Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

O papel das representações visuais na aprendizagem da Matemática no 2.º ciclo de escolaridade

Tese de Doutoramento em Didática de Ciências e Tecnologia,
Especialidade de Didática de Ciências Matemáticas

Maria Paula Montenegro Vieira Cardoso

Professora Doutora Maria Cecília Rosas Pereira Peixoto da Costa

Professor Doutor Joaquim Bernardino de Oliveira Lopes

Vila Real, 2019

Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

O papel das representações visuais na aprendizagem da Matemática no 2.º ciclo de escolaridade

Tese de Doutoramento em Didática de Ciências e Tecnologia,
Especialidade de Didática de Ciências Matemáticas

Maria Paula Montenegro Vieira Cardoso

Professora Doutora Maria Cecília Rosas Pereira Peixoto da Costa
Professor Doutor Joaquim Bernardino de Oliveira Lopes

Composição do Júri:
Professor Doutor Vítor Manuel de Jesus Filipe
Professor Doutor Pedro Manuel Baptista Palhares
Professora Doutora Maria Cecília Rosas Pereira Peixoto da Costa
Professora Doutora Ana Paula Florêncio Aires
Professor Doutor Fernando Manuel Lourenço Martins
Professora Doutora Elisa Maria da Silva Cardoso Saraiva

Vila Real, 2019

Este trabalho foi expressamente elaborado como dissertação original para efeito de obtenção do grau de Doutor em Didática de Ciências e Tecnologia, de acordo com o disposto no Decreto-Lei 107/2008, de 25 de junho, e apresentado na Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD), Vila Real, Portugal.

Índice resumido

Agradecimentos

À Professora Doutora Cecília Costa e ao Professor Doutor Bernardino Lopes pelo cuidado e competência que manifestaram no acompanhamento deste trabalho.

Aos revisores científicos das revistas, conferências e encontros, nacionais e internacionais, em que tive participação, pelo incentivo à melhoria e pelas críticas competentes, tendo essa visão externa ajudado a melhorar este trabalho.

Aos alunos que participaram neste estudo e aos seus encarregados de educação que o permitiram.

Aos colegas do meu grupo de docência que, direta ou indiretamente, me acompanharam durante a segunda fase deste estudo.

Ao Paulo Taveira pela edição e formatação deste documento e à Helena Mateus Montenegro pela revisão linguística do texto.

Resumo

Os objetos matemáticos são materializados através de múltiplas representações nas aulas de Matemática do Ensino Básico. A literatura confirma um predomínio de representações simbólicas e verbais nas aulas e releva a falta de experiências letivas de transformação de representações. Este é o problema de investigação desta tese. As representações visuais permitem uma exploração global e criativa dos objetos matemáticos, daí termos a convicção da sua importância na transformação de representações, ajudando na compreensão da Matemática. Tivemos por objetivo geral explorar modos de aumentar o impacto do uso de representações visuais como ferramenta epistémica e focamo-nos no impacto que o uso de representações visuais teve na continuidade da atividade matemática discente, bem como no papel que tiveram na construção do seu conhecimento. Este estudo segue a abordagem metodológica *Design Science* permitindo: (a) identificar e desenvolver uma solução através da utilização de representações visuais potenciando a diluição das dificuldades inerentes à utilização de representações múltiplas; (b) ampliar o conhecimento das representações visuais como artefacto na resolução de tarefas matemáticas.

O estudo permitiu responder a quatro questões de investigação com base nas três fases em que se desenvolveu. Os participantes da Fase 1 foram um grupo de alunos (média de idades de 11,3 anos) e a sua professora de Matemática, a mesma ao longo do estudo. Esta fase teve por objetivo o reconhecimento das representações visuais como um artefacto válido no ensino e na aprendizagem, pretendendo-se dar resposta às seguintes questões de investigação:

QI1: *Que características devem ter as representações visuais no sentido de dar continuidade à atividade dos alunos?*

QI2: *Qual é o impacto dos tratamentos visuais de uma determinada forma de representação na atividade dos alunos durante a resolução de uma tarefa matemática?*

Os resultados da Fase 1 mostraram que as representações visuais, usadas com tratamentos visuais, são um artefacto a que professor e alunos podem recorrer durante a resolução da tarefa, mas cujo uso não é evidente para os alunos. A Fase 2 teve como objetivo melhorar o conhecimento teórico e prático da professora investigadora, pretendendo-se dar responder à

terceira questão de investigação:

QI3: *Que ações deve o professor adotar para melhorar a sua prática de ensino usando as representações visuais como artefacto?*

Os resultados da Fase 2 mostraram a necessidade de desenvolvimento profissional, intencional e sistemático, viabilizando uma seleção e exploração justificada das tarefas relativamente às transformações de representações que permitam familiarizar os alunos com transformações de representações, em particular os tratamentos visuais. Os participantes desta fase foram uma turma (média de idades 10,7 anos) e a professora que os acompanhou ao longo do 2.º Ciclo do Ensino Básico. A Fase 3 (os mesmos participantes da Fase 2 no ano letivo seguinte) teve por objetivo mostrar que as representações visuais podem atuar como uma ferramenta matemática epistémica, permitindo responder à quarta questão de investigação:

QI4: *De que forma pode o professor induzir os alunos a usarem o artefacto "representações visuais" como uma ferramenta? Como podem os alunos usar representações visuais como uma ferramenta epistémica na aprendizagem da Matemática?*

Os resultados da Fase 3 mostraram que os alunos produziram conhecimento novo utilizando o artefacto "representações visuais" como uma ferramenta matemática epistémica através da realização de tratamentos visuais.

Os resultados obtidos às questões de investigação, permitem-nos identificar os contributos do nosso estudo:

- *A realização de tratamentos visuais permite a manipulação de qualquer tipo de representação, facilita a continuidade da atividade discente e potencia as transformações de representações, diversificando-as, ao variar as estratégias de ensino e/ou de resolução de uma tarefa.*

- *O conhecimento e as habilidades de selecionar, criar e usar os tratamentos visuais do professor resultam do seu desenvolvimento profissional, intencional e sistemático, e têm um papel importante na aprendizagem dos alunos.*

- *Os tratamentos visuais são uma ferramenta matemática que pode proporcionar uma*

mediação epistémica possibilitando uma aprendizagem dos alunos em vários níveis de sofisticação, e de acordo com os "seus" percursos na resolução da tarefa.

Concluímos que as representações visuais são um artefacto à disposição do professor e dos alunos podendo, em certas condições de uso, transformar-se em ferramentas matemáticas epistémicas, através de tratamentos visuais. Quando isso acontece, permitem: (i) a continuidade da atividade dos alunos; (ii) as transformações de representações, melhorando a aprendizagem; (iii) um trabalho em vários níveis de sofisticação dependente da cultura matemática do aluno, desenvolvendo a comunicação; (iv) outras possibilidades de ver e compreender as tarefas.

A exploração de representações visuais não é, contudo, inata, nem óbvia para alunos e professores, tendo esta habilidade de ser aprendida e desenvolvida.

Palavras-chave: Ferramenta matemática epistémica, representações múltiplas, representações visuais; transformações de representações; tratamentos visuais.

Abstract

Mathematical objects are materialized through multiple representations in middle school Mathematics classes. Literature corroborate a predominance of symbolic and verbal representations and reveals the lack of teaching experience of representations transformation. This is this thesis' investigation problem. Visual representation allows a global and creative exploration of mathematical objects, reason why the conviction of its importance in the transformation of representations, helping in the comprehension of Mathematics. Then, we had as general objective to explore ways to increase the impact of the usage of visual representations as an epistemic tool and focused in the impact that this practice has in the continuity of the students' mathematics activity, and in the role that they had in the construction of its knowledge. This study follows the Design Science methodology approach allowing to: (a) identify and develop a solution through the usage of visual representations empowering the dilution of the inherent difficulties to using multiple representations; (b) to enlarge the knowledge of visual representations as an artefact in the solution of mathematical tasks.

This study allowed answers to four research questions based on the three stages that were developed. Participants in Stage 1 were a group of students (11,3-year-old average) and their Mathematics teacher, the same throughout the whole study. This stage's objective was to recognize visual representations as a valid artefact in teaching and learning, and intended to answer to the following research questions:

RQ1: *Which characteristics must visual representations have to give continuity to the students' activity?*

RQ2: *What is the impact of visual treatments of a certain representation form in the students' activity during the resolution of a mathematical task?*

Stage 1 results showed that visual representations used with visual treatments are an artefact to which teachers and students can resort to during a task's resolutions, but such usage is not clear for students. Stage 2 had as objective the improvement of the theoretical and practical knowledge of the research teacher, and intended to answer to the third research question:

RQ3: *Which actions should the teacher adopt to improve his teaching practice using visual representations as an artefact?*

Stage 2 results showed the necessity of both intentional and systematic professional development, to make feasible a justified selection and exploration of tasks related to representations transformations and to get the students familiar with representations transformations, particularly visual treatments. This stage students were a school class (10,7-year-old) and the teacher that followed them throughout middle school. Stage 3 (same participants of Stage 2 in the following year) has as objective to prove that visual representations can act as an epistemic mathematical tool, allowing the answer of the fourth question:

RQ4: *How can the teacher to persuade students to use the artefact "visual representations" as a tool? How can students use visual representations as an epistemic tool in Mathematics learning?*

Stage 3 results showed that students produced new knowledge using the artefact "visual representations" as an epistemic mathematical tool through the realization of visual treatments.

The obtained results to the research questions allow us to identify the contribution of our study:

– *The realization of visual treatments allows the manipulation of any kind of representations, it facilitates the continuity of the students' activity e empowers the transformation of representations, diversifying them, by varying the teaching strategies and/or resolution of a task.*

– *The knowledge and the abilities to select, create and use visual treatments of the teacher result from his professional, intentional and systematic development, and play an important role in students' learning skills.*

– *Visual treatments are a mathematical tool that can provide an epistemic meditation allowing students to learn in different levels of sophistication, and according to "their" paths in the resolution of the task*

We conclude that visual representations are an artefact available to teachers and students

allowing, in certain usage conditions, to transform them in epistemic mathematical tools, through visual treatments. When this happens, they allow: (i) the continuity of the students' activity; (ii) transformation of representations, improving learning skills; (iii) a work in various sophistication levels dependent on the student's mathematical culture, improving communication; (iv) other possibilities of watching and understanding tools.

Nevertheless, the exploration of visual representations is not innate, nor obvious to teachers and students, having this ability of being learnt and developed.

Keywords: Epistemic mathematical tool; multiple representations; visual representations; transformation of representations; visual treatments.

Índice geral

Índice de Figuras

Índice de Excertos de Narrações Multimodais

Índice de Tabelas

Lista de siglas

RV	Representação Visual
RV-F	Representação Visual Figurativa
RV-E	Representação Visual Esquemática
RV-T	Representação Visual em Tabela
RS	Representação Simbólica
RS-N	Representação Simbólica Numérica
RS-A	Representação Simbólica Algébrica
RLN	Representação em Linguagem Natural
T_R	Tratamento: Operação numa representação sem mudança do sistema de representação.
$T_{R:R}$	Tratamento: Alteração de uma representação noutra sem mudança do sistema de representação.
$T_{R \rightarrow RV}$	*Tratamento Visual*: Operação visual numa representação não visual sem mudança do sistema de representação.
$T_{R \rightarrow RS}$	*Tratamento Simbólico*: Operação simbólica numa representação não simbólica sem mudança do sistema de representação.
$R \xrightarrow{c} R$	Conversão: Alteração de uma representação para outra representação com mudança do sistema de representação.
NCTM	National Council of Teachers of Mathematics
MEC	Ministério da Educação e Ciência

1 Introdução

1.1 Contexto da investigação e sua relevância

Os objetos matemáticos são abstratos, sendo apenas possível aceder-lhes através das representações. Um aluno compreende um objeto matemático quando o reconhece, pelo menos, em duas representações diferentes, o que sugere a transformação de uma representação na outra (Duval, 1993; 2006a; 2006b). No entanto, a multiplicidade de representações para um dado objeto/conceito matemático é uma das dificuldades que os alunos evidenciam ao longo da escolaridade básica (Ainsworth, 2006). A noção de representação é uma ferramenta teórica extremamente útil para caracterizar processos construtivos na aprendizagem e na prática da Matemática (Goldin & Kaput, 1996), por isso "a representação é central no estudo da Matemática" (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2008, p. 332).

No 2.º Ciclo do Ensino Básico, as representações que se usam com mais frequência na comunicação de ideias matemáticas são palavras (linguagem verbal – oral e escrita), imagens, tabelas, gráficos, esquemas (linguagem visual) e símbolos numéricos e algébricos (linguagem simbólica). Estas representações verbais, visuais e simbólicas pertencem a sistemas de representação diferentes com regras e códigos específicos.

A multiplicidade de representações para um dado objeto/conceito matemático é uma das condições para a compreensão e abstração dos objetos matemáticos (e.g. Duval, 2006a; Ainsworth, 2006), mas é também uma das dificuldades que os alunos evidenciam ao longo da escolaridade básica, em particular no 2.º Ciclo do Ensino Básico.

Os alunos começam com uma única representação, seguindo-se a utilização de mais do que uma representação em simultâneo, normalmente representações verbais e simbólicas, ocasionalmente representações simbólicas e visuais, porém raramente as três. Segue-se a relação entre representações equivalentes e, por último, o desenvolvimento da flexibilidade de alternar entre elas, transformando umas nas outras, atingindo a abstração. Estas representações verbais e simbólicas, porque sequenciais, estão dependentes de regras específicas e rígidas. Contrariamente, as representações visuais permitem uma exploração global e criativa. Por esta razão, é nossa convicção que as representações visuais podem ter um papel importante na fluência da conversão entre representações, ajudando na compreensão da Matemática e deste problema.

Por um lado, o ensino da Matemática favorece as representações simbólicas (Goldin & Kaput, 1996; Barbosa, 2010), mas, por outro lado, a linguagem visual, embora seja reconhecido o seu valor pedagógico, não é capitalizada por todos os professores e investigadores em Educação Matemática no nível das outras. Nas aulas de Matemática do Ensino Básico, em particular no 2.º Ciclo, devido ao predomínio das representações simbólicas e verbais sobre as outras, verifica-se uma falta de experiências letivas que explorem as potencialidades das representações visuais, o que provoca dificuldades na flexibilidade do uso de representações múltiplas, impedindo a compreensão de conceitos matemáticos.

O facto de apenas as linguagens verbal e simbólica serem reconhecidas na atividade matemática, em detrimento da linguagem visual, dificulta a prática regular de conversões entre representações que suportam e promovem a abstração matemática (Dreyfus, 1991; Duval, 2006a). Sublinhe-se, contudo, que a conversão entre representações é difícil (e.g. Duval, 2006b; Presmeg, 2006). Esta dificuldade torna mais evidente a necessidade de serem utilizadas representações múltiplas no ensino e na aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

Por ser mais um sistema de representação a acrescentar aos sistemas verbal e simbólico (sequenciais), durante a atividade matemática, e por estar sujeito a regras de funcionamento diferentes (leitura global e visual), estamos convictos de que as representações visuais podem fornecer aos alunos melhores meios para lidar com as transformações de representações, favorecendo a destreza na flexibilidade de representações e, consequentemente, uma melhor compreensão da Matemática. Por essa razão, pretendemos mostrar que as representações visuais são algo a que professores e alunos poderão recorrer durante o processo de ensino e de aprendizagem: os professores para proporcionarem um ensino com representações múltiplas, desenvolvendo a pretendida flexibilidade entre representações; os alunos para construírem conhecimento.

As propriedades comunicativas e interativas das representações visuais constituem-se elementos centrais do conhecimento, devido à sua versatilidade (Goldin & Kaput, 1996). Sendo um dos objetivos da Matemática o uso flexível das representações (NCTM, 2008), o estudo de situações de ensino e aprendizagem com utilização de representações visuais continua pertinente e atual. Ainda é relativamente pouco conhecida a forma como as representações visuais medeiam o saber e o conhecimento em contextos organizacionais (Ewenstein & Whyte, 2007). Não temos a pretensão de possibilitar generalizações com o nosso estudo, mas acreditamos que, ao atingir os objetivos propostos para esta dissertação, acrescentamos uma forma de olhar e trabalhar as representações visuais no ensino e na aprendizagem da Matemática ao nível do Ensino Básico, aumentando o impacto do seu uso.

1.2 Problema de investigação, foco do estudo, questões de investigação e objetivos do estudo

De acordo com Duval (1993, 2006a, 2006b), qualquer tipo de representação permite dois tipos de transformações: os tratamentos se a ação recai sobre a mesma representação e as conversões se a ação transforma uma representação noutra diferente. As representações verbais são utilizadas em geral para justificação de raciocínios e definições, restando uma utilização predominante de representações simbólicas, o que dificulta o processo de transformação de representações e, consequentemente, da compreensão da Matemática. Torna-se, assim, necessário um ensino apoiado em representações múltiplas, acrescentando a utilização de representações visuais, em particular através da realização de tratamentos visuais, na construção de conhecimento na aprendizagem de diferentes conteúdos de domínios matemáticos do 2.º ciclo do Ensino Básico. Este é o nosso problema de investigação e tem sido identificado como relevante na literatura (Ainsworth, 2006; Duval, 1993).

Pelo exposto, a investigação focou-se nas representações visuais e sucessivas transformações de representações que dois grupos de alunos fizeram durante a realização de tarefas nas aulas de Matemática. Em particular, focou-se:

(i) no impacto que o uso de representações visuais e os tratamentos visuais pela professora tiveram na atividade dos alunos;

(ii) no papel que as representações visuais e os tratamentos visuais tiveram na continuidade da atividade dos alunos durante a resolução da tarefa;

(iii) no papel que tiveram na construção do seu conhecimento.

Consideramos que há continuidade na atividade dos alunos se eles não têm dificuldade em resolver a tarefa e se obtêm a resposta correta através da aplicação de qualquer estratégia ou representação. Paralelamente, há descontinuidade na atividade dos alunos se são incapazes de algum passo na realização da tarefa ou se são incapazes de progredir sem a ajuda da professora.

O estudo foi desenvolvido em três fases e pretendeu dar resposta a quatro questões de investigação:

QI1: *Que características devem ter as representações visuais no sentido de dar continuidade à atividade dos alunos?*

QI2: *Qual é o impacto dos tratamentos visuais de uma determinada forma de representação na atividade dos alunos durante a resolução de uma tarefa matemática?*

QI3: *Que ações deve o professor adotar para melhorar a sua prática de ensino usando as representações visuais como artefacto?*

QI4: *De que forma pode o professor induzir os alunos a usarem o artefacto "representações visuais" como uma ferramenta? Como podem os alunos usar representações visuais como uma ferramenta epistémica na aprendizagem da Matemática?*

Por conseguinte, temos por objetivo geral explorar modos de aumentar o impacto do uso de representações visuais como ferramenta epistémica no ensino e na aprendizagem em diferentes domínios de conteúdos matemáticos do 2.º Ciclo do Ensino Básico. Em particular, explanamos o nosso objetivo através de domínios de conteúdos diferentes, algumas transformações de e para representações visuais, do papel importante que tiveram como parte do método de ensino do professor, bem como na compreensão e na aprendizagem de determinados conteúdos.

1.3 Estrutura da tese

A tese é constituída por cinco capítulos. O primeiro capítulo é constituído por uma parte introdutória na qual se identifica o problema de investigação e a relevância do estudo, o foco do estudo, as questões de investigação e os objetivos do estudo.

O Capítulo 2 consta do enquadramento teórico e definição de conceitos. Está dividido em subsecções, descrevendo conceitos importantes para o nosso trabalho, nomeadamente representação e aprendizagem matemática, transformação de representações (tratamentos e conversões), representação visual e tratamento visual, artefacto e ferramenta epistémica, mediação do professor, práticas de ensino e desenvolvimento profissional. Relativamente às representações, debruçamo-nos sobre as suas duas vertentes (significado e significante), os sistemas de representação mais comuns nas aulas de Matemática (simbólico, verbal e visual), características de cada um deles, e representações mentais e externas. Baseamos o nosso trabalho nas representações externas utilizadas para significar ideias e conceitos e, para as analisar, utilizamos a classificação de Duval (1993; 2006a; 2006b) de transformação de representações (tratamentos e conversões). O conceito de tratamento tem especial importância no nosso trabalho, em particular o conceito de tratamento visual, o qual apresenta características de ferramenta epistémica no ensino e na aprendizagem da Matemática. Estes conceitos serviram de base ao trabalho empírico e à discussão de acordo com os resultados obtidos.

O Capítulo 3 descreve todo o processo que se seguiu relativamente à metodologia adotada e descrição do trabalho empírico, para responder às questões de investigação. Iniciámos o capítulo apresentando a configuração do estudo, seguindo-se a descrição e justificação das opções metodológicas e do paradigma seguido. Descrevemos os métodos de investigação adotados (*Design Science Research* e Estudo de Caso), caracterizando as ações executadas com cada um deles.

O trabalho empírico está dividido em três fases:

Fase 1 – Nesta fase, descrevemos e analisamos uma primeira intervenção (Intervenção 1) cujo objetivo foi o reconhecimento das representações visuais como um potencial artefacto no ensino e aprendizagem da Matemática, em particular na Álgebra, que pode ser utilizado tanto como parte integrante do método de ensino do professor, como pelo aluno na resolução de uma tarefa. Nesta primeira fase pretendeu-se responder às duas primeiras questões de investigação.

Fase 2 − Consistiu num conjunto de intervenções em diferentes domínios de conteúdos matemáticos cujo objetivo foi o desenvolvimento profissional da professora investigadora relativamente ao uso de representações visuais no ensino. Constou de um trabalho de preparação, que decorreu durante grande parte dos dois anos letivos seguintes ao da Fase 1, representando o amadurecimento profissional da professora no que respeita ao conhecimento e utilização de representações múltiplas, com incidência para a utilização de representações visuais no ensino, como artefacto. Este trabalho baseou-se numa revisão de literatura, pretendeu responder à terceira questão de investigação, tendo os resultados encontrados sido publicados. Este trabalho preparatório e de desenvolvimento profissional da professora teve ainda o objetivo de preparar a Fase 3, pois, além da professora, também os alunos participantes nesta fase se familiarizaram com a exploração conjunta de representações de sistemas de representação diferentes nos conteúdos lecionados.

Fase 3 − Descreve e analisa uma segunda intervenção (Intervenção 2) cujo objetivo foi o de proporcionar uma situação de ensino e de aprendizagem em que os alunos utilizaram representações e tratamentos visuais para produzir conhecimento, respondendo, assim, à quarta questão de investigação. A Intervenção 2 desdobra-se em duas partes. A primeira é constituída por duas tarefas desenvolvidas em trabalho grupo-turma, descrevendo a forma como a professora investigadora explorou as representações visuais apresentadas nas tarefas e usou os tratamentos visuais com determinados objetivos de aprendizagem e de investigação. O seu objetivo foi familiarizar os alunos com tratamentos visuais no domínio de conteúdos em leccionação, nomeadamente de Geometria. Esta necessidade foi consequência dos resultados da Intervenção 1, indicativos de que o uso de tratamentos visuais não é evidente para os alunos, precisando de ser aprendidos e trabalhados. Esta exploração familiarizou os alunos participantes no estudo com o artefacto "representações visuais" e muniu-os da ferramenta "tratamentos visuais" em situação de aprendizagem de noções novas. A segunda parte da Intervenção 2 é constituída por uma tarefa que foi apresentada aos alunos na forma de um problema. Os alunos resolveram uma tarefa de determinação de área de um círculo, procedimento que desconheciam, recorrendo ao artefacto "representações visuais", pretendendo o reconhecimento dos tratamentos visuais como ferramenta matemática epistémica, isto é, com a capacidade para mudar o conhecimento dos alunos. Constituiu também uma situação nova de aprendizagem com a potencialidade de ser resolvida através dos tratamentos visuais explorados nas duas tarefas anteriores e aos quais os alunos recorreram espontaneamente, tendo construído o conhecimento pretendido. Por esta razão, os tratamentos visuais foram reconhecidos como uma ferramenta matemática epistémica.

Segue-se o Capítulo 4 no qual apresentamos os resultados das três fases. Na primeira fase e na última, fazemos a identificação das representações visuais utilizadas e respetivas transformações, apoiando-a com exemplos retirados dos registos escritos dos alunos ou da professora nos cadernos diários, quadro negro, material manipulativo concreto, e outros. Este trabalho de ensino e de aprendizagem é analisado com vista a identificar as transformações de representações realizadas durante a atividade matemática, conduzindo à discussão dos resultados obtidos comparativamente com os dados constantes na literatura e às conclusões deste estudo. A Fase 2, por ter características diferentes das outras fases, pretendeu expor os resultados obtidos do desenvolvimento profissional da professora investigadora, com base não só nos registos escritos relativos à atividade matemática em si, como também no exercício de reflexão realizado durante a execução desta fase.

O último capítulo, o Capítulo 5, intitula-se Discussão, conclusões e trabalhos futuros. Divide-se em três subsecções. Na primeira, identificam-se os contributos gerais deste estudo que se desdobram em contributos específicos de acordo com os resultados para cada questão de investigação, o contexto em que decorreu o estudo e as limitações do mesmo. Na segunda, faz-se a discussão dos principais contributos comparativamente com a literatura e tendo por base os resultados obtidos. Na terceira e última subsecção, apresentamos as conclusões gerais e trabalhos futuros.

Segue-se a secção de Referências, ordenadas alfabeticamente, que serviram de alicerce ao desenvolvimento do estudo de investigação aqui desenvolvido.

Na parte final do documento, encontram-se as Narrações Multimodais que organizam os dados recolhidos permitindo, posteriormente, uma análise dos mesmos. As seis Narrações Multimodais constituíram objetos relevantes no processo de investigação desenvolvido.

2 Fundamentação teórica

2.1 Representações matemáticas e aprendizagem de conceitos matemáticos

Os objetos matemáticos são abstrações e, por esta razão, só é possível pensar neles e torná-los materiais através de representações.

Goldin (2008) define representação como qualquer entidade que pode substituir outra. Em Matemática, as representações podem apresentar-se nas diversas formas de linguagem: linguagem verbal, simbólica (numérica ou algébrica), visual, gestual ou outra.

