda a 1 metro do solo, ao fim teriam faltado ao explorador 6,28 metros, e ao estender a corda ao nível do solo daria a medida exacta para unir as duas extremidades. Como faltavam 6 metros ao explorador, ao estender a corda ao nível do solo sobrarão 0,28 metros, isto é, 28 centímetros. Por conseguinte, não só poderia unir os dois extremos da corda, mas ao final também poderá fazer um belo nó com a mesma.

O autêntico ensinamento que se deduz deste problema é que o raio da Terra não influiu absolutamente no problema. Isto é, se o explorador tivera realizado a sua proeza na Lua ou em qualquer outro planeta, podia ter resolvido o seu problema da mesma maneira.

Sempre, por grande ou pequeno que tivesse sido o corpo celeste a considerar, desde o asteróide do Pequeno Príncipe à enorme circunferência do Sol, ganharia sempre 6,28 metros…

O raciocínio anterior aplica-se a outros casos semelhantes. Independentemente do valor de r em unidades de medida a circunferência de raio $r+1$ mede sempre 6,28 unidades mais.

Se se tomar como unidade de medida a largura de uma pista de atletismo, quando dois atletas por vias contíguas num estádio, o da via exterior correrá sempre 6,28 unidades de via mais do que o atleta da via anterior. E isso independentemente do tamanho do estádio!

Problema nº4

Problema da Terra, do gato e da corda

Considere-se uma corda com comprimento superior ao perímetro da Terra na Equador em 1 metro. Colocando a corda esticada em torna do equador, será possível fazer passar um gato entre a corda e a Terra?

Solução:

$$P_1 - P_2 = 1$$

$$2\pi r_1 - 2\pi r_2 = 1$$

$$2\pi\left(r_1 - r_2\right) = 1$$

$$r_1 - r_2 = \frac{1}{2\pi} \approx 0{,}16$$

A diferença de raios, a "folga" é igual 0,16 m ou 16 cm, onde eventualmente poderia passar um gato.

Actividade nº5

A Determinação das Estações do ano através da sombra

Introdução

A Astronomia é a mais antiga das ciências. A observação do céu provavelmente está entre as primeiras actividades de carácter empírico-sistemático da humanidade. Há registos relativos a actividades astronómicas que datam cerca de 7000 anos. A Astronomia tem sido um dos campos de ensaio do método científico para a compreensão da Natureza.

Objectivos

Diante das inúmeras possibilidades, esta actividade restringe-se a um determinado fenómeno: determinação do início de cada uma das estações através da sombra, sem o uso do calendário.

Recursos

Gnomon – um dos instrumentos astronómicos mais antigos, consiste numa haste posicionada perpendicularmente ao solo que projecta uma sombra.

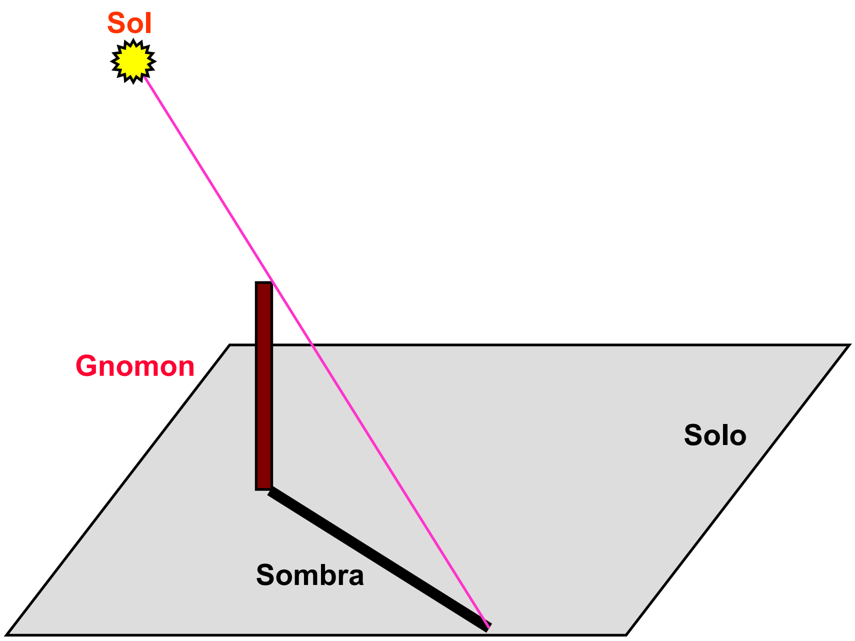


Figura 3.23: O Gnomon.

Duração

1 ano, com observações bitrimestrais.

Procedimento

Como o tamanho da sombra do gnomon varia com o decorrer do tempo, é possível determinar o começo de cada uma das estações do ano.

Deve-se observar por um período de vários meses o comprimento da sombra do gnomon, sempre sobre a linha meridiana (ou seja, no meio-dia real).

O comprimento da sombra varia durante o ano inteiro.

Conclusão

Ao longo de um ano (à mesma hora do dia), a sombra é máxima no solstício de Inverno e é mínima no solstício de Verão. A bissectriz marca o tamanho da sombra nos equinócios, quando o sol está no equador.

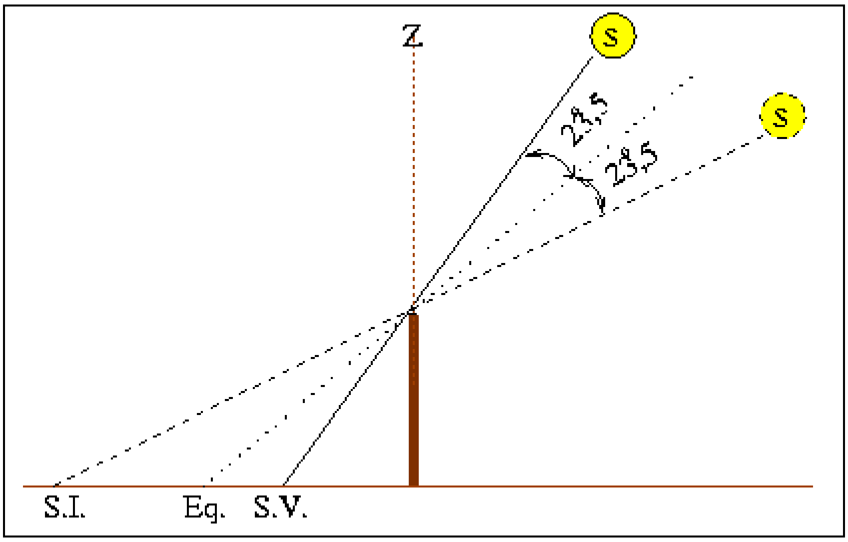


Figura 3.24: O comprimento da sombra do gnomon varia ao longo do ano, permitindo determinar o início das estações do ano.

Explicação Teórica

Devido ao movimento de translação da Terra em torno do Sol, o Sol aparentemente se move entre as estrelas, ao longo do ano, descrevendo uma trajectória na esfera celeste chamada Eclíptica. A Eclíptica é um círculo máximo que tem uma inclinação de 23º27’ em relação ao Equador Celeste. É esta inclinação que causa as estações do ano.

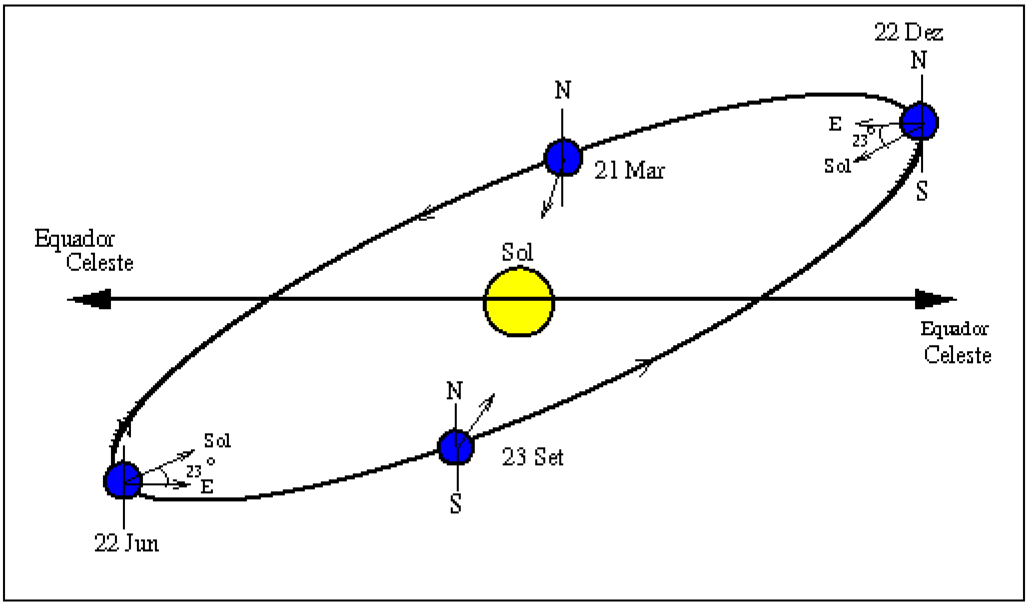


Figura 3.25: A Eclíptica.

Devido a esta inclinação, à medida que a Terra orbita em torno do Sol, os raios solares incidem mais directamente num ou noutro hemisfério, proporcionando mais horas com luz durante o dia num hemisfério ou noutro e, portanto, aquecendo mais um hemisfério ou outro.

As trajectórias aparentes do Sol, em diversas épocas do ano são representadas pela figura seguinte.

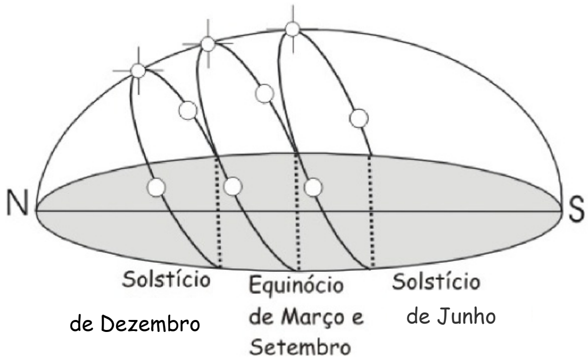


Figura 3.26: Variação das trajectórias aparentes do Sol no firmamento durante o ano.

Os solstícios ocorrem a 21 de Junho e 21 de Dezembro. Os equinócios a 21 de Março e 21 de Setembro.

Curiosidade nº2

Paralaxe

Em Astronomia, a paralaxe estelar é utilizada para medir a distância das estrelas utilizando-se o movimento da Terra em sua órbita.

Paralaxe vem do Grego: παραλλαγή que significa alteração. É a alteração da posição angular de dois pontos estacionários relativos um ao outro como vistos por um observador em movimento. De forma simples, paralaxe é a alteração aparente de um objecto contra um fundo devido ao movimento do observador.

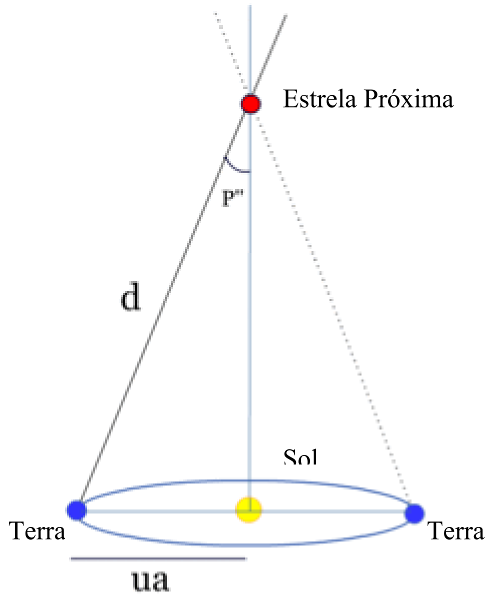


Figura 3.27: Paralaxe estelar.

A paralaxe anual é definida com a diferença de posição de uma estrela com vista da Terra e do Sol. Como não podemos ver a estrela do Sol, a observação e feita entre dois pontos opostos da órbita da Terra e o resultado dividido por 2. O parsec é a distância para a qual a paralaxe anual é de um segundo de arco ou arcseg. Um parsec é igual a 3,26 anos-luz.

A distância de um objecto em parsecs pode ser calculada do inverso de sua paralaxe. Por exemplo, a estrela mais próxima Alfa Centauri, tem uma paralaxe de 0,750". Portanto ela esta a uma distância de 1/0,750=1,33 parsecs ou aproximadamente 4,3 anos-luz.

Cálculo da paralaxe: $p'' = ua / d \times 180 \times 3600 / \pi$ arcseg

ua = unidade astronómica = Distância média da Terra ao Sol igual a 1,4959 × 10^{11} metros

d = distância até a estrela.

Derivando a expressão

O ângulo da paralaxe é dado por:

$$\sin p'' = ua / d$$

Aproximando o seno para ângulos pequenos como o:

$$\sin x = x \text{ radianos} = x \times 180 / \pi \text{ graus} = x \times 180 \times 3600 / \pi \text{arcseg}$$

Podemos escrever a paralaxe como:

$$p'' = \text{ua} / d \times 180 \times 3600 / \pi$$

Se a paralaxe é 1", então a distância é de :

$$d = \text{ua} \times 180 \times 3600 / \pi = 206264\text{ua} = 3{,}2616 \text{ ano-luz} = 1 \text{ parsec}$$

Que é a definição de parsec. A paralaxe é $p'' = 1/d$ arcseg , quando a distância é dada em parsecs.

3.1.4 Secções Cónicas

Muitas pessoas consideram ser desconcertante o facto dos matemáticos investigarem a fundo um problema ou uma ideia, simplesmente porque a acham interessante ou curiosa. Remontando aos pensadores da Grécia Antiga, estes fizeram um estudo das secções cónicas, independentemente da sua utilidade imediata, mas só por ser desafiador ou excitante.

O seu interesse inicial por estas curvas consistia na ajuda que a sua utilização poderia dar na resolução dos três problemas antigos: *quadrar um círculo*[39]*, duplicar um quadrado e trissectar um ângulo.* Estes problemas não tinham aplicações práticas nessa altura, mas eram desafiadores e estimulavam o raciocínio matemático. É comum que a aplicação prática de uma ideia matemática surja apenas alguns anos após a sua elaboração[40]. As secções cónicas, que foram criadas durante o século III a.C., forneceram as bases aos matemáticos do século XVII para começarem a formular várias teorias sobre curvas. Por exemplo, Kepler usou a elipse para descrever as trajectórias dos planetas e Galileu a parábola para representar o movimento de projécteis na Terra.

A Figura 3.28 mostra como são produzidas a *circunferência,* a *elipse,* a *parábola* e a *hipérbole,* por intersecção de um plano com uma superfície cónica.

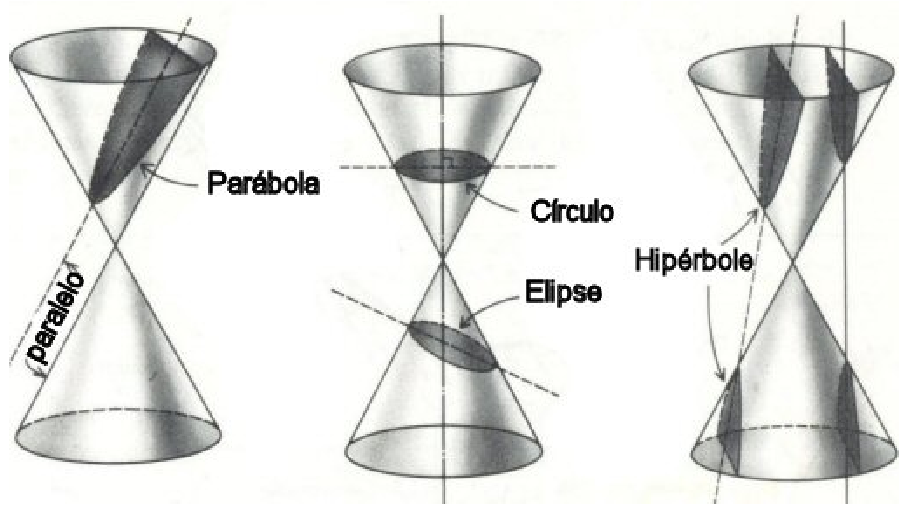


Figura 3.28: Secções cónicas obtidas por intersecção de um plano com uma superfície cónica.

[39] Ver Apêndice D

[40] Pode também acontecer a situação contrária. Paul Dirac "inventou" a famosa função de Dirac, que só mais tarde veio a ser considerada pelos matemáticos.

Apresentam-se, em seguida, alguns exemplos destas curvas no universo.

Parábola:

- Forma de um jacto de água, a trajectória de um projéctil.

Elipse:

- Órbitas dos planetas e cometas.

Hipérbole:

- Trajectórias de alguns cometas e de outros corpos celestes.

Circunferência:

- Ondas produzidas por um objecto num lago;
- Órbitas circulares;
- A roda.

Um outro exemplo actual e emocionante é o cometa Halley.

As órbitas e trajectórias são conceitos que podem ser facilmente descritos matematicamente por meio de equações e das suas representações gráficas. O estudo desses gráficos revela, por vezes, ciclos e períodos dessas trajectórias, o que deve ter acontecido no caso do cometa Halley.

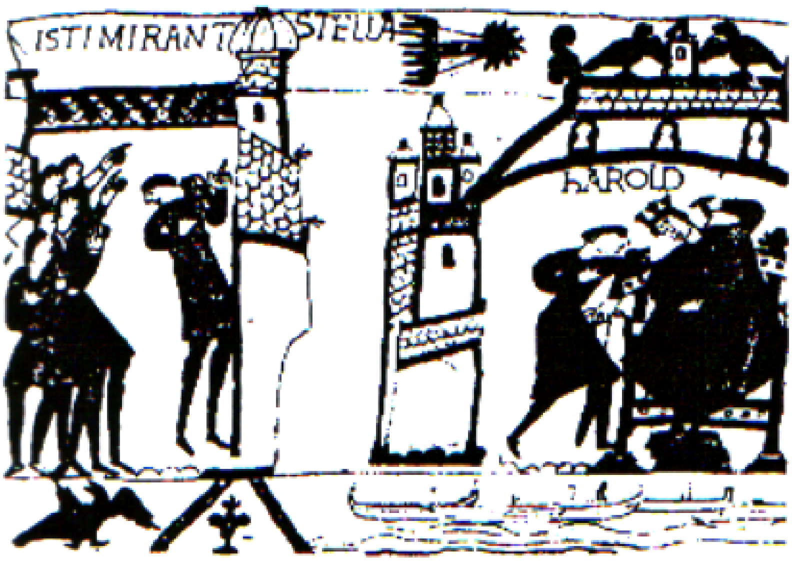


Figura 3.29: Representação do cometa Halley na tapeçaria de Bayeaux.

Até ao século XVI, os cometas eram fenómenos celestes inexplicáveis que pareciam não obedecer às leis do sistema solar de Copérnico e Kepler. No entanto, em 1704, Edmund Halley estudou as órbitas de vários cometas para os quais existiam informações disponíveis. Os registos mais completos referiam-se ao cometa de 1682. Halley notou que a sua órbita passava pelas mesmas regiões do céu que a dos cometas de 1607, 1531 e 1465, concluindo tratar-se de um único cometa descrevendo uma órbita elíptica em torno do Sol cada 75 a 76 anos. Conseguiu prever com êxito o seu reaparecimento em 1758 e o cometa passou a ser designado por cometa Halley. Investigações mais recentes sugerem existirem registos do cometa Halley, feitos pelos chineses, que remontam a 240 a.C.

3.2 A Geometria Microscópica

Muitas das formas geométricas que abundam no mundo natural, não são visíveis a olho nu.

3.2.1 Fractais

Durante muitos séculos, os objectos e os conceitos da geometria euclidiana (tais como ponto, linha, plano, espaço, quadrado, circunferência, …) foram considerados como os que melhor descreviam o mundo em que vivemos. A descoberta de geometrias não euclidianas introduziu novos objectos que representam certos fenómenos do universo – o que sucedeu com os fractais. Considera-se hoje que tais objectos retratam formas e fenómenos da Natureza.

A ideia dos fractais teve a sua origem no trabalho de alguns matemáticos entre 1875 e 1925. Esse trabalho deu a conhecer alguns objectos, catalogados como "monstros", que se supunha não terem grande valor científico. Tais objectos são hoje conhecidos por fractais, de acordo com o nome que lhes foi posto por Benoit Mandelbrot, em 1975, matemático que fez importantes descobertas nesta área (Pappas, 1998).

Tecnicamente, um fractal é um objecto que não perde a sua definição formal à medida que é ampliado, mantendo-se a sua estrutura idêntica à original. Pelo contrário, por exemplo, uma circunferência parece perder a sua curvatura à medida que se amplia uma das suas partes.