Cada tipo de linguagem é constituído por um sistema de sinais cujo objetivo é a comunicação. A semiologia estuda os sistemas de sinais, "procurando estabelecer, por um lado, uma teoria geral dos sinais, a sua natureza, as suas funções, o seu funcionamento; e por outro, um inventário e uma descrição dos diferentes sistemas" (Carmo & Dias, 1982, p. 14). Também os sinais podem ser usados como representações para realizar ações requeridas em atividades nas quais os indivíduos se envolvem, dando-lhes uma vida dupla (Radford, 2000).

Goldin e Kaput (1996) consideram que um sistema de representação (ou esquema de símbolos) se constrói a partir de carateres primitivos ou sinais, que podem, ou não, ser discretos, como palavras faladas, letras do alfabeto ou os números. Um sistema de representação detém regras para combinar os sinais em configurações permitidas (sintaxe operacional). Goldin e Kaput (1996) destacam outras características dos sistemas de representação, em particular a ambiguidade, no sentido em que determinado elemento pode ser de difícil definição, configuração ou depender da estrutura do respetivo sistema de representação, relativamente às relações simbólicas entre eles. Davis (1984) acrescenta que sem esta ambiguidade as representações são quase inúteis (Goldin & Kaput, 1996).

A relação simbólica entre dois sistemas distintos de representação consiste numa correspondência entre uma configuração de um sistema e uma configuração noutro sistema. Não existe um sentido nesta correspondência; qualquer sistema pode "representar" ou "simbolizar" o outro, o que pressupõe uma variabilidade considerável nas relações representativas que são possíveis (Goldin & Kaput, 1996; Duval, 2006a). A esta relação simbólica, Duval (1993, 2006a, 2006b) atribui a designação de conversão.

Os seres humanos são seres que processam a informação, construindo nas suas mentes representações simbólicas do mundo (Schoenfeld, 1992). De acordo com este autor, pensar no mundo consiste em operar mentalmente sobre essas representações, enquanto agir no mundo consiste em desenvolver ações externas que correspondam aos resultados do funcionamento interno da mente. Da mesma maneira, de acordo com o NCTM (2008), a forma como as ideias matemáticas são representadas é essencial para o modo como as pessoas compreendem e utilizam essas ideias; os alunos deverão compreender que elas constituem uma componente essencial da aprendizagem e da produção matemática. Goldin e Kaput (1996) defendem que a construção de novos sistemas de representação também fará com que algumas das Matemáticas complicadas de hoje pareçam mais simples no futuro. No mesmo sentido, esclarecem que uma compreensão da psicologia da aprendizagem matemática e da resolução de problemas com base em sistemas de representações pode ajudar a consegui-lo.

Speiser e Walter (1997) argumentam que as representações assumem duas dimensões: uma interna e outra externa. A dimensão interna refere-se à criação de pensamentos de um indivíduo para ele próprio. A dimensão externa é um componente integral de um discurso emergente de um indivíduo para uma terceira pessoa, e é usado para ilustrar ideias e conceitos. Goldin e Kaput (1996) utilizam o termo *representação interna* para se referirem a possíveis configurações mentais dos aprendentes ou solucionadores de problemas. Consequentemente, estas representações não são diretamente observáveis, e são inferidas a partir do que os aprendentes dizem ou fazem, isto é, do seu comportamento externo. Assim, para Goldin e Kaput (1996), o termo representação interna refere-se a uma construção feita por um observador a partir da observação do comportamento, o que inclui o comportamento verbal e matemático. Por seu lado, utilizam o termo *representação externa* para se referirem a configurações observáveis fisicamente incorporadas, como palavras, gráficos, imagens, equações ou microcentros de computador, acessíveis à observação por qualquer pessoa com conhecimentos adequados.

“Na linguística, (…) os signos têm por função comunicar as ideias que eles representam” (Carmo & Dias, 1982, p. 15), sendo por isso compostos por dois elementos indissociáveis: o significante (exterior ao indivíduo, diz respeito ao som; imagem acústica) e o significado (imagem mental ou visual associada na mente do indivíduo ao conceito ou ideia; conteúdo). Em Matemática, podemos associar os conceitos abstratos ao significado, e as suas representações ao significante. Mas esta distinção não é estanque pois “Em Matemática, o signo × é ao mesmo tempo um sinal escrito (forma) e a indicação de uma operação precisa: multiplicar (conteúdo)” (Genouvrier & Peytard, 1974, p. 165), e assim as representações matemáticas podem apresentar uma determinada ambiguidade.

> A imagem acústica não é o som material, puramente físico, mas a marca psíquica desse som, a sua representação fornecida pelo testemunho dos sentidos; é sensorial e se, por vezes lhe chamamos «material» é neste sentido e por oposição ao outro termo da associação, o conceito, geralmente mais abstrato. (Saussure, 1978, p.122).

Goldin e Kaput (1996) associam os sistemas internos e externos de representação a uma distinção entre o significado (interno) e o significante (externo), reconhecendo algum parentesco com uma distinção semelhante feita por Saussure (1916/1978), apesar de considerarem a relação de "significar" não como fixa e unidirecional, mas como mutável e reversível.

Pape e Tchoshnov (2001) argumentam que existe uma influência mútua entre as duas formas de representações: a natureza e o grau de complexidade de uma representação externa influencia a natureza interna, e vice-versa. Também Goldin e Kaput (1996) reconhecem interações bidirecionais entre representações internas e externas. Um aprendente pode exteriorizar através de atos decorrentes de estruturas internas, como por exemplo, através da escrita, da fala, da manipulação de elementos de algum sistema concreto externo. Em contrapartida, também pode interiorizar através de interações com as estruturas físicas externas de um sistema de notação, como por exemplo, lendo, interpretando palavras e frases, ou equações e gráficos. Assim, a linguagem natural ou as expressões matemáticas familiares são "entendidas" sem atividade mental deliberada e consciente. As interações em ambas as direções entre representações internas e externas podem, na maioria das vezes, ocorrer simultaneamente (Figura 1).

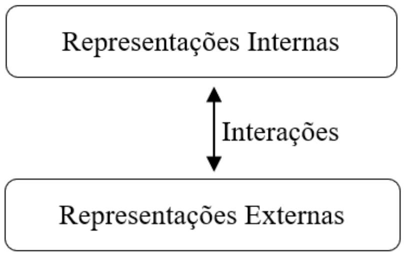


Figura 1: Representações internas versus representações externas (adaptado de Goldin & Kaput, 1996, p. 399)

Segundo Pea (1987), o conhecimento reside nas comunidades e nos seus artefactos, e nas interações entre os indivíduos e os seus ambientes, que incluem outras pessoas. Assim, as representações mentais não são completas e o pensamento explora as características do mundo em que está assente, em vez de operar em abstrações (Schoenfeld, 1992). Também Moyer (2001) defende que o desenvolvimento das representações internas de ideias do aluno, evidenciadas pelas representações externas ou manipulativas, está no centro do que significa aprender Matemática. O NCTM (2008), sugere que os alunos aumentam significativamente a sua habilidade de pensar Matemática, quando têm acesso a representações matemáticas e às ideias expressas por essas representações.

Pelo exposto, a investigação em Educação Matemática tem dado relevo às representações matemáticas (e.g. Ainsworth, 2006; Duval, 2006a; Perkins & Unger, 1994; NCTM; 2008 entre outros). O NCTM (2008, p. 75) refere que:

> [as] representações deverão ser tratadas como elementos essenciais no apoio à compreensão, por parte dos alunos, dos conceitos e das relações matemáticas, na comunicação de abordagens, argumentos e conhecimentos matemáticos, para si mesmos e para os outros, na identificação de conexões entre conceitos matemáticos interrelacionados, e na aplicação da Matemática a problemas realistas, através da modelação.

Pape e Tchoshnov (2001) defendem ainda que a representação é, inerentemente, uma atividade social. Quando os alunos são convidados a representar algo, o resultado dessa representação deve ser um veículo para a discussão de modo a ajudá-los a estabelecer uma relação ou a formar uma justificação dentro de um contexto social. Assim, segundo Pape e Tchoshnov (2001), o pensamento representacional é a capacidade do aluno de interpretar, construir e operar de modo efetivo com ambas as formas de representação, externa e interna, individualmente e em situações sociais.

Através da invenção de novos sistemas de representação ou da reinvenção dos existentes, a Matemática, antigamente muito complexa, torna-se acessível a crianças (Goldin & Kaput, 1996). Por exemplo, no currículo anterior (Ministério da Educação, 2007) e no atual (Ministério da Educação e Ciência [MEC], 2013), um conceito complexo, como é o da representação de números racionais por frações, aparece no 1.º Ciclo do Ensino Básico. A sua exploração com representações visuais tornou este conceito menos complexo para esta faixa etária.

De acordo com De Jong et al. (1998), para que os alunos possam interagir com sucesso e produtivamente com representações, eles têm que operar fluentemente dentro das diferentes representações do mesmo conceito, alternar entre essas diferentes representações, e ser capazes de decidir sobre a representação que é mais apropriada para resolver determinada tarefa. A facilidade de usar representações múltiplas e alternar entre uma gama de representações (incluindo gráfica, tabular, algébrica e verbal) é um componente crítico da habilidade de resolver problemas matemáticos (Heinze, Star, & Verschaffel, 2009). O ponto principal é que a escolha das representações não depende apenas das características das tarefas a serem resolvidas, mas também das características pessoais e do contexto, que desempenham um papel importante quando os indivíduos aplicam representações em situações problemáticas (Heinze et al., 2009).

É pelo facto de as representações serem ferramentas muito eficazes que se persiste em as desenvolver, não obstante as dificuldades inerentes ao seu desenvolvimento e, sobretudo, o trabalho necessário para as compreender (NCTM, 2008). De uma maneira geral, as representações diferentes focam aspetos diferentes de relações ou conceitos complexos, de forma que os alunos precisam de uma diversidade de representações que suportem a sua compreensão para se tornarem profundos conhecedores de Matemática (NCTM, 2008).

Em Matemática, a especificidade de cada sistema de representação, relativamente a significações, operacionalidade e comunicação, pode determinar a estratégia ou o resultado obtido. É, muitas vezes, possível ao usuário escolher a representação ou combinação de representações com que vai trabalhar, não sendo, contudo, as mais desejáveis para fomentar a abstração (e.g. Dreyfus, 1991; Duval, 2006a). De acordo com o NCTM (2008), o ensino de formas de representação, por si só, não é produtivo, e segundo Greeno & Hall (1997), "as representações devem ser apresentadas como ferramentas de grande utilidade na construção da compreensão, na comunicação de informação e no raciocínio demonstrativo.” (NCTM, 2008, p. 242).

Por esta razão, o professor deve discutir com os seus alunos os motivos pelos quais determinada representação é mais, ou menos, eficaz do que outra. Dar esta possibilidade aos alunos irá ajudá-los a compreender o poder da visualização de um problema sob diferentes perspetivas (NCTM, 2008).

Lesh, Post e Behr (1987) classificam as representações matemáticas em: (i) concretas quando se referem a materiais manipuláveis; (ii) verbais quando usam a linguagem; (iii) simbólicas, se há notação; (iv) semiconcretas quando são pictóricas; (v) contextuais, se envolvem situações da vida real. Esta necessidade de classificar as representações que se usam no ensino e na aprendizagem da Matemática comprova não só a existência de representações múltiplas, como também as potenciais dificuldades com que se deparam os aprendentes na seleção e utilização da representação mais adequada à situação. A sua distinção é um primeiro passo para se poder proceder a uma análise das mesmas e dos efeitos da sua utilização. Em primeiro lugar, torna-se necessário que os alunos reconheçam essa diversidade de representações para o mesmo objeto matemático. Também se torna necessário o reconhecimento por parte do professor de que a utilização de representações múltiplas é essencial para uma compreensão efetiva da Matemática, e que, por esta razão, a deve proporcionar.

2.2 Transformações de representações

Duval (2006a) define registo semiótico (*semiotic register*) como um sistema de signos que permite a transformação de representações (Figura 2). O autor utiliza um diagrama de Carrol para relacionar os registos, através de uma entrada relativa ao tipo de registo (multifuncional, quando os registos não se podem traduzir por algoritmos, e monofuncional, quando na sua maioria se podem traduzir por algoritmos), e outra relativa ao tipo de operações (discursivas, quando existem regras específicas e rígidas de significação e utilização, ou não discursivas, nas quais insere as representações visuais, limitando-as às figuras geométricas, aos gráficos e aos diagramas). Considera que todas as representações permitem transformações nelas próprias independentemente do seu registo, e, na sua maioria, permitem transformações para outras representações. Nestas, considera sentidos opostos entre as representações, salientando que podem envolver gestos intelectuais diferentes e que, por essa razão, um aluno pode ser capaz de converter num sentido, mas não no sentido inverso.

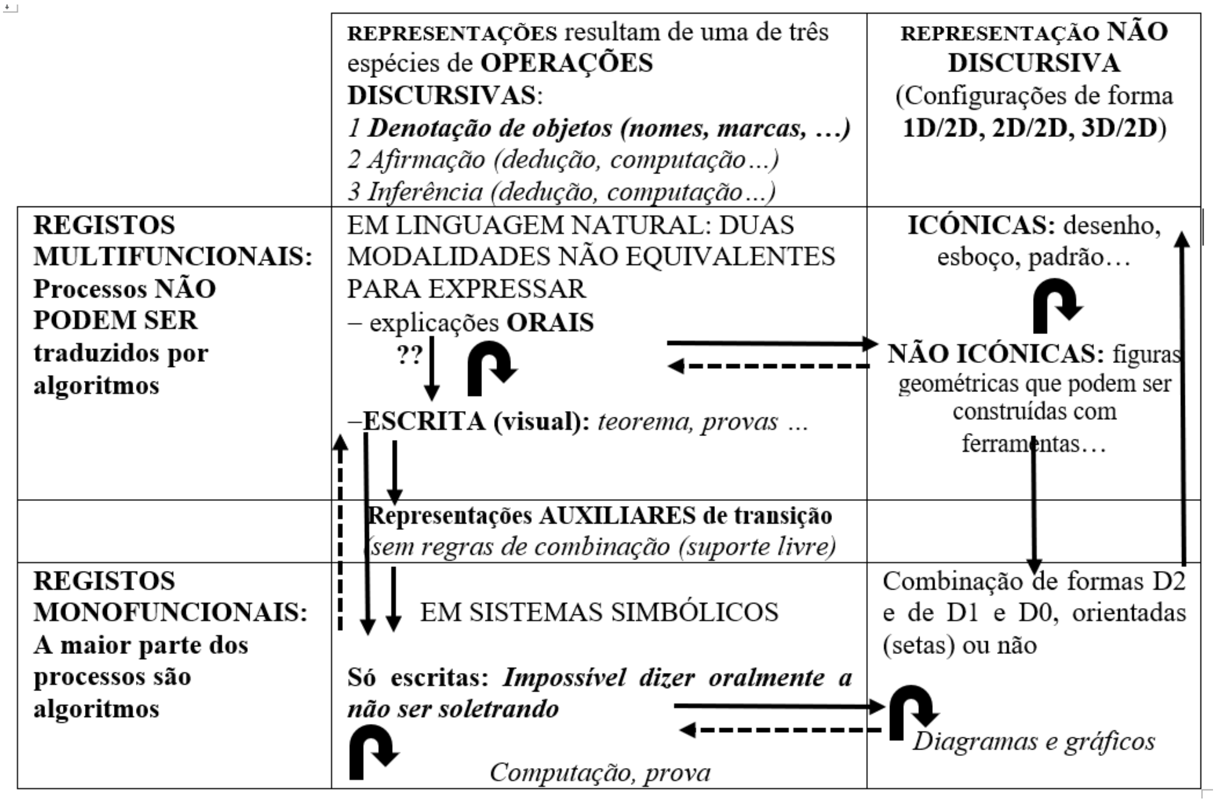
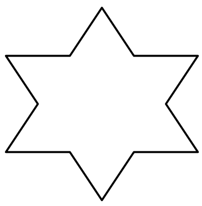
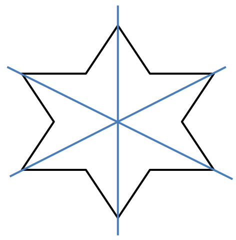


Figura 2: Classificação de quatro tipos de registos que podem ser mobilizados no processo matemático (Duval, 2006a, p. 110)

A teoria dos registos de Duval, que deriva de outras teorias, entre as quais da teoria do signo de Saussure, "permite-nos esclarecer os papéis dos signos e das representações nos processos envolvidos no ensino e aprendizagem da Matemática" (Iori, 2017). Duval (2006a) distingue quatro tipos de registos semióticos e analisa o problema da compreensão durante a aprendizagem da Matemática de um ponto de vista cognitivo, através das dificuldades do uso destes quatro registos. Trabalhar com registos é especialmente importante em Matemática, pois é a única forma de aceder aos objetos matemáticos. Para Duval (2006a), as representações internas vão-se formando através de um processo de interiorização de representações externas. Durante esse processo, verificam-se dificuldades relacionadas com as transformações de representações dentro e para outros registos semióticos. Duval (1993; 2006a; 2006b) identifica dois tipos de transformação de representações: *Tratamentos* e *conversões*. Duval (1993; 2006a; 2006b) salienta a nossa capacidade de distinguir um objeto matemático de qualquer uma das suas possíveis representações semióticas quando somos capazes de reconhecer as correspondências entre diferentes representações de um objeto matemático, em diferentes registos (através de conversões) e no mesmo registo (através de tratamentos). A complexidade cognitiva e semiótica da produção, seleção, tratamento e conversão de representações semióticas é largamente determinada pelos fenómenos de congruência ou não-congruência das representações semióticas envolvidas (Iori, 2017).

Parafraseando o trabalho de Duval, consideramos que tratamentos são transformações que ocorrem dentro do mesmo sistema de representação, como simplificar uma expressão numérica ou desenhar simetrias numa figura (e.g. na Tabela 1). Note-se que se realizaram, em ambas as representações do exemplo apresentado, determinadas operações sem sair do seu registo de representação original. A primeira representação (expressão numérica) está no sistema de representação simbólico (numérico) e as operações nela efetuadas são também simbólicas; a estrela é uma representação pertencente ao sistema de representação visual à qual foram adicionados eixos de simetria também no sistema visual. Por essa razão, em ambas as representações foram efetuadas determinadas alterações sem se ter saído do sistema de representação inicial. Consideramos, neste caso, que se efetuaram tratamentos.

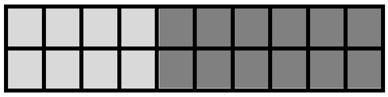
Tabela 1: Exemplo de tratamentos realizados a uma representação numérica (em cima) e a uma representação visual figurativa (em baixo)

Sistema de representação	Representação matemática	Tratamento da representação matemática
Simbólico	$2 \times 4 + 2 \times 6$	$2 \times 4 + 2 \times 6 = 8 + 12 = 20$
Visual		

O outro tipo de transformação de representações é a conversão. As conversões consistem em transformar uma representação de um determinado sistema de representação noutra representação equivalente, mas noutro sistema de representação. São exemplos, representar uma equação algébrica (representação inicial em linguagem simbólica) num gráfico (representação final em linguagem visual), ou escrever numa expressão numérica (representação final em linguagem simbólica) um enunciado em linguagem natural (representação inicial em linguagem verbal).

A representação numérica da tabela anterior ($2 \times 4 + 2 \times 6$) pode ser escrita noutros sistemas de representação, como se mostra na Tabela 2 (representação visual ao centro e representação verbal à direita).

Tabela 2: Conversão de uma representação numérica (à esquerda) para uma representação visual (ao centro) para uma representação verbal (à direita)

Representação matemática		
Simbólica	Visual	Verbal
$2 \times 4 + 2 \times 6$		*A soma do dobro de quatro com o dobro de seis.*

Consideremos o sistema de representação simbólico, em que os números, as letras e os símbolos aritméticos são os sinais. Há certas configurações desses sinais que são permitidas, como por exemplo, a equação $2x + y - 6 = 0$, e outras que o não são por não fazerem sentido, por exemplo, $2xy -= 6 +$. Outras ainda, são ambíguas, como por exemplo, $x + y2 - 6 = 0$, em $y2$ pode ser uma escrita desleixada de y^2 ou simplesmente ser considerada errada. No sistema de representação simbólico não há apenas sinais e configurações, há também uma estrutura adicional considerável relacionada com determinadas regras de procedimento que é essencial, como por exemplo, o que nos permite escrever que $2x + y - 6 = 0$ é equivalente a $x = (6 - y) : 2$ e que nos permite, por exemplo, determinar o valor de y quando $x = 1$.

Consideremos agora um gráfico cartesiano. Esta representação pertence ao sistema de representação visual. Neste sistema visual, em particular, podemos considerar os sinais os dois eixos, o conjunto de sinais alfabéticos e numéricos, e diferentes formas geométricas, como pontos, linhas, figuras, etc.; os eixos devem ser rotulados com letras e divididos em unidades identificadas com números, e verificadas determinadas regras na marcação dos pares ordenados, por exemplo.

Entre estas representações dos dois sistemas de representação (simbólico e visual) é possível estabelecer uma equivalência. A compreensão e utilização destes dois sistemas de representação variam de indivíduo para indivíduo e, no mesmo indivíduo, variam à medida que a aprendizagem ocorre.

A conversão de representações é a atividade cognitiva menos espontânea e mais difícil de adquirir pela maioria dos alunos (Callejo & Zapatera, 2014; Dreyfus, 1991; Duval, 1993; Presmeg, 2006; entre outros), porque os registos não têm a mesma estrutura (Duval, 2006a). O sentido da correspondência da representação (conversão) envolve raciocínios e competências diferentes, não sendo garantido o sucesso da reversibilidade (Duval, 1993; Goldin & Kaput, 1996), para além de que uma representação pode englobar um ou vários sistemas de representação (Goldin & Kaput, 1996).

Spiro et. al (1988) destacam a capacidade de construir e alternar múltiplas perspetivas como essencial para o sucesso da aprendizagem. Por sua vez, Duval (1993) sugere a utilização de representações diferentes do mesmo objeto e argumenta que os mesmos conceitos representados de maneiras diferentes fornecem aos alunos oportunidade de abstração, o que, segundo Bransford e Schwartz (1999), aumenta a probabilidade de transferência para novas situações.

Como a utilização de representações múltiplas e respetivas transformações de representações são difíceis para os alunos, verifica-se a necessidade de os ajudar a efetuar transformações de representações. Nas aulas de Matemática, as transformações de representações (tratamentos e conversões) podem ser facilitadas com a interação e colaboração entre alunos e professor.

O professor utiliza, frequentemente, as representações visuais com o estatuto de apoiar a atividade dos alunos (e.g. Barbosa, 2010). Também é amplamente aceite que a atividade matemática requer operações cognitivas que mobilizem sistemas de representação diferentes (e.g. Ainsworth, 2006; NCTM, 2008), assim como a habilidade de passar de uma representação num sistema para outro (e.g. Duval, 2006a), daí tornar-se importante analisar situações em que as representações são transformadas umas nas outras.

Como as representações visuais e, em particular, os tratamentos visuais são o foco do nosso estudo, apresentamos, de seguida, uma subsecção dedicada às representações visuais e aos tratamentos visuais na atividade matemática.

2.3 Representações visuais e tratamentos visuais

A atividade matemática requer operações cognitivas que mobilizem sistemas de representação diferentes (Ainsworth, 2006), bem como a habilidade de passar de uma representação para outra, no mesmo ou noutro sistema de representação (e.g. Duval, 2006a), sendo, assim, realizadas transformações de representações. Podemos usar diferentes tipos de sistemas de representação para as representações matemáticas, sendo os mais comuns os sistemas de representação simbólico, verbal e visual. Sedig e Sumner (2006) definem *representação visual* como "uma coleção de símbolos gráficos que codificam visualmente propriedades e relações causais, funcionais, estruturais e semânticas de um mundo representado - abstrato ou concreto" (p. 2).

Esta definição inclui a manipulação de representações visuais de qualquer espécie, até verbais, numéricas e símbolos, desde que estejam ligados à compreensão da Matemática e respeitem todos os requisitos na definição dada. São exemplos de representações visuais as figuras, as tabelas, os diagramas e os esquemas. Podemos caracterizar as representações esquemáticas como as que descrevem as relações descritas no problema, enquanto as figuras são aquelas que representam a aparência física dos elementos descritos no problema.

O NCTM (2008) considera que o termo representação se refere ao produto e ao processo, e aplica-se tanto ao produto que é obtido externamente, como ao processo que é obtido internamente na mente dos alunos quando fazem Matemática. Arcavi (2003) chama a esta habilidade de pensar e comunicar informação matemática de *visualização* e define-a como:

> [a] capacidade, o processo e o produto da criação, interpretação, uso e reflexão sobre fotografias, imagens, diagramas, nas nossas mentes, no papel ou com ferramentas tecnológicas, com o propósito de retratar e comunicar informação, pensar e desenvolver previamente ideias desconhecidas e compreensões avançadas. (adaptado de Arcavi, 2003, p. 217).

A definição de visualização, tal como a de representação visual apresentada anteriormente, é abrangente e inclui o reconhecimento e a manipulação de representações de qualquer espécie, mesmo verbais, visuais e simbólicas, se ligadas à compreensão da Matemática, desde que cumpram com os requisitos da definição de visualização. Neste contexto, faz sentido associar ao processo de representação o conceito de visualização e a um dos seus produtos o conceito de representação visual.

A importância da visualização na aprendizagem, em particular da Matemática, parece ser hoje amplamente reconhecida como uma componente chave do raciocínio, na resolução de problemas e nas demonstrações. Por exemplo, Zahner e Corter (2010) concluíram que uma representação visual externa pode facilitar a resolução de problemas de probabilidade, mas apenas se for escolhida uma representação apropriada. No entanto, em Educação Matemática a visualização é fonte de muitas dificuldades. Dreyfus (1991) propôs classificar as dificuldades em torno da visualização em três categorias principais:

Culturais − referem-se às crenças e valores que se tem sobre o que em Matemática é legítimo ou aceitável e o que não é. Arcavi (2003) recorda a controvérsia dentro da comunidade matemática, dando relevo a declarações como a de Sfard (1998), "*Isto não é Matemática*" (Arcavi, 2003, p. 454). Essa importância, que Presmeg (1997) chama "*desvalorização* da visualização" (Arcavi, 2003, p. 300), deixa pouco espaço para as práticas de sala de aula para incorporar e avaliar a visualização como parte integrante da Matemática.