As principais propriedades que caracterizam os fractais são a auto-semelhança e a complexidade infinita. Outra característica importante dos fractais é a sua dimensão.

A auto-semelhança é a simetria através das escalas. Consiste em cada pequena porção do fractal poder ser vista como uma réplica de todo o fractal numa escala menor.

A complexidade infinita prende-se com o facto de o processo gerador dos fractais ser recursivo, tendo um número infinito de iterações.

A dimensão dos fractais, ao contrário do que sucede na geometria euclidiana, não é necessariamente uma quantidade inteira. Com efeito ela é uma quantidade fraccionária. A dimensão de um fractal representa o grau de ocupação deste no espaço, que tem que ver com o seu grau de irregularidade.

Para se entender melhor o conceito de dimensão de fractal, atente-se no seguinte exemplo. Uma linha simples, euclidiana, unidimensional não ocupa espaço. Mas o contorno da curva de Koch[41], com comprimento infinito estendendo-se por uma área finita, ocupa espaço. É mais do que uma linha, mas menos do que um plano. É mais do que unidimensional, mas não chega a ser bidimensional. A dimensão desta curva é 1,2618.

Figura 3.30: A curva do floco de neve é um exemplo de um fractal gerado por triângulos equiláteros que são acrescentados aos lados de triângulos equiláteros já existentes.

Existem duas categorias de fractais: os fractais geométricos, que repetem continuamente um padrão idêntico, e os fractais aleatórios. Os computadores, e as representações gráficas que conseguem executar, são responsáveis por trazer de novo estes "monstros" à vida, gerando quase instantaneamente os fractais no monitor e com as suas formas bizarras, os seus desenhos artísticos ou

[41] Ver Apêndice E.

pormenorizadas paisagens e cenários. Julgou-se que as formas regulares da geometria euclidiana eram as únicas aplicáveis à ciência mas, a partir destes novos objectos, a Natureza pode ser encarada de uma perspectiva diferente.

Os fractais deram origem a um novo ramo da Matemática, muitas vezes designado como a geometria da Natureza por causa das formas estranhas e caóticas que descrevem alguns fenómenos naturais, como os sismos, o desenvolvimento das árvores, a estrutura da sua casca, a forma da raiz do gengibre, o perfil do litoral, e são aplicados na astronomia, na economia, na meteorologia e no cinema.

Na Figura 3.31 pode-se observar em vários níveis de ampliação a complexidade e pormenor de um feto. Este feto apresenta a propriedade de auto-semelhança, característica dos fractais. Com efeito, as várias ampliações, sinalizadas na imagem inicial a laranja e a azul, são muito semelhantes a essa imagem. Estas propriedades sugerem uma ligação entre os fractais e a Natureza.

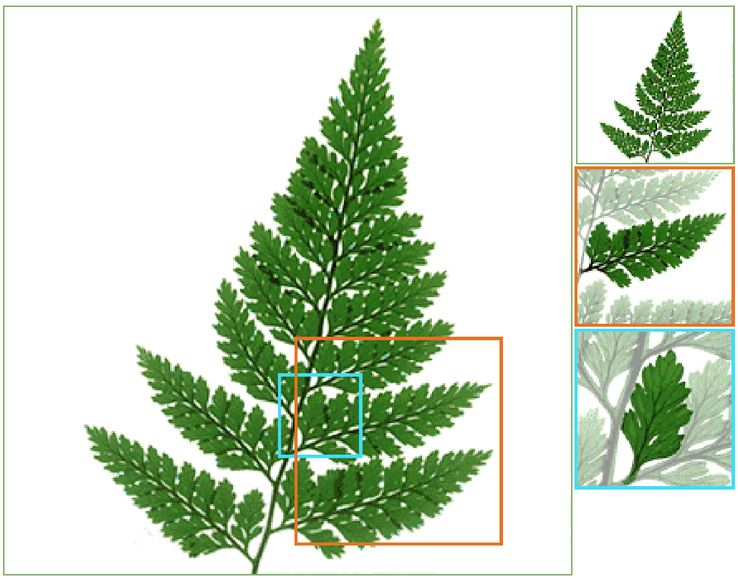


Figura 3.31: Feto (um objecto da Natureza fractal).

Outros exemplos de objectos da Natureza com propriedades fractais são a couve-flor, os bróculos e as costas marítimas.

Contudo, os objectos da Natureza não são verdadeiramente fractais, pois eles não são infinitamente complexos.

Curiosidade nº3

O problema do pintor

Podemos gerar superfícies a partir de curvas de funções matemáticas rodando-as em torno do eixo dos *xx*.

Uma destas superfícies, chamada Trompeta de Torricelli, tem a característica de possuir uma superfície infinita e, ao mesmo tempo, um volume finito.

Esta superfície forma-se utilizando o gráfico da função $y = 1/x$, com o domínio $x \geq 1$ (para evitar a assímptota em $x = 0$), e rodando-a em três dimensões em torno do eixo *xx*.

A sua descoberta é anterior ao cálculo, mas é possível calcular a superfície e o volume integrando, respectivamente, as funções:

$$y = \frac{2\pi\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}}{x} \text{ e } y = \frac{\pi}{x^2}.$$

Se se considerar a parte da Trompeta entre $x = 1$ e $x = a$, a área da superfície é de $2\pi \ln(a)$ e o volume é $\pi(1 - 1/a)$. Quando a tende para infinito, a superfície tende para infinito e o volume tende para π .

Este resultado pode ser considerado um paradoxo: enchendo o volume com uma quantidade finita de tinta pintaríamos uma superfície infinita. A solução do paradoxo é que a afirmação de que uma área infinita requer uma quantidade finita de pintura pressupõe que uma camada de tinta tem uma espessura constante. Isto não se cumpre no interior da trompeta, já que a maior parte da figura não é acessível à pintura, especialmente quando o seu diâmetro é menor que o de uma molécula de tinta. Se se considera uma pintura sem espessura, seria necessária uma quantidade infinita de tempo para que esta chegasse até o "final" da trompeta [7].

3.2.2 Cristais – Os Poliedros da Natureza

Desde épocas clássicas que os poliedros são mencionados nas obras matemáticas, mas a sua origem é muito mais remota, podendo ser relacionada com a própria origem do mundo natural. Os cristais desenvolvem-se segundo formas poliédricas. Por exemplo, os cristais de cloreto de sódio têm a forma de cubos e de tetraedros, ao passo que os cristais do alúmem de crómio adoptam a forma de octaedros. É igualmente fascinante observar a formação de cristais decaédricos e icosaédricos nas estruturas esqueléticas dos radiolários, que são protozoários marinhos microscópicos (Pappas, 1998).

Os poliedros são sólidos cujas faces têm a forma de polígonos. Denominam-se poliedros regulares se todas as faces forem polígonos congruentes (geometricamente iguais) e todos os seus ângulos forem congruentes também. Assim, um poliedro regular tem todas as suas faces congruentes, todas as suas arestas idênticas e todos os seus ângulos sólidos idênticos.

Há um número infinito de diferentes tipos de poliedros, mas existem apenas cinco que são regulares e que são denominados os sólidos platónicos[42]: Tetraedro, Cubo, Octaedro, Dodecaedro, Icosaedro. As suas designações foram-lhes atribuídas por Platão, que os descobriu cerca de 400 a.C.. A existência destes sólidos já era previamente conhecida pelos pitagóricos, e os egípcios já haviam utilizado alguns deles na arquitectura e em outros objectos que construíram.

3.2.2.1 A Simetria dos Cristais

Os cristais são caracterizados por uma geometria estrutural definida, isto é, com disposição regular dos seus átomos segundo padrões ou redes tridimensionais próprias de cada espécie (Galopim de Carvalho, 2002).

Os padrões e as simetrias abundam em fenómenos naturais. Em 1912, o físico Mas Von Laue fez passar raios-X num cristal esférico que depois impressionaram

[42] Os sólidos platónicos são sólidos convexos cujas arestas formam polígonos planos regulares congruentes. Ver Apêndice F.

uma chapa fotográfica. Apareceram pontos escuros, dispostos num arranjo simétrico, os quais depois de unidos formaram o seguinte desenho:

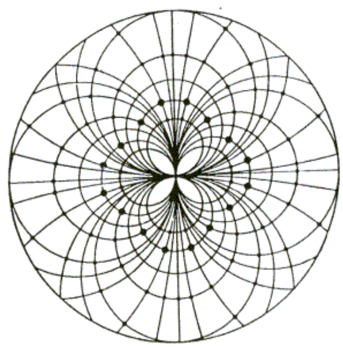


Figura 3.32: Esta representação denomina-se um *lauegrama*, em homenagem a Laue.

Entende-se por simetria a ordem e o arranjo dos átomos nos cristais, o que implica a ordem na distribuição das suas propriedades.

Os cristais formam-se com a alteração da temperatura, no interior da superfície terrestre. A massa de moléculas e de átomos funde e depois arrefece lentamente. À medida que se dá esse arrefecimento, os átomos dispõem-se em estruturas simétricas.

A estrutura molecular unitária é a base que determina a forma do cristal. Os cristais formam-se segundo a maneira como os seus átomos se ligam. Estes átomos formam sempre os mesmos padrões geométricos, uma vez que se dispõem sempre da mesma forma, a uma determinada temperatura.

Nos aspectos morfológicos, em que os objectos cristalinos são vistos como poliedros, fala-se de simetria rotacional, pois, a rotação está implícita nas várias operações de simetria morfológica. Em cristalografia estrutural introduziu-se o conceito de simetria translacional, decorrente da repetição (translação) do motivo no espaço tridimensional.

A maioria das formas mostra uma repetição através das operações possíveis de simetria: inversão, reflexão e rotação, a que correspondem operadores de simetria[43] próprios.

[43] Operador de simetria é o lugar geométrico dos pontos que permanecem invariáveis à operação de simetria que lhe corresponde.

O centro de simetria ou centro de inversão é o operador a que corresponde a operação inversão. Visualizando o poliedro natural ou o modelo, como se faz na prática escolar, poderá dizer-se que o centro de simetria corresponde a um ponto no interior do sólido, equidistante dos elementos física e morfologicamente equivalentes por simetria. Na mesma óptica, os planos de simetria, ou planos de reflexão, são os planos que "dividem" o cristal em duas partes física e morfologicamente equivalentes, como o objecto e a sua imagem no espelho plano, daí o designarem-se também por espelhos. Ao plano de simetria corresponde a operação reflexão. Os eixos de simetria, eixos de rotação ou giros são direcções de recta a que correspondem as operações pelas quais, numa rotação completa (2π), o poliedro ocupa várias posições idênticas, quer morfológicas, quer de outros aspectos relacionados com a Natureza física. Após uma rotação de $2\pi/p$, qualquer característica do cristal se repete. Num giro completo, o número de repetições é $2\pi \div 2\pi/p = p$. Corresponde-lhes a operação rotação, sendo p o grau do eixo.

Grau 1 $(p=1)$ - $2\pi/p = 360^{o}$

Grau 2 $(p=2)$ - eixo binário $2\pi/p = 180^{o}$

Grau 3 $(p=3)$ - eixo ternário $2\pi/p = 120^{o}$

Grau 4 $(p=4)$ - eixo quaternário $2\pi/p = 90^{o}$

Grau 6 $(p=6)$ - eixo senário $2\pi/p = 60^{o}$

Um cristal, tal como um padrão, tem de apresentar uma forma que se pode ampliar, por repetição indefinida, em todas as direcções. É por isso que as faces do cristal só podem ter certas formas; apenas podem apresentar as simetrias dos padrões. Os cientistas notaram que quase todos os cristais com idêntico arranjo molecular, apresentavam também a mesma forma. Todos os cristais podem ser classificados em sete sistemas cristalográficos.[44]

[44] Ver Apêndice G.

4 A Matemática no Mundo Animal

"A Matemática é o alfabeto com o qual Deus escreveu o mundo."

Galileu Galilei

4.1 A Matemática na Vida das Abelhas

4.1.1 Os Hexágonos na Natureza

Outras das formas geométricas mais facilmente reconhecíveis na Natureza é o hexágono regular. Muitas das criações da Natureza são espantosos modelos de objectos matemáticos; o hexágono é um desses objectos.

O hexágono é uma figura de seis lados, e diz-se regular se todos eles tiverem o mesmo comprimento e se os seus ângulos tiverem todos a mesma amplitude.

Coloca-se a seguinte questão: O que levou as abelhas a construir os alvéolos dos favos de mel com forma de hexágono?

Figura 4.1: O padrão hexagonal que se encontra nos favos das colmeias.

Para dar resposta a esta questão, alguns matemáticos demonstraram que apenas os hexágonos regulares, os quadrados e os triângulos equiláteros podem ser justapostos (formando uma pavimentação[45]) de modo a que não exista qualquer espaço não ocupado entre eles.

[45] A pavimentação de um plano equivale simplesmente a conseguir cobrir o plano com figuras planas, de modo a não existirem espaços entre elas e sem haver sobreposições.

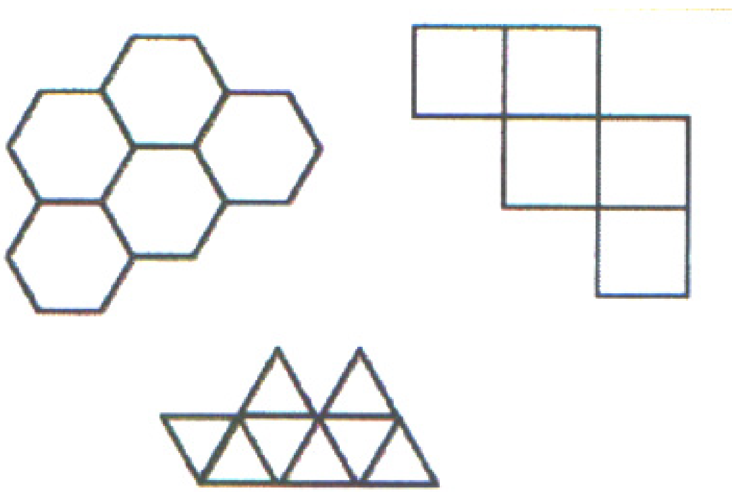


Figura 4.2: Pavimentações formadas por hexágonos, por quadrados e por triângulos.

Das três figuras, o hexágono é a que tem o menor perímetro para uma dada área[46].

Polígono	Perímetro	Área
Triângulo	p	$\frac{p^2\sqrt{3}}{36}$
Quadrado	p	$\frac{p^2}{16}$
Hexágono	p	$\frac{p^2\sqrt{3}}{24}$

Tabela 4.1: Supondo o perímetro fixo, o hexágono é dos três polígonos considerados, o que tem maior área.

Assim, para conseguir um aproveitamento matemático perfeito do espaço usando a menor quantidade de cera e despender a menor quantidade de esforço para circunscrever um dado espaço, a abelha constrói células hexagonais para servir de favo de mel.

Pappas faz uma citação sobre a sagacidade das abelhas que diz assim: *" As abelhas conhecem unicamente o que lhes é útil, isto é, que o hexágono é maior que*

[46] Ver demonstração em Apêndice H.

o quadrado e o triângulo, e que com uma mesma quantidade de matéria utilizada para a construção de cada figura, o hexágono poderá conter mais mel.

Porém, em relação a nós, que pretendemos possuir uma maior parcela de sabedoria do que as abelhas possuem, note-se, que de todas as figuras planas equiláteras e equiângulas com idêntico perímetro, a que tem um maior número de ângulos é sempre maior, e a maior de todas é o círculo que tem o seu próprio perímetro."

4.1.2 Árvore Genealógica

O macho da família de abelhas é chamado zangão, que é chocado de ovos não fertilizados. Em função disso, cada zangão não tem pai, mas têm um avô por parte materna. Também aqui está presente a sequência de Fibonacci que permite calcular o número de ancestrais de um zangão n gerações atrás.

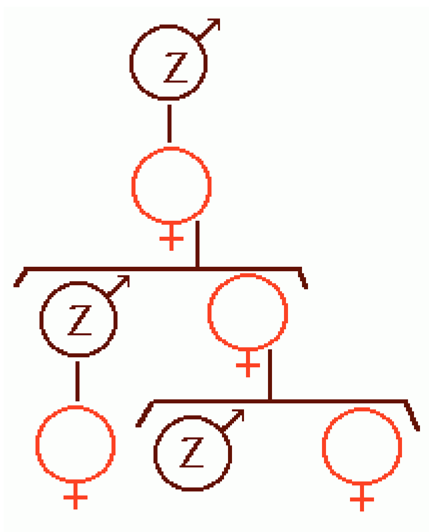


Figura 4.3: A sucessão de Fibonacci presente na árvore genealógica do zangão.

Considerando F_n o número de antepassados fêmeas e M_n o número de antepassados machos da geração n, tem-se: $F_{n+1} = F_n + M_n$ porque cada macho ou fêmea tem uma mãe e $M_{n+1} = F_n$ porque só as fêmeas têm pai.

A cada geração n o número de antepassados é a soma dos zângãos e das abelhas fêmeas, logo: $U_n = F_n + M_n$ e $U_{n+1} = F_{n+1} + M_{n+1}$

Resumindo as três propriedades anteriores:

$U_{n+1} = F_{n+1} + M_{n+1} = F_n + F_n + M_n = U_n + F_n = U_n + U_{n-1}$, logo:

$U_{n+1} = U_n + U_{n-1}$

Cada termo é a soma dos dois anteriores, logo a sucessão do número de antepassados em cada geração é uma sucessão de Fibonacci [8].

Actividade nº6

A Matemática na Natureza

Introdução

Como sabes, na Natureza encontramos uma enorme diversidade de formas geométricas.

Propomos que te tornes um investigador durante um mês, e, juntando a Matemática às Ciências da Natureza, procures essas formas.

Deverás seguir cuidadosamente as instruções dadas, para, a partir dessas formas, seleccionares uma de que mais gostes, e construíres (desenhares) um padrão.

No fim irás apresentar o teu trabalho à turma e fazer uma avaliação do teu desempenho na tarefa que te propomos.

Tarefa

«Onde podemos encontrar formas geométricas na Natureza?»

Vamos dividir a turma em três grupos de Tarefa:

- Botânicos
- Zoólogos
- Geólogos

Os Botânicos irão à procura de formas geométricas nas plantas, os Zoólogos procurarão nos animais e os Geólogos nos minerais.

Processo

Etapas do trabalho:

1ª- Elabora uma Ficha das formas geométricas bi e tridimensionais. (Podes ter como orientação o modelo proposto no Apêndice I);

2ª- Pesquisa nos recursos que te são fornecidos mais adiante;

3ª- Recolhe as informações necessárias para conseguires preencher a ficha que, antes, elaboraste;

4ª- Faz uma recolha de imagens para completares, tanto quanto possível, a ficha, e ilustrares e enriqueceres o teu trabalho final;

5ª- Elabora um cartaz com a ficha das formas geométricas e respectivas formas encontradas na Natureza, bem como com o padrão que, com uma delas, produziste.

Recursos

Como sabes, a Natureza é o local onde existem as formas que vais encontrar, mas o modo mais fácil de conseguires obter as imagens é nos livros, nas revistas e nos sites que a seguir se indicam.

- Botânicos:

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm203/numeros.htm#A%20espiral%20de%20Fibonacci

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm203/geometria.htm#Simetria%20na%20Natureza

http://www.revista-temas.com/contacto/NewFiles/Contacto5.html

http://www.ilharatimbum.com.br/hipacia/geometria/geometria1.htm

- Zoólogos:

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm203/numeros.htm#A%20espiral%20de%20Fibonacci

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm203/geometria.htm#Simetria%20na%20Natureza

http://www.revista-temas.com/contacto/NewFiles/Contacto5.html

http://www.ilharatimbum.com.br/hipacia/geometria/geometria1.htm

- Geólogos:

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2002/icm203/geometria.htm#Simetria%20na%20Natureza

http://www.musee.ensmp.fr/gm//599.html

http://www.musee.ensmp.fr/gm//900.html

http://www.musee.ensmp.fr/gm//755.html

http://www.musee.ensmp.fr/gm//854.html

http://www.musee.ensmp.fr/gm//394.html

Avaliação

O teu trabalho irá ser avaliado durante a apresentação na aula. A avaliação incluirá, não só o cartaz, mas também o modo como o conseguiste realizar. Por isso, avalia, agora, o trabalho feito pelo grupo, tendo em conta os seguintes aspectos:

- o grupo conseguiu fazer o cartaz;
- o grupo conseguiu desenhar o padrão;
- o grupo conseguiu pesquisar de forma organizada a informação pedida;
- todos os elementos do grupo cooperaram para a realização do trabalho;
- quais foram as dificuldades encontradas.

Se sentires necessidade regista a tua avaliação numa folha de papel.

Conclusão

Com este trabalho pudeste verificar que a Natureza é rica numa enorme variedade de formas geométricas, tanto nas espécies animais como vegetais e ainda nos materiais terrestres que são suportes de vida.

Encontramos assim a Matemática interligada com a Natureza.

Figura 4.4: A Natureza é rica numa enorme variedade de formas geométricas.

5 A Matemática e a Música

"A música é um exercício inconsciente de cálculos."

Leibniz

"A música é uma ciência que necessita possuir um estatuto definido. Suas regras devem ser extraídas de um princípio claro, inconcebível sem o auxílio da Matemática. Apesar de toda a experiência que eu possa ter adquirido em música por associar-me a ela por tanto tempo, devo confessar que somente com o auxílio da Matemática, minhas ideias tornaram-se claras e a luz substituiu uma escuridão da qual eu não estava ciente."

Rameau, 1722

5.1 A Matemática e a Música

A Matemática e a música possuem laços profundos já conhecidos desde a Antiguidade. As primeiras manifestações de algum tipo de relação entre essas áreas aparentemente tão diferentes perdem-se, como dizem os historiadores, na noite dos tempos, uma vez que em quase todos os povos da Antiguidade encontram-se registos destas áreas em separado. Por exemplo, o poder conquistador supra humano da música já se expressa na mitologia grega em Orfeu. A Matemática também faz-se presente desde os tempos mais remotos, por exemplo, na contagem de objectos.

Naturalmente, essas considerações levam a pensar que em algum momento, o homem tenha começado a conjecturar relações entre a Matemática e a Música.

O primeiro registo científico, de facto, que associa a Matemática à música, ocorre por volta do século VI a.C. na Grécia Antiga, na escola pitagórica. Estes pensadores relacionaram *intervalos musicais* com o conceito matemático de fracções, há mais de 2000 anos, fazendo uso de um instrumento de uma corda que denominaram de monocórdio.

5.1.1 A experiência do monocórdio e a música na escola pitagórica

Os primeiros sinais de casamento entre a Matemática e a música surgem no século VI a.C. quando Pitágoras através de experiências com sons do monocórdio, efectua uma das suas mais belas descobertas.

Possivelmente inventado por Pitágoras, o monocórdio é um instrumento composto por uma única corda estendida entre dois cavaletes fixos sobre uma mesa possuindo, ainda, um cavalete móvel. Pitágoras buscava relações de comprimentos – razões de números inteiros – que produzissem determinados intervalos sonoros. Deu continuidade ao seu trabalho investigando a relação entre o comprimento de uma corda vibrante e o tom musical produzido por ela.

Pitágoras observou que pressionando um ponto situado a 3/4 do comprimento da corda em relação à sua extremidade – o que equivale a reduzi-la a 3/4 do seu tamanho original – e tocando-a a seguir, ouvia-se uma quarta acima do tom emitido pela corda inteira. Exercida a pressão a 2/3 do tamanho original da corda, ouvia-se uma quinta acima e a 1/2 obtinha-se a oitava do som original.

A partir desta experiência, os intervalos passam a denominar-se *consonâncias pitagóricas.* Pitágoras estabeleceu relações entre a Matemática e a música associando, respectivamente, aos os intervalos musicais referentes às consonâncias perfeitas – oitava, quinta e quarta – as relações simples 1/2, 2/3 e 3/4. Estas correspondem às fracções de uma corda que fornecem as notas mais agudas dos intervalos referidos, quando se produz a nota mais grave pela corda inteira. Atribui-se o descobrimento dos intervalos consonantes a Pitágoras, embora provavelmente estes já fossem conhecidos desde muito antes em distintas culturas antigas (Fallas, 1992).

Influenciada pela cultura oriental, a doutrina pitagórica sustentava que *"Tudo é número e harmonia"*. Assim, os pitagóricos acreditavam que todo o conhecimento reduzir-se-ia a relações numéricas, posicionando-as como fundamento da ciência natural (Abdounur, 2003).

Figura 5.1: Pitágoras nas suas experiências musicais, numa gravura do século XV.

5.1.2 Kepler e a música dos planetas

Matemático, astrónomo e filósofo nascido em Weil, Johannes Kepler (1571-1630) apresentou fortes subsídios para a ciência musical. Em 1601, Kepler assumiu um posto de trabalho na organização de calendários e predição de eclipses como matemático e astrónomo da corte do imperador Rudolfo II em Praga até 1612, estabelecendo-se mais tarde em Linz, onde concluiu e publicou seu Harmonices Mundi em 1969.

Kepler julgou insatisfatória a experiência de Pitágoras com o monocórdio para o estabelecimento de intervalos consonantes. Assim, Kepler dividiu a corda em até oito partes. O cientista alemão verificou empiricamente a existência de oito consonâncias: uníssono (1/1), oitava (2/1), quinta (2/3), quarta (4/3), terça maior (5/4), terça menor (6/5), sexta maior (5/3) e sexta menor (8/5).

Kepler defendia a existência, conhecida desde os antigos, de escalas musicais peculiares a cada planeta, que soavam como se estes cantassem simples melodias, relacionando para isso velocidades dos planetas às frequências emitidas. Considerava os movimentos dos planetas uma música que traduzia a perfeição divina (Cartier, 1995).

De acordo com a Segunda Lei de Kepler – Leis das Áreas – para movimentos dos planetas, esses varrem radialmente áreas iguais em tempos iguais, o que implica máxima velocidade no periélio – posição mais próxima do Sol – e mínima no afélio – ponto diametralmente oposto. A fim de respeitar a Segunda Lei, Kepler tentou explicar a variação de velocidade de um planeta por uma metáfora musical. Admitindo que movimentos rápidos e lentos associavam-se respectivamente às notas agudas e graves em sua construção imaginativa, o astrónomo alemão considerou que a razão das velocidades extremas determinaria um intervalo musical representante do planeta referido. Por exemplo, as velocidades angulares no periélio e afélio de Saturno são respectivamente 135 e 106 arcos de segundo por dia, o que significa uma relação de 135/106; ora 135/108 = 5/4 correspondente ao intervalo de terça maior. A menos de diferenças desprezíveis do ponto de vista musical, desvelam-se os intervalos representantes de outros planetas (Kepler, 1977), obtendo-se:

Saturno	4/5 (terça maior)
Júpiter	5/6 (terça menor)
Marte	2/3 (quinta)
Terra	15/16 (semitom)
Vénus	24/25 (diese)
Mercúrio	5/12 (terça menor composta)

Transcrevendo a lei das áreas com uma roupagem musical, tem-se que cada planeta correspondia assim a um tema musical bem definido transcrito por Kepler. Afirma que cada planeta, cada astro possuía uma alma que lhe comunicava o movimento, traduzindo em um canto real, um hino à glória do Deus criador (Cartier, 1995).

5.1.3 A Matemática na Música

Se se está a ouvir os sons emitidos pelos os instrumentos de cordas, tais como o violino, o violão, o piano, etc., não passará inadvertido que resultam da vibração das cordas do próprio instrumento.

A altura da nota musical depende tanto do comprimento da corda que a emite, quanto da tensão a que a mesma está sujeita.

Como se referiu anteriormente, Pitágoras descobriu utilizando um monocórdio que: *"se uma corda e a sua tensão permanecem inalteradas, mas varia o seu comprimento, o período de vibração é proporcional ao seu comprimento"*.

Suponha-se que um fabricante de pianos utiliza, segundo Pitágoras, cordas de idêntica estrutura, mas de diferentes comprimentos, para alcançar a gama de frequências que tem este instrumento. Num piano moderno, com notas de frequência compreendidas entre 27 e 4096 Hz, a corda com maior comprimento resultaria 150 vezes mais longa que a de menor comprimento. Obviamente, isto teria impedido a construção do piano do exemplo, se não fosse pelas duas leis do matemático francês Mersenne. A primeira diz: *"Para cordas diferentes com um mesmo comprimento e igual tensão, o período de vibração é proporcional à raiz quadrada do peso da corda"*. O maior peso alcança-se, geralmente, enrolando um arame mais fino em espiral. De forma a evitar o excessivo comprimento das cordas destinadas aos sons graves.

A segunda lei expressa: *"Quando uma corda e o seu comprimento permanecem inalterados mas se varia a tensão, a frequência da vibração é proporcional à raiz quadrada da tensão"*. Seguindo-a evita-se que as cordas dos agudos tenham de ser muito curtas, com o aumento da tensão.

Ao incluir-se as armações de aço nos modernos pianos, foi possível aplicar tensões nos arames até valores que, antigamente, eram inconcebíveis, pois alcançam as 30 toneladas.[47]

5.1.4 A forma do piano de cauda

Na realidade, muitos instrumentos têm formas e estruturas relacionadas com vários conceitos matemáticos. As funções e as curvas exponenciais fazem parte desses conceitos. Uma curva exponencial é descrita por uma equação da forma $y = k^x$, onde $k > 0$. Um exemplo é $y = 2^x$. O respectivo gráfico tem a seguinte forma:

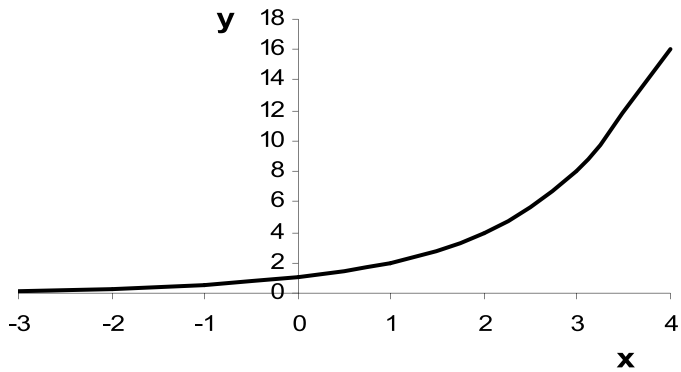


Figura 5.2: Gráfico da função exponencial $y = 2^x$.

Os instrumentos musicais, formados por cordas ou por colunas de ar, reflectem a curva exponencial na sua estrutura.

[47] Tensão é a força por unidade de superfície. 1 tonelada $= 1000\text{kg}$, o que corresponde a uma força $\text{F} = 1000 \times 9{,}8\text{N}$

O estudo da natureza dos sons musicais atingiu o seu apogeu com o trabalho de Joseph Fourier, um matemático do século XIX. Ele demonstrou que todos os sons musicais – instrumentais ou vocais – podiam ser descritos por expressões matemáticas, as quais eram as somas de funções periódicas simples de senos. Todos os sons têm três qualidades – altura, intensidade e timbre – que os distinguem entre si.

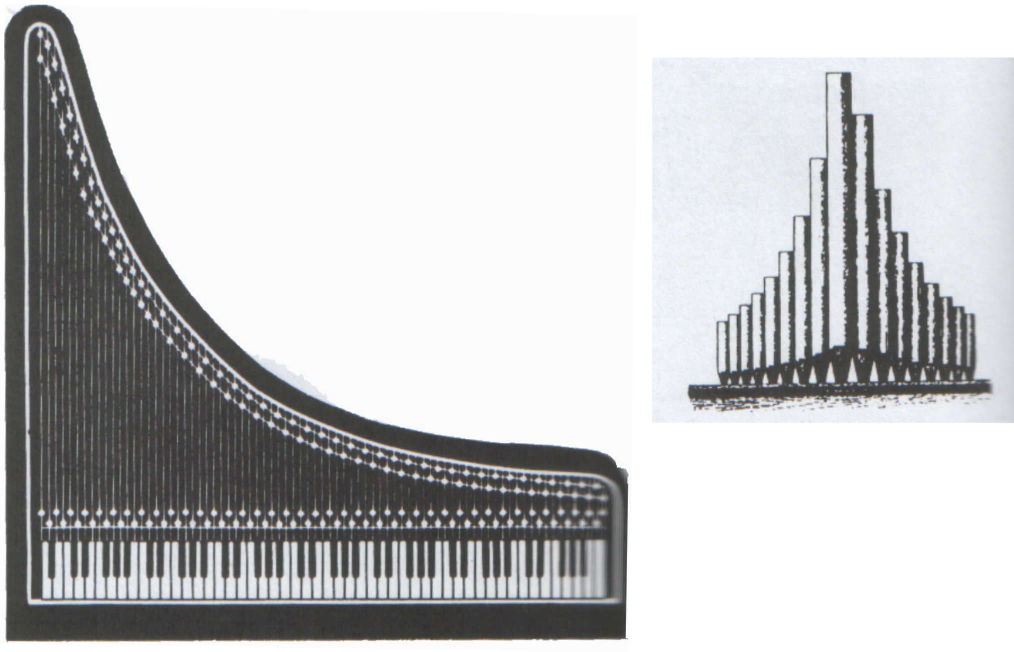


Figura 5.3: As curvas exponenciais são nítidas nas cordas do piano de cauda e nos tubos do órgão.

A descoberta de Fourier torna possível que as três propriedades dos sons sejam representadas graficamente de forma distinta. A altura está relacionada com a frequência da curva, a intensidade com a amplitude e o timbre com a forma da função periódica.

Sem a compreensão da Matemática na música, não teria sido possível o progresso na concepção de instrumentos.

Uma forma de arte nunca será objectiva e precisa a ponto de sobre ela haver unanimidade, mas as simetrias e belezas observadas nas leis que governam a combinação das estruturas matemáticas usadas na descrição de sons, guardam estreita relação com a área da Música conhecida como Harmonia. Dessa maneira, a

Matemática é capaz de mostrar e descrever, a partir de uma abordagem objectiva, as possibilidades das infinitas combinações de sons.

É a perfeição dessas leis que permite olhar a Música sob outra perspectiva, unindo os mundos maravilhosos da Arte e da Ciência.

Actividade nº7

Criação de um espaço lúdico-didáctico dedicado à Matemática

Este projecto aspira com uma Matemática activa para uma aprendizagem efectiva. Para conseguir uma motivação adequada e permanente dos alunos, as actividades laboratoriais ligadas a esta disciplina, podem comportar tarefas apelativas, de forma a olhar esta disciplina de ângulos que habitualmente não estão presentes na prática lectiva: o experimental, o estético, o recreativo e o cultural.

Para modificar a carga negativa que muitos associam à Matemática temos de recorrer a actividades diferenciadas, nas quais o jogo tem um papel preponderante uma vez que a componente lúdica contribuiu para o seu progresso ao longo dos séculos. Apesar de a noção de jogo aplicado à educação, se ter desenvolvido e penetrado tardiamente no universo escolar, introduziu transformações decisivas, dado que materializou a ideia de aprender divertindo, devido à sua fertilidade pedagógica essencial. O jogo adequado contribui para o desenvolvimento psicológico desde a simples observação até ao período lógico, passando pela experimentação e intuição, ou seja desde o raciocínio concreto ao abstracto.

Neste espaço os alunos podem jogar vários tipos de jogos:

- xadrez;
- jogos de tabuleiro;
- jogos em CD-rom;
- blocos lógicos;
- geoplanos;
- dominós de fracções;
- quadrados mágicos;
- quebra- cabeças (Tangram, o cubo de Rubik, entre outros…);
- etc.

E acerca dos quebra-cabeças…

O Tangram é um antigo quebra-cabeças de origem chinesa. Ao usar sempre as sete figuras geométricas que o compõem podem conseguir-se os mais variados desenhos.

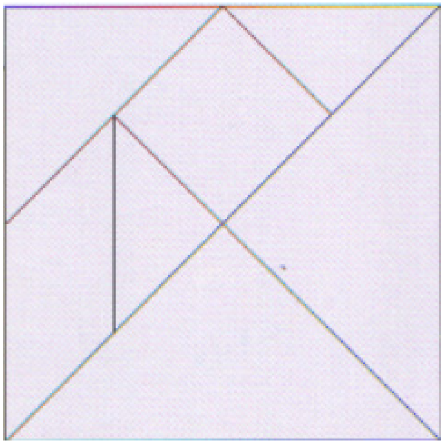


Figura 5.4: O Tangram.

O cubo de Rubik é um quebra-cabeças cúbico, concebido originalmente pelo matemático húngaro Erno Rubik, para mostrar as propriedades geométricas fundamentadas em giros e simetrias espaciais, que se converteu rapidamente num jogo popularíssimo.

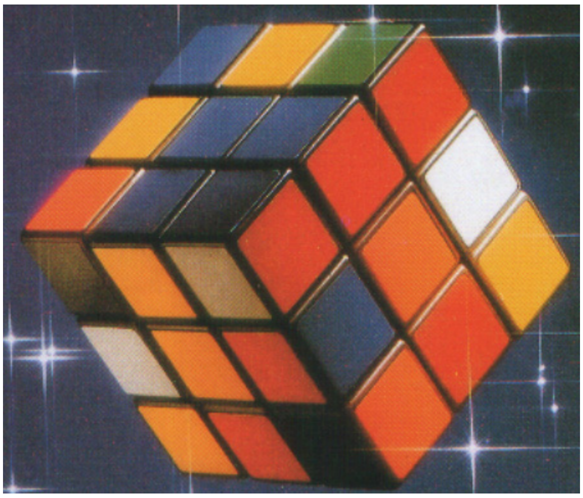


Figura 5.5: O cubo de Rubik.

Podem, ainda, ler ou requisitar livros relacionados com a Matemática. Têm, por fim, oportunidade para navegar na Internet em sites sobre Matemática. Quando os alunos têm tempo livre aparecem para se divertir com a Matemática!

Descrição do Projecto

Objectivos que se pretendem atingir com as acções a desenvolver:

- Desenvolver a curiosidade e o gosto de aprender
- Desenvolver hábitos de persistência
- Desenvolver o raciocínio
- Desenvolver a autoconfiança
- Desenvolver o espírito crítico
- Estimular a criatividade
- Agilizar o cálculo escrito
- Exercitar o cálculo mental
- Desenvolver a capacidade de resolver problemas
- Aprender, jogando, regras de civismo e convivência social
- Potenciar a integração em termos afectivos

Avaliação do projecto:

- Verificação das destrezas na manipulação de todo o material
- Verificação da progressão do raciocínio
- Verificação dos níveis de sucesso na disciplina de Matemática
- Verificação do interesse pelas aulas activas

Procurando dar um pequeno contributo para o estímulo do pensamento matemático, num contexto lúdico, visa-se despertar o interesse e mobilizar a actividade do aluno na Matemática, já que os jogos / quebra-cabeças alia raciocínio, estratégia e reflexão, com desafio e competição de uma forma lúdica.

Problema nº5

O Problema do Camelo

Abdul tinha vivido muitos anos. Um dia disse: “A minha hora já chegou. Está escrito. A vocês, porque são os meus filhos, deixo os meus camelos, que são as minhas únicas posses valiosas. Ao mais velho, Ali, deixo a metade dos meus camelos. A Faruk, uma quarta parte, e ao meu filho mais pequeno, Mustafá, uma quinta parte. Quando saibam aplicar as fracções serão capazes de abrir os vossos caminhos nesta vida”. Depois disso, o ancião morreu. Era a vontade de Alá.

Não obstante, o testamento de Abdul converteu-se prontamente num problema, porque tinha deixado 19 camelos. Ali estava atormentado: “Se herdo a metade de 19, o que farei com meio camelo?” Faruk sentia-se desconcertado: “Supõe-se que devo receber uma quarta parte, mas qual é a quarta parte de 19?” Mustafá perguntava a si mesmo abstraído: “Como vou dividir um camelo em cinco partes?” Então, passou por lá o seu tio Yussa, um homem prudente e sábio, montado na sua velha camela, Cleo. Yussa era tão generoso como sábio, e ofereceu-se para resolver-lhes o problema. Chegou mesmo a oferecer-lhes a sua adorada Cleo para juntá-la ao rebanho de Abdul. Eles disseram: “Não podemos aceitar a tua generosa ajuda”. Porém, ele insistiu e assim somou-se a camela aos 19 camelos de Abdul. Com 20 camelos, o problema era fácil. Ali percebeu prontamente que a metade de 20 eram 10 camelos. Faruk, ficou com a quarta parte de 20, os seus cinco camelos estavam encantados de não terem sido divididos. A quinta parte de 20 são quatro, portanto Mustafá também ficou contente. No total, os 10 camelos de Ali mais os cinco de Faruk mais os quatro de Mustafá somavam 19. E o sábio recuperou novamente a sua fiel Cleo. Como é possível que, depois de terem recebido todos mais do que esperavam, o ancião Yussa ainda pudesse recuperar sã e salva a sua encantadora camela?

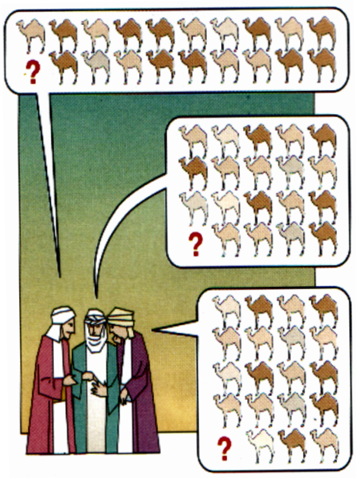


Figura 5.6: O Problema do Camelo.