Cognitivas − referem-se à maior ou menor dificuldade do que é visual, assim como à falta de rotinas e procedimentos que um raciocínio visual requer, ou à necessidade de alcançar uma tradução flexível e competente entre representações visuais e analíticas da mesma situação, que Duval (1993, 2006a, 2006b) designa de conversão, e que é o núcleo da compreensão da Matemática (Arcavi, 2003; Duval, 2006a).

Sociológicas – referem-se (i) à ideia de que as representações analíticas, que são de natureza sequencial, parecem ser mais pedagogicamente apropriadas e eficientes; (ii) à diversidade de manipulação das representações visuais devido à existência de grupos de origens culturais diferentes, sendo que os mais ricos visualmente possam estar menos representados (Arcavi, 2003).

O baixo valor atribuído aos aspetos visuais na sala de aula deve-se, por um lado, ao facto de ainda se verificar relutância no uso da visualização em Matemática (Dreyfus, 1991; Goldin & Kaput, 1996). Por outro lado, outros autores, como por exemplo, Presmeg (2006) e Stylianou e Silver (2004), defendem que a visualização é importante no processo de encontrar a solução para um problema; Perkins e Unger (1994) assumem as representações visuais como uma das capacidades de processamento de informação mais poderosas do ser humano; Moreno, Ozogul e Reisslein (2011) concluíram que a resolução de problemas é fomentada quando os alunos têm a experiência de representações visuais concretas que se conectam ao seu conhecimento prévio e permitem o uso de representações visuais abstratas; El Mouhayar e Jurdak (2013) confirmam que existe uma interação entre a visualização e a Educação Matemática. Por exemplo, a resolução de problemas sobre proporcionalidade, razões e percentagens proporciona o uso de representações que combinam informações visuais e numéricas de modo a ilustrar as relações existentes entre as quantidades (NCTM, 2008). O mesmo grupo acrescenta a necessidade de os professores proporcionarem aos alunos situações com recurso a diversas representações visuais e que lhes apresentem novas formas de representação, úteis na resolução de determinados problemas.

Trabalhos mais pormenorizados sobre o interesse das representações visuais têm vindo a ser desenvolvidos. Zahner e Corter (2010) concluem que as representações visuais externas são geralmente criadas e usadas pela primeira vez durante a fase de entendimento de um problema e durante a sua representação para encontrar uma estratégia de solução. As representações visuais permitem aos alunos estabelecer pontes entre as representações simbólicas e verbais (Palacios, 2006; Presmeg, 2006; Stylianou & Silver, 2004), simplificando a comunicação dentro da sala de aula (Ryve, Nilsson, & Pettersson, 2013). Por exemplo, as representações pictóricas produzidas podem ser usadas para ajudar os alunos a explicar ou justificar um argumento. Os desenhos matemáticos são particularmente úteis para modelar a resolução de problemas, no entanto, esse tipo de desenho é difícil de construir (Rellensmann, Schukajlow & Leopold, 2017). Por seu lado, as representações em tabela são, por vezes, utilizadas durante a resposta a um problema (Zahner & Corter, 2010). As representações também podem ser construídas ou adaptadas com determinadas intenções. Segundo Greeno e Hall, (1997), quando elas “são usadas como ferramentas de compreensão e comunicação, elas são construídas e adaptadas para os fins em questão" (Pape & Tchoshnov, 2001, p. 362).

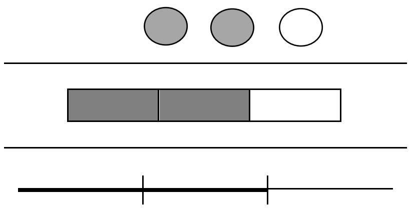
As habilidades individuais de uso flexível de representações são construções complexas, daí serem necessárias perspetivas diferentes de pesquisa de disciplinas diferentes para investigar essas habilidades e a sua aquisição (Heinze et al., 2009). Por esta razão, o papel das representações visuais no conhecimento tem sido estudado em várias áreas distintas. Um exemplo é o estudo das interações entre os elementos de um gabinete de Arquitetura. Neste caso, as representações visuais constituem objetos que desempenham um papel na mediação do saber e do conhecimento, e são objetos geralmente concebidos teoricamente em termos de linguagem e textos (Ewenstein & Whyte, 2007). Estes autores consideram as representações visuais como "artefactos de conhecimento", segundo duas dimensões. Elas ajudam a articular, a trocar e a entender ideias de *design* e manifestam-se, na prática, como entidades materiais, muitas vezes artefactos físicos, com os quais os usuários podem interagir à medida que geram conhecimento individual ou coletivo.

As propriedades comunicativas e interativas das representações visuais constituem-se elementos centrais do conhecimento. Também o estudo do papel das representações visuais tem vindo a ser estudado cada vez mais cedo. Por exemplo, Villarroel e Ortega (2017) reconhecem que a forma geométrica é uma ferramenta criativa universal na produção gráfica humana, e desenvolveram o seu estudo examinando como as crianças pequenas usam as formas geométricas para realizar as suas representações. Concluem que a utilização espontânea das formas geométricas bidimensionais básicas é uma imagem real para um número substancial de crianças antes de entrar na escolaridade obrigatória e, mais importante, os dados apresentados sugerem fortemente que a utilização de formas geométricas na primeira infância acompanha o processo de enriquecimento da sua expressividade gráfica. Tal leva-nos a crer que, desde cedo, as crianças apresentam uma predisposição para utilizar representações visuais, em particular, formas geométricas.

No entanto, outros estudos destacam dificuldades associadas ao uso de representações visuais. Por exemplo, Hegarty e Kozhevnikov (1999) sugerem que o uso de representações esquemáticas favorece mais o sucesso do que as representações pictóricas, levando alguns autores (e.g. David & Tomaz, 2012) a sugerir o estabelecimento de regras no desenho de figuras geométricas.

No Ensino Básico, as representações visuais são utlizadas na aula de Matemática, principalmente como representação de determinado conceito matemático. Por exemplo, as entidades geométricas são frequentemente representadas pictoricamente, mas também é comum representar uma função através de uma expressão algébrica (representação simbólica) e por um gráfico, um diagrama ou uma tabela (as três, representações visuais). Outro exemplo é representar uma fração através de representações simbólicas, verbais e visuais (Tabela 3). Podemos considerar que as três representações são estáticas, no sentido em que representam de forma diferente a mesma entidade matemática, funcionando como signo. Salientamos o facto de o sistema visual permitir representações diferentes, neste caso, em unidades discretas (Tabela 3, em cima) e em unidades contínuas (Tabela 3, em baixo). Passar de uma para outra, mesmo em sistemas diferentes, não requer nada mais do que o conhecimento e o domínio de determinados procedimentos. A acrescentar à variedade de sistemas de representação, há ainda a variedade do sistema de representação visual, devido às várias formas de representação das representações visuais pictóricas, o que é, por si só, também motivo de dificuldade. Um exemplo concreto é apresentado por Tunç-Pekkan (2015) que argumenta que as representações visuais (com quantidades contínuas) mais comuns na aprendizagem de frações no Ensino Básico são o círculo, o retângulo e a reta numérica e, destas, a reta numérica é aquela em que os alunos têm mais dificuldade.

Tabela 3: Representação de um número racional nos três sistemas de representação e variedade de representações visuais

Sistema de representação		
Verbal	Simbólico (numérico)	Visual
Dois terços	$\frac{2}{3}$	

Fagnant e Vlassis (2013) confirmam que, sem instrução específica, os alunos não utilizam espontaneamente quaisquer representações esquemáticas para resolver problemas não rotineiros. Também os professores dão relevância limitada à utilização de esquemas na prática de sala de aula; apoiar a sua compreensão sobre essas representações, poderia aumentar a sua relevância (Norton & Mcloskey, 2008) e, consequentemente um uso mais eficaz.

Pape e Tchoshnov (2001) defendem que os professores devem proporcionar oportunidades para os alunos praticarem a representação, tanto a produção de representações externas como a interiorização de ideias matemáticas através da atividade social, envolvendo várias representações externas. Para que os alunos se tornem matematicamente competentes, os mesmos autores defendem o uso de uma variedade de técnicas (analíticas e geométricas) em contextos de atividades sociais, pois os alunos compreendem o processo de representação e os seus produtos neste contexto, e as representações devem ser usadas para pensar, explicar e justificar. Assim, esses conhecimentos facilitarão as mudanças necessárias para mudanças significativas nas práticas da sala de aula, levando a uma compreensão matemática significativa (Pape & Tchoshnov, 2001). Este olhar holístico ajuda a entender os fenómenos de representação e de significado como parte visível do "*iceberg* complexo" na base da qual nos encontramos com uma rede de objetos, práticas e ostensivas associações estruturadas em configurações epistémicas e cognitivas (Font, Godino, & D'Amoré, 2007). Porém, como alerta Arcavi (2003), isso não deve significar que a visualização será uma panaceia para os problemas da Educação

Matemática, mas sim para compreender melhor como se aprende.

Na secção anterior (Secção 2.2) referimo-nos às transformações de representações, que identificamos como tratamentos e conversões. No nosso trabalho, os tratamentos visuais têm um papel fundamental e, por esta razão, referir-nos-emos aos tratamentos com mais pormenor.

Nos tratamentos há uma transformação da representação que pode ser verbal, simbólica ou visual. Referimo-nos apenas a estes sistemas de representação, por serem os objetos do nosso trabalho, mas esta noção pode estender-se a outros sistemas de representação. Nos tratamentos, a alteração da representação faz-se na mesma representação. Cada um dos tipos de representação permite a realização de tratamentos com recurso a elementos verbais, simbólicos ou visuais. Quando os elementos que se adicionam são na mesma linguagem da representação, as representações obtidas continuam sujeitas às regras da linguagem inicial. No entanto, também podemos adicionar elementos visuais a representações verbais e simbólicas e o resultado é uma representação visual, pois cumpre os requisitos na definição dada anteriormente de representação visual. A representação final é uma representação visual que foi obtida por uma adição de elementos visuais. Definimos *tratamento visual* como qualquer alteração com elementos visuais de uma qualquer representação (verbal, simbólica ou visual) cujo objetivo é evidenciar determinadas características das representações iniciais. Os tratamentos visuais podem ser efetuados por adição de cor, pequenos sinais como setas, traços, círculos, ou outras figuras, decomposição de figuras, recorte e rearranjo, sobreposição, etc., desde que permita uma leitura global da mensagem, ou parte dela. Mais à frente, na Secção 3.9 (Tratamento e análise de dados), voltaremos a referir-nos a cada um destes tratamentos, de acordo com as categorias de análise consideradas e respetivos exemplos, a fim de clarificar a paráfrase que fizemos deste conceito.

As representações visuais são utilizadas pelo professor durante a sua atividade letiva, enquanto leciona algum conceito ou durante o processo de resolução de uma qualquer situação matemática. Numa situação ou noutra, o professor utiliza a representação visual como mediador para transmitir conhecimento ou acionar determinadas atividades cognitivas ou raciocínios, adquirindo o estatuto de mediador epistémico, ao qual nos referiremos de seguida.

2.4 Mediadores epistémicos: artefactos e ferramentas

O estatuto de mediador epistémico pressupõe os conceitos de artefacto e de ferramenta, ambos conceitos importantes para o nosso estudo. O primeiro é importante, porque estabelecemos como princípio do nosso trabalho a caracterização das representações visuais como um artefacto, que pode ser utilizado tanto pelo professor, como pelo aluno; o segundo, porque estabelecemos como meta do nosso trabalho mostrar que o artefacto “representações visuais”, quando utilizadas como tratamentos visuais sobre uma qualquer representação, pode funcionar como uma ferramenta à disposição de alunos e professor para criar conhecimento.

Monaghan, Trouche, & Borwein (2016) definem artefacto como um objeto, material ou não, resultante de uma atividade humana e com potencialidades de ser acionado numa atividade nova. Um artefacto pode ser um som, um gesto, utensílios, formas orais e escritas de linguagem natural, textos, livros, instrumentos musicais ou científicos, e ferramentas de tecnologias e de informação (Bussi & Mariotti, 2008).

Um artefacto transforma-se numa ferramenta quando é usado por um agente, usualmente uma pessoa, para fazer alguma coisa (Monaghan et al. (2016); Venkat & Askew, 2018).

Monaghan et al. (2016) salientam que o mesmo artefacto pode ser uma ferramenta diferente consoante o uso que o utilizador lhe dá e, depois de ser usado como uma ferramenta, retorna à sua condição inicial de artefacto.

A materialidade de um artefacto não depende apenas da sua caraterística manipulativa. Um algoritmo, por exemplo a adição de dois números naturais, é um artefacto, e é material no sentido em que é escrito e pode ser programado num computador (Monaghan et al., 2016). Os mesmos autores salientam ainda que, para realizar ações materiais com um artefacto ou ferramenta, é necessária alguma forma de representação mental de como usar o artefacto ou a ferramenta, mas as ações com o artefacto ou ferramenta fornecerão *feedback* para o usuário, que pode alterar as suas representações mentais.

Trouche (in Monaghan et al., 2016) refere, por isso, a relação entre o usuário e o artefacto num processo de dupla moldagem, no sentido em que o artefacto molda o caminho do usuário e, inversamente, o usuário molda o artefacto de que se apropriou. Desta forma, o processo de usar um artefacto é um processo de produção de algo (geralmente visível) e um processo de construção de conhecimento (não completamente visível).

Os conteúdos da Álgebra e da Geometria são dos que usam, com mais frequência, os três sistemas de representação verbal, simbólico e visual. Ao entendermos as representações como artefactos e as suas transformações como ferramenta, estamos perante uma situação de dupla moldagem do usuário (professor e/ou alunos) com o artefacto.

Monaghan et al. (2016) relacionam a execução de uma tarefa matemática ou a resolução de um problema com processos de uso e criação de artefactos. A visualização também compreende o processo de uso e criação de artefactos. Esta última pode ser casual ou propositada, mas, de uma forma ou de outra, é também uma necessidade de ação.

Knuuttila e Boon (2011) sugerem a conceção de objetos/artefactos concretos construídos (que apelidaram de modelos) através de vários meios de representação e com determinados objetivos epistémicos, cujo valor cognitivo deriva em grande parte da interação do usuário com tais artefactos. Assim, as representações visuais poderão ser consideradas ferramentas epistémicas multifuncionais. Na prática, os mesmos autores referem-se aos processos de construção e manipulação, assim como à sua propriedade de concretização, no sentido de que eles devem ter uma dimensão que possa ser trabalhada. Esta concretização é fornecida pelo meio representacional concreto, dando-lhe dimensão espacial e temporal ao permitir a sua manipulação.

Nia e de Vries (2017) determinam duas naturezas para os modelos. A natureza "intrínseca", que permite aos alunos familiarizarem-se com a estrutura material dos modelos e com os vários tipos de aparência, e a natureza “intencional" em que os modelos são ferramentas epistémicas usadas, de diferentes maneiras, para apoiar o desenvolvimento ou a comunicação sobre conhecimento e artefactos. Ao combinar as duas naturezas, os alunos podem adquirir uma série de *insights* úteis sobre algumas propriedades adicionais de modelos, tais como *design* específico e questões de adequação do modelo, bem como o conhecimento que subjaz ao seu uso. A utilização de representações como ferramentas epistémicas envolve vários recursos (Knuuttila & Boon, 2011):

- A grande variedade de representações que se utiliza (diagramas, imagens, modelos de escala, símbolos, linguagem natural, notações matemáticas, imagens em 3D na tela) oferecem diferentes atividades epistémicas.

- Estas atividades epistémicas apoiam o crescimento do nosso pensamento, algo que os investigadores cognitivos abordaram em termos da noção de andaimes (*scaffolding*), localizando as características relevantes do objeto de forma percetível e manipulável.

- O valor epistémico dos artefactos advém da nossa interação com eles, desenhando e integrando, em cada etapa do seu desenvolvimento, as várias dimensões empíricas, teóricas e conceituais da sua construção. No processo da sua construção, o artefacto funciona, por um lado, como uma ferramenta de integração e, por outro, como um andaime para mais raciocínio científico. Desta forma, o artefacto serve também como ferramenta de desenvolvimento próprio.

- Os artefactos são dispositivos propositadamente concebidos, que visam fornecer respostas a alguns problemas científicos pertinentes.

- Os artefactos são criados em função de certos objetivos e, portanto, funcionam como ferramentas, proporcionando a previsão, o desenho de experiências, o desenvolvimento teórico e a compreensão científica. Assim, os artefactos são usados para representar alguns sistemas reais, mas também para obter certos resultados ou efeitos, de acordo com as atividades e habilidades cognitivas do usuário.

Os artefactos proporcionam conhecimento através da construção e uso de ferramentas epistémicas, ou seja, modelos que são incorporados com diferentes meios de representação, fazendo uso do conhecimento teórico e empírico disponível. De acordo com Knuuttila e Boon (2011), a chave para o valor epistémico dos modelos reside neste processo. No entanto, não há meios suficientes para explicar como ganhamos conhecimento através de modelos. Para ultrapassar este problema, os autores sugerem o estudo de como os modelos funcionam como ferramentas de investigação científica.

Enquanto os modelos fazem parte da classe de artefactos culturais chamados representações, estabelecer uma relação de representação entre um modelo e uma parte do mundo já se considera uma realização epistémica (Knuuttila & Boon, 2011). Os mesmos autores argumentam que é a atividade de modelagem que forja o vínculo entre a representação e o nosso conhecimento (teórico e empírico) do mundo real. A chave do enigma da representação reside no processo de construção, em que se desenvolvem simultaneamente os fenómenos, os conceitos e os princípios teóricos. Um modelo funciona como uma ferramenta para integrar e orientar esse processo. Em consequência, um modelo não funciona como uma ferramenta epistémica por causa de alguma relação pré-determinada de representação, mas sim como uma ferramenta para o estabelecer, além de funcionar como uma ferramenta para vários tipos de outras atividades epistémicas. De acordo com a definição de artefacto e as suas características, também podemos dizer que são artefactos as representações usadas para concretizar os conceitos e ideias matemáticas.

Mais operacionalmente, e segundo Lopes, Cravino e Silva (2010), os alunos trabalham as representações visuais de forma epistémica quando o professor promove as interações entre pares e assegura que os alunos se envolvem produtivamente nelas, mediando a exploração da tarefa, isto é, promovendo a ocorrência das práticas epistémicas dos alunos através dos desafios que vai lançando, para que estes desenvolvam os seus percursos investigativos, "tendo sempre como referente o objeto epistémico". Quando se seleciona, relaciona, calcula, infere, transpõe ou transfere para outro contexto, aumentam-se as oportunidades de uso de representações visuais como mediador epistémico para construir conhecimento (Mottet, 1996). Também Pape e Tchoshnov (2001) defendem que as representações devem ser pensadas como ferramentas para a atividade cognitiva, em vez de produtos ou o resultado de uma tarefa. Usar as representações como um resultado, em vez de ferramenta para explicar, conduz os alunos à produção de representações que não têm significado e a partir das quais não podem ser extraídas declarações relacionais.

Por detrás das ações físicas do uso de artefactos estão intenções, compreensões e rotinas relacionadas com as formas de usar determinado artefacto. Sendo assim, um artefacto é o ponto de partida, alguma coisa disponível para um usuário e uma ação orientada por um objetivo, transformando-se numa ferramenta (Monaghan et al., 2016).

O uso de ferramentas é importante em Matemática. Algumas ferramentas são validadas, por exemplo, as representações verbais, assim como as representações simbólicas, são reconhecidas na atividade matemática (exemplo, Duval, 2006b), tal como o são o compasso, o transferidor e a régua. Mas outras, por exemplo, a calculadora ou as representações visuais, são ainda controversas, sendo objeto de muitos estudos (e.g. David & Tomaz, 2012; Mao et al., 2017; Stylianou & Silver, 2004).

Trouche (in Monaghan et al., 2016) relaciona a execução de uma tarefa matemática ou a resolução de um problema com processos de uso e criação de artefactos, que pode ser casual ou propositada, sendo sempre, contudo, uma necessidade de ação.

Quando um artefacto foi apropriado pelo usuário, Trouche (in Monaghan et al., 2016) nomeia de instrumento (*instrument*) a entidade mista composta pelo artefacto e o conhecimento associado, tanto o próprio artefacto como o conhecimento construído na tarefa durante o uso do artefacto. E como fica a ferramenta no meio de tudo isto? Para Trouche (in Monaghan et al., 2016) uma ferramenta é alguma coisa no caminho entre um artefacto e um instrumento. Embora a noção de instrumento não esteja diretamente relacionada com o nosso trabalho, sentimos necessidade de a introduzir aqui, para ficar claro que a utilização de um artefacto como uma ferramenta é algo intermédio e, como tal, sempre possível de ser melhorado.

O mesmo autor ressalta um aspeto importante do uso de ferramentas em Matemática: as ferramentas raramente são usadas isoladamente, elas quase sempre são usadas com outras ferramentas. Ainda refere que uma ferramenta pode ser usada diferentemente do seu objetivo primário, podendo assim ser adaptada a propósitos diferentes. No entanto, o usuário precisa de saber como usar determinada ferramenta, uma vez que as ações físicas devem ser implementadas para executar a tarefa. Também precisa de ter uma intenção para usar a ferramenta com um determinado fim. Pelo exposto, terá de haver coordenação entre algo interno no usuário e as ferramentas que normalmente lhe são externas.

Monaghan (in Monaghan et al., 2016) discute a existência de intencionalidade no uso de uma ferramenta. Embora às vezes as ferramentas novas possam ser fruto de um acaso, uma ferramenta também é intencionalmente desenvolvida para atender a uma determinada necessidade ou para suportar uma determinada actividade, sendo que o desenho de uma ferramenta não pode ser independente do uso que lhe é dado.

Mas como integrar o uso de ferramentas na prática letiva? As tarefas que propomos aos alunos têm especial importância na investigação em Educação Matemática. Muitos autores estudaram a sua caracterização, as atividades cognitivas envolvidas por cada tipo de tarefa e a sua influência na aprendizagem, de acordo com a utilização que se lhes dá. As tarefas que, à partida, têm mais valor pedagógico são as que envolvem atividades investigativas que têm por base um problema ou questão. Estas tarefas começaram a ganhar expressão no currículo de Matemática anterior (Ministério da Educação, 2007). São atividades que os alunos realizam em que podem reunir informação, aplicar conhecimentos anteriores, argumentar, formular e testar hipóteses, estabelecer relações, identificar condições empíricas, avaliar criticamente, fazer previsões, observar, interpretar, comunicar, criar ou alterar representações simbólicas e validar os conhecimentos construídos junto dos seus pares ou junto do professor. Estas práticas são designadas, em Lopes et al. (2010), de práticas/ferramentas epistémicas.

As atividades de ensino e de aprendizagem em sala de aula proporcionam uma gama de possibilidades epistémicas:

(i) a dimensão estrutural e o plano de fundo a partir do qual o conhecimento pode ser implementado;

(ii) a dimensão funcional, abrindo um espaço para a promulgação de possibilidades, onde o potencial se transforma em algo real através das ações concretas dos alunos (Radford, 2014).

No nosso trabalho, consideramos que estamos perante uma ferramenta matemática epistémica quando utilizamos um artefacto (material ou não), tornando-o em algo (uma ferramenta) com o objetivo específico de produzir conhecimento matemático, isto é, transformar o conhecimento do usuário. Obviamente, os artefactos e a forma do seu uso estão estritamente relacionados com a cultura do usuário. Por esta razão, a atividade de ensino e de aprendizagem em sala de aula não é previsível, pois ambas dependem ainda de como professores e alunos se envolverão na atividade (Radford, 2014).

Os signos, como as ferramentas, são artefactos, mas enquanto os signos significam alguma coisa, as ferramentas fazem algo. Em Matemática, usamos sinais para representar determinada entidade matemática. Por exemplo, o sinal π representa a razão entre o perímetro de uma circunferência e o seu diâmetro. Por seu lado, quando combinado com outros sinais, por exemplo, com os sinais $A, 2, =, \times, r$, transforma-se no artefacto $A = \pi \times r^2$, que pode funcionar como uma ferramenta para calcular a área de um círculo. Em Educação Matemática, concatenações como a anterior são chamadas de representações (Monaghan et al., 2016).

As representações podem funcionar como um reflexo dos processos mentais internos, mas também como ferramentas para realizar ações requeridas em atividades nas quais os indivíduos se envolvem, dando-lhes uma vida dupla (Radford, 2000), podendo ser usadas para fazer alguma coisa, geralmente alguma coisa matemática.

No entanto, as representações também têm funções de não-ferramenta, pois podem significar um objeto/conceito matemático, atuando como signo. Num signo, há a considerar o significado e o significante. As noções de significado e de significante são fundamentais, pois “a estrutura de todos os sistemas de comunicação (escritos, orais, visuais etc.) está apoiada em signos” (Blikstein, 2006, p. 40). As palavras, tanto escritas como orais são significantes, e as ideias ou conceitos a elas associados são os significados. Num sistema de comunicação visual, como por exemplo, a sinalização rodoviária, dizemos que a seta cortada por uma barra oblíqua é o significante, e "direção proibida" constitui o significado.

Monaghan (in Monaghan et al., 2016) sublinha o poder da visualização na descoberta de novas propriedades e na demonstração. Com efeito, a prova sem palavras tem ganho espaço.

São várias as situações em que os professores recorrem à prova sem palavras na sala de aula. A título de exemplo referimo-nos a duas delas: prova visual de que a soma das amplitudes dos três ângulos internos de um triângulo é 180º (Figura 3) e prova visual de que a soma dos n números ímpares é igual a n^2 (Figura 4). Em ambas as provas, recorre-se a representações visuais, mas diferentes. No primeiro exemplo, recorreu-se a uma representação visual figurativa que permitiu a sua manipulação através do recorte e posterior rearranjo das figuras obtidas.