Solução

Observe-se o que está a suceder. A herança inicial era de 19 camelos. Ali, que herdou a metade, teria recebido 9,5 camelos. A Faruk correspondia-lhe a quarta parte, isto é, 4,75 camelos. E ao mais pequeno, Mustafá, tocava-lhe a quinta parte, 3,8 camelos. Em total, depois de somar os camelos, obtém--se:

$$9{,}5 + 4{,}75 + 3{,}8 = 18{,}05 \text{ camelos}$$

Isto é, que do total da herança restavam 0,95 camelos sem repartir.

Ao acrescentar um camelo à herança, o sábio Yussa conseguia repartir o que sobrava de herança de forma que o número de camelos que se repartisse fosse sempre inteiro. Deste modo, Ali recebia 10 camelos, Faruk 5 camelos e Mustafá 4 camelos. No total, obtém-se:

$$10 + 5 + 4 = 19 \text{ camelos}$$

O curioso deste problema consiste em que, para conseguir esta razoável repartição, Yussa inclui a sua querida Cleo na operação, para depois, logicamente, voltar a recuperá-la. Este problema tem a sua explicação no facto de que:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{19}{20}$$

E, por conseguinte, ao somar as três fracções em que se divide a herança, não se obtém uma unidade.

O mesmo problema derivar-se-ia duma herança de 39 camelos, mas, neste caso, a Ali corresponderia-lhe 20 camelos, a Faruk 10 camelos e a Mustafá 8 camelos.

Desta forma, Yussa teria recuperado a sua incansável companheira de caminho e teria ganho outro camelo de obséquio como recompensa justa à sua sábia repartição.

Problema nº6

O Problema da Numeração das casas

Os números de três casas contíguas de uma rua somam 36. Qual é o número de cada uma delas?

Solução

Para compreender melhor a situação observe-se a ilustração:

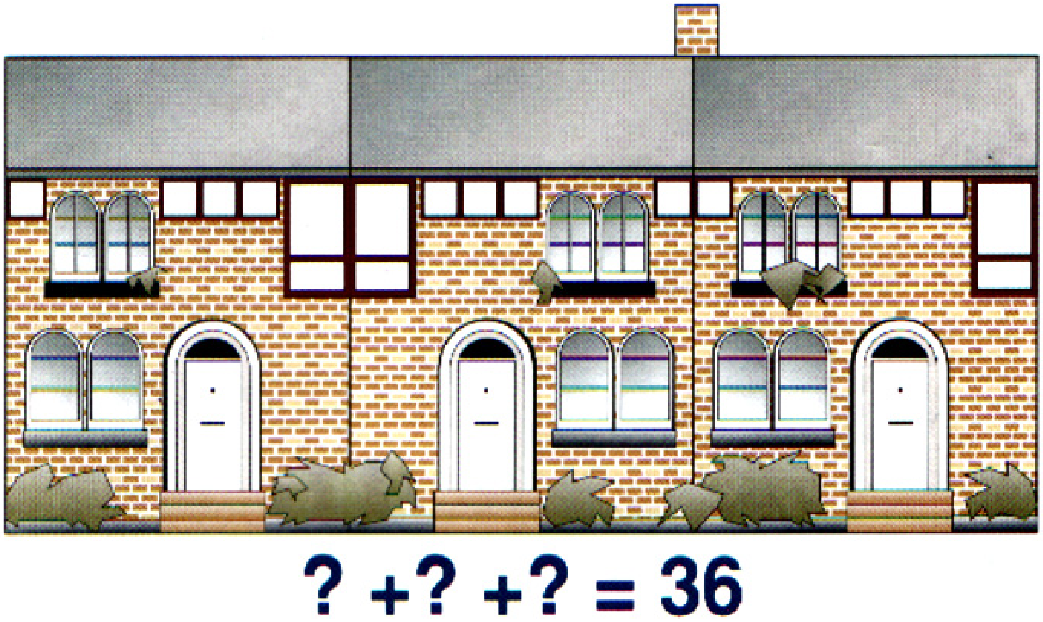


Figura 5.7: O Problema da Numeração das casas.

Chame-se x ao número da casa situada mais à esquerda, e suponha-se que a numeração das casas vai de dois em dois e cresce de da esquerda para a direita. De modo que, a numeração da casa do meio é igual a $x+2$, e a da casa situada mais a direita será igual a $x+4$.

Se se somar os três números e os igualar a 36, obtém-se a seguinte equação:

$$x+(x+2)+(x+4)=36$$

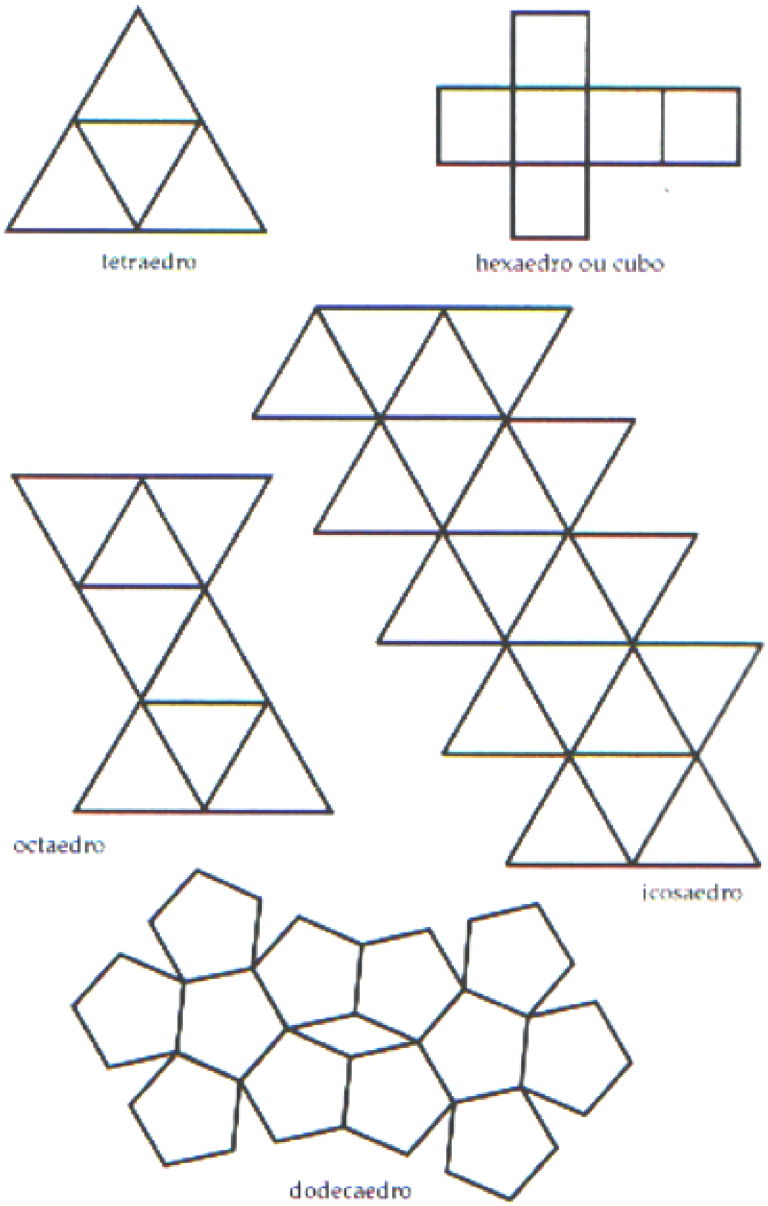
E, resolvendo a equação obtém-se $x=10$.

Portanto, os números de cada uma das casas são 10, 12 e 14.

Problema nº7

Os cinco Sólidos Platónicos

Apresentam-se de seguida as planificações dos cinco sólidos regulares:



Objectivo do exercício:

Desenhar, cortar e dobrar as planificações na sua forma tridimensional.

Problema nº8

Os Quadrados Mágicos

Os quadrados mágicos foram um passatempo muito popular. São quadrados (a mesma proporção de filas e colunas) de números com a particularidade de que, se estes são somados em qualquer direcção – por filas, colunas ou em diagonal –, dão sempre o mesmo resultado.

Figura 5.8: Este quadrado mágico encontra-se na gravura Melancolia do pintor e gravador alemão Albrecht Dürer. Todas as suas linhas somam 34, assim como o quadrado central e os quatro quadrados em que está dividido pelas suas linhas médias.

Completar este quadrado com os primeiros 16 números naturais, de modo que, ao somar as filas, colunas e diagonais obtém-se sempre o mesmo resultado.

Solução

A este quadrado atribuíam-lhe propriedades contra a peste, por isto era usado pendurado no pescoço, gravado numa plaquinha de prata.

1	15	14	4
12	6	7	9
8	10	11	5
13	3	2	16

Curiosidade nº4

O Pagamento Impossível

Conta-se que Sisa, inventor do xadrez, pediu como recompensa ao rei persa um grão de trigo pela primeira casa do seu tabuleiro, dois pela segunda, quatro pela terceira, oito pela quarta, e assim sucessivamente. O rei pensou que poderia cumprir facilmente a sua promessa, e ficou muito surpreendido quando lhe disseram que não havia trigo suficiente em todo o seu reino para satisfazer o pedido do matemático.

Efectivamente, o número de grãos de trigo necessários para satisfazer a Sisa é igual à soma dos termos de uma progressão geométrica de razão 2, primeiro termo 1 e número de termos 64, cuja soma é igual a 2^{64}-1 ou seja, 18 445 815 160 671 830 015.

Uma progressão geométrica é uma sucessão de números, de modo que o quociente entre dois números consecutivos quaisquer é sempre o mesmo.

A soma dos termos de uma progressão geométrica é dada pela fórmula:

$$S_n = a_1 \times \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

Aplicado ao problema:

$$S_{64} = 1 \times \frac{2^{64} - 1}{2 - 1} = 2^{64} - 1$$

Curiosidade nº5

A Suculenta Maçã

Suponham que pegam numa suculenta maçã e a dividem ao meio; de seguida dividem uma das metades de novo ao meio e assim sucessivamente. Quantos cortes seriam necessário dar na maçã para que o mais pequeno dos pedaços tivesse apenas um átomo?

Determinação da massa da maçã: 142 gramas.

Aproximação da constituição da maçã: 85% água, 15% sacarose (em massa).

Com as respectivas massas molares, determina-se a quantidade de moles e de seguida o número de moléculas. Como uma molécula de água tem 3 átomos e uma molécula de sacarose tem 45 átomos, conclui-se que a maçã tem cerca de $1{,}38 \times 10^{25}$ átomos.

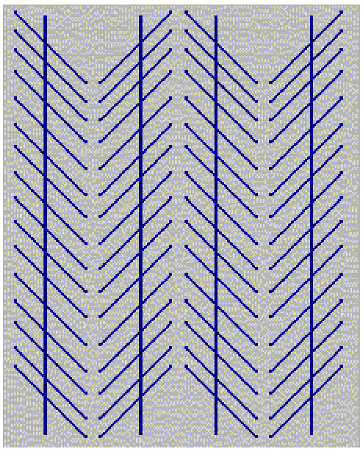
Assim,

$$2^{\text{cortes}} = 1{,}38 \times 10^{25}$$

Isto dá cerca de 84 cortes!!!!

Curiosidade nº6

Ilusões ópticas

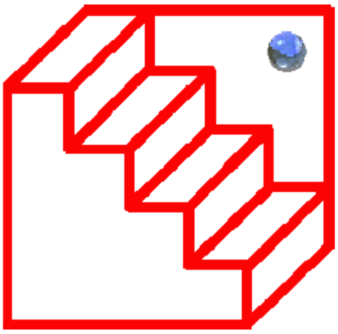


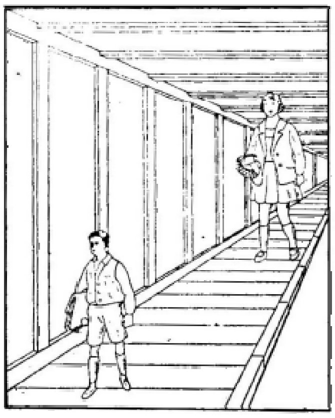
1- Estas 4 linhas são paralelas?

Solução:

Sim, as linhas diagonais fazem com que tenha-se a impressão de que as linhas se curvem e se aproximem. São as Linhas de Zollner, figura que visa justamente demonstrar a possibilidade de ilusões de óptica.

2- Fique a aproximadamente 30 cm da tela e olhe fixamente para o globo; a escada irá virar para baixo.





3- Estas crianças têm o mesmo tamanho?

Solução:

Sim, a imagem em perspectiva usada como fundo dá a ideia de que a de trás é maior.

Actividade nº8

Determinação da altura de uma árvore com o auxílio de um quadrante

Material necessário

- cópia do modelo de quadrante
- palhinha
- fio
- peso
- tesoura
- metro e cola

Construção do Quadrante

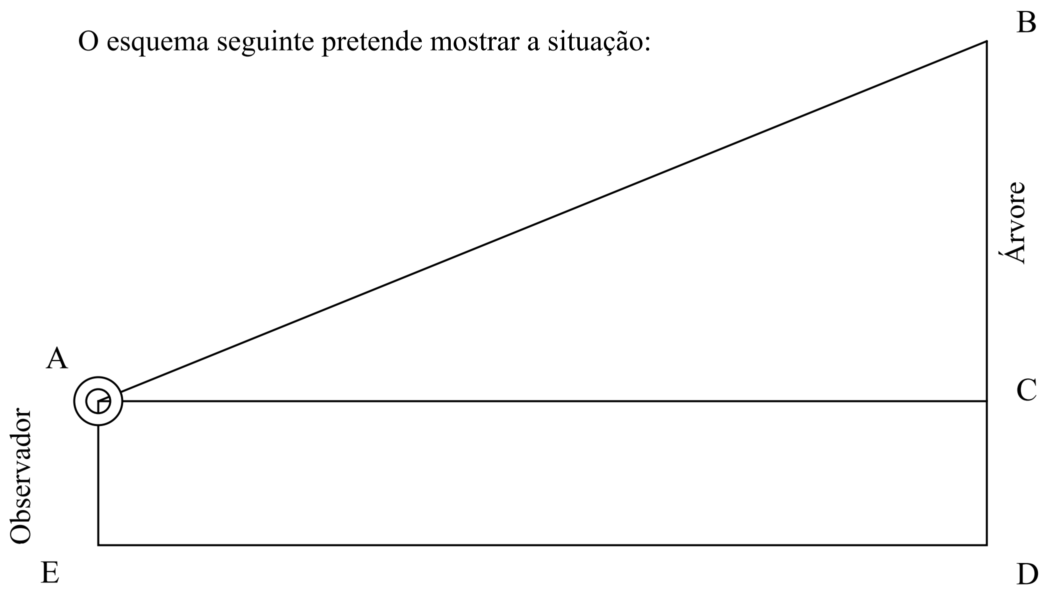
Para construir o quadrante, recorta a cópia do modelo, faz os furos para a palhinha poder passar, enfia o peso no fio e pendura esta no quadrante.

Descrição, cálculos e conclusão

Estes quadrantes têm uma curiosidade interessante, de um dos lados estão marcadas duas escalas em metros que permitem ler directamente a altura da árvore, colocando-se a 5 ou a 10 metros do objecto que se quer medir.

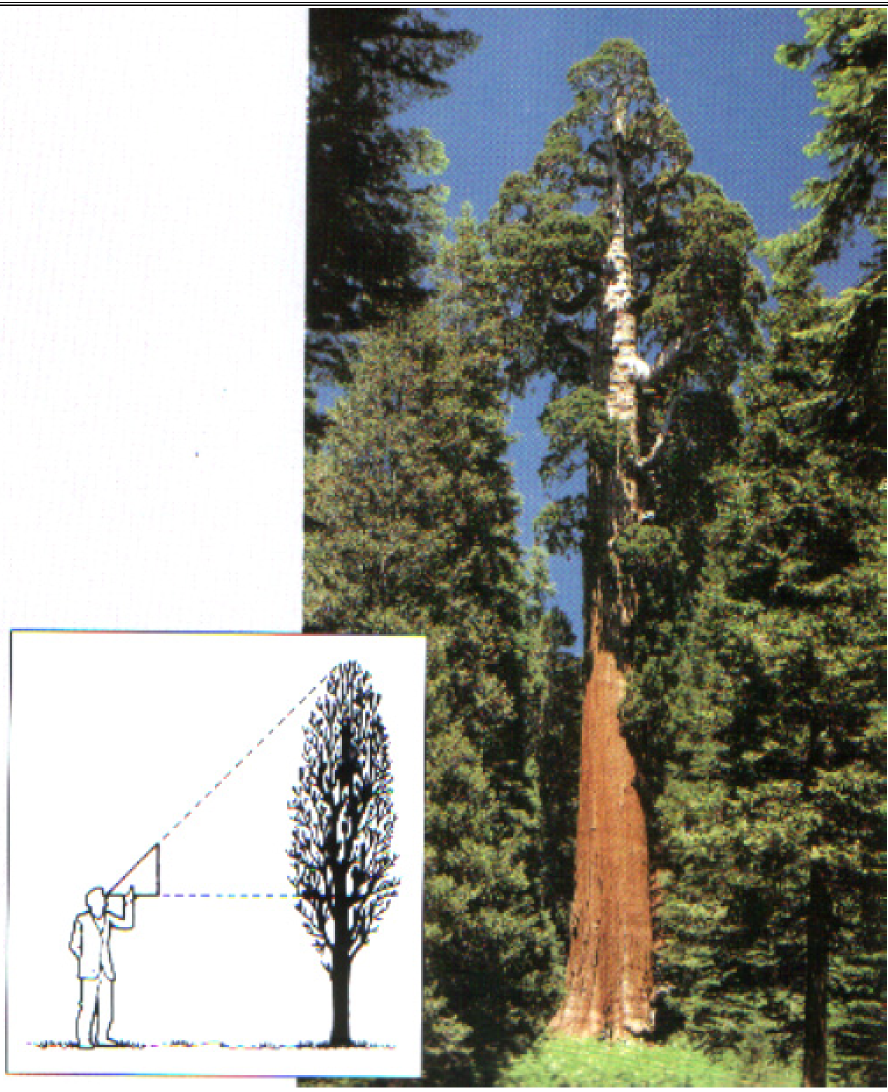
Assim, basta medir 5 m a partir da árvore e colocar-se nesse ponto e apontar o quadrante para o topo da árvore.

O esquema seguinte pretende mostrar a situação:



Se a altura lida no quadrante for de 2,20 m e como mostra a figura, tem de se somar a altura até aos olhos, por exemplo 1,51 m.

A altura da árvore seria, então de. $2,20 + 1,51 = 3,71\text{m}$.



Actividade nº9

Determinação da altura de uma árvore com o apoio de um espelho

Material necessário

- espelho;
- metro;
- marcador;
- lápis e papel.

Descrição, cálculos e conclusão

Coloca-se o espelho no chão a uma certa distância da árvore que se pretende medir. A alguma distância do espelho olha-se para ele e ajustando-se, isto é, ficando mais distante ou mais próximo até começar a ver, no espelho, a imagem da árvore (o cimo). Nessa altura, tem-se de medir algumas distâncias.

Entre o elemento do grupo que faz a observação e o ponto do espelho onde é visto o topo da árvore;

Entre a base da árvore e o mesmo ponto do espelho;

Regista-se os dados no papel.

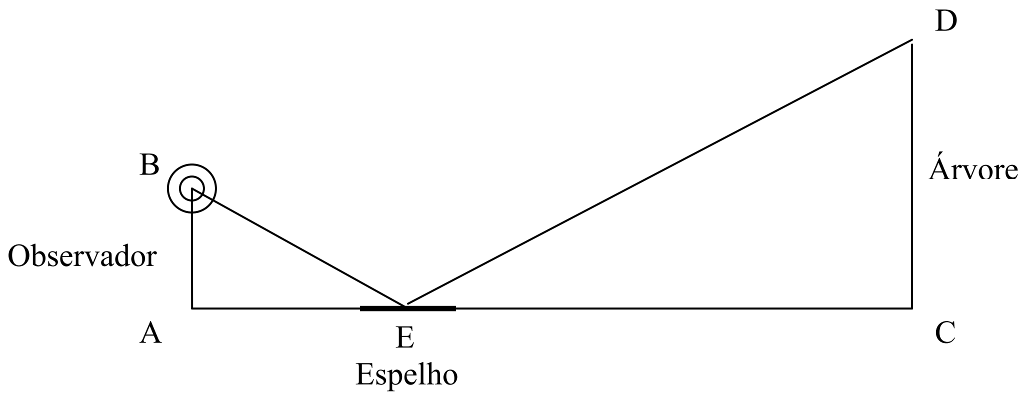


Figura 5.9: Esquema representativo da Actividade.