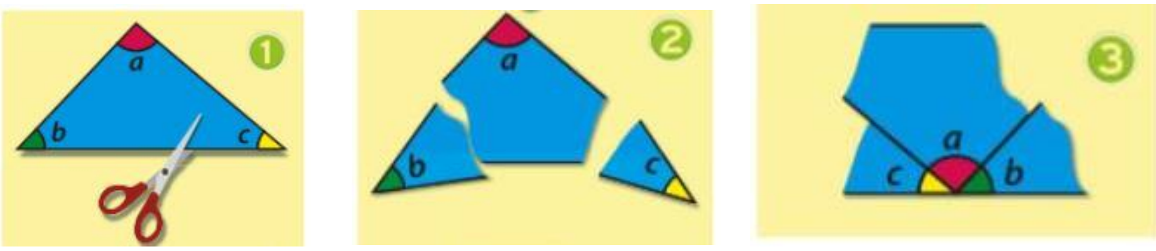
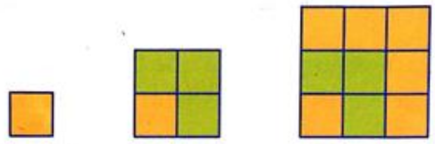


Figura 3: Prova visual da equivalência da soma dos ângulos internos de um triângulo com um ângulo raso (adaptado de Neves & Faria, 2016)

No segundo caso recorreu-se à cor, evidenciando determinadas características das figuras. Em ambos os exemplos, se recorreu a tratamentos visuais.

3 **Considera a sequência de quadrados formados por quadradinhos geometricamente iguais.**



3.1. Desenha no teu caderno o quarto termo desta sequência de quadrados.

3.2. Representa por meio de expressões numéricas os 5 primeiros termos da sequência do número de quadradinhos de cada figura.

3.3. Copia e completa uma tabela como a seguinte.

Ordem da figura	1	2	3	4	5	6
N.º de quadradinhos						

3.4. Escreve uma expressão geradora da sequência do número de quadradinhos de cada cada figura.

3.5. *Qual é o número de quadrados da figura 10?*

3.6. *Depois de observar a tabela, o Hugo diz que descobriu uma forma rápid para calcular a soma dos 20 primeiros números ímpares:*

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 + \ldots + 37 + 39 = 400$$

Como terá pensado o Hugo?

Figura 4: Prova visual de equivalência de duas sequências (Conceição, Almeida, Conceição, & Costa, 2014, pp. 88-89)

Com efeito, na soma dos n números ímpares, representada algebricamente pela expressão $2n+1$, é igual a n^2, e vemos que a alternância das cores utilizadas evidencia o número ímpar de quadrículas (uma quadrícula laranja na Figura 1; uma laranja e três verdes na Figura 2; uma laranja, três verdes e cinco laranjas na Figura 3; e assim sucessivamente). Ao mesmo tempo, a aparência global de cada uma das figuras da sequência é um quadrado. Se quisermos, obtemos um resultado visível, comparando as duas sequências:

Soma dos números ímpares	1	$1+3$	$1+3+5$	$\ldots$	$2n+1$
Área da figura	1	4	9	$\ldots$	n^2

Também Marmolejo e González Astudillo (2015) defendem que a discriminação dos elementos visuais, que provocam reforço ou ambiguidade, são aspetos de enorme importância para a análise de textos escolares. Vários estudos (e.g. Knuuttila, 2005; Saraiva, 2017) abordam a perspetiva de que as representações visuais são um poderoso aliado do professor relativamente ao conhecimento que o seu uso pode gerar. Assim, as representações visuais são encaradas como artefactos com materialidade, cuja construção, uso e manipulação possibilita o desenvolvimento de atividades epistémicas importantes (Knuuttila & Boon, 2011; Saraiva, 2017). No processo de dupla moldagem entre artefacto e usuário, ou durante o processo de visualização, há determinados gestos visíveis e observáveis onde podemos situar as transformações de representações, adquirindo as representações o papel de mediador epistémico. Durante a mediação em sala de aula, o professor pode e deve enfatizar a importância de representar as diferentes ideias matemáticas de formas diferentes através dos diferentes sistemas de representação (Duval, 1993; NCTM, 2008; Saraiva, 2017). Porque a mediação do professor é fundamental para a utilização de um artefacto como uma ferramenta, debruçamo-nos, de seguida, sobre a mediação do professor, as práticas de ensino e o desenvolvimento profissional.

2.5 Mediação do professor, práticas de ensino e desenvolvimento profissional

Para Radford (2013), o saber é uma potencialidade cultural, a potencialidade de pensar o mundo de certos modos, como algo que passa de uma pura potencialidade a uma atualização do saber, que define como conhecimento. A tomada de consciência dos modos como se atualiza o conhecimento, o mesmo autor define de *aprendizagem*. É nesta atualização que o professor tem de participar juntamente com o aluno, para que certas tomadas de consciência (aprendizagem) sejam possíveis na sala de aula, dando lugar ao conhecimento. Nesse sentido, acrescenta, o professor não é um simples acompanhante, treinador ou assessor, é antes alguém que está implicadíssimo com o aluno e com o seu trabalho (Radford, 2013). Pelo exposto, o perfil atual do professor deixou de ser o de um mero detentor e transmissor de conhecimentos, para se tornar num mediador no processo de aprendizagem dos alunos. Este esforço que o professor realiza está associado à sua mediação, ajudando os alunos a aprender. Para isso, fornece as estruturas e as conexões entre as suas experiências, destacando as informações relevantes nas tarefas em determinada situação, e estabelecendo continuidade nos contextos de aprendizagem. Nestes, as crianças podem vir a assumir parte das atividades de toda uma tarefa de resolução de problemas. A *mediação do professor* é hoje mais importante do que nunca (Orrill, 2015) e, de acordo com Lopes et al. (2010), consiste em:

> [acções] e linguagens (naturais e outras) do professor construídas e postas em prática como resposta sistemática aos desafios de aprendizagem dos alunos nos seus percursos para atingir os resultados de aprendizagem (capacidade, valores, atitudes, conhecimentos e competências) pretendidos por um determinado currículo. (p. 5).

Ainda segundo estes autores, o objeto de estudo da mediação de um professor para promover e maximizar a aprendizagem dos alunos compreende duas vertentes:

(i) Linguagens (verbais e não verbais), comportamentos e ações utilizadas pelo professor e pelos alunos.

(ii) Os mediadores epistémicos (signos e ferramentas) utilizados na interação com o objeto epistémico e na interação com os outros. Coloca a tónica no esforço do professor para promover a aprendizagem dos alunos de acordo com as suas características.

A mediação do professor pode ter três funções fundamentais: (i) treino, se tem como objetivo preparar os aprendentes para a ação imediata; (ii) cultural, se tem como objetivo a apropriação cultural das gerações antecedentes; (iii) epistémica, se pretende iniciar os aprendentes na produção de conhecimento ou artefactos.

Independentemente da sua função, a mediação do professor tem duas dinâmicas fundamentais: (i) interação com os outros e (ii) interação com o objeto epistémico, respetivamente, a aprendizagem mediada e a aprendizagem autorregulada. A aprendizagem mediada é "a dinâmica de interação com o outro através de mediadores numa determinada comunidade com determinadas regras, organização do trabalho e visão do mundo" (Lopes et. al, 2008, p. 7); a aprendizagem autorregulada é "a dinâmica de interação com o objeto epistémico através de mediadores manejáveis, com materialidade, num certo ambiente" (Lopes et. al, 2008, p. 7).

Esta dinâmica de mediação do professor tem cinco componentes fundamentais: mediadores, tarefa-desafio, objetos epistémicos, resultados de aprendizagem pretendidos e percurso de aprendizagem.

Quando a função de mediação é epistémica, a dinâmica de interação com o objeto epistémico centra-se na interação entre o aluno como sujeito epistémico e o objeto epistémico, através de mediadores (Figura 5).

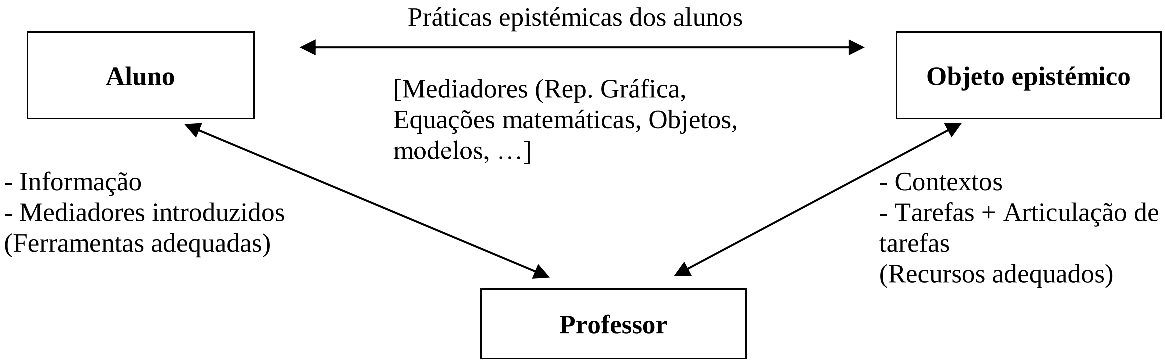


Figura 5: O papel do professor na dinâmica da interação com o objeto epistémico (adaptado de Lopes et al., 2008, p. 8)

No contexto escolar, o professor assume um papel importante quando escolhe e define o objeto epistémico, quando fornece os meios que permitem interagir com o objeto epistémico, quando reconhece o estatuto dos alunos como sujeitos epistémicos e induz, corrige e melhora as práticas epistémicas dos alunos. Assim, a dinâmica de interação com o objeto epistémico é mediada pelo professor de acordo com a sua ação e discurso. Em consonância com os mesmos autores, podemos estudar estas dinâmicas de mediação se considerarmos:

- A dinâmica do que o professor faz para que os alunos recebam as informações e os mediadores que lhes permitam lidar com o objeto epistémico e poderem melhorar as suas práticas.

- A dinâmica do que o professor faz para que o objeto epistémico esteja presente e se torne compreensível e acessível para os alunos através das práticas epistémicas.

- A dinâmica da ação do professor para que induza, corrija e promova práticas epistémicas dos alunos.

A mediação do professor tem ainda duas escalas fundamentais: uma longa – unidade ou módulo temático, unidade curricular ou ciclo de estudos; outra curta – a aula. E seis componentes fundamentais (Lopes et. al, 2008):

- Mediadores – Os mediadores são artefactos e/ou símbolos, concretos ou abstratos, com os quais os alunos podem interagir. Quando a mediação do professor assume uma aprendizagem autorregulada, os mediadores são epistémicos e tornam-se eficazes se tiverem existência material e forem trabalhados e manipulados, pois sem materialidade a mediação é vazia de conteúdo (Knuuttila, 2005).

- Objeto epistémico − Um objeto epistémico é a entidade/realidade a conhecer, com a qual o sujeito interage, direta, ou de forma mediada, mesmo sem a intervenção de outras pessoas. Em Matemática, o objeto epistémico é abstrato, de forma que só é possível aceder-lhe através de representações.

- O outro – É um mediador humano com quem o aluno interage de forma colaborativa, cooperativa ou competitiva, para construir significados em conjunto sobre o que nos rodeia.

- Desafio de aprendizagem/tarefa-desafio – É uma proposta de atividade que engloba o que os alunos têm de aprender e os desafios de aprendizagem que é preciso superar.

- Os resultados de aprendizagem – Pretendem-se conseguir resultados de aprendizagem de acordo com o currículo.

- Percurso de aprendizagem – Este resulta da articulação entre a mediação do professor e os desafios de aprendizagem dos alunos, a sua atividade e envolvimento produtivo, e a demonstração pública dos seus progressos na aprendizagem.

Para mediar a aprendizagem da Matemática, o professor tem de desenhar determinadas circunstâncias com vista a promover o processo específico de mediação, num ciclo dialético: realização da tarefa com o artefacto, produção de signos relacionados com o uso do artefacto e preparação da apresentação dos resultados obtidos com a discussão coletiva dos mesmos.

Um dos objetivos centrais do ciclo dialético da mediação é o desdobramento do potencial semiótico do artefacto ("*unfolding of the semiotic potential of the artifact*") (Monaghan et al., 2016, p. 211), que o autor relaciona com a objetivação (Radford, 2013): é crucial que os professores criem tarefas que levem os alunos a desenvolver significados pessoais relacionados ao uso do artefacto, isto é, que os leve na direção do conhecimento matemático que se pretende.

É ao professor que cabe a tarefa de ajudar os seus alunos a aprender a utilizar representações de forma flexível e adequada, quando os estimula a criar e usar representações que suportem o seu raciocínio e comunicação (NCTM, 2008). Também Lemke (2003) defende que a Matemática deve ser usada, e só pode ser compreendida, se for ensinada como um componente integral de um sistema de recursos que inclui a linguagem natural e a representação visual. Em algumas áreas da Matemática, como a Geometria, o uso de figuras e diagramas é considerado parte integrante do conhecimento do domínio (NCTM, 2008). No entanto, há outras áreas da Matemática, em que a visualização externa pode não ser uma parte inerente do conhecimento do domínio, apesar de poderem ser frequentemente usadas como meio para resolver problemas (e.g. Presmeg, 2006). A construção de representações externas é, contudo, fundamental para a construção de representações internas (Goldin & Kaput, 1996). Por isso, a escolha dos problemas para os alunos resolverem as atividades em sala de aula de Matemática e as construções externas precisam de ser examinadas em relação aos tipos de representações internas que queremos que se desenvolvam.

É nossa convicção de que as representações visuais, em particular os tratamentos visuais, têm um papel importante no ensino e na aprendizagem e, consequentemente, na construção das representações internas, daí defendermos o seu uso na mediação. Durante a mediação, as representações visuais podem ser utilizadas pelo professor como estratégia de ensino (Saraiva, Lopes, Cravino, & Santos, 2012), e pelo aluno no processo de descoberta da solução de um problema, podendo ter um impacto positivo no desenvolvimento das suas competências epistémicas (Jaipal, 2010). As ações que essas práticas epistémicas promovem, apoiam e sustentam revelam o impacto no desenvolvimento dessas competências (Reveles, Cordova, & Kelly, 2004).

Na resolução de problemas, não é invulgar os alunos recorrerem a representações não convencionais, a par, ou não, de outras representações convencionais. Embora as representações convencionais apresentem bastantes vantagens, a sua utilização pode ser contraproducente, caso os alunos não sejam ainda capazes de as compreender e usar (NCTM, 2008). É necessário que os professores recorram a uma avaliação sólida e profissional, ao decidirem quando e como ajudar os alunos a ir além das representações convencionais. O leque de representações visuais é alargado, e podemos encontrar representações visuais convencionais, como por exemplo, um gráfico, mas há também representações visuais não convencionais, como por exemplo, determinados diagramas/esquemas ou determinadas figuras, desde que não estejam sujeitos a regras específicas e restritas como é o caso, por exemplo, de um gráfico, de um diagrama de *Venn* ou um diagrama de *Carrol*.

A exploração das inúmeras potencialidades das representações visuais não convencionais, aplicadas ao ensino e aprendizagem da Matemática, nunca fez parte da formação de base da professora investigadora autora deste trabalho, daí ter havido necessidade de desenvolvimento profissional nesse sentido. O uso de representações visuais requer o desenvolvimento de conhecimento profissional que permita ao professor tanto a sua rentabilização, como a pertinência do seu apoio, durante a sua mediação (Sandoval & Reiser, 2004; Saraiva, 2017), pois são ferramentas de ensino inovadoras com impacto positivo no desenvolvimento de competências epistémicas dos alunos (Sandoval & Reiser, 2004; Saraiva, 2017). Utilizá-las de uma forma dinâmica requer formação por parte do professor, nomeadamente do seu desenvolvimento profissional.

Da especialização de um professor fazem parte três domínios principais: (i) construir o eu profissional; (ii) ser membro de uma comunidade de profissionais; e (iii) melhorar as habilidades práticas profissionais do professor educador (Shagrir, 2010).

De uma maneira geral pode definir-se desenvolvimento profissional como o conjunto dos processos que melhoram o conhecimento, as competências/habilidades ou as atitudes relacionadas com o trabalho dos professores (Sparks & Loucks-Horsley, 1989). O desenvolvimento profissional tem que ser contínuo (Hargreaves, 2007), para acompanhar a evolução da sociedade, e facilitar a reforma educativa por que tanto se anseia. No entanto, várias questões se colocam como, por exemplo, a forma de realizar e avaliar o desenvolvimento profissional e os seus efeitos na instrução e no desempenho dos alunos. Para responder a esta questão, Desimone (2009) defende o estabelecimento de um conjunto de características centrais e de uma estrutura concetual para a aprendizagem dos professores. Estas ações relacionar-se-ão com uma melhor prática, de acordo com a questão de investigação específica de um estudo, e tornam o desenvolvimento profissional estruturado através da observação, entrevistas ou pesquisas, baseando a sua avaliação em instrumentos de medição na qualidade do seu projeto e administração. A importância do desenvolvimento profissional aparece como a chave para as reformas no ensino e aprendizagem, tornando essencial o uso de melhores práticas para medir os seus efeitos (Desimone, 2009).

Existem diversos modelos de desenvolvimento profissional dos professores. Sparks e Loucks-Horsley (1989) consideram os seguintes:

- O desenvolvimento profissional autónomo: os professores planeiam e desenvolvem atividades que eles acreditam que promovem a sua própria aprendizagem, fazendo o seu próprio trajeto.

- O desenvolvimento profissional baseado na reflexão: quando um professor reflete sobre a sua prática docente está a conhecer, analisar, avaliar e a questionar a própria prática.
- O desenvolvimento profissional através do desenvolvimento curricular e organizacional: tem como objetivo o desenvolvimento de um qualquer projeto, para melhorar a qualidade da educação, através da colaboração e autonomia da escola na resolução dos seus próprios problemas.
- O desenvolvimento profissional através de cursos de formação.
- O desenvolvimento profissional através da investigação, apoiando-se na investigação-ação, em que o professor é uma pessoa capaz de refletir sobre a própria prática docente, identificar e diagnosticar problemas da sua prática, na maioria das vezes em colaboração com investigadores.

Em Portugal, o desenvolvimento profissional dos professores de Matemática do Ensino Básico destacou-se no plano de reforma educacional e programas de melhoria escolar durante a implementação do currículo de Matemática de 2007. Com a crescente ênfase na educação vinculada à utilização da tecnologia e à promoção do pensamento criativo e crítico e à resolução de problemas pelos alunos, há novas exigências nas competências profissionais dos professores que se propõem facilitar a aprendizagem dos alunos. Como resultado dessas mudanças, há também a necessidade de adaptar os seus deveres profissionais, preparando-os para ensinamentos cada vez mais desafiadores, para os quais é necessário um desenvolvimento profissional eficaz e com uma avaliação adequada (Soebari, 2015).

A utilização das trajetórias de aprendizagem de professores para estruturar o desenvolvimento profissional permite desenvolver vários aspetos do conhecimento (Bargagliotti & Anderson, 2017) e que podem influenciar o ensino na sala de aula (Fischer et al., 2018). Três características do desenvolvimento profissional que os professores valorizam são a duração prolongada, as interações com outros para comparação de desempenhos discentes, e a oportunidade de pensar e aprender sobre um tópico específico (Norton & McCloskey, 2008). Os professores também consideram importante o desenvolvimento profissional durante o decorrer do seu trabalho, e não apenas antes de assumir o cargo, permitindo conexões entre a teoria e a prática (Shagrir, 2010). Um dos indicadores é o envolvimento do professor em demonstrar e promover o pensamento crítico e a resolução de problemas entre professores educadores, professores e / ou futuros professores, e em investigar problemas teóricos e práticos no ensino e na aprendizagem (Shagrir, 2010).

A investigação da própria prática tem como grande finalidade contribuir para clarificar os problemas da prática e procurar soluções (Ponte, 2004), reforçando a sua competência profissional ao acrescentar a investigação para lidar com os problemas que se lhe deparam. A participação dos professores no seu desenvolvimento profissional está associada ao conhecimento e ganhos de habilidades relacionados com mudanças na prática educacional, o que, por sua vez, leva a uma melhor aprendizagem dos alunos (Fischer et al., 2018). Também Lopes e Cunha (2017) argumentam que o desenvolvimento profissional baseado nas práticas de ensino é eficaz na melhoria da qualidade das práticas de ensino e aprendizagem dos alunos.

Gueudet e Trouche (2009) consideram o trabalho de documentação (dentro e fora da sala de aula) de um professor como o núcleo da sua atividade e a força motriz para o seu desenvolvimento profissional. A participação dos professores em atividades eficazes de desenvolvimento profissional tem como resultados o aumento do conhecimento do professor e as mudanças nas suas convicções, o que pode indiretamente permitir que os professores modifiquem as suas práticas na sala de aula (Desimone, 2009). Baseada na literatura, a mesma autora identifica as características centrais de alta qualidade do desenvolvimento profissional – o foco no conteúdo, a aprendizagem ativa, a coerência, a duração e a participação coletiva:

– O foco no conteúdo da aprendizagem do professor pode ser a característica mais influente, estabelecendo uma relação entre atividades que focalizam o conteúdo de um assunto ao modo como os alunos aprendem esse conteúdo, com o aumento do conhecimento e das habilidades desse professor, melhorias na sua prática e, de forma mais limitada, aumentos no desempenho dos alunos.

– A aprendizagem ativa, em oposição à aprendizagem passiva tipicamente caracterizada por ouvir uma palestra, pode assumir várias formas, incluindo observar professores especialistas ou ser observado, seguido de *feedback* interativo e discussão; revisão do trabalho do aluno nas áreas temáticas analisadas; participação em discussões.

- A coerência é a medida em que a aprendizagem do professor é consistente com os seus conhecimentos e as suas crenças, assim como a consistência entre as reformas e as políticas escolares com o que é ensinado no desenvolvimento profissional.

- A duração refere-se ao período durante o qual a atividade é distribuída (e.g. um dia ou um semestre) e ao número de horas usadas nessa atividade, pois as mudanças intelectuais e pedagógicas requerem atividades de desenvolvimento profissional de duração suficiente. A pesquisa não indica um número exato para a duração, mas refere-se a atividades que são distribuídas ao longo de um semestre (ou cursos intensivos de verão com acompanhamento durante o semestre) e incluem 20 horas ou mais de tempo de contacto.

- A participação coletiva pode ser realizada através da participação de professores da mesma escola ou departamento, estabelecendo interações e raciocínios que podem ser uma forma poderosa de aprendizagem para o professor.

Desimone (2009) estabelece uma teoria central da ação para o desenvolvimento profissional com as seguintes etapas: (1) Os professores experimentam um desenvolvimento profissional eficaz; (2) o desenvolvimento profissional aumenta o conhecimento e as habilidades dos professores e / ou altera as suas atitudes e crenças; (3) os professores usam os seus novos conhecimentos, habilidades, atitudes e crenças para melhorar o conteúdo teórico ou a sua abordagem pedagógica, ou ambos; (4) as mudanças de instrução promovem o aumento da aprendizagem do aluno.

Uma das facetas do desenvolvimento profissional pode ser a investigação da própria prática, através da autorreflexão. Segundo Ponte (2004), as condições fundamentais na investigação da própria prática são a identificação de um problema relevante (teórico ou prático) para o qual se procura, de forma metódica, uma resposta convincente que terá de ser divulgada pela comunidade interessada, discutida e validada publicamente.

Mas, um dos problemas que se coloca na investigação da própria prática, além da distância do investigador aos participantes, é a distância do investigador ao objeto de estudo. Segundo Ponte (2004), para a aumentar, o investigador tem três recursos:

- Recorrer à teoria através da experiência acumulada pelos seus antecessores.

- Tirar partido da sua vivência num grupo confrontando diretamente as suas perspetivas com pares críticos, criando distância às suas perceções e preconceitos.

- Tirar partido do debate no exterior do grupo, ajudando a relativizar as próprias perspetivas.

Durante a investigação da própria prática, é necessária a recolha de dados. Uma das formas de garantir a veracidade do estudo é a utilização de fontes diversas de dados. Na investigação da própria prática, o professor tem possibilidade de fazer essa recolha através de gravação de aulas (áudio ou vídeo), recolha de registos escritos individuais dos alunos, fotografias dos registos que professor e alunos fazem no quadro preto/branco/interativo, recolha de documentos diversos, nomeadamente planos de aula, tarefas desenvolvidas, gravações de reunião entre pares pedagógicos, e outros. A utilização de fontes diversas de dados vai permitir a triangulação dos dados, conferindo fiabilidade ao estudo.

No nosso estudo, o recurso à elaboração de narrações multimodais (Lopes et al., 2014), durante a fase de desenvolvimento profissional, permitiu organizar num documento só todos os dados recolhidos, sistematizando as ações a que a professora investigadora deverá recorrer para proporcionar uma situação de ensino e aprendizagem assente num uso dinâmico de representações visuais, não esquecendo a dificuldade que é a utilização de representações múltiplas. É que, embora tolerado, o uso de representações visuais no ensino e aprendizagem de Matemática não é aceite por professores e alunos com o mesmo estatuto que outras representações mais amplamente utilizadas (e.g. numérica e algébrica) (Montenegro, Costa, & Lopes, 2018). Assim, foi necessária uma fase de desenvolvimento profissional para explorar formas de usar representações visuais no ensino. Um modelo de desenvolvimento profissional voltado para a melhoria das práticas de ensino alinhada à concetualização mais recente (Soebari & Aldridge, 2015) é adotado, baseando-se na articulação com a investigação sobre as próprias práticas docentes dos professores (Fischer et al., 2018; Lopes & Cunha, 2017).

Segundo Gueudet e Trouche (2009), um determinado professor desenvolve um sistema de documentação estruturado, sendo que esse sistema de documentação e a prática profissional do professor evoluem juntos. Do ponto de vista da investigação, a observação e análise do sistema de documentação permitem uma melhor compreensão do desenvolvimento profissional do professor (Gueudet & Trouche, 2009). Algumas evidências desse sistema de documentação são os materiais que o professor constrói para apoio da sua prática. Por exemplo, o conjunto de diapositivos para treino do cálculo mental. Este recurso pode ir evoluindo ao longo do tempo, acrescentando mais estratégias de cálculo mental, assim como a forma da sua apresentação e exploração. O professor vai construindo a sua própria coleção de documentos que considera relevantes. Quando o professor investigador se encontra a desenvolver um trabalho de investigação, é necessário recolher grandes quantidades de dados de várias fontes, que virão a fazer parte do seu acervo de documentação profissional.