É fácil verificar que os triângulos [ABE] e [CDE] têm os ângulos iguais. Os ângulos com vértice em A e C são rectos, os ângulos com vértice em E são iguais pois "o ângulo incidente e o ângulo reflectido são geometricamente iguais" e os terceiros ângulos dos dois triângulos são iguais e a sua medida é a diferença entre 180º e a soma dos outros dois ângulos. Os triângulos são semelhantes e então os lados opostos a ângulos iguais são proporcionais. Assim, pode-se escrever:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{\overline{CD}}{\overline{CE}}$$

Substituindo pelos valores encontrados, determina-se $\overline{CD}$ que corresponde à altura pretendida, ou seja, a altura da árvore.

Actividade nº10

Concurso de Fotografia

Tema: "Matemática no dia-a-dia"

Objectivos:

- Envolver a comunidade escolar
- Incentivar para o aspecto lúdico da Matemática
- Descobrir Matemática, observando situações concretas
- Sentir a Matemática como uma actividade humana permanente

Destinatários:

- Alunos e Professores

Regulamento:

As fotografias devem conter elementos matemáticos (padrões, sólidos geométricos, planos, rectas, …) que possam ser identificados em situações do quotidiano.

- Estabelecimento de uma calendarização:
  Prazo de entrega;
  Semana de exposição das fotografias.
- Constituição de um júri que decidirá a melhor fotografia dos alunos e a melhor fotografia dos professores.
- Divulgação das fotografias vencedoras.
- Entrega dos respectivos prémios.

Nota: A Regra dos Terços é uma técnica utilizada na fotografia para se obter melhores resultados. Consiste em dividir a fotografia em nove partes iguais, traçando duas linhas horizontais e duas verticais imaginárias e posicionar nos pontos de cruzamento o assunto que se deseja destacar para se obter uma foto equilibrada. (in Wikipédia, Enciclopédia Livre)

A regra dos terços está bem evidente na Figura 5.10.

Figura 5.10: Esta fotografia constitui um exemplo clássico da regra dos terços.

William Frost, que fez campanha para a protecção das árvores e dos parques, aparece a 1/3 vertical, enquanto o seu cão, tal como o horizonte, estão colocados a 1/3 horizontal. A fotografia valeu a John Tarrant um prémio Kodak Press Photography Awards.

6 Actividade Experimental

6.1 Contextualização e Objectivos

O medo neurótico da Matemática, que a maior parte das pessoas sente, é uma barreira que as afasta de uma plena apreciação das descobertas científicas, e impede-as de fruir grandes áreas da Natureza, que têm sido reveladas por intensas investigações. Porque, como referia Roger Bacon: "A Matemática é a porta e a chave das ciências… Porque as coisas deste mundo não se podem conhecer sem se conhecer a Matemática."

A imagem negativa que a sociedade tem da Matemática é absorvida por alguns, (se não a maioria), dos nossos jovens e o estudo desta disciplina torna-se indesejável.

O objectivo do professor de Matemática não se reduz à exposição de conhecimentos, mas em estimular no aluno o "gene da Matemática", procurando transmitir que os notórios momentos de dificuldade, obstáculo e erro acontecem porque a Matemática é assim mesmo.

Sendo a Matemática necessária é pena que seja difícil para algumas pessoas. Dizem que, quando um dia Euclides estava ensinar geometria a um rei, este se queixou de essa ciência era muito difícil. Euclides respondeu-lhe: "Não existe nenhuma estrada real para a geometria." Se queremos aprender algo sobre a Natureza, se queremos apreciar a Natureza, temos de compreender a linguagem em que está escrita.

A Matemática e as Ciências da Natureza contribuem em conjunto com muitas pontes e assuntos que permitem aos alunos fazer uma interpretação do que os rodeia. É ao nível da interpretação do Mundo que reside a importância da interdisciplinaridade no processo ensino/aprendizagem na Matemática e Ciências da Natureza.

A Matemática, ao contrário das outras ciências, não é limitada pelo mundo, mas, a longo prazo, contribui para uma melhor compreensão desse mundo.

Relacionar estas duas ciências é um dos objectivos deste questionário[48]. O aluno não deve compartimentar o saber, mas pelo contrário, deve saber relacioná-lo.

[48] Questionário apresentado em 6.2.

Poderá a interdisciplinaridade entre estas duas disciplinas motivar o aluno, melhorando a visão que faz sobretudo da Matemática?

Pretende-se também, com este questionário, verificar a percepção que os alunos têm sobre esta relação.

Os 74 alunos inquiridos possuem idades compreendidas entre os 9 e os 13 anos, frequentando o 5º ano de escolaridade no ano lectivo 2005/2006, na Escola Básica 2,3 Penafiel nº3.

6.2 Questionário

NOME: ____IDADE: ___

1_ A Matemática é importante porque:

a) nos ajuda em situações do dia-a-dia.

b) a Natureza segue a linguagem da Matemática.

c) desenvolve o nosso raciocínio, mas não tem ligação com a Natureza.

d) A Matemática não é útil.

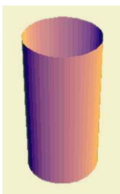
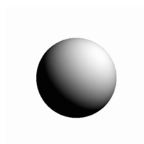
Rodeia as opções que achares correctas.

2_ Faz a correspondência da forma do corpo dos seguintes animais com o respectivo sólido geométrico.

● ● ●

● ● ●

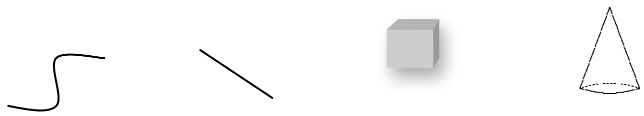
  

3_ Observa atentamente estes seres vivos. Faz a devida correspondência do ser vivo com o tipo de simetria que apresenta.

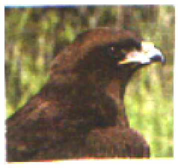
 ● ● Simetria radial

 ● ● Simetria bilateral

4_ Estabelece a correspondência dos seguintes elementos matemáticos com a forma do bico das aves representadas.



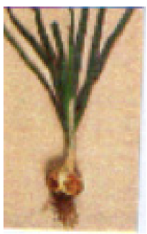
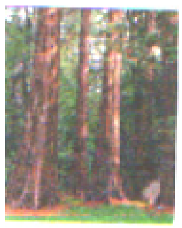
Linha curva Linha recta Cubo Cone

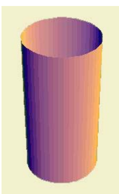



5_ Das figuras seguintes, liga as que são semelhantes.




6_ Relaciona a forma do caule das seguintes plantas com o respectivo sólido geométrico.



7_ Se utilizares numa observação microscópica uma ocular de 10x e uma objectiva de 40x, qual das seguintes operações utilizarias para calcular o valor da ampliação total da imagem?

a) 10 x 40
b) 10 + 40
c) 10 : 40

Rodeia a opção correcta.

8_ A água pode encontrar-se na Natureza nos três estados físicos: sólido, líquido ou gasoso. A água pode também mudar de estado físico. Ora repara,

Solidificação →

Nesta passagem do estado líquido para o estado sólido, o volume

a) aumenta.
b) diminui.
c) mantém-se.

Rodeia a opção correcta.

Nota: Quando colocas uma garrafa cheia de água no congelador, esta congela e a garrafa pode rebentar.

9_ Agrupa as diferentes partes de uma flor completa e faz a correspondência.

A - Conjunto dos órgãos de suporte •

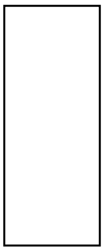
B - Conjunto dos órgãos de reprodução •

C - Conjunto dos órgãos de protecção •

10_ Qual destes rectângulos te parece mais perfeito?

a)

b)



c)

Rodeia a opção que achares correcta.

11_ Considera os seguintes seres vivos:

Escolhe a espiral que mais se parece com eles.

a)

b)

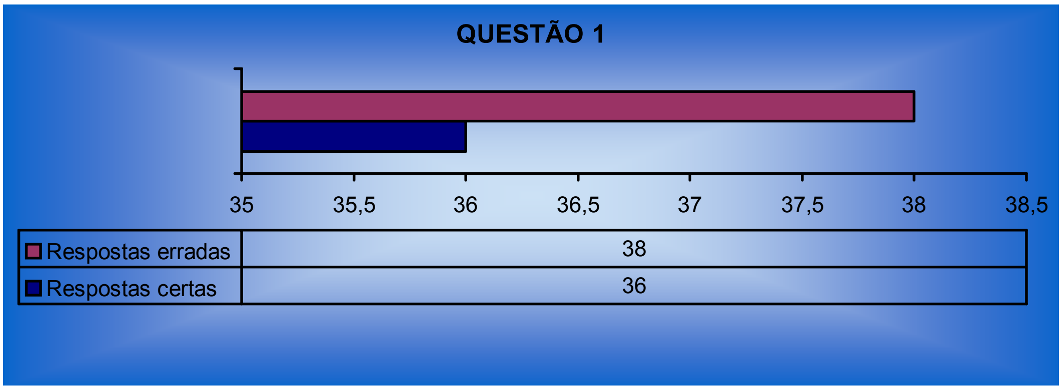
Rodeia a opção correcta.

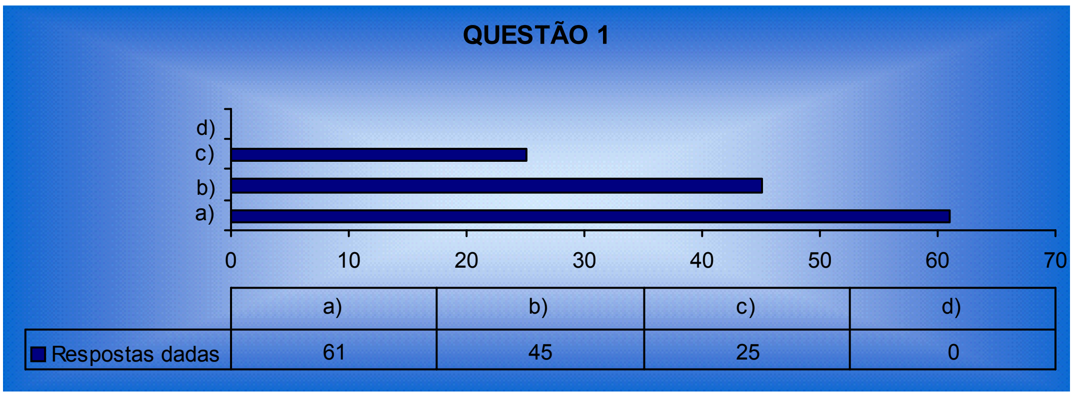
Bom Trabalho!

6.3 Interpretação dos Resultados do Questionário

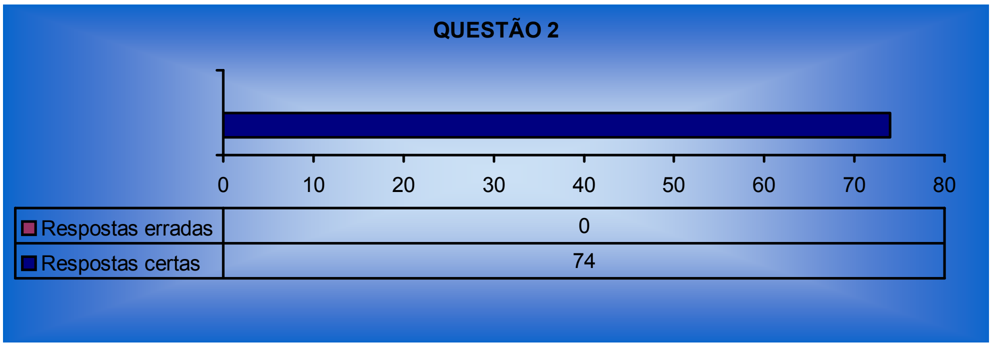
Procede-se, em seguida, à interpretação dos resultados do questionário: as questões serão analisadas individualmente, confrontando o objectivo da questão com os resultados expressos através de gráficos.

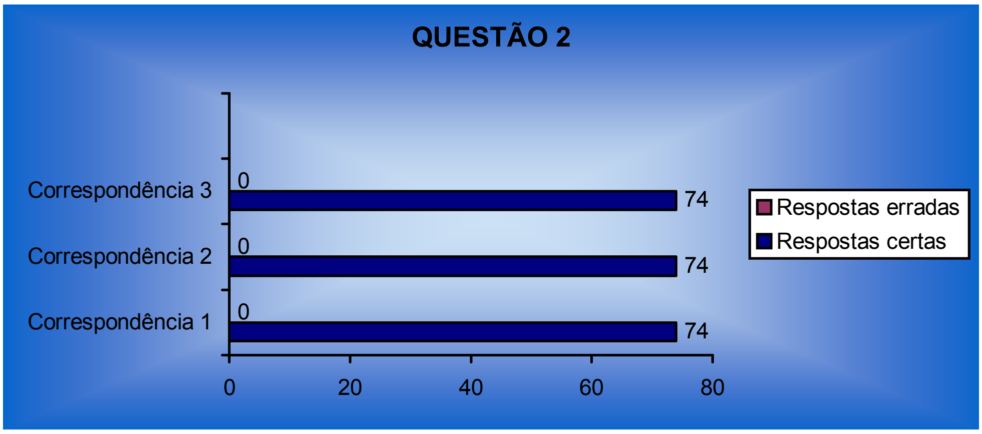
A **questão 1** tem como objectivo: avaliar a percepção que os alunos têm sobre a importância da Matemática e da relação que esta estabelece com a Natureza.



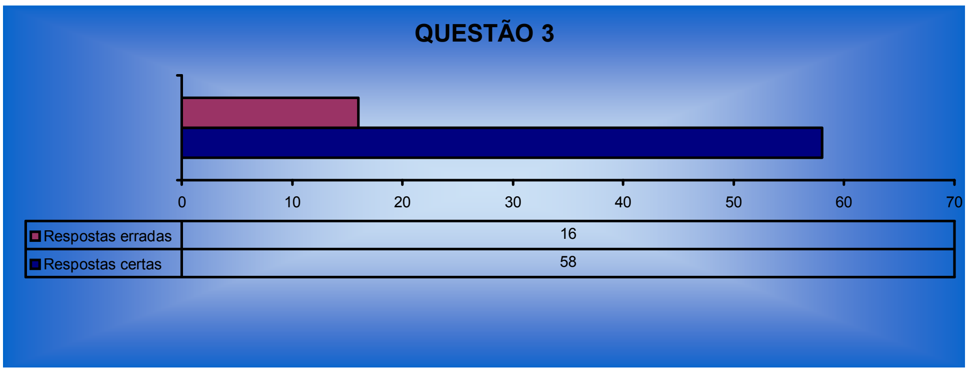


A **questão 2** tem como objectivo: relacionar a forma do corpo dos animais com sólidos geométricos.

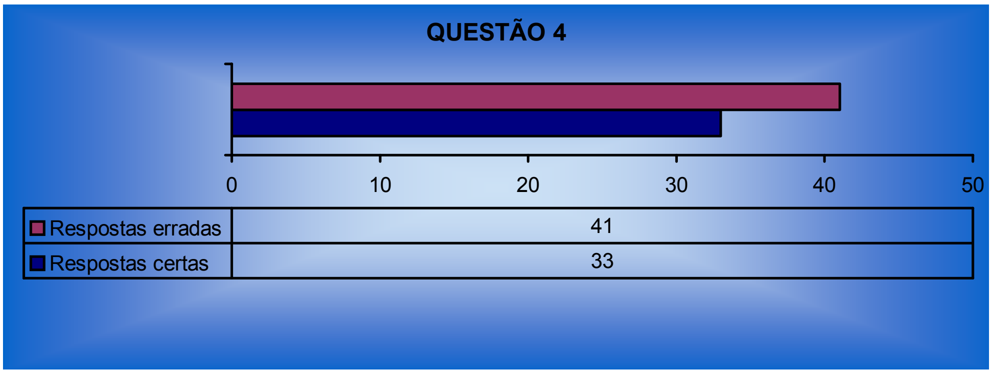


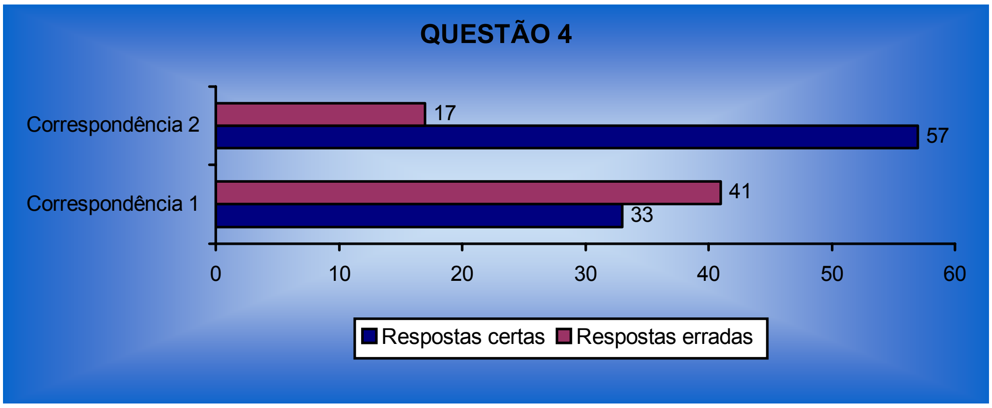


A **questão 3** tem como objectivo: percepcionar a existência de simetria nalguns animais.

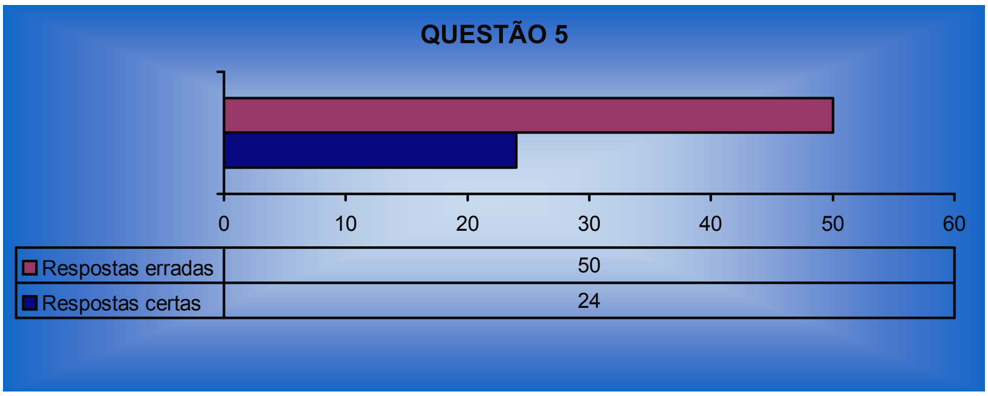


A **questão 4** tem como objectivo: relacionar o bico das aves com elementos matemáticos.

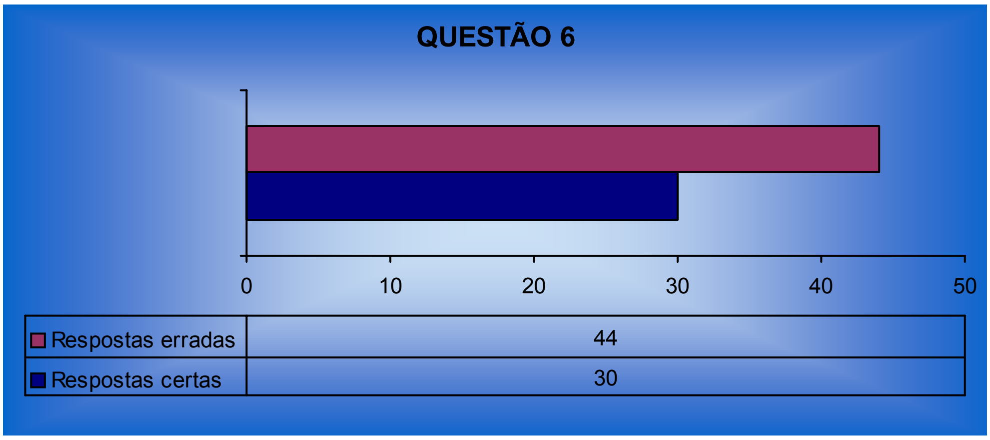


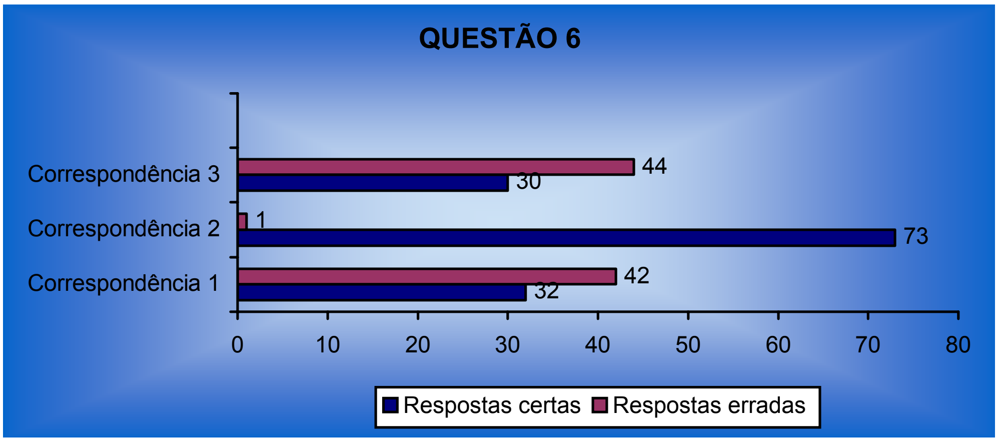


A **questão 5** tem como objectivo: relacionar as figuras semelhantes com as que os animais cujo desenvolvimento é directo apresentam em relação aos seus progenitores.

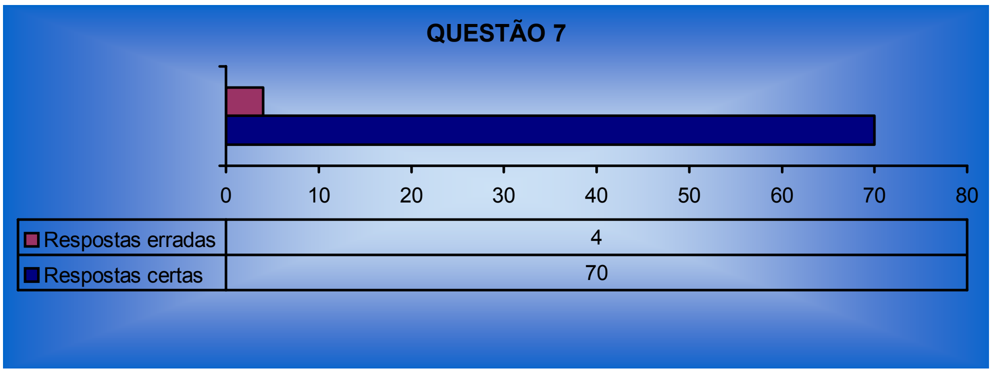


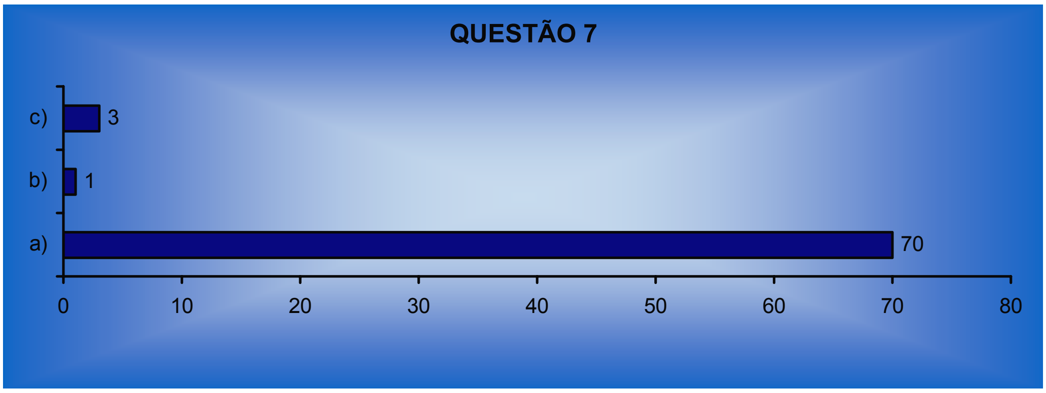
A **questão 6** tem como objectivo: relacionar o caule das plantas com sólidos geométricos.



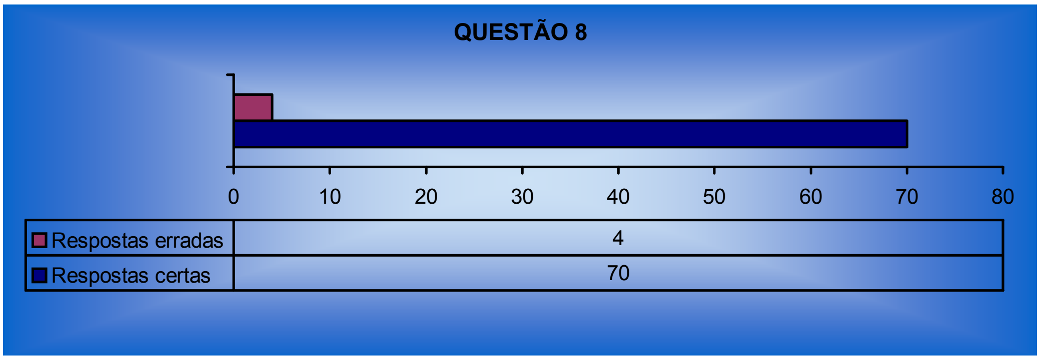


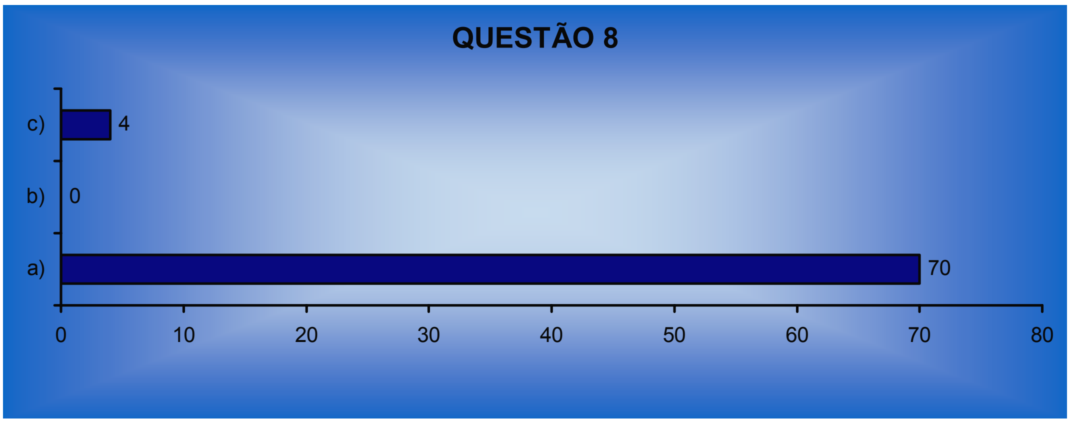
A **questão 7** tem como objectivo: relacionar o tamanho da célula vista ao microscópio com a operação matemática – multiplicação.



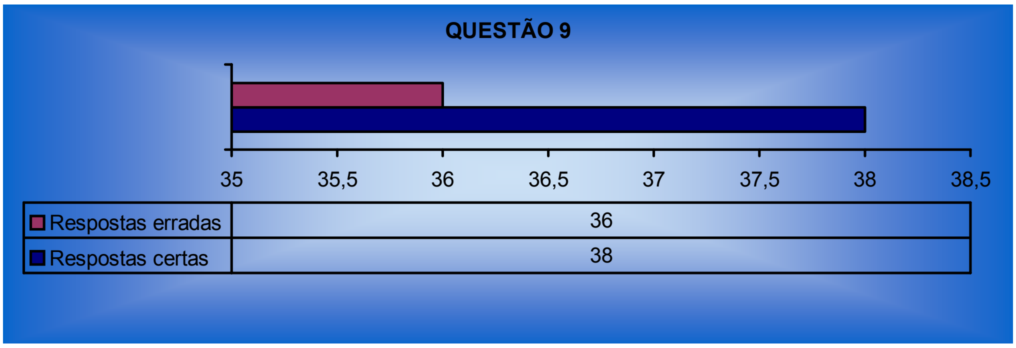


A **questão 8** tem como objectivo: verificar a variação do volume da água de acordo com o estado físico.

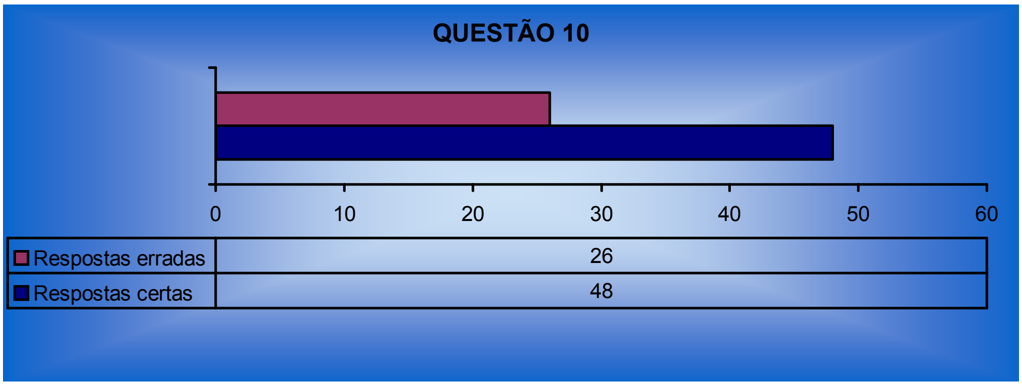


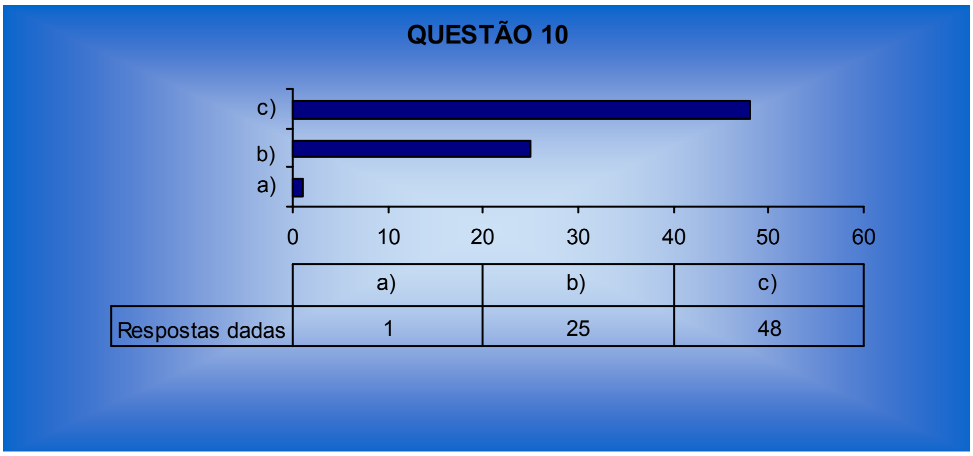


A **questão 9** tem como objectivo: agrupar as diferentes partes de uma flor completa de acordo com as suas funções.

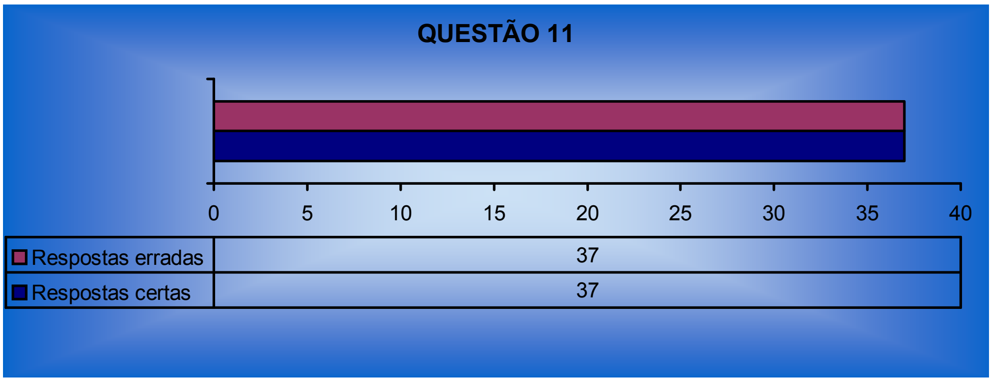


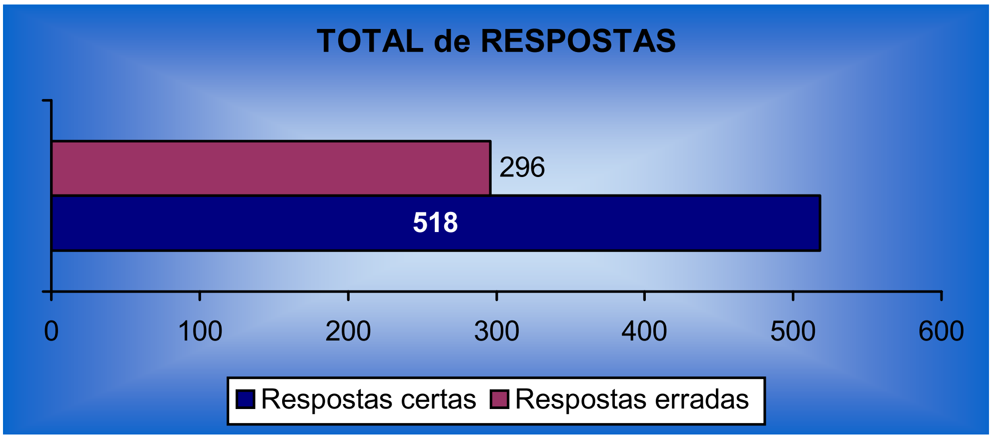
A **questão 10** tem como objectivo: averiguar se as medidas áureas (Rectângulo de Ouro) são as mais harmoniosas à vista.





A **questão 11** tem como objectivo: percepcionar a existência da espiral de Fibonacci nalguns seres vivos.





A interpretação dos resultados do questionário também deve ser vista de forma globalizante.

Quanto à validade externa, não se pode generalizar os resultados obtidos devido ao facto de ser uma investigação – acção muito ligada aos alunos envolvidos e ao universo onde foi recolhida a amostra ser pequeno: três turmas de uma mesma escola.

Estatisticamente, contrapõem-se 518 respostas correctas a 296 respostas incorrectas.

Dando uma visão diferente da Matemática, fazendo compreender que está presente na Natureza e que sem ela não compreenderíamos como funciona o mundo que nos rodeia, talvez, e até mesmo para os mais cépticos, a ideia que vale a pena procurar conhecê-la melhor esteja bem mais presente nas mentes dos alunos.

A Matemática e as Ciências da Natureza são ciências que têm muitos pontos de contacto, sendo no entanto, por vezes, necessário um olhar mais demorado na sua procura.

Essa interdisciplinaridade torna, assim, o processo de aprendizagem mais motivador (a avaliar pelos resultados do questionário) e, a posteriori mais eficiente.

Os alunos demonstraram-se muito receptivos, e no final quando confrontados com a questão de uma possível ligação entre as duas ciências, entusiasmados, responderam afirmativamente.

7 Conclusão

O presente trabalho teve várias contribuições de diversas índoles. O primeiro destaque é feito à componente de valorização pessoal e profissional. A investigação feita e a elaboração do trabalho proporcionaram a aquisição de uma perspectiva diferente e mais aprofundada da relação da Natureza com a Matemática.

Uma maior sensibilização para alicerçar o ensino/aprendizagem da matemática (e também das Ciências da Natureza) em motivações e contextos abrangentes e interdisciplinares foi também adquirida, tendo sido propostas actividades que se podem aplicar na e fora da aula. Além disso, o carácter aberto das referidas actividades pode polarizar e gerar novas actividades.

O inquérito realizado permitiu ter uma ideia mais fundamentada da forma como os alunos encaram a Matemática. Atendendo aos resultados da questão nº1, a maioria dos alunos inquiridos não percepciona a importância da Matemática e da relação que esta estabelece com a Natureza. No entanto, ao longo do questionário, quando confrontados com situações interdisciplinares, na generalidade, os alunos estabeleciam esta relação de forma natural. Embora a intenção não fosse um estudo alargado com os alunos, permitiu uma reflexão e tirar algumas conclusões, ainda que restritas e não susceptíveis de serem generalizadas.

A abrangência do tema – afinal o binómio Matemática-Natureza traduz "tudo" o que existe – não permitiu um maior aprofundamento dos assuntos tratados, optando-se pela diversidade. Contudo, o presente trabalho é o ponto de partida para trabalhos futuros, nos quais se desenvolverão os temas tratados e outros, no sentido de contribuir para um ensino/aprendizagem mais motivador e aliciante.

Nesta linha foi também implementado um portal na Internet[49] que visa ser um recurso e um apoio para os professores e alunos. Começou-se por disponibilizar as actividades e as curiosidades tratados neste trabalho, mas pretende-se aumentar as

---

[49] Ver Apêndice J.

potencialidades do portal, permitindo a interactividade para que este recurso seja um espaço de discussão e troca de ideias.

Além disso, é intenção implementar na escola um espaço com diversas vertentes, onde actividades orientadas, jogos didácticos, exploração de software científico, construções e actividades práticas, entre outras, serão desenvolvidas e integradas se possível no processo ensino/aprendizagem.

Referências Bibliográficas e Outras

ABDOUNUR, O.J. – **Matemática e Música: o pensamento analógico na construção de significados.** São Paulo . Escrituras Editora, 2003.

ALVES, Eliseu ; MORAIS, Aurora – **Saber(es) Articulado(s).** Porto . Porto Editora, 2006.

ASHALL, Frank – **Descobertas Notáveis!** Lisboa . Editora Replicação, 2001.

BENNETT, K. D. – **Postglacial population expansion of forest trees in Nortfolk, UK.** Nature, 1983.

BLATNER, D. – **O encanto do π.** Lisboa . Editora Replicação, 2001.

BURTON, Richard F. – **A Biologia através dos números.** Lisboa . Editora Replicação, 2001.

CARTIER, P. – **Kepler et la musique du monde.** Paris . La Reherche, 1995.

DAVIES, Paul – **Deus e a nova física.** Lisboa . Edições 70 Lda, 1988.

DAVIS, P.J. ; HERSH, R. – **A experiência matemática.** Lisboa . Gradiva, 1995.

FALLAS, L.A. – **La Analogia Pitagorica.** Revista de Filosofia de la Universidad de Costa Rica . Número extraordinário, 1992.

FEYNMAN, Richard P. – **O que é uma lei física?.** Lisboa . Gradiva, 1989.

FIOLHAIS, Carlos – **A coisa mais preciosa que temos.** Lisboa . Gradiva, 2002.

GALOPIM de CARVALHO – **Introdução ao Estudo dos Minerais.** Lisboa . Âncora Editora, 2002.

HUNTLEY, H.E. – **A divina proporção: um ensaio sobre a beleza na matemática.** Brasília . Editora Universidade de Brasília, 1985.

KEPLER, J. – **L'Harmonie du monde.** Bordeaux . Éditions Bergeret, 1977.

MATOS, Joel A. – **Enciclopédia Audiovisual-Educativa Matemática.** Lisboa . Oceano-Liarte Editores, S.A., 1998.

MINISTÉRIO da EDUCAÇÃO – **Organização Curricular e Programas.** Volume I, Ensino Básico, 2º Ciclo. Lisboa . Imprensa Nacional - Casa da Moeda, 2001.

PAPPAS, T. – **Fascínios da matemática.** Lisboa . Editora Replicação, 1998.

PARISI, A. – **Asas, Maçãs e Telescópios.** S. João do Estoril . Principia, 2005.

PARISI, A. – **Números mágicos e estrelas errantes.** S. João do Estoril . Principia, 2005.

PEREIRA, A. ; POUPA, C. – **Como escrever uma tese, monografia ou livro**

científico usando o Word. Lisboa . Edições Sílabo, 2004.

PORTO EDITORA – **Dicionário da língua portuguesa.** Porto : Porto Editora, 1999.

PROVIDÊNCIA, N. – **2+2=11.** Lisboa . Gradiva, 2001.

RAMEAU, J.P. – **Treatise on Harmony.** New York : Dover Publication, 1971.

ROBERTS, H. A. – **Studies on the weeds of vegetable crops. II.** Journal of Ecology, 1962.

ROCHA, F. – **Inovação na formação de professores.** “ Inovação, vol I, nº1, 1988”.

SÁ CHAVES, I – **Professores, eixos de mudança.** Aveiro . Estante, 1989.

SPIVAK, Michael – **Cálculo infinitesimal, 2ª Edition.** Barcelona . Editorial Reverté, S.A., 1994.