Para organizar esses dados pode-se recorrer à elaboração de narrações multimodais. Trata-se de uma ferramenta que pode auxiliar na autorreflexão dos professores para identificar rumos para o seu próprio desenvolvimento profissional, levando-os a perceber as suas intenções, os processos que levaram à tomada de decisão e a compreender formas efetivas de promover a aprendizagem (Lopes et al., 2014; Lopes et al., 2018). O professor, quando confrontado com a narração da sua aula, pode iniciar todo um processo de reflexão (individual ou compartilhado) que lhe permita perceber aspetos importantes da sua prática profissional (Lopes et al., 2014; Lopes et al., 2018). A elaboração de uma narração multimodal combina a escrita e a reflexão. Permite uma análise retrospetiva e profunda dos acontecimentos, assim como das ações e das decisões tomadas na sala de aula, mesmo num processo de investigação em colaboração com outros investigadores. Essa análise torna-se importante para que os professores melhorem as suas práticas pedagógicas num contexto profissional.

2.6 Síntese da fundamentação teórica

Os objetos matemáticos não são de acesso direto, por isso só é possível aceder-lhes através de representações. Em Matemática, as representações aparecem em vários sistemas de linguagem – verbal, simbólica, visual, gestual, e outras – cada um destes sistemas com códigos e regras específicos. Se, por um lado, esta multiplicidade de representações e de sistemas de representação se manifestam como uma das maiores dificuldades com que os alunos se deparam (Ainsworth, 2006), por outro, só é possível compreender um objeto matemático quando o conseguimos representar, pelo menos de duas formas diferentes, alternando entre estas representações (Duval, 2006a). As representações tornam-se, por isso, fundamentais na aprendizagem de conceitos matemáticos, dando uma aparência concreta aos objetos abstratos da Matemática (NCTM, 2008). Elas são usadas como signos substituindo determinado objeto/conceito matemático, ou são usadas enquanto o aprendente faz Matemática, como um meio de expressar o seu raciocínio ou pensamento (Radford, 2013). Em Matemática, esta utilização permite a realização de determinadas transformações nas representações (Duval, 1993, 2006a; 2006b). Estas transformações podem incidir sobre uma representação, não lhe alterando o seu sistema de representação inicial (que denominamos de *tratamento*) ou é transformada numa representação equivalente noutro sistema de representação (que denominamos de *conversão*). Um exemplo de um tratamento é o desenvolvimento de um algoritmo ou de uma expressão numérica; um exemplo de uma conversão é o desenho de um gráfico sujeito a uma expressão algébrica. Das duas transformações, a que é mais difícil de adquirir pelos alunos é a conversão (Ainsworth, 2006; Duval, 2006a). Uma prática de ensino que proporcione aos alunos atividades de conversão de representações tem, obrigatoriamente, de lhes proporcionar o trabalho com representações de sistemas diferentes, ou seja, desenvolver atividades de ensino e de aprendizagem com representações múltiplas.

No Ensino Básico, os três sistemas de representação mais comuns utilizados nas aulas de Matemática são os sistemas verbal, simbólico e visual. Os sistemas verbal e simbólico estão sujeitos a regras específicas e são sequenciais, sendo as suas representações convencionais, na sua maioria. O sistema verbal é comummente utilizado para definir conceitos, enunciar propriedades e justificar raciocínios; o sistema simbólico (numérico e algébrico) é utilizado basicamente para definir conceitos, aplicar propriedades, realizar cálculos e fazer demonstrações. O sistema visual, apesar de sujeito a regras específicas, permite uma leitura global que lhe possibilita uma utilização criativa de forma que se torna possível também a utilização de representações não convencionais. Por apresentarem uma dinâmica diferente das outras representações, é nossa convicção que se pode aumentar o impacto na exploração das características das representações visuais, permitindo uma melhor compreensão da utilização de representações múltiplas. Estas características das representações visuais dão-lhes o estatuto de artefacto. Um artefacto é um objeto, material ou não, resultante de uma atividade humana e com potencialidades de ser acionado numa atividade nova (Monaghan et al., (2016). Um artefacto pode ser um som, um gesto, utensílios, formas orais e escritas de linguagem natural, textos, livros, instrumentos musicais e científicos, e ferramentas de tecnologias e de informação. Quando um artefacto é usado por uma pessoa para fazer alguma coisa, transforma-se numa ferramenta. A criatividade de uma pessoa pode reinventar um artefacto, dando-lhe um uso diferente daquele para o qual foi criado.

As representações visuais são artefactos potenciais de novos usos em Matemática, pois podem ser utilizadas através de tratamentos em qualquer tipo de representação, incluindo nelas próprias, possibilitando a realização de algo, o que as transforma numa ferramenta (Saraiva et al., 2012). Quando o algo que permitem fazer transforma o conhecimento dos alunos adquire o estatuto de mediador epistémico (signos e ferramentas), que é uma das vertentes da mediação de um professor para promover e maximizar a aprendizagem dos alunos. O professor tem a responsabilidade de selecionar o objeto epistémico assim como dotar os seus alunos dos signos e das ferramentas necessárias para maximizar as suas aprendizagens, sendo um dos processos chave das suas práticas de ensino. Quando as ferramentas são usadas com o objetivo de mudar o conhecimento matemático adquirido pelo usuário, estamos perante uma ferramenta matemática epistémica (mediador epistémico).

No caso de o professor utilizar mediadores epistémicos não validados, terá de recorrer ao seu desenvolvimento profissional para uma utilização consciente mediante o conhecimento pormenorizado e estruturado desses mediadores. O desenvolvimento profissional de um professor admite várias formas (Sparks & Loucks-Horsley, 1989). Uma delas é através da investigação, sendo o professor uma pessoa capaz de refletir sobre a própria prática docente, identificando e diagnosticando problemas da sua prática, em colaboração com outros investigadores. Este tipo de desenvolvimento profissional através da investigação permite uma autorreflexão estruturada, baseada na discussão com outros investigadores e a análise e validação do trabalho desenvolvido através da sua abertura à comunidade científica. Durante a realização de um trabalho de investigação e também durante a fase de desenvolvimento profissional é necessária a recolha de dados. É normal recolherem-se mais dados do que os necessários, mas sendo inviável a análise de todos, torna-se necessária uma seleção dos mesmos, para não se perder o foco do estudo.

Este trabalho de investigação pretende explorar modos de aumentar o impacto do uso de representações visuais como ferramenta epistémica, no ensino e na aprendizagem em diferentes domínios de conteúdos matemáticos do 2.º Ciclo do Ensino Básico. Em particular, exploramos em domínios de conteúdos diferentes algumas transformações de e para representações visuais, e o papel importante que têm como parte do método de ensino do professor, bem como na compreensão e aprendizagem de determinados conteúdos.

De seguida, referir-nos-emos à metodologia utilizada neste estudo de investigação.

3 Metodologia

Etimologicamente, a palavra metodologia vem do grego, *meta* = ao largo; *odos* = caminho; *logos* = discurso, estudo. A metodologia consiste em estudar, compreender e avaliar os vários métodos disponíveis para a realização de uma pesquisa académica; examina, descreve e avalia métodos e técnicas de pesquisa que possibilitam a recolha e o tratamento de dados, com vista à resolução de problemas e/ou questões de investigação; é a aplicação de procedimentos e técnicas que devem ser observados para a construção do conhecimento, com o propósito de comprovar a sua validade e utilidade na sociedade (Prodanov & Freitas, 2013).

Assim, o enquadramento metodológico de um estudo consiste na escolha justificada de um método de investigação, tendo vários objetivos: (i) permitir responder ao problema de investigação; (ii) selecionar e aplicar técnicas e procedimentos que fortaleçam e contribuam para a validação dos resultados da investigação; (iii) afiançar a imparcialidade e precisão desses resultados, garantindo o devido rigor nos processos implementados; (iv) ser conhecido e avaliado pela comunidade científica.

3.1 *Design* do estudo

Este estudo tem como objetivo geral explorar modos de aumentar o impacto do uso de representações visuais como ferramenta epistémica no ensino e na aprendizagem de diferentes domínios de conteúdos matemáticos do 2.º Ciclo do Ensino Básico. Em particular, elucidamos com domínios de conteúdos diferentes algumas transformações de e para representações visuais e o papel importante que tiveram (i) como parte do método de ensino do professor e (ii) na compreensão e aprendizagem de determinados conteúdos.

Decompusemos o objetivo geral no sentido de:

(1) Determinar as características das representações visuais que lhes permitem ser

utilizadas como um artefacto no ensino da Matemática, em particular, na exploração de um padrão figurativo, com potencialidades para ser acionado como uma ferramenta matemática. Este primeiro objetivo foi alcançado através do estudo preliminar que descrevemos na Intervenção 1, Fase 1.

(2) Proceder ao desenvolvimento profissional da professora investigadora no conhecimento das transformações de representações e da utilização de representações visuais no processo de ensino. Ao mesmo tempo, procedeu-se à familiarização dos alunos participantes no estudo com a utilização de representações múltiplas, com incidência, para as representações visuais, durante a aprendizagem de diversos conteúdos matemáticos. Foi feito através da investigação teórica, a par da realização de uma série de experiências letivas e de preparação, e posterior reflexão, que correspondeu à Fase 2 deste estudo.

(3) Utilizar as representações visuais como uma ferramenta matemática epistémica. Partindo da assunção, retirada da Intervenção 1, de que a realização de tratamentos visuais não é evidente para os alunos, tendo esta de ser treinada e aprendida, dotaram-se os alunos do Grupo 2 (participantes neste estudo) da realização de determinados tratamentos visuais. através da exploração de duas tarefas orientadas para esse efeito que descrevemos na primeira parte da Intervenção 2, Fase 3.

(4) Reconhecer os tratamentos visuais como uma ferramenta matemática epistémica, através da aplicação de uma terceira tarefa (segunda parte da Intervenção 2, Fase 3) a uma situação nova de aprendizagem com potencialidades para ser resolvida com os tratamentos visuais explorados durante a primeira parte da Intervenção 2, Fase 3. A sua exploração através de tratamentos visuais não foi sugerida nem orientada.

Para desenvolver este estudo, apoiado num paradigma *Design Research*, recorremos aos métodos de investigação *Design Science Research* e Estudo de Caso.

De seguida, explicamos as opções metodológicas através da caracterização da natureza do estudo e dos métodos de investigação que sustentaram o plano de investigação. Também fazemos uma descrição do estudo realizado, a caraterização dos participantes e a descrição das técnicas e instrumentos utilizados na recolha e análise de dados.

3.2 Opções metodológicas

Relativamente às opções metodológicas da sua investigação, um investigador tem de selecionar a abordagem metodológica, o método de investigação a seguir, a escolha dos instrumentos e das técnicas de recolha de dados a utilizar e a forma como os vai analisar. Uma abordagem ou metodologia de investigação é um conjunto de procedimentos que vão permitir ao investigador concretizar os propósitos gerais através da recolha e análise de informação (Creswell, 2009), para aquisição de conhecimento. As metodologias de investigação baseiam-se em paradigmas de investigação, isto é, formas de ver o mundo e de o decompor.

3.2.1 Paradigma de investigação

Em investigação educacional, os paradigmas mais conhecidos são o (i) Nomotético ou Positivista ou Experimental, que consiste numa abordagem caracterizada por procedimentos e métodos desenhados para descobrir leis gerais, e o (ii) Ideográfico ou Interpretativo ou Construtivista, colocando a ênfase no particular e individual, de forma a compreender o comportamento individual (Cohen, Manion, & Morrison, 2007).

O paradigma Positivista valoriza a quantificação e desenvolveu-se no estudo de áreas das ciências naturais, tendo-se definido e caracterizado com maior firmeza no desenvolvimento de métodos e técnicas quantitativos (Creswell, 2009). Este paradigma visa o estabelecimento de relações causa-efeito, orienta-se para a verificação de leis gerais e para a previsão de comportamentos. Aplica-se às ciências sociais quando o social é idêntico ao natural e de que pode derivar conhecimento idêntico e generalizável (Cohen et al., 2007). No entanto, dadas as suas características pragmáticas e resultados de natureza claramente empírica, este paradigma não é totalmente aceite pela comunidade científica no estudo do comportamento humano, devido à sua complexidade natural (Cohen et al., 2007). Surge o paradigma Interpretativo, que procura dar respostas às exigências subjetivas que o estudo da natureza humana impõe.

O paradigma Interpretativo é mais flexível do que o paradigma Positivista. O seu objetivo não é descobrir a causa das coisas (positivismo), mas sim estudar a realidade social e perceber como é que as pessoas interpretam e atuam sobre a realidade física e humana que as rodeia. A investigação qualitativa é uma “abordagem que enfatiza a descrição, a indução, a teoria fundamentada e o estudo das perceções pessoais" (Bogdan & Bilken, 1994, p. 11). Por esta razão, apresenta um cariz subjetivo. Pela especificidade e pela unicidade de cada situação, torna-se difícil generalizar as conclusões alcançadas, mas também não é este o propósito dos seus estudos. Na investigação qualitativa, a fonte direta de dados é o meio natural, sendo o investigador o elemento principal na sua recolha. Os dados são de natureza descritiva, isto é, relatados por palavras ou imagens, e envoltos nos significados que os sujeitos lhes atribuem, assim como nas características dos contextos que os sustentam (Bogdan & Biklen, 1994). Nesta investigação, os dados recolhidos são designados por qualitativos, o que significa ricos em "fenómenos descritivos relativamente a pessoas, locais e conversas, e de complexo tratamento estatístico" (Bogdan & Bilken, 1994, p. 16).

Myers (1997) adverte que a palavra *qualitativa* não é sinónimo de *interpretativa*, pois a pesquisa qualitativa pode ser, ou não, interpretativa, dependendo dos pressupostos filosóficos do investigador. A pesquisa qualitativa pode ser positivista, interpretativa ou crítica e, por isso, a escolha de um método específico de pesquisa qualitativa é independente da posição filosófica adotada. Estes dois paradigmas são considerados em polos opostos e alternativos e, embora controversos, é reconhecido a ambos o rigor necessário para a produção de conhecimento.

Na década de 90 do século XX, surge um novo paradigma, o *Design Research*. O *Design Research* é uma abordagem em termos de metodologia de investigação que surgiu no campo das engenharias e que começa a ganhar espaço e importância em educação (Collins, Joseph, & Bielaczyc, 2004). Plomp (2013) define-o como:

> [conceber] e desenvolver uma intervenção (como programas, estratégias e materiais de ensino e de aprendizagem, produtos e sistemas) como solução para um problema educacional complexo, bem como para avançar o nosso conhecimento sobre as características destas intervenções e os processos para conceber e desenvolver ou, em alternativa, para projetar e desenvolver intervenções educacionais (e.g. processos de aprendizagem, ambientes de aprendizagem e afins) com o propósito de desenvolver ou validar teorias. (adaptado de Plomp (2013), p. 15).

De acordo com a definição apresentada, definimos a investigação de *Design Research* como a análise sistemática, o projeto (*design*) e a avaliação de intervenções educacionais com o duplo objetivo de (i) gerar soluções baseadas na investigação para problemas complexos na prática educacional, e (ii) ampliar o conhecimento sobre os seus processos de conceção e implementação, bem como sobre as características das intervenções realizadas.

O mesmo autor alerta para os princípios orientadores de qualquer pesquisa que também aqui se aplicam: (i) colocar questões importantes que podem ser investigadas; (ii) relacionar a pesquisa com a teoria relevante; (iii) usar métodos que permitam a investigação direta da questão; (iv) fornecer uma cadeia de raciocínio coerente e explícita; (v) replicar e generalizar em todos os estudos; (vi) divulgar pesquisas para incentivar o escrutínio e crítica profissional.

Em *Design Research*, podemos distinguir estudos de desenvolvimento e estudos de validação, conforme os propósitos do projeto e a finalidade da pesquisa.

Nos estudos de desenvolvimento, o objetivo da pesquisa de *design* é desenvolver soluções para problemas complexos na prática educacional (e.g. Maia, 2017). Pode caracterizar-se pela análise, pelo projeto e pela avaliação sistemática de intervenções educacionais com dois objetivos: (a) gerar soluções para problemas complexos na prática educacional, e (b) acrescentar conhecimento sobre as características dessas intervenções e os processos de desenvolvimento.

Nos estudos de validação, o propósito da pesquisa de *design* é o desenvolvimento ou validação de uma teoria. Define-se como o estudo de intervenções educacionais (como processos de aprendizagem, ambientes de aprendizagem e outros), com o objetivo de desenvolver ou validar teorias sobre tais processos.

De referir que *design* é aqui entendido como inventar e criar. Assim, a pesquisa de *design* é relevante para a prática educacional, na medida em que visa criar e desenvolver soluções baseadas na investigação para problemas complexos na prática educacional, ou desenvolver ou validar teorias sobre processos de aprendizagem e de ensino.

O ponto de partida para estudos de desenvolvimento é a identificação de problemas educacionais para os quais não existem soluções, ou as soluções que existem ainda não estão validadas. É fundamentalmente um paradigma de resolução de problemas (Hevner, March, Park, & Ram, 2004). Uma característica dos estudos de desenvolvimento é que os investigadores, em colaboração com os profissionais, projetam e desenvolvem intervenções viáveis e eficazes, estudando cuidadosamente os protótipos das intervenções nos seus contextos, para desenvolver intervenções inovadoras relevantes para a prática educacional. É neste tipo que se enquadra o nosso estudo.

Apesar de este paradigma não ser ainda consensual, todos concordam que o *Design Research* consiste em várias fases. No caso de *Design Research* na variante de estudos de desenvolvimento, distinguem-se as seguintes:

(1) Pesquisa preliminar − análise das necessidades e do contexto, revisão da literatura, e desenvolvimento de um quadro concetual ou teórico para o estudo.

(2) Fase de desenvolvimento ou prototipagem − fase de projeto constituída por iterações, sendo cada um microciclo de pesquisa com avaliação formativa, visando melhorar e refinar a intervenção. Cada iteração ou ciclo é um microciclo de pesquisa, ou seja, uma etapa no processo de pesquisa, incluindo reflexão sistemática sobre aspetos teóricos ou princípios de projeto em relação ao estado da intervenção, resultando em princípios ou declarações teóricas.

(3) Fase de avaliação − avaliação sumativa para concluir se a solução ou a intervenção cumprem as especificações pré-determinadas.

Para que uma intervenção tenha qualidade, Plomp (2013) definiu o seguinte conjunto de critérios para cada uma das fases anteriores (Tabela 4).

Tabela 4: Critérios de avaliação de qualidade das fases de *Design Research*.

Fase	Critério	Descrição de atividades
Pesquisa preliminar	Ênfase principalmente na validade do conteúdo, não muito em consistência e praticidade	Revisão da literatura e de projetos (passados e/ou presentes) abordando questões semelhantes às do presente estudo. Isso resulta em diretrizes para uma estrutura e primeiro plano para a intervenção.
Fase de desenvolvimento ou prototipagem	Inicialmente: consistência (validade de construção) e praticidade. Mais tarde, principalmente praticidade e pouca atenção pela eficácia.	Desenvolvimento de uma sequência de protótipos que serão testados e revistos com base em avaliações formativas. Os protótipos iniciais podem ser apenas esboços para os quais a avaliação formativa ocorre por meio de julgamentos de especialistas, resultando na praticidade esperada.
Fase de avaliação	Prática e eficácia da fase de avaliação	Avaliação se os usuários-alvo podem trabalhar com a intervenção (praticidade real) e estão dispostos a aplicá-lo nos seus ensinos (relevância e sustentabilidade). Também se a intervenção é eficaz.

Uma característica fundamental do *Design Research* é que os profissionais da educação estão ativamente envolvidos, muitas vezes como membros da equipa de investigação, o que pode criar conflitos decorrentes desta relação de proximidade. Para compensar esses potenciais conflitos de interesse, podem tomar-se determinadas medidas:

- Proporcionar a abertura do estudo ao escrutínio e crítica profissional por pessoas fora do projeto.

- O investigador aplicar a seguinte regra de ouro – mudança de um domínio da perspetiva do "*designer* criativo" na fase inicial, em direção à perspetiva do "investigador crítico" em etapas posteriores (isto reflete-se nas camadas de avaliação formativa).

- Ter um projeto de pesquisa de boa qualidade, garantindo que cada parte do projeto de investigação é igualmente forte.

- Aumentar a qualidade dos dados e da análise, através da triangulação de fontes de dados e métodos de recolha de dados, bem como a triangulação do investigador para evitar a influência de qualquer pesquisador específico.

- Realizar testes empíricos tanto da praticidade quanto da eficácia e intervenção − documentação sistemática, análise e reflexão do processo de *design* (desenvolvimento, avaliação e implementação) e dos seus resultados.

- Verificar a validade e confiabilidade de dados e instrumentos de recolha.

- Aplicar uma variedade de métodos e técnicas: por exemplo, usar profissionais e outros investigadores como "amigos críticos"; usar vários observadores/avaliadores e calcular a confiabilidade observador/avaliador, etc.

Em *Design Research*, o *design* não é para verificação de leis naturais nem teorias comportamentais, mas sim um instrumento para a criação de artefactos como possíveis soluções para problemas práticos e reais (Hevner et al., 2004).

Segundo Collins et al., (2004), o *Design Research* foi desenvolvido para abordar várias questões centrais no estudo da aprendizagem, nomeadamente: (i) a necessidade de abordar questões teóricas sobre a natureza da aprendizagem em contexto; (ii) a necessidade de abordagens para o estudo dos fenómenos de aprendizagem no mundo real; (iii) a necessidade de ir além das medidas estreitas de aprendizagem; (iv) a necessidade de obter resultados de pesquisa de avaliação formativa.

Embora o *Design Research* seja uma ferramenta poderosa para atender a essas necessidades, os mesmos autores reconhecem que esse tipo de trabalho traz consigo sérios desafios:

(i) Dificuldades decorrentes da complexidade das situações do mundo real e sua resistência ao controle experimental.

(ii) Grandes quantidades de dados decorrentes de uma necessidade de combinar análises etnográficas e quantitativas.

(iii) Paralelo entre projetos.

O *Design Research* (ou *design experiments*, como referem Collins et al., 2004) surge na investigação formativa para testar e refinar projetos educacionais baseados em princípios de investigações anteriores.

Esta perspetiva de refinamento progressivo pressupõe um protótipo ou uma sequência de tarefas que vão ser testadas no terreno, sendo depois sucessivamente revistas, analisadas e melhoradas com base na experiência. Segundo Collins et al., (2004), esta análise leva a refinamentos no *design* da própria experiência, mas também promove refinamentos na teoria. Pelo exposto, a abordagem de *Design Science* não se apresenta nem como descritiva nem como interpretativa, mas sim como prescritiva (Hevner et.al, 2004).

Na definição de *Design Science* ressaltam as características do ambiente de investigação (problemas do mundo real) e dos produtos de investigação − criação de artefactos, físicos ou abstratos como solução para os problemas em análise.

Assim, o processo de *design* tem como objetivo final a criação de artefactos inovadores que sirvam propósitos humanos, na resolução de problemas reais, procurando a extensão dos limites do conhecimento (Çağdaş & Stubkjær, 2011). Estes artefactos podem ser constructos, modelos, métodos ou instanciações, inovações sociais, ou novas propriedades em recursos técnicos, sociais ou informáticos (Peffers et al., 2007).

A noção de artefacto, mais do que um produto pronto a usar, associa-se a uma ideia, uma prática, uma técnica ou um produto parcial (Hevner et al., 2004), surgindo a sua criação da compreensão do problema identificado e da respetiva solução (Hevner, 2007).

Em suma, em *Design Science* valorizam-se ambas as vertentes dos paradigmas positivista e interpretativo, isto é, a verdade e a compreensão de uma realidade, mas acrescenta-se a possibilidade da sua manipulação e controlo através da criação de produtos que constituam soluções para os problemas em análise (característica prescritiva), em que se incorporam os métodos e técnicas características das duas abordagens anteriores.

Assim, além de permitir compreender aspetos da aprendizagem dos alunos em contextos complexos (exemplo da sala de aula), o *Design Research* também constitui um meio privilegiado para o desenvolvimento profissional dos professores, pois fornece um conjunto de informações importantes sobre a forma como os alunos trabalham e pensam, podem também melhorar o conhecimento do professor acerca do ensino e da aprendizagem, refletindo-se na sala de aula (Collins et al., 2004; Norton & McCloskey, 2008).

As abordagens metodológicas são operacionalizadas através de métodos de investigação cujos princípios se sustentam nas linhas orientadoras da abordagem em que se inserem. Um método de investigação é um conjunto de regras e procedimentos, selecionados com base no objeto e assentes na teoria que o constrói, articulados com vista à construção de conhecimento.

Esta abordagem metodológica foi operacionalizada através dos métodos de investigação *Design Science Research* (Hevner et al., 2004; Wang & Hannafin, 2005) e Estudo de Caso (Yin, 2010).

3.2.2 O método *Design Science Research*

O estudo centra-se na compreensão e descrição do seguinte problema: falta de experiências letivas que explorem as potencialidades das representações visuais, o que provoca dificuldades na flexibilidade do uso de representações múltiplas, impedindo ou dificultando a compreensão de conceitos matemáticos.

O estudo faz uso de métodos de cariz interpretativo, numa abordagem *Design Science*, recorrendo ao artefacto “representações visuais”, com utilização dinâmica como uma possível solução para o problema.

A Tabela 5 sintetiza as características principais deste método de investigação.

Tabela 5 : Características do método *Design Science Research* (Adaptado de Wang & Hannafin, 2005, p. 8)

Características	Definição
Pragmático	*Design Science Research* contribuiu para o desenvolvimento da teoria e da prática. O valor da teoria é avaliado pela sua contribuição na extensão dos conhecimentos da prática.
Fundamentado	O processo de *design* é orientado e fundamentado em teorias relevantes e investigações teóricas e práticas. O processo é conduzido em contexto real e o processo de *design* faz parte e é estudado através do método.
Interativo, iterativo e flexível	Os investigadores envolvem-se nos processos de *design* e trabalham em conjunto com os participantes. Os processos são ciclos iterativos de análise, *design*, implementação e refinamento. O plano inicial geralmente não é suficientemente detalhado, conduzindo os investigadores à introdução de mudanças deliberadas quando necessário.
Integrativo	São utilizados métodos de investigação mistos para maximizar a credibilidade da investigação em curso. Os métodos podem variar durante as diferentes fases, à medida que novas necessidades e questões surgem e o foco da investigação evolui. O rigor é mantido adequadamente a cada fase de desenvolvimento.
Contextual	O processo de investigação, os resultados, e as alterações ao plano inicial são documentadas. Os resultados da investigação estão ligados ao processo e ao contexto da investigação. O conteúdo e a profundidade dos princípios de *design* gerados são variáveis. É necessária orientação para a aplicação de princípios gerados, noutros contextos.