Sítios da Internet consultados

1. http://www.prof2000.pt/users/folhalcino/estudar/quematem/quematem.htm consultado em 9/2/2007
2. http://pessoal.sercomtel.com.br/matemática/fundam/numeros/numeros.htm consultado em 9/2/2007
3. http://matemática.no.sapo.pt/nreais/nreais.htm consultado em 9/2/2007
4. http://cognosco.blogs.sapo.pt/arquivo/1001102.html consultado em 9/2/2007
5. http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/cantor/teoriamatem.htm consultado em 16/2/2007
6. http://pt.wikipedia.org/wiki/Natureza consultado em 2/4/2007
7. http://pt.wikipedia.org/wiki/Corno_de_Gabriel consultado em 10/4/2007
8. http://www.ifrance.com/expo/lenombre/Somca.htm consultado em 13/4/2007

Apêndices

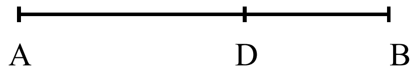
A. Demonstração: $\sqrt{2}$ não é um número racional

Aristóteles (384-322 a.C.), como exemplo de uma demonstração por redução ao absurdo, demonstrou que a raiz quadrada de 2 não é um número racional, isto é, não se pode escrever como uma fracção de dois números inteiros.

Por absurdo, suponha-se que existem dois números naturais p e q, primos entre si, tais que $x = \frac{p}{q}$ (isto é, suponhamos a fracção $\frac{p}{q}$ escrita na forma irredutível) e $x^2 = 2$. Então, $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, p^2 é um número par (porque $p^2 = 2q^2$) e, consequentemente, p também é par (porque se fosse ímpar seria $p = 2k + 1$ para algum número natural k e $p^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1$ seria ímpar). Se p é um número par, existe um natural k tal que $p = 2k$ e assim $4k^2 = 2q^2 \Leftrightarrow q^2 = 2k^2$. Então q seria par (porque q^2 é par), o que é absurdo visto que p e q são primos entre si.

B. Construção do Segmento Áureo

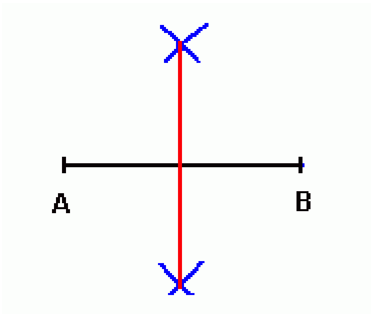
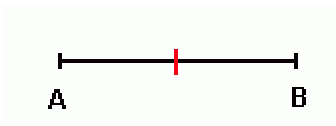
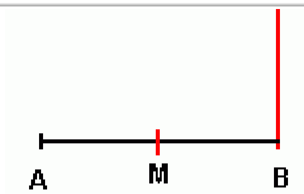
Tem-se um segmento de recta com extremidades A e B, pode-se determinar um ponto D neste segmento, dividindo-o em média e extrema razão.

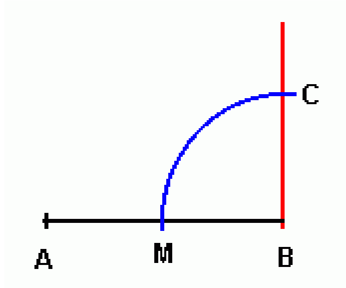
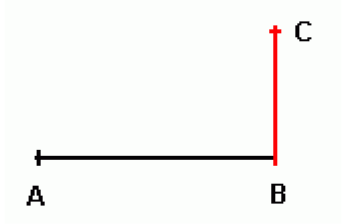
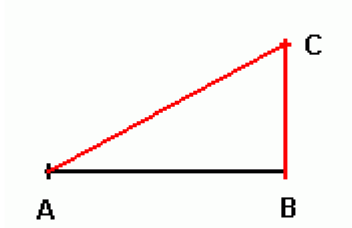
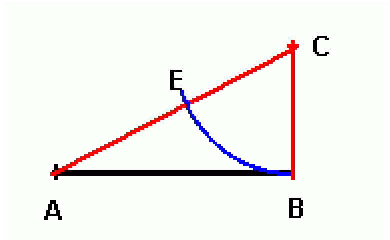
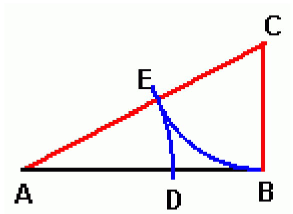


Isto significa que é possível obter um ponto D e permite obter um segmento áureo neste segmento AB. O objectivo é encontrar um ponto D entre A e B tal que a razão entre o segmento AB e o segmento AD seja Φ=(1,61803...).

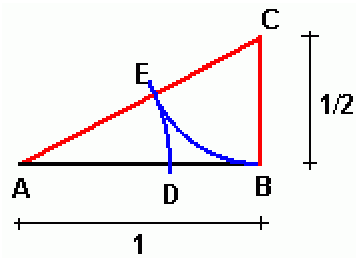
$$\frac{AB}{AD}=\frac{AD}{DB}=\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

O maior segmento AD é 1,61803... vezes a medida do menor segmento DB.

Obter o ponto médio do segmento AB. Colocar a ponta seca do compasso num extremo, abrir até o outro extremo e traçar um arco para cima e para baixo do segmento de recta AB. Repetir este procedimento com o outro extremo da recta, sem alterar a abertura do compasso. Os pontos onde os arcos se cruzam devem ser unidos por um segmento de recta (a vermelho) e o ponto onde este segmento cruza o primeiro segmento AB, é o ponto médio de AB;	
Agora traçar uma recta perpendicular a AB passando por B com a metade do comprimento de AB;	
Primeiro traçar a recta perpendicular a AB usando um jogo de esquadros;	

Com a ponta seca do compasso em B, abrir até o ponto médio M e traçar um arco até que este cruze a recta perpendicular a AB;	
Tem-se agora uma nova recta BC perpendicular a AB com exactamente a metade do comprimento de AB;	
Unir este ponto com o ponto A da primeira recta para formar um triângulo ABC;	
Colocar a ponta seca do compasso no vértice C do triângulo e abrir até o ponto B. Usar este raio para marcar o ponto E na hipotenusa do triângulo;	
Finalmente, com a ponta seca do compasso no vértice A, abrir até o novo ponto E marcado na hipotenusa, e usar este raio para marcar o ponto D na primeira recta AB. Este ponto é o ponto que divide o segmento AB em duas partes, onde o maior segmento é 1,6183....vezes o menor.	

Obteve-se assim o ponto D.



Se o lado AB do triângulo mede 1 unidade de comprimento, então o lado BC mede a metade e obtemos a medida da hipotenusa com o teorema de Pitágoras.

$$AC=\frac{5}{4}$$

Pode-se escrever que:

$$AC=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

O ponto E na hipotenusa é marcado de forma que CE tenha o mesmo comprimento que o lado CB, isto é $\frac{1}{2}$, então;

$$AE=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

O ponto D é marcado a mesma distância de A, assim

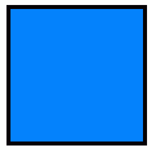
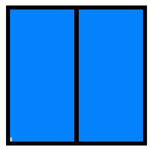
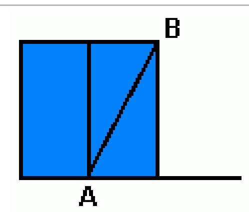
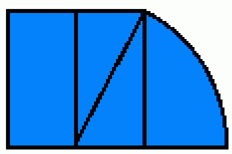
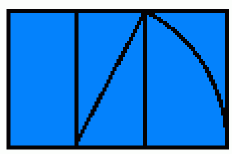
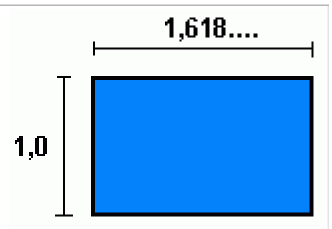
$$AD=AE=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

Tem-se então a proporção:

$$\frac{AB}{AD}=\Phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

C. Construção do Rectângulo de Ouro

Objectivo: Construir um rectângulo cujos lados medem 1 e 1,618034..., o rectângulo de Ouro.

Construir um quadrado de lado unitário;	
Dividir um dos lados do quadrado ao meio;	
Traçar uma diagonal do vértice A do último rectângulo ao vértice oposto B e estender a base do quadrado;	
Usando a diagonal como raio, traçar um arco do vértice direito superior do rectângulo à base que foi estendida;	
Pelo ponto de intersecção do arco com o segmento da base traçar um segmento perpendicular à base. Estender o lado superior do quadrado até encontrar este último segmento para formar o rectângulo;	
Este último é o rectângulo de Ouro!	

Seja um rectângulo em que X é a medida do comprimento e Y é a medida da altura do mesmo. Supõe-se que existe uma relação "especial" entre X e Y tal que $X:Y=Y:(X+Y)$. Numa proporção, o produto dos meios é igual ao produto dos extremos, logo:

$$X.(X+Y)=Y2$$

esta relação informa que Y é a média geométrica entre X e $X+Y$. Se se calcular a razão entre Y e X obtém-se Phi. O rectângulo com estas dimensões é o rectângulo de Ouro e os segmentos de medidas X e Y são os segmentos áureos. Tais medidas são usadas em testes para avaliar aspectos de beleza em gravuras ou objectos.

D. A Quadratura do Círculo

A quadratura do círculo é um problema proposto pelos antigos geómetras gregos consistindo em construir um quadrado com a mesma área de um dado círculo servindo-se somente de uma régua e um compasso num número finito de etapas. Em 1882, Ferdinand Lindemann provou que π é um número transcendente, isto é, não existe um polinómio com coeficientes inteiros ou racionais não todos nulos dos quais π seja uma raiz. Como resultado disso, é impossível exprimir π com um número finito de números inteiros, de fracções racionais ou suas raízes. A transcendência de π estabelece a impossibilidade de se resolver o problema da quadratura do círculo: é impossível construir, somente com uma régua e um compasso, um quadrado cuja área seja rigorosamente igual à área de um determinado círculo (in Wikipédia, a Enciclopédia Livre).

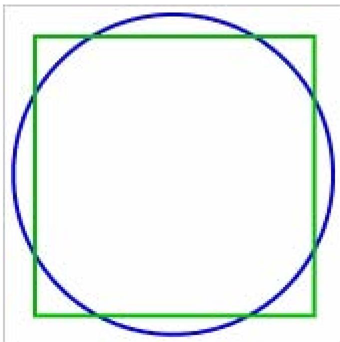


Figura D.1

E. Construção da curva do floco de neve (A curva de Koch)

A curva de floco de neve tem este nome devido à forma semelhante que os flocos assumem quando se formam. Para gerar uma destas curva começa-se com um triângulo equilátero (figura E.1).

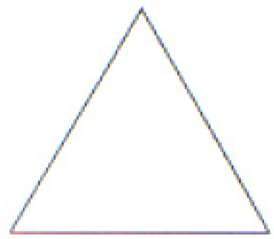


Figura E.1

Divide-se então cada lado do triângulo em três partes iguais. Em seguida, desenha-se um triângulo equilátero para o exterior, a partir dos pontos resultantes da divisão dos lados originais, mas apaga-se a base do novo triângulo que está sobre o lado antigo (figura E.2).

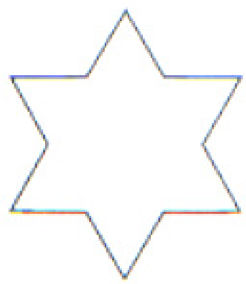


Figura E.2

Continua-se este processo em todos os triângulos equiláteros entretanto formados, dividindo-se em três partes os lados e construindo-se novos triângulos (figura E.3).

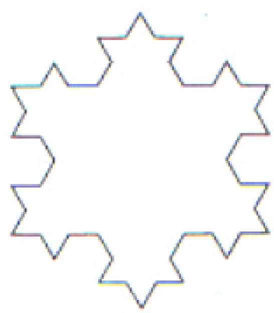


Figura E.3

É assim que, a partir da repetição deste processo, é gerada a curva de floco de neve (Figura E.4).

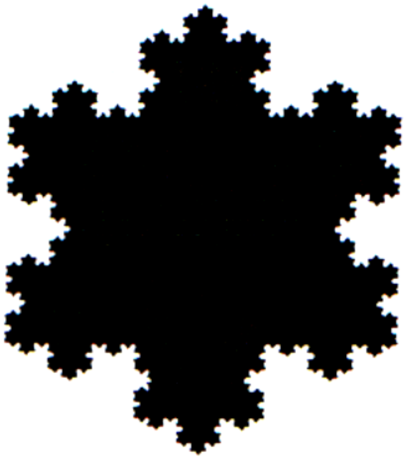


Figura E.4

O perímetro cresce indefinidamente, sem limite. Esta curva pode ser desenhada numa pequena folha de papel, pois tem área finita, igual a 8/5 da área do triângulo original.

A característica espantosa desta curva reside no facto de ter área finita e perímetro infinito[50].

[50] Pode-se confrontar esta característica com a evidenciada na Curiosidade nº3 (O Problema do Pintor), onde se tinha uma área infinita para um volume finito.

F. Os cinco Sólidos Platónicos

Os sólidos platónicos são sólidos convexos cujas arestas formam polígonos planos regulares congruentes. Só há cinco sólidos com estas características.

A palavra sólido significa qualquer objecto tridimensional, como uma rocha, um feijão, uma esfera, uma pirâmide, uma caixa ou um cubo. Há um grupo muito especial de sólidos denominados sólidos regulares que foram descobertos na Antiguidade pelo filósofo grego Platão. Um sólido é regular se todas as suas faces tiverem tamanho e forma iguais. Assim, um cubo é um sólido regular porque todas as suas faces são quadrados com o mesmo tamanho.

Platão demonstrou que só há cinco sólidos convexos regulares possíveis. Estes sólidos são o tetraedro, o cubo ou hexaedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro.

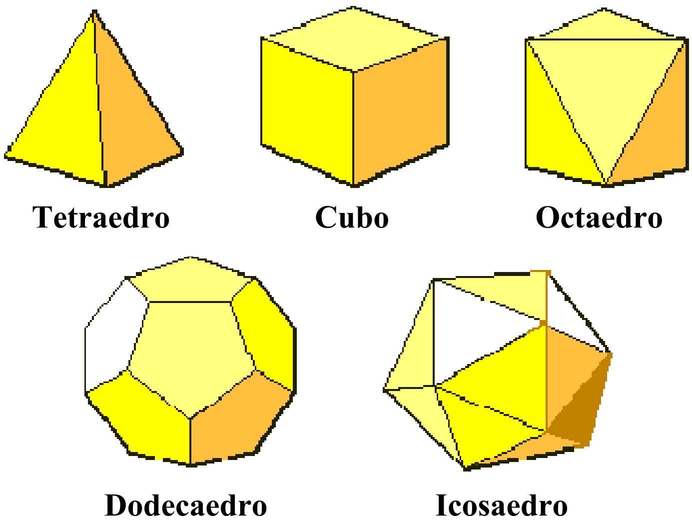
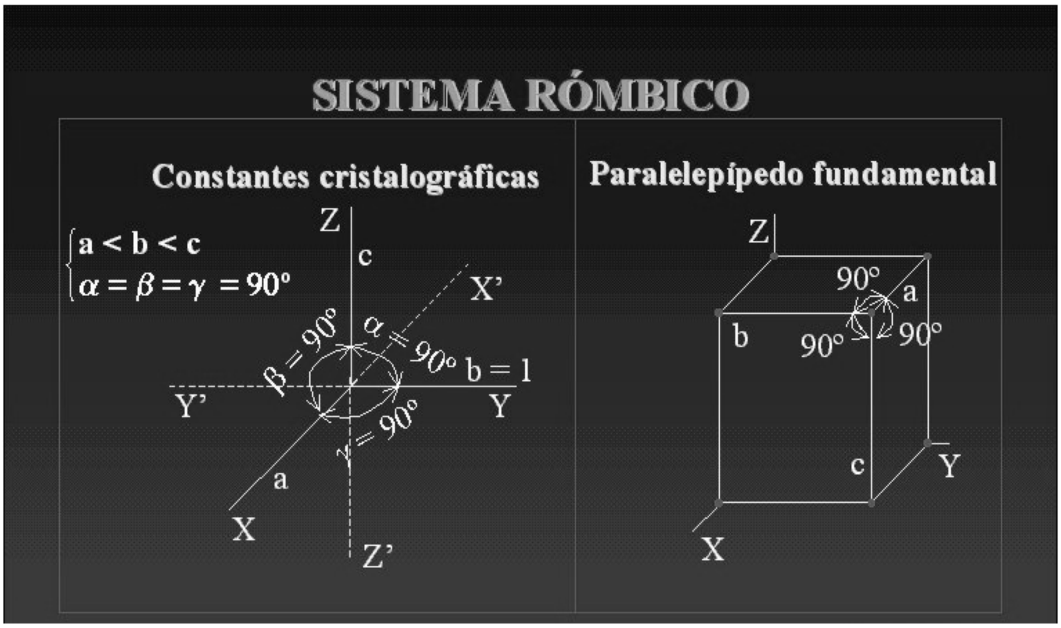
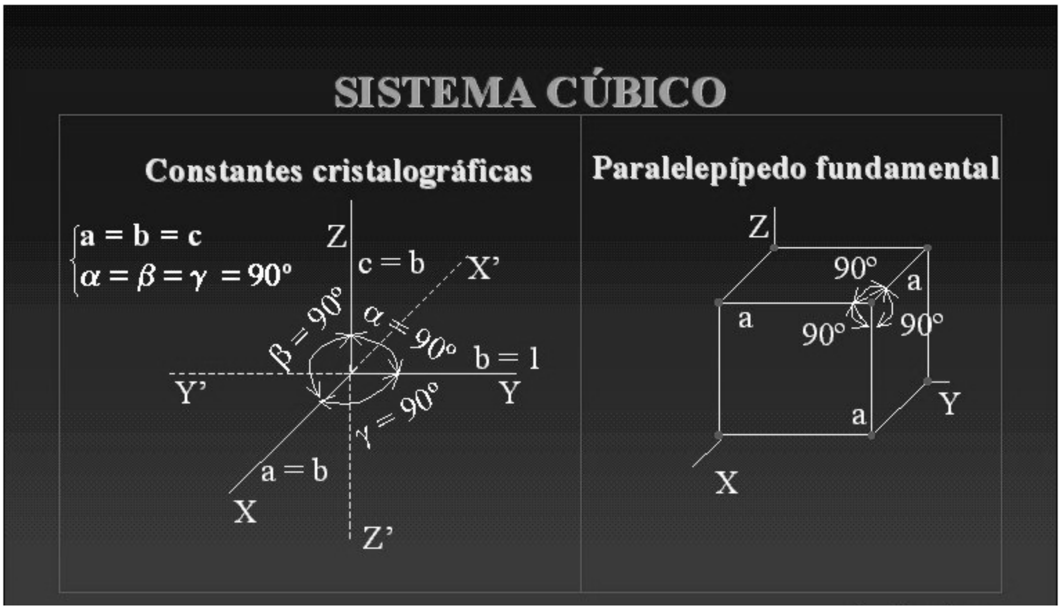
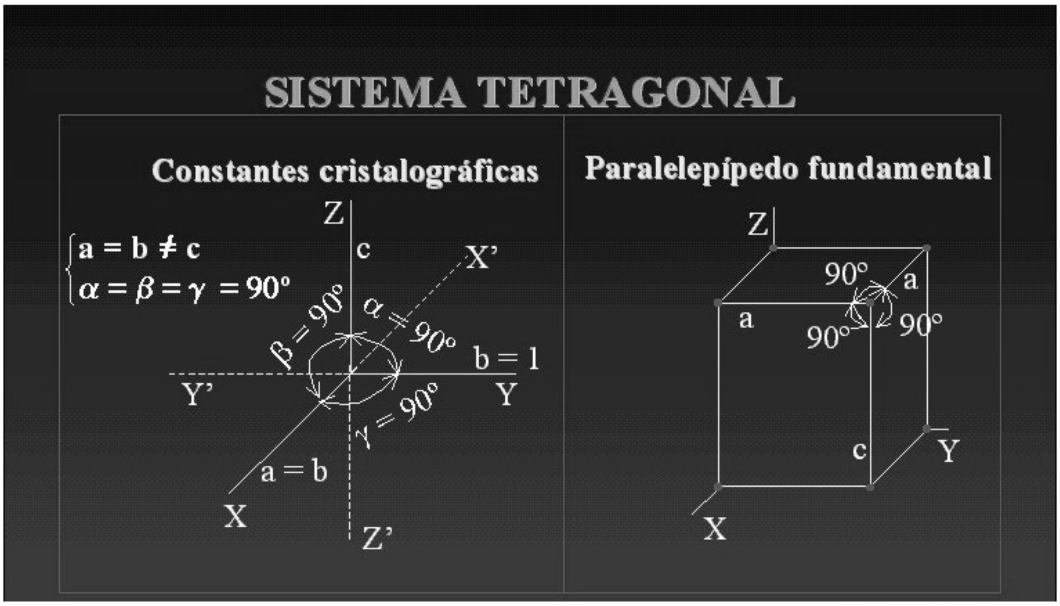


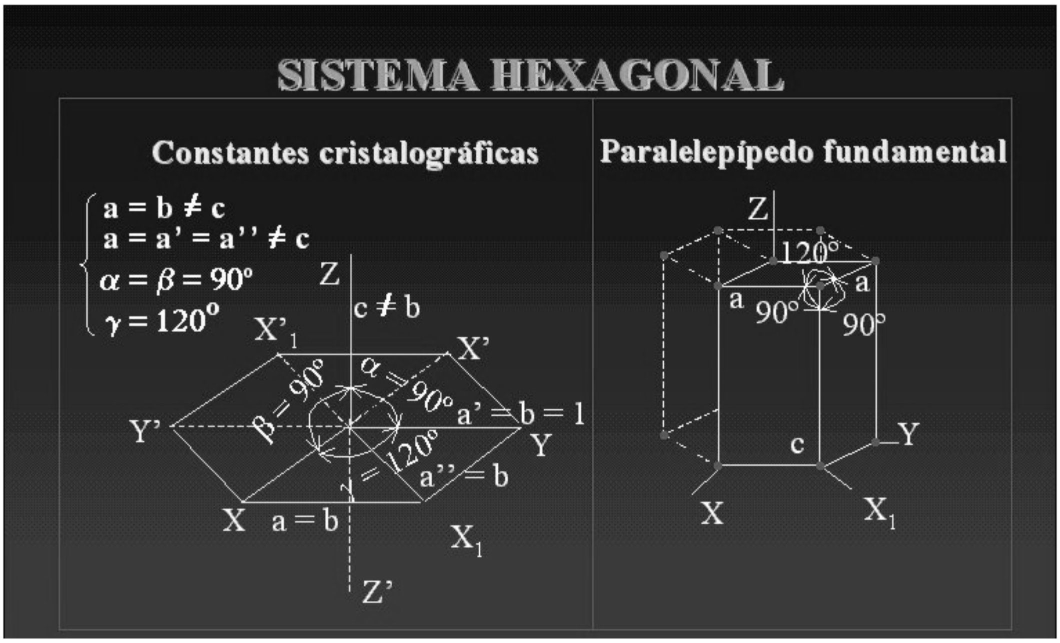
Figura F.1: Os cinco Sólidos Platónicos.