Hevner et al. (2004) propõem um conjunto de diretrizes indispensáveis a uma correta e eficaz implementação do método *Design Science Research*:

- *Design* como artefacto – *Design Science Research* deve produzir um artefacto viável, na forma de um constructo, um modelo, um método ou uma instanciação.

- Relevância do problema – O objetivo do *Design Science Research* é desenvolver soluções para problemas importantes e relevantes.

- Avaliação do *design* – A utilidade, a qualidade e a eficácia de um artefacto de *design* devem ser demonstrados rigorosamente através de métodos de avaliação bem executados.

- Contribuições da investigação – Uma investigação baseada no *Design Science Research* deve produzir contribuições claras e verificáveis nas áreas do artefacto, fundamentos ou metodologias de *design*.

- Rigor da investigação – *Design Science Research* baseia-se na aplicação de métodos rigorosos na construção e avaliação do artefacto de *design*.

- *Design* como processo de pesquisa – A procura de um artefacto efetivo requer a utilização de meios disponíveis para alcançar o fim desejado, respeitando e satisfazendo as leis do contexto do artefacto.

– Comunicação da investigação – O processo e os resultados de *Design Science Research* devem ser apresentados e comunicados de forma eficaz para todo o tipo de público.

Com este quadro concetual Hevner (2007) faz a seguinte representação do método *Design Science Research* (Figura 6).

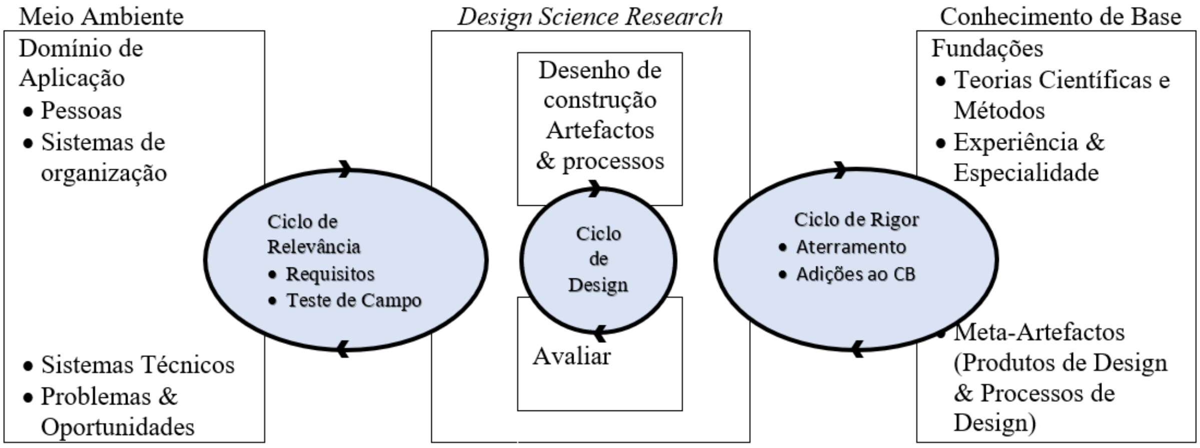


Figura 6: Ciclos do método de investigação *Design Science Research* (Adaptado de Hevner, 2007, p. 88)

De acordo com o foco da investigação, o autor considera três ciclos no processo de investigação – o Ciclo de Relevância, o Ciclo de Rigor e o Ciclo de *Design*:

(1) O Ciclo de Relevância estabelece pontes entre o ambiente, o contexto da investigação, o problema e as atividades de *design* do artefacto, do Ciclo de *Design*. O Ciclo de Relevância constitui o ponto de partida do *Design Science Research*; fornece os requisitos para a investigação e define os critérios que determinam a validade dos resultados da avaliação final do processo. Os resultados dos testes de campo no momento de avaliação neste ciclo dirão da necessidade de iterações adicionais do ciclo.

(2) O Ciclo de Rigor conecta as atividades de *design* com a base concetual de origem científica, a experiência e o conhecimento que sustentam o processo de investigação, através da base de conhecimentos e de teorias científicas, dando um caráter rigoroso à investigação do *Design Science Research.* A seleção das teorias e métodos apropriados à construção e avaliação do artefacto estão diretamente dependentes das competências do investigador. Esta base concetual é complementada com conhecimento de experiências e conhecimentos anteriores no domínio da aplicação da investigação, bem

como dos artefactos e processos resultantes dos ciclos anteriores de aplicação do método, que incrementam novos ciclos (meta-artefactos).

(3) O Ciclo de *Design* é o ciclo central e vital deste método de investigação. Baseia-se num equilíbrio entre as atividades de construção e de avaliação dos artefactos e os processos de investigação, assentando na relevância e rigor aferidos. Designa-se de meta-artefacto o artefacto produzido durante um Ciclo de *Design*, que é uma resposta parcial ao problema em investigação e serve de incremento a um novo ciclo de *Design Science Research*.

Peffers et. al (2007) sintetizam o *Design Science Research* como um modelo de processo composto por atividades numa sequência nominal (Figura 7).

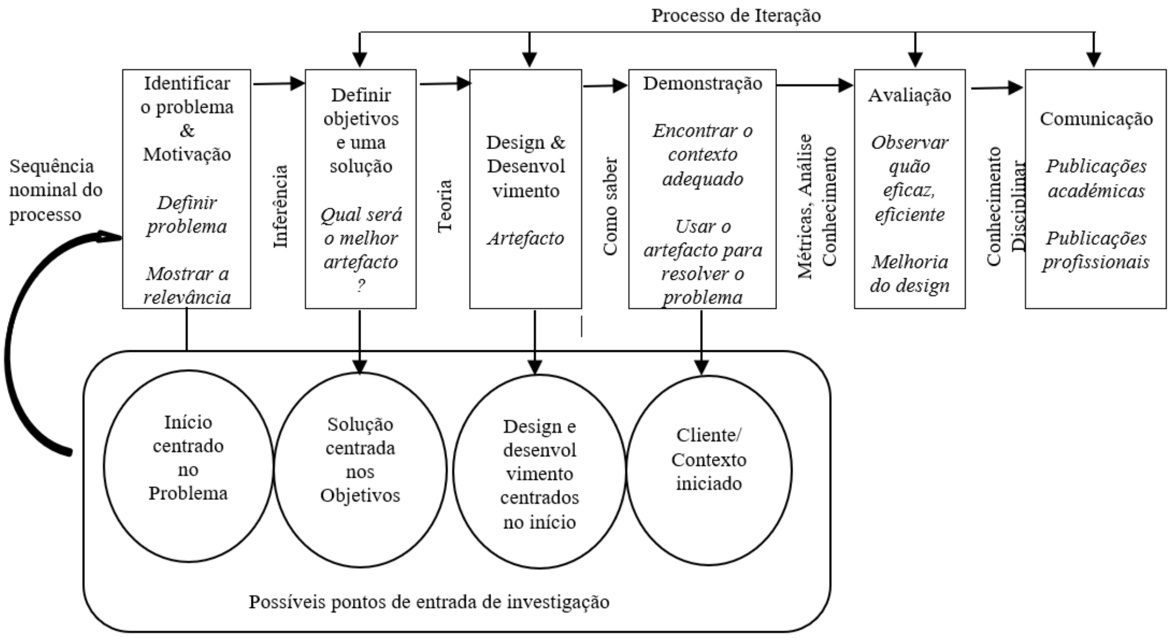


Figura 7: Modelo para a metodologia de *Design Science Research* (Adaptado de Peffers et al., 2007, p. 54)

São seis as atividades que Peffers et al. (2007) nomeiam:

(1) Identificação e motivação do problema − Definir o problema específico da pesquisa e justificar o valor de uma solução. É importante justificar o valor de uma solução para motivar o investigador e o público da pesquisa na procura da solução e no aceitar dos resultados; ajuda também o investigador a entender o raciocínio associado à compreensão do problema. Os recursos necessários para esta atividade incluem o conhecimento do estado do problema e a importância da sua solução.

(2) Definição dos objetivos da solução − Os objetivos, que podem ser quantitativos ou qualitativos, devem ser inferidos racionalmente da especificidade do problema. Os recursos necessários incluem o conhecimento do estado do problema e das soluções atuais, se as houver, e da sua eficácia.

(3) Criação do artefacto − Esta atividade inclui a determinação da funcionalidade desejada do artefacto, da sua arquitetura e, em seguida, a criação do artefacto real. Os recursos necessários para passar de objetivos para *design* e desenvolvimento incluem o conhecimento da teoria, que pode fazer parte da solução.

(4) Demonstração − Demonstrar o uso do artefacto para resolver uma ou mais instâncias do problema, que pode envolver o seu uso através da experimentação, simulação, estudo de caso, prova ou outra atividade apropriada. Os recursos necessários para a demonstração incluem o conhecimento efetivo de como usar o artefacto para resolver o problema.

(5) Avaliação − Observar e medir a compatibilidade do artefacto como uma solução para o problema. Esta atividade envolve a comparação dos objetivos de uma solução com os resultados reais observados do uso do artefacto na demonstração. Requer conhecimento de métricas relevantes e técnicas de análise. A avaliação pode assumir várias formas de acordo com a natureza do problema e do artefacto. Essa avaliação pode incluir qualquer evidência empírica apropriada ou prova lógica. No final desta atividade, os investigadores podem decidir pela melhoria da eficácia do artefacto ou continuar a comunicação e deixar melhorias para projetos seguintes. A natureza do local de pesquisa pode determinar se essa iteração é viável, ou não.

(6) Comunicação − Comunicar o problema e a sua importância, o artefacto, a utilidade e a novidade, o rigor do seu *design* e a sua eficácia para os investigadores e outros públicos relevantes.

3.2.3 O método Estudo de Caso

A escolha de um método específico de pesquisa qualitativa (como o método de Estudo de Caso) é independente da posição filosófica subjacente adotada. Assim, a pesquisa de Estudo de Caso pode ser positivista, interpretativa ou crítica (Myers, 1997).

O Estudo de Caso envolve o estudo intensivo e detalhado de uma entidade bem definida, designada de *caso*. Um caso pode ser um indivíduo, um pequeno grupo, uma organização, uma comunidade, uma nação, uma decisão, a prática de um professor, o comportamento de um aluno/grupo, uma política, um processo, um incidente, etc. Um caso pode ser algo muito bem definido, como os três primeiros exemplos, ou algo menos definido ou mais abstracto, como uma decisão ou um processo.

Stake (1998) considera estudos de caso intrínsecos e estudos de caso instrumentais. Nos primeiros, interessa-nos aprender sobre um caso particular e não sobre outros casos ou sobre algum problema geral; nos segundos, há uma necessidade de compreensão geral e consideramos que podemos compreender a questão mediante o estudo de um caso particular. Neste sentido, por vezes, é necessário realizar um estudo coletivo de casos, em que cada estudo de caso é um instrumento para aprender sobre algo, logo deverá haver uma boa coordenação entre cada estudo individual.

O Estudo de Caso aplica-se quando o investigador não pode manipular as variáveis para determinar a sua relação causal (Cohen et al., 2007), quando a situação é de tal forma complexa que não é possível identificar as variáveis (Ponte, 1994), ou em situações excecionais (Yin, 2010).

No Estudo de Caso examina-se o caso em detalhe, no seu ambiente natural, estuda-se "algo", por isso há que o identificar para conferir foco e direção à investigação. É um sistema limitado, com fronteiras em termos de tempo, eventos ou processos, mas nem sempre são claras e precisas (Creswell, 2009). Assim, a primeira tarefa do investigador é definir as fronteiras do seu caso de forma clara e precisa. Como o Estudo de Caso serve para compreender o caso e não para compreender outros casos, a constituição da amostra é intencional e baseia-se em critérios pragmáticos. No Estudo de Caso, reconhece-se a sua complexidade e recorre-se por isso a todas as técnicas de recolha de dados que se revelem apropriadas: observações diretas e indiretas, entrevistas, questionários, narrativas, registos áudio e vídeo, diários, cartas, documentos e outros. Esta diversidade de fontes de evidência é um ponto forte nos Estudos de Caso (Yin, 2010). A finalidade da pesquisa visa preservar e compreender o caso no seu todo e na sua unicidade, e contribui para uma melhor compreensão dos fenómenos ou situações em análise (Ponte, 1994).

Em suma, o Estudo de Caso tem um carácter empírico do estudo (Yin, 2010), prevalecendo a perspetiva interpretativa (o "como" e o "porquê" referido pelo mesmo autor como as questões essenciais), um elevado nível de aprofundamento e detalhe, um contacto direto e prolongado com as situações e pessoas em causa; não é experimental (Ponte, 1994) e baseia-se em fontes de dados múltiplas e variadas (Yin, 2010). Bogdan e Biklen (1994) classificam os Estudos de Caso, consoante o seu número: estudos de caso únicos (estudo de um único caso) e estudos de caso múltiplos (estudo de mais do que um caso). Os estudos de caso múltiplos são os mais convincentes.

Yin (2010) sugere os seguintes tipos de estudos de caso (Tabela 6):

Tabela 6: Tipos de Estudo de Caso e respetivas finalidades (Adaptado de Yin, 2010)

	Finalidade	Únicos	Múltiplos
Exploratórios	Definir as questões ou hipóteses para uma investigação posterior	Exploratórios únicos	Exploratórios múltiplos
Descritivos	Representam a descrição completa de um fenómeno inserido no seu contexto	Descritivos únicos	Descritivos múltiplos
Explanatórios	Procuram informação que possibilite o estabelecimento de relações de causa-efeito	Explanatórios únicos	Explanatórios múltiplos

Os estudos exploratórios são o preâmbulo para uma investigação subsequente, não necessariamente um Estudo de Caso, podendo procurar hipóteses e proposições importantes para orientar estudos posteriores, pretendendo, por isso, fornecer um certo suporte para a teorização. Os estudos exploratórios são, segundo Yin (2010), os de reputação mais notória. Se os casos tiverem uma unidade de análise, designam-se holísticos; se tiverem várias unidades de análise, designam-se incorporados.

Por o Estudo de Caso se adaptar a muitas situações, é quase sempre possível levá-lo a cabo sem exigir grande preparação, o que coloca em causa o seu rigor. Para aumentar a credibilidade de um Estudo de Caso, torna-se essencial "fazer uma descrição pormenorizada e abundante de todo o processo da investigação" (Coutinho & Chaves, 2002, p. 236), descobrir essências e revelar essas essências com suficiente contexto. Assim, no entender dos autores, um relatório de Estudo de Caso, não deve deixar de incluir: a definição clara do "caso" e a delimitação das suas "fronteiras"; a descrição pormenorizada do contexto em que o caso se insere; a justificação da pertinência do estudo e os objetivos gerais que persegue (o seu foco); a identificação da estratégia geral, justificando as razões da opção por caso "único" ou "múltiplo"; a definição da unidade de análise (ou unidades de análise); a fundamentação dos pressupostos teóricos que vão conduzir o trabalho de campo; a descrição clara de "como" os dados serão recolhidos, "de quem" e "quando"; a descrição pormenorizada da análise dos dados; a justificação da lógica das inferências feitas (se for caso disso); a definição dos critérios que aferirão a qualidade do estudo.

3.2.4 Justificação metodológica

Do ponto de vista deste trabalho, é importante explicar que o mesmo apresenta características qualitativas, pois, de acordo com Bogdan e Biklen (1999), o mesmo tem um caráter descritivo; valorizou-se o ambiente natural dos fenómenos; partiu-se dos dados e não de premissas; deu-se importância ao processo de investigação (*design*) e à importância do seu significado, em detrimento da valorização excessiva dos resultados.

Relativamente ao método *Design Science Research*, verificaram-se, neste trabalho, ciclos sucessivos de entendimento e caracterização do problema (Fases 1 e 2), constituindo um processo rigoroso de conhecimento do artefacto "representações visuais", através da avaliação dos resultados de aplicação e de funcionamento do produto de *design*, redefinição da ação e nova caracterização, até se alcançar o resultado pretendido (Fases 1 e 3). Este é um estudo de desenvolvimento (Akker et. al, 2013) que pretende resolver problemas identificados a partir da prática, isto é, falta de experiências letivas com representações múltiplas que provocam dificuldades na flexibilidade na multiplicidade de representações matemáticas, impedindo ou dificultando a sua compreensão.

Nieveen et al. (2006) acrescentam que a experimentação deve ocorrer em contextos diferentes e que, no final, o conhecimento produzido deve traduzir-se num conjunto de princípios de *design* que não pretendem ser receitas para o sucesso, mas sim linhas orientadoras para quem pretende aplicar o conhecimento produzido em novos contextos. Seguindo esta perspetiva, os dois ciclos de experimentação foram desenvolvidos com alunos diferentes em turmas com características igualmente diferentes, para permitir a definição de linhas orientadoras úteis para possíveis ações na sala de aula, que pretendam desenvolver a utilização dinâmica de representações visuais.

No trabalho que aqui apresentamos, assumindo a representação do método proposta por Hevner (2007), o artefacto de partida é constituído por representações visuais. A viabilidade do artefacto final é o fator primordial, sendo esta proporcionada pelos vários princípios de *Design*

Science Research. É a este artefacto que deve ser aplicado o princípio de Relevância do Problema como método criador de soluções. O ponto de chegada é a sua utilização como uma ferramenta matemática epistémica, de forma a mudar o conhecimento dos alunos e, consequentemente, facilitar a compreensão da multiplicidade de representações, ao proporcionar um aumento de transformações de representações.

O paradigma interpretativo inscreve-se na corrente mais ampla da investigação qualitativa (Bogdan & Biklen, 1999). Dentro do paradigma interpretativo, os dois tipos de abordagem mais comuns para alcançar objetivos interpretativos são a análise de narrativas e os Estudos de Caso. A análise de narrativas relaciona acontecimentos, ações, processos e contextos num determinado período, de que são exemplos os estudos de desenvolvimento profissional. O investigador está pessoalmente implicado no estudo, que tem um forte cunho descritivo. O Estudo de Caso tem como função essencial descrever, comparar e explicar (Akker et. al, 2013). Como o objetivo deste estudo é prescritivo, neste caso em específico, o Estudo de Caso foi útil para compreender o artefacto e o seu funcionamento num determinado contexto, pois serviu para avaliar o artefacto, no sentido em que possibilitou o seu estudo em profundidade no seu ambiente natural (Fases 1, 2 e 3).

Como o ensino está diretamente ligado à aprendizagem, consideramos a unidade de estudo (Ponte, 1994) constituída pela professora juntamente com o grupo de alunos com que trabalhou durante as sessões de aulas analisadas. Somos de opinião que, nesta investigação, o Estudo de Caso deu contributos importantes, para além de ter sido o estudo exploratório, ajudou a clarificar pormenores ao longo do estudo e, em determinada altura do mesmo, permitiu orientar a sua direção. O Estudo de Caso também complementou o seu conhecimento, permitindo uma análise pormenorizada, descrevendo e explicando, cada uma das intervenções (Fases 1, 2 e 3). Assim, em cada uma das fases, e para cada uma das situações, fizemos a análise cuidadosa do artefacto (representações visuais), seus constrangimentos e suas potencialidades durante as suas transformações (tratamentos visuais como ferramenta epistémica e seus efeitos nas conversões), bem como a identificação dos gestos favorecidos pelos artefactos, em que sentido influenciaram o progresso do conhecimento dos alunos, respondendo assim às questões de investigação. A Tabela 7 caracteriza cada um dos métodos utilizados no estudo.

Tabela 7: Caracterização prática de cada um dos métodos utilizados no estudo.

Método	Caracterização	
Design Science Research	Tipologia do Estudo	Desenvolvimento
	Artefacto	Representações visuais (Intervenção 1, Fase 1), artefacto utilizado de uma determinada forma, intencional, relevante para a resolução do problema; verificação da utilidade, qualidade e eficácia; Comunicação de resultados à comunidade científica.
	Vertente formativa	Fase 2 – Desenvolvimento profissional; avaliação do artefacto; O desenvolvimento do artefacto deve ser um processo de busca que decorre de teorias e conhecimentos existentes para encontrar uma solução para um problema definido; Comunicação de resultados à comunidade científica.
	Ferramenta epistémica	Tratamentos visuais (Intervenção 2, Fase 3); validação de tratamentos visuais como ferramenta epistémica; Comunicação de resultados à comunidade científica.
Estudo de Caso	Unidade de análise	Caso holístico – uma unidade (Diversos grupos de alunos + Professora investigadora)
	Fronteiras do Caso	Caso limitado a um determinado número de aulas, cujo foco é a utilização de representações visuais e respetivas transformações.
	Tipologia do Caso	Instrumental (o estudo de uma situação particular permitiu-nos compreender a questão) Exploratório − preâmbulo para uma investigação posterior − A Fase 1 preparou as seguintes. Estudo coletivo de casos – Na Intervenção 2 cada grupo de alunos tornou-se um caso.
	Critérios de seleção da amostra	Não preparação dos alunos para a Intervenção 1. Preparação da professora para a Fase 2 (desenvolvimento profissional) e Intervenção 2. Preparação dos alunos durante a Fase 2 e para a primeira parte da Intervenção 2.
	Variedade de dados	Gravações áudio, registos escritos, observação participante da professora investigadora, documentos vários de trabalho da professora, fotografias.
	Triangulação	Através do cruzamento de dados – Fases 1, 2 e 3 e paralelismo entre casos. Através de Narrações Multimodais, e respetiva validação, coordenando e permitindo um tratamento global dos dados – Fases 1, 2 e 3.

3.3 Descrição geral do estudo

De acordo com o objetivo e o foco do estudo, organizamo-lo em 3 fases. A Fase 1, da qual faz parte a Intervenção 1, teve como objetivo o reconhecimento das representações visuais como um potencial artefacto no ensino e na aprendizagem da Matemática, em particular na exploração de um padrão figurativo (Álgebra).

Os conteúdos da Álgebra e da Geometria são dos conteúdos matemáticos que mais requerem o uso de diferentes sistemas de representação, em particular os sistemas de representação verbal, simbólico e visual. Selecionamos um conteúdo de Álgebra (Generalização de um padrão figurativo para a Intervenção 1) e um conteúdo de Geometria (Área do círculo para a Intervenção 2) e analisamos as transformações de representações visuais no ensino e na aprendizagem, nomeadamente a sua contribuição/impacto no ensino e na aprendizagem desses conteúdos.

A Fase 2 caracteriza-se pelo duplo papel da professora investigadora, constando esta fase de um trabalho de preparação que decorreu durante grande parte dos dois anos letivos posteriores à Fase 1 e que representaram o seu amadurecimento profissional relativamente à utilização de representações visuais no ensino, tendo por base uma revisão de literatura e posterior consideração dos resultados encontrados junto do público científico adequado. Durante esta fase, a professora investigadora entrevistou os colegas da sua escola que também lecionavam Matemática ao 6.º ano de escolaridade. A razão da realização desta entrevista prendeu-se com o facto de conhecer a importância e o uso que davam às representações matemáticas, em particular às representações visuais.

Com este trabalho preparatório e de desenvolvimento profissional da professora, também os alunos participantes na Fase 3 deste estudo se familiarizaram com o uso conjunto de diferentes sistemas de representação.

Especificamente para o trabalho de investigação que se desenvolveu, a Intervenção 2 (Fase 3) constou de duas partes, sendo a primeira uma parte introdutória com a exploração de duas tarefas desenvolvidas em grupo-turma. O objetivo foi proporcionar aos alunos duas situações de aprendizagem de conteúdos geométricos com recurso a sistemas de representação simbólico, verbal e visual, com a utilização intencional de diferentes tratamentos visuais em representações visuais. Depois deste trabalho preparatório, os alunos resolveram uma tarefa de determinação de área de um círculo (conteúdo do domínio de conteúdos da Geometria e Medida), procedimento que desconheciam, recorrendo ao artefacto “representações visuais” com utilização dinâmica de tratamentos visuais, pretendendo-se a sua validação como ferramenta matemática epistémica.

A Tabela 8 resume o *design* da investigação, com identificação das etapas e fases, as atividades desenvolvidas em cada fase do estudo e a justificação de cada uma.

Tabela 8: Síntese do desenho da investigação

Calendarização	Etapa	Atividades	Justificação
Ano I	Caracterização do problema de estudo	Revisão de literatura	Compreender o problema, o contexto, e delinear o *design* do estudo, escolhendo o artefacto (representações visuais) como possível solução para o problema detetado.
	Fase 1: Organização da Fase 1. Caracterização das representações visuais como um artefacto.	Revisão de literatura. Planificação e execução da Intervenção 1. Recolha e análise de dados. Elaboração da NM1. Publicação de resultados.	Reconhecer as representações visuais como um artefacto que pode ser utilizado numa nova situação para gerar conhecimento (Álgebra) e, por isso, uma possível solução para o problema. Provar a utilidade, qualidade e eficácia do artefacto. Provar a relevância do problema, descobrindo os tratamentos visuais como possível ferramenta matemática epistémica. Responder às questões de investigação 1 e 2. Dar o trabalho a conhecer à comunidade científica
Ano II Ano III	Fase 2: Organização da Fase 2.	Revisão de literatura. Amadurecimento profissional na utilização do artefacto "representações visuais", através da ferramenta "tratamentos visuais". Recolha e análise de dados. Realização de entrevista. Elaboração da NM2. Publicação de resultados.	Conhecer em pormenor as transformações de representações. Conhecer o predomínio do sistema de representação mais usado e formas de contrariar essa tendência. Conhecer exaustivamente a lecionação de um conteúdo matemático (Múltiplos e divisores) com utilização de representações múltiplas nos sistemas de representação simbólico, verbal e visual. Conhecer práticas de outros professores relativamente ao uso de representações matemáticas. Avaliar o artefacto "representações visuais". Dar o trabalho a conhecer à comunidade científica. Responder à questão de investigação 3.
Ano III Ano IV	Fase 3: Organização da Fase 3. Reconhecimento/utilização das representações visuais como ferramenta matemática epistémica.	Planificação e execução da Intervenção 2. Revisão de literatura. Recolha e análise de dados. Elaboração das NM: NM3 (Aulas 93+Aula Apoio+94), NM4 (Aulas 100+101), NM5 (Aulas 104+105+106) NM6 (Aula 108). Publicação de resultados.	Fazer ajustes ao *design* de estudo. Responder à questão de investigação 4. Dar o trabalho a conhecer à comunidade científica.

3.4 Descrição da Fase 1 do estudo - Intervenção 1

Desta fase do estudo consta a Intervenção 1, cujo grupo de participantes é o Grupo 1 e a professora investigadora, e decorreu durante o primeiro ano deste estudo.

Quando consideramos a aprendizagem da Álgebra, o objetivo principal é compreender como os alunos são capazes de generalizar padrões, conhecer as estratégias adotadas e as representações que escolhem, com o objetivo de encontrar uma relação entre as estratégias adotadas e as representações usadas (Altay, Akyüz, & Erhan, 2014; El Mouhayar & Jurdak, 2016; Wilkie & Clarke, 2016). Outros autores referem dificuldades no estabelecimento de uma relação entre a representação visual e a regra geral (Rivera & Becker, 2008), assim como a importância do conhecimento dos alunos no controlo e regulação do processo de encontrar uma solução para o problema (Callejo & Zapatera, 2014). Isto evidencia a necessidade de ajudar os alunos a fazer conexões entre representações, facilitando a compreensão dos conceitos algébricos, e a enfatizar tanto a comunicação escrita, como a comunicação oral (Moyer-Packenham, 2005; Warren & Cooper, 2008).

A Intervenção 1 constou da exploração de uma tarefa que encaminhava para a sua resolução no sistema de representação simbólico, mas tinha potencialidades para que fosse resolvida em diferentes sistemas de representação, nomeadamente o visual, podendo optar-se por um deles ou por vários em simultâneo. As dificuldades encontradas pelos alunos, que se manifestaram por descontinuidades no seu trabalho potenciavam a mudança de representação. Além disso, a professora podia também sugerir ou induzir os alunos a realizarem mudanças no sistema de representação, caso a primeira se mostrasse ineficaz, quer por inadequação ou por falta de destreza na sua manipulação.

3.4.1 A tarefa

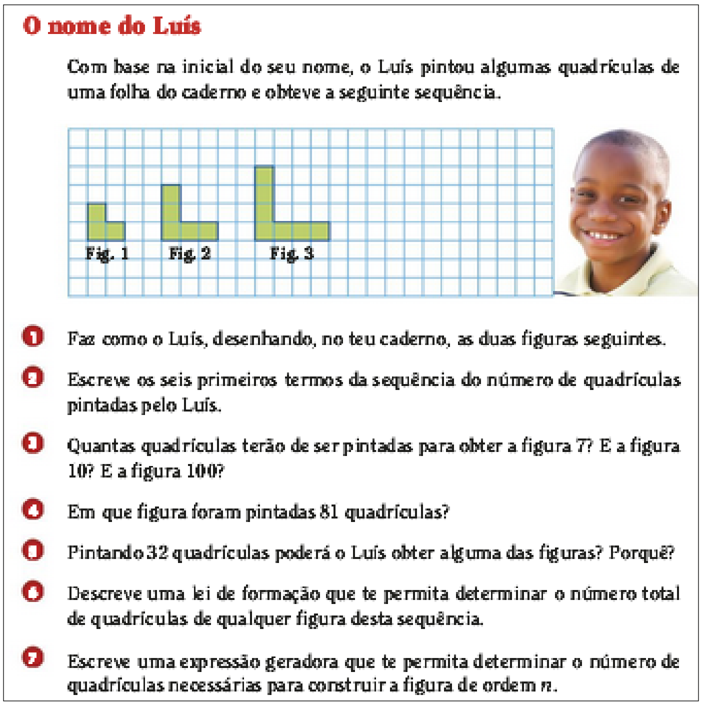
A tarefa escolhida (Figura 8) foi retirada do livro adotado na escola e usado pelos alunos.

A atividade teve a duração de 40 minutos e o objetivo didático de rever e consolidar a aprendizagem referente ao conteúdo “Sequências e regularidades”. Os objetivos (MEC, 2013) foram os seguintes:

(1) Resolver problemas envolvendo a determinação de termos de uma sequência definida por uma expressão geradora ou dada por uma lei de formação que permita obter cada termo a partir dos anteriores, conhecidos os primeiros termos.

(2) Determinar expressões geradoras de sequências definidas por uma lei de formação que na determinação de um dado elemento recorra aos elementos anteriores.

(3) Resolver problemas envolvendo a determinação de uma lei de formação compatível com uma sequência parcialmente conhecida e formulá-la em linguagem natural e simbólica.


O nome do Luís

Com base na inicial do seu nome, o Luís pintou algumas quadrículas de uma folha do caderno e obteve a seguinte sequência.

Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3

1. Faz como o Luís, desenhando, no teu caderno, as duas figuras seguintes.
2. Escreve os seis primeiros termos da sequência do número de quadrículas pintadas pelo Luís.
3. Quantas quadrículas terão de ser pintadas para obter a figura 7? E a figura 10? E a figura 100?
4. Em que figura foram pintadas 81 quadrículas?
5. Pintando 32 quadrículas poderá o Luís obter alguma das figuras? Porquê?
6. Descreve uma lei de formação que te permita determinar o número total de quadrículas de qualquer figura desta sequência.
7. Escreve uma expressão geradora que te permita determinar o número de quadrículas necessárias para construir a figura de ordem *n*.

Figura 8: Tarefa "O nome do Luís" (Conceição et al., 2014, p. 87)

3.4.2 Abordagem de ensino

A Intervenção 1 consta da terceira aula de um conjunto de três. A estratégia de ensino foi explorar, nas duas primeiras aulas e em grande grupo, algumas sequências de crescimento numéricas e figurativas. A professora focou o ensino na análise de regularidades descritas em linguagem simbólica, verbal e visual e na relação com conhecimentos pré-adquiridos, nomeadamente os múltiplos de um número natural.

Na terceira aula, formou grupos de alunos de quatro a cinco elementos cada. Durante a exploração da tarefa, a professora circulou entre os grupos para assegurar que os alunos realizavam trabalho produtivo. Ela fez questões para compreender o caminho percorrido pelos alunos, ensaiando e testando as suas conjeturas, requerendo explicações e clarificações e estimulando a comunicação entre os elementos do grupo. A professora tinha decidido que os alunos deviam concluir a tarefa no tempo disponível e com o máximo de autonomia.

A professora deixou os alunos testar estratégias ineficazes, mas interveio quando os alunos demoravam demasiado tempo a encontrar um contraexemplo ou reconheciam que tinham esgotado todas as soluções, requerendo explicitamente a sua ajuda. Uma das regras estabelecidas em sala de aula é que os alunos, desde que nada seja dito em contrário, podem combinar livremente as representações. Consequentemente, as representações dos alunos podem pertencer a um sistema de representação ou a vários.

3.5 Descrição da Fase 2 do estudo

A Fase 2 consistiu num trabalho de preparação da professora investigadora que decorreu no ano e meio letivo seguintes à Fase 1, tendo representado o seu amadurecimento profissional de utilização de representações múltiplas e, em particular, de representações visuais no ensino.

Para além dos objetivos de sistematização do processo de investigação, a abordagem metodológica adotada constituiu-se como um meio privilegiado para o desenvolvimento profissional da professora investigadora, pois a sua realização forneceu um conjunto de informações importantes sobre a forma como a professora poderia utilizar as representações visuais durante o ensino, e como os alunos trabalharam e pensaram.

Esse tipo de desenvolvimento profissional mostrava-se adequado à melhoria do conhecimento da professora investigadora acerca do ensino e da aprendizagem (Collins et al., 2004; Norton & McCloskey, 2008) com representações visuais, ao promover o seu conhecimento sobre as características dessas intervenções e os seus processos de conceção e desenvolvimento. Durante esta fase, a professora refletiu sobre a própria prática no que respeita ao uso de representações nos três sistemas de representação (verbal, simbólico e visual), em particular sobre o uso das representações visuais, durante as aulas de Matemática. Tentou usar, sempre que foi possível, os três sistemas de representação.

Através da revisão de literatura, a professora investigadora começou por conhecer e caracterizar, em seguida, as representações e as transformações de representações que poderiam fazer durante a exploração das tarefas. Seguiu-se a análise das tarefas que ia explorar nas aulas em termos de representações no seu enunciado e as representações e transformações de representações que se podia esperar que os alunos utilizassem nas suas respostas. Com essa informação, planificou o seu trabalho de forma a ampliar os sistemas de representações que utilizava durante as aulas e, consequentemente, eram ampliadas as representações que os alunos utilizavam. A professora decidiu recorrer principalmente às tarefas propostas no livro adotado, desde que estas satisfizessem os objetivos didácticos, para que não se dispersasse. No entanto, sempre que considerou pertinente, construiu tarefas novas ou adaptou-as, para que também pudessem satisfazer os objetivos da investigação.

Os temas matemáticos abordados durante esta fase foram *Números e Operações* e *Geometria e Medida*, e os conteúdos relativos aos *Números naturais*, aos *Números racionais* e às *Retas e Ângulos*. Como estava no final do ano letivo (x) do desenvolvimento desta fase do estudo, e se encontrava a lecionar Matemática ao 6.º ano de escolaridade, a professora investigadora começou por explorar as tarefas propostas no livro adotado para este ano de escolaridade relativas ao domínio de conteúdos *Área de figuras planas*. Identificou as representações do enunciado das tarefas e as representações expectáveis nas respostas dos alunos, com vista à caracterização das transformações de representações possíveis de efetuar. Este trabalho foi publicado (Montenegro, Campos, & Aires, 2017), tendo-lhe dado agilidade para caracterizar as tarefas do domínio de conteúdos *Múltiplos e divisores* de um número natural (5.º ano de escolaridade), conteúdo por que iria começar o ano letivo seguinte (ano x+1). Este trabalho foi essencial para que a professora pudesse identificar as representações usuais e poder introduzir outras de acordo com o sistema de representação em falta.

Seguiu-se a lecionação dos conteúdos de acordo com o programa em vigor (MEC, 2013), esforçando-se a professora por fazer uma abordagem com representações múltiplas. Fez uma planificação semanal geral das atividades a desenvolver durante essas aulas e, no final de cada uma delas, fazia uma súmula relativamente ao tipo de representações usado e respetivas transformações. Isso permitiu-lhe conhecer as situações de limitação de uso de representações múltiplas. Por exemplo, as aulas de treino de procedimentos são as mais pobres em termos de variedade tanto de representações como de transformações de representações. Ao mesmo tempo, possibilitou-lhe não se desviar do foco do estudo de investigação.

Durante a Fase 2, foram escritos e publicados trabalhos com os resultados mais pertinentes. Os mesmos foram discutidos, primeiro internamente na equipa de investigação e depois externamente através do *feedback* dos revisores científicos. Este trabalho em equipa permitiu uma reflexão mais distante, menos influenciável e também mais consciente na análise dos resultados obtidos da investigação.

Durante a exploração de conteúdos com representações múltiplas, a professora utilizou sempre que pôde, como abordagem de ensino, a realização de tratamentos visuais em qualquer tipo de representação, de forma a, por um lado, melhor compreender os efeitos do seu uso e, por outro, tornar as representações visuais e os tratamentos visuais familiares aos alunos.

Durante esta Fase 2 e através da sucessão de intervenções intermédias, a professora investigadora refletiu sobre a própria prática, durante as aulas de Matemática, no que concerne ao uso de representações nos três sistemas de representação (verbal, visual e simbólico), em particular sobre as representações visuais. Estas intervenções tornaram-se o instrumento no seu desenvolvimento profissional para lidar com mais eficiência com representações múltiplas, representações visuais e tratamentos visuais.

A professora investigadora apercebeu-se de que a maior parte das tarefas que os alunos iriam resolver, e que constituíam o capítulo *Áreas de Figuras planas* do livro adotado, recorria geralmente ao sistema de representação verbal, apresentando representações visuais e simbólicas como complemento (Montenegro et al., 2017). Este trabalho realizado no final do ano (x) de desenvolvimento desta fase do estudo, deu-lhe alguma flexibilidade no conhecimento das características das tarefas, sobre representações. Começou o ano letivo com um grupo de alunos diferente (Grupo 2 de alunos participantes no estudo), explorando o conteúdo “Números naturais – múltiplos e divisores” (39 aulas). Recorreu, sempre que possível, a representações visuais, tendo por objetivo que também os alunos se familiarizassem com os três tipos de representação e assumissem a equivalência entre elas (Montenegro, Costa, & Lopes, 2017a). A professora usou o diagrama de Venn para representar visualmente os divisores de um número e o máximo divisor comum (m.d.c.) de dois ou mais números naturais, e a reta numérica para representar visualmente os múltiplos de um número natural e o mínimo múltiplo comum (m.m.c.) de dois ou mais números, fazendo alguns tratamentos visuais. Durante a exploração dos conteúdos com representações múltiplas, a professora utilizou, sempre que possível, como abordagem de ensino, a realização de tratamentos visuais em qualquer tipo de representação, procurando entender melhor os efeitos de seu uso e torná-los familiares aos seus alunos. Para terminar este conteúdo, a professora planeou uma tarefa, a ser realizada em grupo, que consistia na resolução de quatro problemas sobre divisores, múltiplos, máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum (Montenegro, Costa, & Lopes, 2017c), e um teste que foi resolvido pelo Grupo 2 de participantes e por outra turma cuja atividade não valorizava as representações múltiplas nem as representações visuais (Montenegro, Costa, & Lopes, 2017b).

Este foi o conteúdo que a professora explorou com mais detalhe, e sobre o qual retirou a maior parte do seu conhecimento profissional, estando descrito na secção dos resultados relativos à Fase 2. Nos conteúdos que lecionou a seguir, a professora procurou conhecimento específico. Depois deste conteúdo, fez intervenções em conteúdos geométricos (Ângulos e Triângulos). A professora explorou um exercício rotineiro aplicado à classificação de triângulos de acordo com os lados e os ângulos e como o enriquecer do ponto de vista das representações usadas (Montenegro, Costa, & Lopes, 2017d).

Depois de realizado este trabalho de preparação da professora investigadora, no sentido de melhor conhecer e distinguir as representações, e de adquirir alguma desenvoltura na utilização de representações nos três sistemas de representação e identificar as transformações efetuadas, a equipa de investigação decidiu orientar o estudo no sentido que a seguir se descreve.

A equipa de investigação considerou ser mais importante, do que comparar os efeitos da utilização (ou não) de representações visuais, realizar uma pesquisa que visasse o desenvolvimento de uma solução para o problema nesse contexto e verificar as implicações que um trabalho desse género teria, tanto no ensino como na aprendizagem. Por essa razão, foi decidido orientar o estudo nesse sentido, mais concretamente de utilizar as representações visuais como um artefacto, capaz de serem acionadas pelos alunos como uma ferramenta matemática na produção de conhecimento. Assim, decidimos, logo no tema seguinte a ser lecionado, escolher um conteúdo que pudesse ser lecionado e aprendido com representações múltiplas (sistemas de representação simbólico, verbal e visual). O conteúdo seguinte era *Áreas de figuras planas*. Os alunos tinham aprendido no 5.º ano de escolaridade as fórmulas para a área do triângulo e para o paralelogramo. No 6.º ano, teriam que aprender as fórmulas para a área de um polígono regular e para o círculo. Era também seu objetivo dotar os alunos participantes no estudo da realização de tratamentos visuais com potencialidades de serem reutilizados. Assim, os tratamentos visuais deviam ter a potencialidade de serem utilizados pelos alunos numa situação nova de aprendizagem, transformando o conhecimento dos alunos, ou seja, utilizar os tratamentos visuais como uma ferramenta matemática epistémica.

Com este trabalho preparatório e de desenvolvimento profissional da professora, também os alunos se familiarizaram com o uso conjunto de diferentes sistemas de representação, ficando com as características desejáveis para integrarem o segundo grupo de participantes no estudo, na Fase 3, que a seguir descrevemos.

3.6 Descrição da Fase 3 do estudo - Intervenção 2

A Fase 3 é constituída pela Intervenção 2 que foi desenvolvida em duas partes, cada uma com o seu objetivo de investigação.

Quando a equipa de investigação decidiu orientar o estudo neste sentido, a professora ia lecionar no domínio de conteúdos de Geometria e Medida, o conteúdo *Áreas de figuras planas*. A professora investigadora nunca tinha aplicado as representações visuais desta forma dinâmica a este tema. Quando dizemos forma dinâmica, referimo-nos a utilizar as representações visuais não como signo, isto é, como representação de um conceito matemático, mas aproveitar as suas características para desenvolver o processo de transformar representações, como por exemplo, no desenvolvimento de estratégias de aprendizagem, através da realização de tratamentos visuais. Assim, teve de fazer uma pré-seleção dos conteúdos a explorar através de tratamentos visuais e de selecionar/elaborar as tarefas necessárias cuja exploração pudesse ser feita com tratamentos visuais.

Para a Intervenção 2, o conteúdo a selecionar teria de ser novo, com procedimentos que os alunos desconhecessem, e teria que haver uma preparação/familiarização de utilização das representações visuais como artefacto com potencialidades de serem utilizadas como ferramenta matemática epistémica, através da realização de tratamentos visuais.

A professora investigadora escolheu três tópicos do conteúdo *Áreas de figuras planas*: (1) Polígonos inscritos numa circunferência e polígonos circunscritos a uma circunferência, (2) Área de um polígono regular e (3) Área do círculo. Estes tópicos teriam de ser lecionados por esta ordem, encadeando umas ideias matemáticas nas outras. O objetivo de investigação foi o reconhecimento de que as representações visuais são um artefacto que se podem transformar numa ferramenta matemática epistémica, através da realização de tratamentos visuais. Os dois primeiros tópicos foram explorados com os alunos através de duas tarefas cuja resolução implicou a realização de tratamentos visuais. O terceiro tópico foi explorado através de uma tarefa cuja resolução podia recorrer à utilização de tratamentos visuais, ferramenta matemática que foi utilizada pelos alunos para calcular a área de um círculo.

Especificamente para o trabalho de investigação que se desenvolve nesta tese, a Intervenção 2 constou da exploração de três tarefas: Tarefa 1, Tarefa 2 e Tarefa 3 (ver na subsecção seguinte), desenvolvidas em grupo-turma, cada qual com a sua dinâmica de trabalho (respetivamente, individual, mas com indicações gerais e comuns, grupo-turma, e pares ou pequeno grupo). A primeira parte da Intervenção 2 constou de proporcionar aos alunos duas situações de aprendizagem, através das Tarefas 1 e 2, de conteúdos geométricos com recurso a tratamentos visuais em representações visuais na sua maioria, podendo estes também recorrer a sistemas de representação simbólico e verbal. Esta intervenção consta da exploração de duas tarefas que foram executadas em duas sessões de aulas intermediadas por 13 dias. Estas duas situações de aprendizagem serviram de preparação, dotando os alunos da realização de tratamentos visuais, para a resolução da Tarefa 3 relacionada com a área do círculo.

3.6.1 As tarefas

A professora elaborou três tarefas que se situam no domínio de conteúdos Geometria e Medida. Todas as tarefas foram selecionadas com vista a atingir objetivos curriculares e de investigação. A Tarefa 1, designada "Polígonos e círculos" (Figura 9), teve o objetivo de lecionar as noções de polígono inscrito numa circunferência, polígono circunscrito a uma circunferência, de rever as noções de polígonos regulares, perímetros e áreas de polígonos regulares e, ainda, de proporcionar uma situação de aprendizagem que satisfizesse o objetivo de aproximação por áreas de polígonos regulares inscritos (MEC, 2013).

Polígonos e círculos

1) *Destaca as figuras que representam **polígonos circunscritos a uma circunferência** e cola-as no caderno.*
   a) ***Identifica** cada um desses polígonos.*
   b) *Esses polígonos são **regulares**? Porquê?*

2) ***Compara** o **perímetro do polígono** A com o **perímetro do círculo** do seu interior. Que observas? Compara o perímetro do polígono C com o perímetro do círculo do seu interior. Observas o mesmo?*
   a) *Em qual deles se aproximarão a medida de perímetro do círculo e a medida de perímetro do polígono?*

3) ***Compara** a **área do polígono** A com a **área do círculo** do seu interior. Que observas? Compara a área do polígono C com a área do círculo do seu interior. Observas o mesmo?*
   a) *Em qual deles se aproximarão a medida de área do círculo e a medida de área do polígono?*

4) *Nas figuras restantes, desenha o **polígono inscrito numa circunferência**, recorta-as, cola-as no caderno e identifica-os.*

5) *Compara o perímetro dos polígonos D, I e M com o perímetro do círculo. Que observas?*
   a) *Em qual deles se aproximarão a medida do perímetro do círculo e a medida do perímetro do polígono?*

6) *Compara a área dos polígonos D, I e M com a área do círculo. Que observas?*

7) *Define **polígono inscrito numa circunferência** e **polígono circunscrito a uma circunferência**.*

8) *Na figura C, desenha um octógono inscrito na circunferência. Que podes dizer do perímetro e área dos dois octógonos e do círculo, em conjunto?*

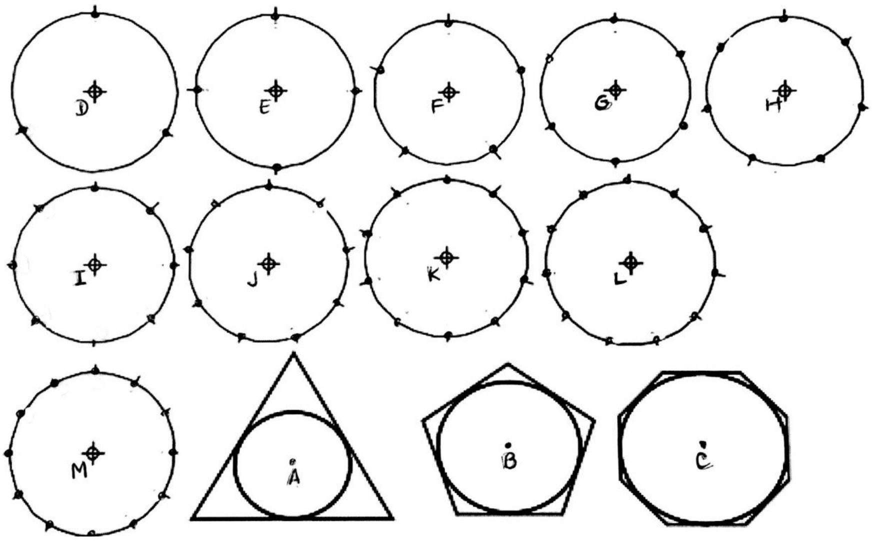
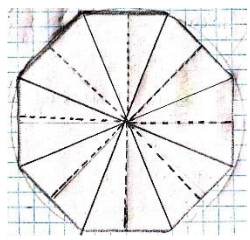


Figura 9: Tarefa 1 da Parte 1 da Intervenção 2 – "Polígonos e círculos"

A Tarefa 2 (Excerto 1) consistiu na descoberta da fórmula para o cálculo da área de um polígono regular. A professora não forneceu enunciado; o grupo turma foi explorando a tarefa de acordo com as indicações da professora.

Daí passamos para o nosso assunto: Área de um polígono regular. **(11’31’’).** Escrevemos o título no quadro e nos cadernos. Solicitei que me dissessem a definição de polígono regular, e de polígono. Entretanto, tive necessidade de esclarecer algumas dúvidas de organização a alguns alunos e de acalmar outros. Forneci-lhes um polígono regular (octógono) inscrito numa circunferência, e solicitei-lhes que o recortassem, pela fronteira do polígono. (NM4 – Apêndice 4).



Excerto 1: Início da Tarefa 2 – Descoberta da fórmula da área do polígono regular, (NM4, Apêndice 4)

A professora forneceu aos alunos o desenho policopiado de um octógono regular inscrito num círculo. Seguiu-se o desenho e recorte dos oito triângulos equivalentes no seu interior e rearranjo dos mesmos num paralelogramo para, a partir da fórmula do paralelogramo, que já era conhecida, deduzirem em conjunto a fórmula para o cálculo da área do polígono regular.

Estas duas tarefas foram executadas em duas sessões de aulas: a primeira sessão incluiu parte da aula 93 e a aula 94, e a segunda sessão consta das aulas 100 e 101.

A Tarefa 3 (Figura 10) relacionou-se com os seguintes conteúdos (MEC, 2013):

(1) Fórmula para a área do círculo;
(2) Problemas envolvendo o cálculo de áreas de círculos.

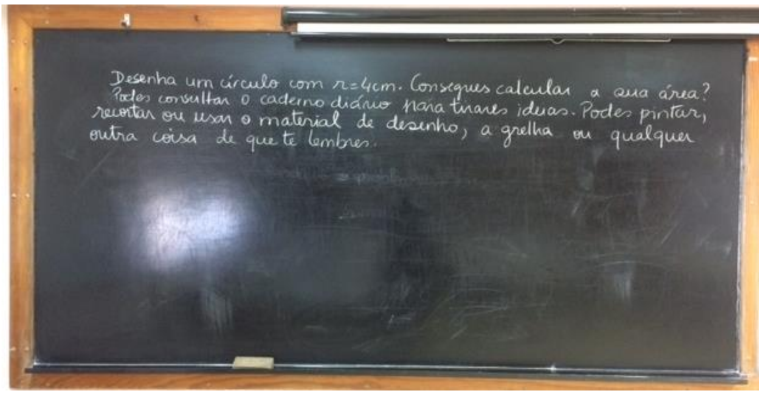


Figura 10: Tarefa 3, escrita no quadro preto, NM5, Apêndice 5

A tarefa começou a ser explorada durante a aula n.º 104 e ocupou as três aulas seguintes. Foi na aula n.º 107 que os grupos começaram a terminar a tarefa. Nada mais foi feito durante estas aulas além desta tarefa e da fotografia dos trabalhos. Esta atividade aconteceu 16 dias após a realização da tarefa “Polígonos e círculos” e dois dias após o término da Tarefa “Área do polígono regular”.