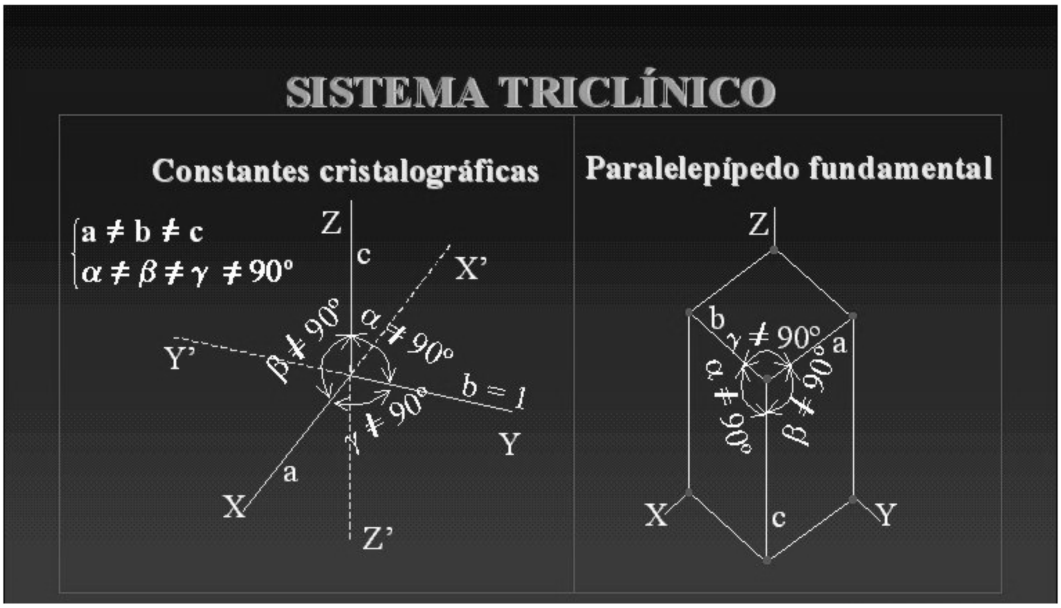
G. Os Sistemas Cristalográficos

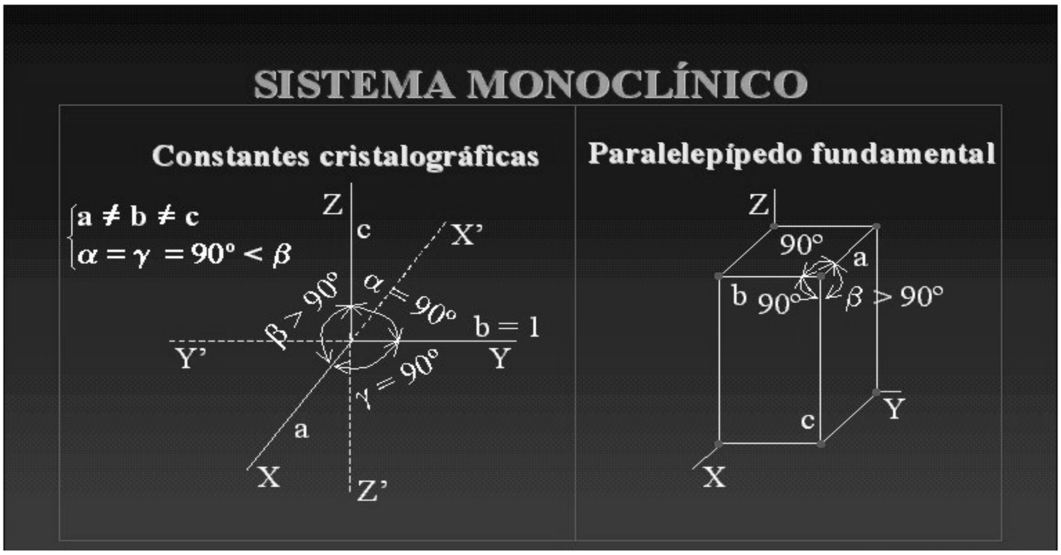


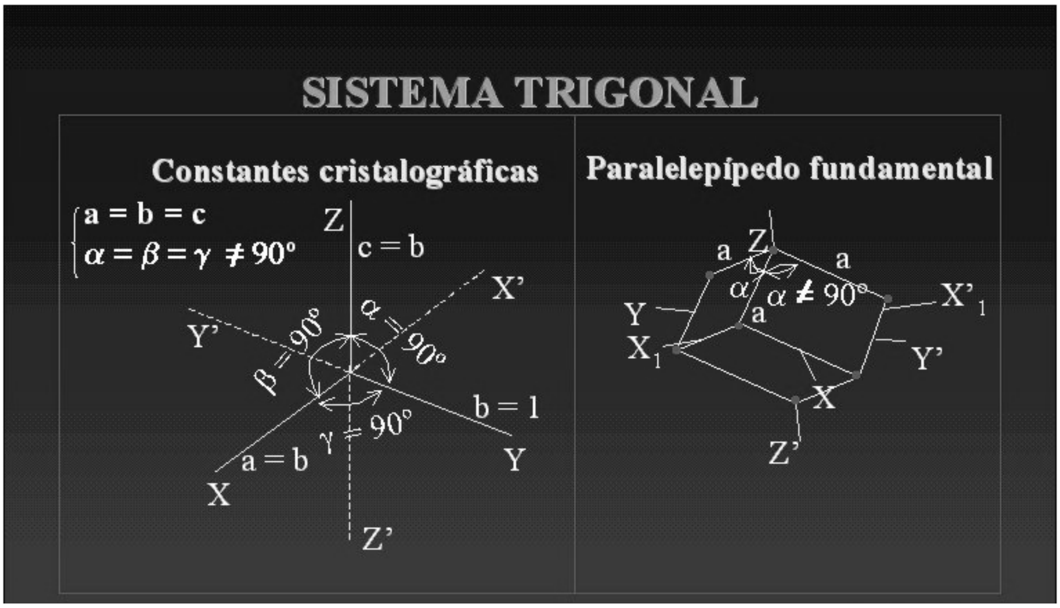



SISTEMA TETRAGONAL
Constantes cristalográficas
Paralelepípedo fundamental
a = b ≠ c
α = β = γ = 90º
Z
c
X'
β = 90º
α = 90º
b = 1
Y'
Y
γ = 90º
a = b
X
Z'
Z
90º
a
a
90º
90º
c
Y
X


SISTEMA HEXAGONAL
Constantes cristalográficas
Paralelepípedo fundamental
a = b ≠ c
a = a' = a'' ≠ c
α = β = 90º
γ = 120º
Z
c ≠ b
X'1
X'
β = 90º
α = 90º
a' = b = 1
Y'
Y
γ = 120º
a'' = b
X
a = b
X1
Z'
Z
120º
a
a
90º
90º
c
Y
X
X1


SISTEMA TRICLÍNICO
Constantes cristalográficas
Paralelepípedo fundamental
a ≠ b ≠ c
α ≠ β ≠ γ ≠ 90º
Z
c
X'
Y'
β ≠ 90º
α ≠ 90º
b = 1
γ ≠ 90º
Y
a
X
Z'
Z
b
γ ≠ 90º
a
α ≠ 90º
β ≠ 90º
X
c
Y


SISTEMA MONOCLÍNICO
Constantes cristalográficas
Paralelepípedo fundamental
a ≠ b ≠ c
α = γ = 90º < β
Z
c
X'
β > 90º
α = 90º
b = 1
Y'
Y
γ = 90º
a
X
Z'
Z
90º
a
b
90º
β > 90º
c
Y
X


SISTEMA TRIGONAL
Constantes cristalográficas
a = b = c
α = β = γ ≠ 90º
Z
c = b
X'
Y'
β ≠ 90º
α ≠ 90º
b = 1
γ ≠ 90º
a = b
X
Y
Z'
Paralelepípedo fundamental
a
Z
a
α
α ≠ 90º
X'1
Y
a
X1
Y'
X
Z'

H. Demonstração: Dos três polígonos (hexágono, quadrado e triângulo), o hexágono é o que tem menor perímetro para uma dada área.

Uma vez que o problema se traduz numa maximização da área e minimização do perímetro, vai-se averiguar de que forma cada um dos polígonos responde a esta questão.

Supondo o perímetro fixo, p, qual dos três polígonos (quadrado, triângulo e hexágono) apresenta maior área?

Lado do quadrado: $p/4$

Lado do triângulo: $p/3$

Lado do hexágono: $p/6$

Área do quadrado $=(p/4)\times(p/4)=p^2/16$

Área do triângulo=(base $\times$ altura)/2

Cálculo da altura:

$sen60^{\circ}=$ altura/lado

altura= $sen60^{\circ}\times$lado

altura= $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{p}{3}$

Área do triângulo= $\frac{p}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{p}{3}/2=\frac{p^2\sqrt{3}}{18}/2=\frac{p^2\sqrt{3}}{36}$

Área do hexágono=6 $\times$ lado $\times$ apótema/2=3 $\times$ lado $\times$ apótema

Cálculo da apótema:

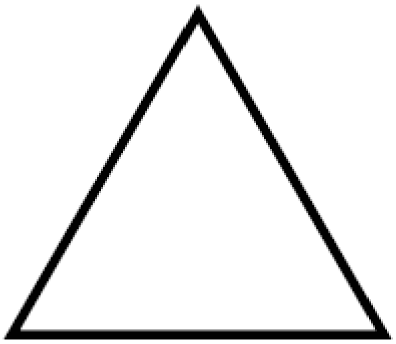
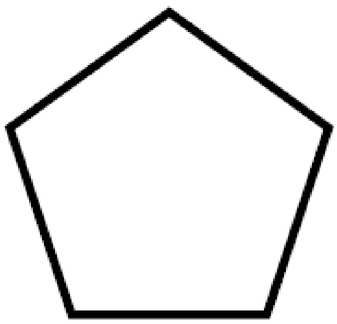
$sen60^{\circ}=$ apótema/lado

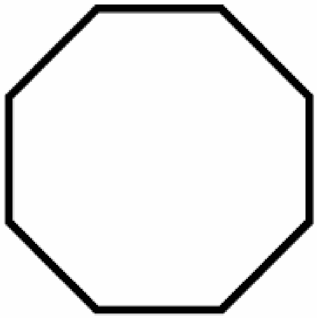
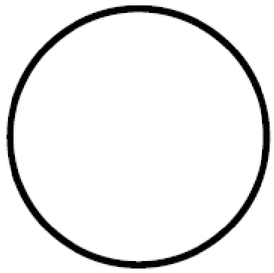
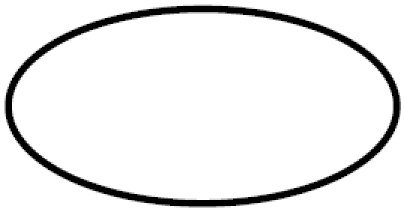
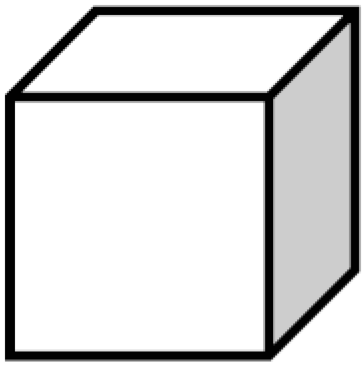
apótema= $\frac{\sqrt{3}}{2}\times$ lado= $\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{p}{6}=\frac{\sqrt{3}p}{12}$

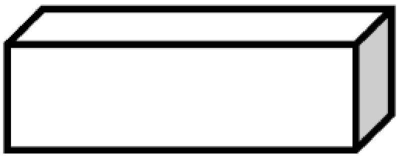
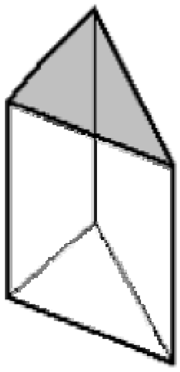
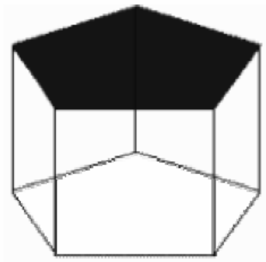
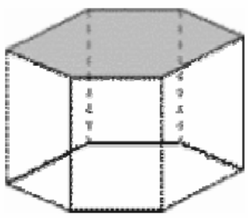
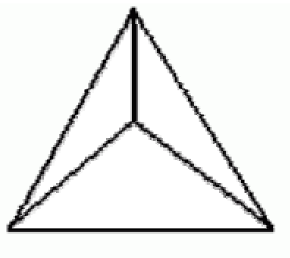
Área do hexágono= $3\times\frac{p}{6}\times\frac{\sqrt{3}p}{12}=\frac{p^2\times3\sqrt{3}}{72}=\frac{p^2\sqrt{3}}{24}$

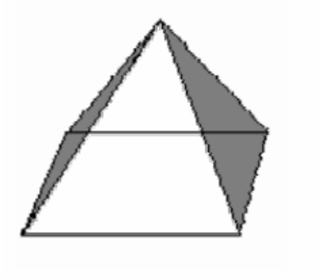
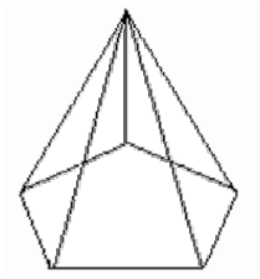
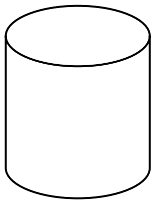
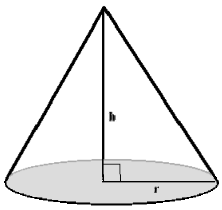
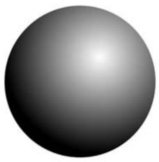
Supondo o perímetro fixo, o hexágono regular é dos três polígonos considerados, o que tem maior área.

I. Ficha sobre figuras geométricas bi e tridimensionais

Nome da Forma Geométrica	Forma Geométrica	Imagem encontrada na Natureza
Triângulo		
Quadrado		
Rectângulo		
Pentágono		

Hexágono		
Círculo		
Elipse		
Espiral		
Cubo		

Prisma quadrangular		
Prisma triangular		
Prisma pentagonal		
Prisma hexagonal		
Pirâmide triangular		

Pirâmide quadrangular		
Pirâmide pentagonal		
Cilindro		
Cone		
Esfera		

Outras Descobertas

Somos os:

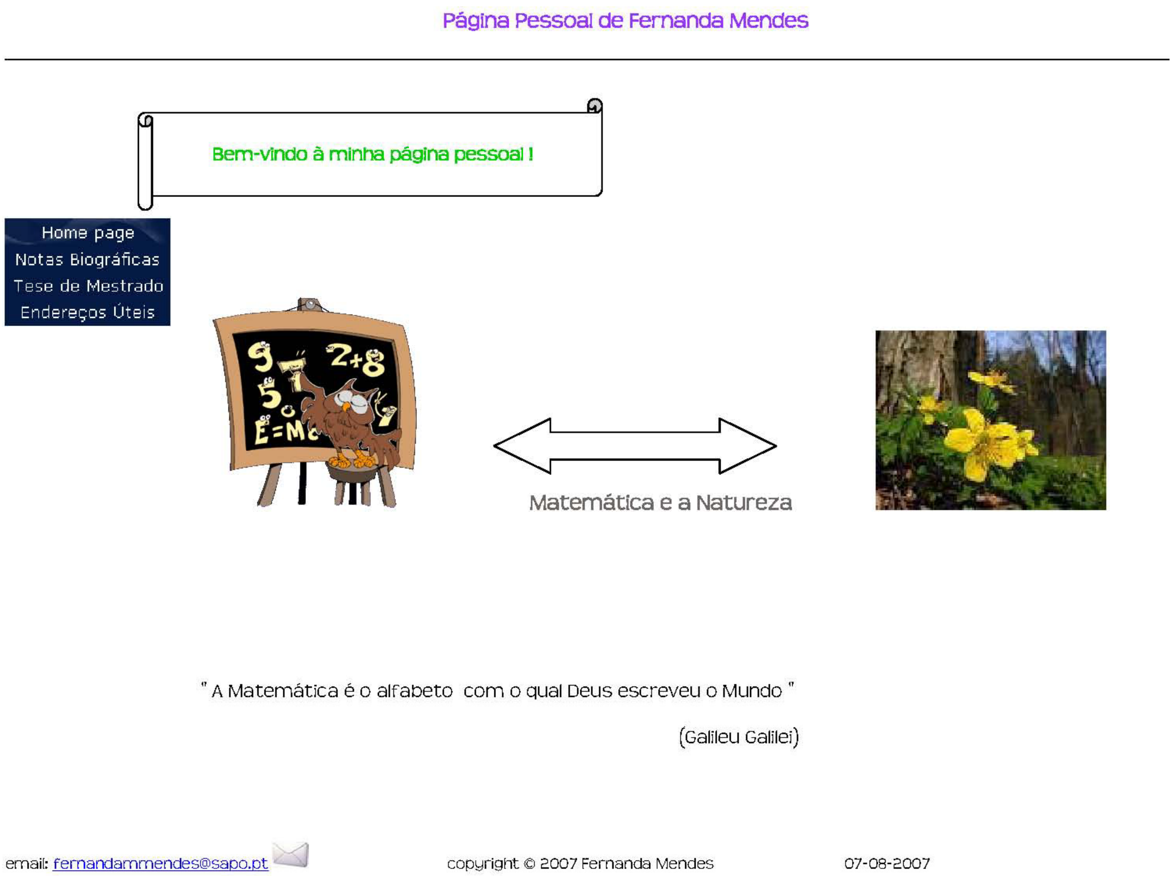
□ Botânicos ____

□ Zoólogos ____

□ Geólogos ____

J. Portal na Internet

Home Page



Outras Páginas

Página Pessoal de Fernanda Mendes

Home page
Actividades
Curiosidades
Problemas
Questionário

" Felizes aqueles que se divertem com problemas que educam a alma e elevam o espírito "

(Fenelon)

Apresento **Actividades/Tarefas, Curiosidades, Problemas e Questionário** que relacionam a Matemática e as Ciências da Natureza, a implementar em contexto escolar.

email: fernandammendes@sapo.pt copyright © 2007 Fernanda Mendes 07-08-2007

Página Pessoal de Fernanda Mendes

[Notas Biográficas] [Tese de Mestrado] [Endereços Úteis]

Home page

Disponibilizo a minha Tese de Mestrado - "A Matemática na Natureza" - mediante requisição através do email para atribuição da respectiva password.

email: fernandammendes@sapo.pt copyright © 2007 Fernanda Mendes 07-08-2007