3.6.2 Abordagem de ensino

A estratégia de ensino foi proporcionar uma situação de aprendizagem aos alunos em que estes tivessem de utilizar tratamentos visuais em círculos, o que se conseguiu através da tarefa “Polígonos e círculos” (Tarefa 1 - Figura 9). A sua resolução foi individual, para que todos os alunos fizessem tratamentos visuais às figuras fornecidas. Como a professora previu que os alunos demorassem muito tempo a dividir os círculos em partes, e como esse não era um dos objetivos, forneceu diversas figuras em que os círculos tinham marcas na circunferência que indicavam uma divisão, de três até 12 partes iguais. Como a turma era, em termos de ritmo de trabalho, heterogénea, e para que não apresentassem diferenças de ritmo significativas, a professora leu e orientou a sua resolução, assegurando-se que todos os alunos resolviam as questões praticamente ao mesmo tempo. O primeiro tratamento visual consistiu no desenho e coloração de polígonos inscritos num círculo, ou circunscritos a um círculo, com respetiva pintura, dando ideia de sobreposição das figuras, a par de caracterização e comparação das figuras em linguagem natural. A utilização de linguagem simbólica foi muito reduzida, porque os alunos não conheciam ainda os procedimentos para calcular as áreas respetivas através das fórmulas.

A professora pretendia diversificar o tipo de tratamentos visuais à disposição dos alunos. Por essa razão, elaborou a Tarefa 2 de forma que utilizassem, desta vez, não a cor e a sobreposição (como utilizaram na Tarefa 1), mas a decomposição, recorte e rearranjo de figuras equivalentes. Com estas duas tarefas, os alunos ficavam munidos do conhecimento de dois tratamentos visuais a que poderiam recorrer durante a resolução da Tarefa 3. Neste caso, usaram representações em linguagem verbal, visual e simbólica, pois a resolução da tarefa culminou na descoberta da fórmula para o cálculo da área de um polígono regular. A professora escreveu o enunciado da Tarefa 3 no quadro (Figura 10). Para a sua resolução, os alunos sugeriram a formação de pares, ao que a professora anuiu. Formaram-se sete grupos de trabalho com dois a três elementos cada. Entregou a cada grupo de alunos folhas brancas, folhas quadriculadas, uma grelha quadriculada $5cm \times 5cm$ e disponibilizou cinco geoplanos circulares (a quantidade disponível na escola). Os alunos teriam de os utilizar à vez. Os alunos desconheciam a fórmula para calcular a área do círculo, mas os tratamentos visuais e os conhecimentos que tinham adquirido nas aulas anteriores eram suficientes para encontrarem uma estratégia adequada ao cálculo de um valor aproximado para a área de um círculo.

3.7 Participantes

Os participantes deste estudo foram a professora investigadora, a mesma ao longo de todo o estudo e duas das suas turmas de alunos – Grupo 1, que participou na Fase 1 (Intervenção 1), durante o primeiro ano da realização do estudo, e o Grupo 2, que participou nos dois anos seguintes, na Fase 2 e na Fase 3 (Intervenção 2).

A intervenção ocorreu numa escola pública no norte de Portugal. A escola está integrada num agrupamento de escolas do ensino pré-escolar, básico, secundário e profissional. Durante os anos em que decorreu o presente estudo, a escola tinha sete turmas do 5.º ano de escolaridade e oito do 6.º ano. Onze das quinze turmas tinham dois ou mais alunos com necessidades educativas especiais, pelo que possuíam vinte alunos ou menos. A caracterização dos alunos participantes do estudo teve por base as informações fornecidas pelo Diretor de Turma respetivo e reportam-se aos anos letivos em que decorreu a recolha de dados para o estudo. Foram pedidas as autorizações necessárias às entidades competentes, nomeadamente aos alunos e respetivos encarregados de educação, à Direção do Agrupamento, à Direção-Geral da Administração Escolar e à Comissão Nacional de Proteção de Dados.

Os participantes da Fase 1 (Grupo 1) constituíam uma turma de 18 alunos com a idade média de 11,3 anos e a sua professora de Matemática. Dez alunos beneficiaram de apoio social escolar. Relativamente à escolaridade das mães, uma obteve o grau de licenciatura, seis possuíam a escolaridade obrigatória (12.º ano), seis o 3.º Ciclo do Ensino Básico, quatro o 2.º Ciclo e uma, o 1.º Ciclo. Quatro do total dos alunos possuíam uma ou mais retenções, sendo uma delas no ciclo de escolaridade que frequentavam. Todos os alunos referiram ter a ajuda de familiares diretos (mãe, pai, irmãos) no estudo. Nas aulas de Matemática, este grupo de alunos resolvia e representava usualmente as tarefas com representações numéricas, mas muitos deles tinham dificuldades em procedimentos de cálculo. Estes atributos foram determinantes para a sua escolha e para o estudo do impacto do uso das representações visuais na atividade dos alunos.

O Grupo 2 participou no estudo ao longo de dois anos letivos, enquanto frequentou o 2.º Ciclo do Ensino Básico, durante as Fases 2 e 3 do estudo. Os participantes constituem uma turma de 17 alunos com a idade média de 10,9 anos, no início do estudo. Dez alunos beneficiaram de apoio social escolar. Um dos alunos possuía três retenções no 1.º Ciclo do

Ensino Básico e os restantes nenhuma retenção ao longo do seu percurso escolar.

Com vista a determinar o impacto da utilização de representações visuais na sua prática letiva, a professora investigadora resolveu proporcionar uma situação de ensino e de aprendizagem − a situação analisada na Intervenção 1, Fase 1, com a participação do Grupo 1 de participantes. Pelos resultados da Fase 1, a professora apercebeu-se de benefícios da utilização de representações visuais, usando-as como ferramenta matemática para concretizar os processos de ensino e de aprendizagem. A professora tinha agora a certeza de que as representações visuais tinham um papel importante no processo de aprendizagem, apesar de ainda não conhecer bem as especificidades do seu uso. Continuava a encontrar alguma resistência na sua utilização sempre que incitava os alunos a utilizá-las. No entanto, tornou-se habitual recorrer a representações visuais no ensino, estratégia que os alunos aceitavam.

Durante a frequência do 5.º ano de escolaridade dos alunos do Grupo 2 e até à data da recolha de dados para a Intervenção 2, a professora utilizou com frequência, em todos os temas curriculares, representações nos três sistemas de representação (verbal, simbólico e visual), fazendo conversões entre elas e dando aos alunos liberdade de escolha do sistema ou sistemas de representação a usar, desde que nada fosse dito em contrário. Estes atributos foram determinantes para o estudo do impacto do uso de tratamentos visuais em representações diversas durante a atividade dos alunos.

Nesse tempo, a professora recorreu ao seu conhecimento profissional relativamente ao conhecimento das transformações de representações, e a um uso efetivo de representações múltiplas (nos sistemas de representação verbal, simbólico e visual), tentando dar um destaque semelhante às representações visuais do que já dava às representações verbais e simbólicas. Durante esta fase do estudo (Fase 2), procurou sistematizar as ações necessárias a um uso dinâmico de representações visuais, que desenvolveu, mais tarde, durante a Fase 3. Nesta fase, a professora utilizou representações visuais no tema da Geometria e Medida, mais concretamente no conteúdo de *Área de figuras planas*, como representação de conceitos (representações visuais como signo); fez tratamentos, com e sem alteração de sistema de representação, e conversões para outras representações, dando-lhe um uso dinâmico (representações visuais como artefacto com potencialidades para ser acionado como ferramenta matemática).

A professora pertence ao grupo de docência 230 (Matemática e Ciências Naturais) e ensina as duas disciplinas há vários anos neste nível de ensino e nesta escola, pertencendo ao Quadro de Agrupamento. São catorze os elementos do seu grupo de docência que trabalham juntos há, pelo menos, 10 anos. Os docentes têm vindo, ao longo desse tempo, a desenvolver competências no trabalho colaborativo dentro do grupo, nomeadamente na planificação a longo e médio prazo, na seleção e planificação de atividades curriculares e extracurriculares, na elaboração de instrumentos de avaliação diagnóstica, formativa e sumativa, e na troca e discussão de experiências pedagógicas. Procedem à análise dos instrumentos de avaliação sumativa com uma regularidade trimestral, no sentido de identificar as dificuldades evidenciadas pelos alunos e selecionar estratégias de remediação. Além das reuniões formais que realizam em sede de grupo de docência e de Departamento, é costume comunicarem com regularidade através de meios informáticos e, informalmente, nos intervalos das aulas.

Em geral, nesta escola, a distribuição de serviço letivo pauta pelo acompanhamento pelo docente das turmas ao longo do ciclo de escolaridade. A professora acompanhou as turmas nos dois anos do ciclo, assim como teve a seu cargo o Apoio ao Estudo a Matemática e as aulas de apoio pedagógico personalizado, nas turmas em que lecionou Matemática. Realiza formação com frequência, na sua maioria acreditada, para o seu grupo de docência. Participou em diversos projetos nomeadamente no Plano de Ação da Matemática, frequentando com aproveitamento a formação disponibilizada pelo Ministério de Educação no âmbito deste projeto, durante dois anos letivos. Geralmente, os projetos em que participa estão diretamente envolvidos nas disciplinas que leciona, mesmo que sejam projetos internacionais, nomeadamente nos projetos Comenius e Erasmus+, desenvolvendo atividades em transdisciplinaridade com docentes de outros grupos de docência.

Na sua prática letiva, a professora valoriza os registos escritos de qualquer espécie. Por sua própria experiência, a professora tem a convicção de que as representações visuais têm um papel importante tanto no processo de ensino como no processo de aprendizagem. No entanto, por um lado, sempre que incitava os alunos a utilizá-las, encontrava resistência na sua utilização, por outro, quando recorria a representações visuais no ensino, observava que potenciava situações de compreensão, obtendo *feedback* positivo por parte dos seus alunos. Por esta dualidade, ficava indecisa se as devia utilizar ou não.

3.8 Recolha de dados

Em todas as fases do estudo procedeu-se à recolha de dados. A recolha de dados na Fase 1 e na Fase 3 foi semelhante. Na Fase 2, devido às suas características diferenciadoras das outras fases, também a recolha de dados apresentou características diferentes. Pelo exposto, referir-nos-emos em separado à recolha de dados para cada uma das fases.

3.8.1 Fase 1

3.8.1.1 Descrição geral dos dados recolhidos

Os dados foram recolhidos da gravação áudio da aula, fotos dos registos escritos dos alunos em diferentes fases da resposta à tarefa, da observação participante da professora ao longo das aulas e dos seus registos nos planos de aula. A professora usou um gravador áudio portátil para gravar todas as interações entre ela e cada grupo de alunos. Preferiu usar a gravação áudio em detrimento da gravação vídeo pela facilidade de transporte do equipamento e da gravação das interações entre si e os seus alunos, evitando ruídos e preservando o ambiente natural de sala de aula. Apesar das respostas serem discutidas em grupo, cada aluno escreveu as conclusões que considerou relevantes e usou as representações que considerou mais apropriadas. Com estes dados, a professora escreveu uma narração multimodal (NM1, Apêndice 1).

Relativamente aos problemas de ordem ética envolvidos neste caso, a professora investigadora obteve um consentimento informado das entidades reguladoras e competentes, dos participantes e, como estes eram menores de idade, dos respetivos encarregados de educação, para fazer a recolha dos dados, independentemente da sua natureza. Também foi negociada a privacidade dos participantes, tendo-se usado nomes fictícios, não identificando o ano letivo nem o distrito, concelho e escola a que pertenciam, e as fotografias nunca incluíam partes do corpo, mais do que os antebraços e mãos. A professora investigadora cingiu-se exclusivamente aos dados que recolheu com toda a autenticidade (Bogdan & Biklen, 1999) e todos os aspetos éticos a considerar no processo e no produto da investigação foram regidos pelo respeito por todos os participantes. Estes pressupostos foram essenciais para que fizesse o registo de todos os elementos que conferiram singularidade àquele momento único.

As formas de registo assumiram diferentes formatos, desde o verbal (escrito ou oral) à captação de imagem, áudio, fazendo uso das mais diversas ferramentas para o conseguir. Contudo, segundo Spradley (1980), todas focam os seguintes elementos: espaço (aspeto físico); atores (sujeitos envolvidos na situação); atividades (conjunto de atos que têm lugar na situação); objetos (artefactos e objetos físicos presentes); atos (ações específicas dos sujeitos); eventos (conjunto de atividades que ocorrem); tempo (sequência de atos, atividades e eventos que ocorrem durante a observação); objetivos (o que os sujeitos tentam alcançar); sentimentos (o que os sujeitos sentem e a forma como o expressam) (Cohen et al., (2007).

Os dados foram recolhidos pela professora investigadora, duplo papel que lhe proporcionou a possibilidade de uma observação participante. Segundo Ponte (2004), a investigação sobre a própria prática pode ser vista como um meio privilegiado de desenvolvimento profissional para os professores envolvidos. Acrescente-se que, se a investigadora é participante no estudo, a sua personalidade, expectativas e experiência devem ser explicitadas e discutidas por todos e equacionadas instrumentalmente em função dos objetivos propostos e das questões de investigação. Por ser uma técnica de recolha de dados que se reveste de características particulares, debruçar-nos-emos sumariamente, na subsecção seguinte, sobre as vantagens e os inconvenientes do seu uso considerados mais pertinentes para o nosso estudo.

3.8.1.2 Observação participante

A observação participante traz vantagens no estudo de pequenos grupos ou de acontecimentos com curta duração temporal, em que o interesse do investigador é recolher informação detalhada e descritiva sobre o que acontece. Considera-se uma técnica interativa, devido às trocas constantes que acontecem entre o investigador e os participantes, através da diversidade de dados recolhidos (Murchison, 2010).

Quando a investigadora assume o papel de professora (observação participante) estabelece laços de confiança com os restantes participantes no estudo, o que pode exercer algum tipo de influência no sentido de vir a colocar em causa a credibilidade do estudo e da sua exequibilidade. Pode ainda influenciar a quantidade e qualidade da informação recolhida. Os próprios sentimentos e preconceitos da investigadora podem originar enviesamentos (Bogdan & Biklen, 1999) e, se houver alguma intimidade entre a investigadora e os participantes, as observações podem comprometer, por exemplo, a espontaneidade do diálogo ou enviesar os caminhos (McCracken, 1988). No entanto, a proximidade também permite à investigadora experimentar sentimentos dos participantes e construir uma certa empatia com eles partilhando as suas reações (Bogdan & Biklen, 1999). Também as características pessoais e a experiência da investigadora podem ser fundamentais. Como exemplifica Ponte (2006), a perspicácia da investigadora na observação e a pertinência na análise são características fundamentais para o sucesso da investigação. Segundo Bogdan e Biklen (1999), a investigadora pode aproveitar os seus sentimentos no sentido de clarificar e compreender as perspetivas dos outros. Ao exprimir os seus sentimentos, pode levar os participantes do estudo a manifestar-se também e constituir assim mais uma oportunidade de reflexão.

3.8.2 Fase 2

3.8.2.1 Descrição geral dos dados recolhidos

Para a Fase 2 (fase de desenvolvimento profissional tendo por base a implementação de intervenções intermédias), os dados foram recolhidos de diversas fontes (Tabela 9) de acordo com a natureza da atividade desenvolvida.

Tabela 9: Natureza dos dados recolhidos para a Fase 2

Parte	Instrumento de recolha de dados	Natureza dos dados recolhidos
1	Tarefas do livro adotado (conteúdo Áreas de figuras planas)	Registos dos cadernos diários dos alunos. Observação participante da professora. Notas da professora sobre as aulas.
2	Teste	Respostas a um teste diagnóstico (ver Excerto 2).
3	Tarefas do livro adotado (conteúdo Múltiplos e divisores) Planos de aula	Notas da professora sobre as aulas. Registos dos cadernos diários dos alunos.
4	Tarefa	Registos escritos dos alunos da resolução da tarefa. Observação participante.
5	Teste	Respostas dos alunos de duas turmas ao teste.
6	Tarefa do livro adotado (conteúdo Ângulos e Triângulos) Cadernos diários	Registos dos cadernos diários dos alunos.
7	Entrevista	Respostas a uma entrevista semiestruturada por três docentes da escola da professora investigadora.

Com estes dados, a professora escreveu uma narração multimodal (NM2, Apêndice 2).

Esta é constituída por sete partes, as mesmas que se consideraram na Tabela 9.

Referir-nos-emos às partes da Fase 2 em que foram elaborados materiais com o propósito de recolher dados para a investigação. Nas restantes utilizaram-se as tarefas do livro adotado. Verificou-se a necessidade de elaboração de instrumentos de recolha de dados na Parte 2 (Teste diagnóstico), na Parte 4 (Conjunto de quatro problemas), na Parte 5 (Teste) e na Parte 7 (Entrevista).

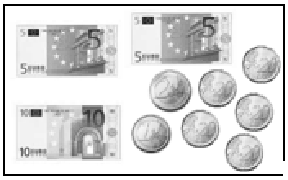
O teste diagnóstico foi aplicado ao segundo grupo de participantes no início da sua frequência do 5.º ano de escolaridade. Este trabalho está descrito na Parte 2; a nossa intenção na elaboração de cada uma das perguntas está identificada no Excerto 2.

<table>
<tr>
<td>
Teste 1. Data: ___/___/___N.º ___

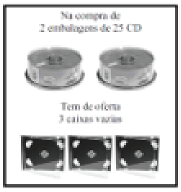
1) Representa, por um desenho, as seguintes expressões numéricas:

a) 3 x 4 | b) 2 + 2 +2 + 2 | c) 10 - 6

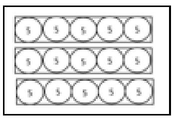
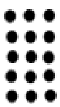
2) Representa, pelo menos de duas formas diferentes, a informação da figura.



3) Na loja de informática está afixado o seguinte cartaz.
Quantas caixas vazias terá de oferta uma pessoa que compre 8 embalagens de 25 CD?
Explica como chegaste à tua resposta



4) Rodeia com a mesma cor as representações do n.º 15.

2 x 5 + 3 + 2


3 + 3 + 3 + 3 + 3
O quintuplo de três.
15 : 5 = 3
O triplo de cinco.
</td>
<td>
Intenções da professora nas perguntas:

P1: Conhecer a(s) representações que os alunos usavam para representar quantidades e as que usavam para representar operações.

P2: Conhecer o que era para os alunos representar de duas formas diferentes e que formas eram essas.

P3: Conhecer se os alunos tinham tido alguma experiência com representações em esquema.

P4: Conhecer se os alunos tinham consciência da equivalência de representações simbólicas, visuais e verbais.
</td>
</tr>
</table>

Excerto 2: Teste diagnóstico aplicado ao Grupo 2 de participantes no estudo e intenções da professora na elaboração de cada uma das perguntas (NM2, Apêndice 2)

Na recolha de dados para a Parte 4 da Fase 2, a professora combinou um conjunto de quatro problemas referentes ao conteúdo *Múltiplos e divisores* (Figura 11).

1) Carlos quer distribuir 40 cartas de jogar em montes de igual tamanho sem que sobre nenhuma. De quantas modos diferentes pode ele fazê-lo? Quantas cartas terá cada monte?
2) A Maria está a fazer ramos de flores secas para oferecer aos convidados da sua festa de aniversário. Ela tem 36 perpétuas e 48 espigas. Qual é o maior número de ramos iguais que a Maria pode fazer usando todas as flores?
3) A mãe do Tomás comprou duas séries de luzes para a árvore de Natal. Numa das séries, as lâmpadas acendem a cada 9 segundos e na outra a cada 15 segundos. A mãe do Tomás olhou para o relógio e as duas séries ligaram juntas às 19:15h.
   a) A que horas voltarão as séries a acender-se juntas?
   b) Até à meia noite, quantas vezes acenderão juntas?
4) Desenha todos os retângulos possíveis com medidas inteiras cuja área seja 48 centímetros quadrados. Presta atenção aos números encontrados. Que observas?

Figura 11: Tarefa aplicada na Parte 4 da Fase 2 (NM2, Apêndice 2)

A professora pretendia identificar as representações que os alunos iriam usar para conhecer até que ponto tinham assimilado as representações visuais utilizadas durante a exploração do conteúdo em questão. Na recolha de dados para a Parte 5 da Fase 2, a professora elaborou um teste com um conjunto de cinco exercícios e dois problemas referentes ao conteúdo *Múltiplos e divisores* (Figura 12).

1) Escreve os divisores de 9.
2) Representa de duas formas diferentes os múltiplos naturais de 5.
3) Calcula os divisores comuns de 16 e 18. Qual o seu máximo divisor comum?
4) Calcula o mínimo múltiplo comum de 4 e 5.
5) Os números 10 e 15 são números primos entre si? Justifica.

"Preparando a festa de aniversário I"

1) O Francisco quer organizar a sua festa de aniversário e pretende oferecer a cada um dos seus convidados um saco com berlindes e miniaturas de bonecos "Mínimos". Todos os sacos deverão ter o mesmo conteúdo. Para o efeito, a sua mãe comprou-lhe 18 bonecos e 24 berlindes que o Francisco terá que usar sem que sobre nenhum objeto.
   a) Qual o número máximo de sacos que o Francisco pode fazer?
   b) Qual o conteúdo de cada saco?

Explica como chegaste à tua resposta.

"Preparando a festa de aniversário II"

2) Para enfeitar a sala onde vai receber os seus convidados, o Francisco utilizou uma gambiarra com luzes de duas cores: vermelho e azul. Sabendo que as luzes de cor vermelha acendem a cada 6 segundos e as de cor azul acendem a cada 8 segundos, de quanto em quanto tempo acenderão as luzes das duas cores ao mesmo tempo?

Explica como chegaste à tua resposta.

Figura 12: Teste aplicado na Parte 5 da Fase 2 (NM2, Apêndice 2)

A tarefa foi resolvida em dois momentos diferentes espaçados no tempo por um intervalo de três meses. Este foi o maior período de tempo que foi possível assegurar em que não se faziam alusões a este conteúdo durante as aulas. O primeiro momento de aplicação (M1) foi no final de novembro e o segundo (M2) no final de fevereiro. O objetivo desta tarefa era avaliar o desempenho dos dois grupos na resolução do problema de acordo com o uso que davam à representação visual. Os dados foram recolhidos dos registos individuais escritos produzidos nos dois momentos de aplicação: M1 e M2.

Na recolha de dados para a Parte 7 da Fase 2, foi elaborada uma entrevista a que, por ser um instrumento de recolha de dados reveladora de características diferentes dos restantes instrumentos utilizados, nos referiremos na subsecção própria que se segue.

3.8.2.2 Entrevista

Segundo Silverman (1993), a entrevista é um instrumento de recolha de dados descritivos em investigação, na linguagem do próprio sujeito, que permite a averiguação de factos, de opiniões, de sentimentos, de atitudes, de decisões e de motivações sobre determinado assunto (Cohen et al., 2007).

Na preparação de uma entrevista há vários aspetos a ter em consideração, nomeadamente ultrapassar barreiras de linguagem, para evitar ambiguidades nas respostas, evitar suposições tácitas e respostas politicamente corretas (Barriball & While, 1994).

São variados os objetivos da utilização da entrevista como recolha de dados, como por exemplo: testar ou desenvolver hipóteses, recolher dados, formar amostras com as opiniões dos entrevistados, etc. (Cohen et al., 2007). De acordo com o objetivo em causa, a entrevista adquire determinadas características e formas.

LeCompte e Preissle (1993) definem seis tipos de entrevistas: (i) padronizadas; (ii) em profundidade; (iii) etnográficas; (iv) de elite; (v) de história de vida; (vi) *focus group* (Cohen et al., 2007). A esta lista, Bogdan e Biklen (1992) acrescentam as entrevistas semiestruturadas e as entrevistas em grupo. Lincoln e Guba (1985) ainda acrescentam as entrevistas estruturadas (Cohen et al., 2007), sendo um dos aspetos que mais define uma entrevista o seu grau de estruturação.

Uma entrevista estruturada exige um guião organizado e elaborado antecipadamente, com a sequência das perguntas que deve ser rigidamente seguido, mesmo quando há a possibilidade de alguma abertura. Esta rigidez assegura que as diferenças vão ocorrer nas respostas e não nas perguntas, permitindo a sua comparação.

Uma entrevista não estruturada é um instrumento aberto e permite uma maior flexibilidade e liberdade ao entrevistador durante a condução da entrevista.

Entre uma entrevista estruturada e uma entrevista não estruturada está a entrevista semiestruturada.

A entrevista semiestruturada pressupõe a existência de um guião organizado antecipadamente, não rígido, que permita alguma liberdade ao entrevistador para reordenar os conteúdos, ou mesmo ampliá-lo, adicionando outras questões pertinentes durante a realização da entrevista (Cohen et al., 2007). Do leque de perguntas podem fazer parte perguntas fechadas e perguntas abertas, sendo feitas em contexto informal, favorecendo a espontaneidade de respostas (Boni & Quaresma, 2005).

Um guião de uma entrevista semiestruturada deve conter (i) o tópico a ser discutido e aspetos dentro de cada tópico, (ii) possíveis perguntas para cada um deles e (iii) alguns desbloqueadores e formas de reforço.

As perguntas devem ser elaboradas de acordo com os objetivos da entrevista, podendo ser descritivas, de experiência, de comportamento, de conhecimento, de sentimentos, etc.

Para potenciar o sucesso da entrevista, o entrevistador deve ter alguns cuidados durante a sua realização, por exemplo, a elaboração de um guião claro, referindo todos os aspetos importantes e as perguntas adequadas. Também deve ter as seguintes atitudes: mostrar interesse pelas respostas; manter-se imparcial; estar preparado para repetir, clarificar ou ignorar alguma pergunta, caso seja do desejo do entrevistado; estimular o entrevistado a explicar a sua ideia; dar-lhe tempo para responder; ser capaz de fazer novas perguntas, se necessário.

Uma entrevista pode ser realizada individualmente ou em grupo, presencialmente ou através de meios de comunicação.

Uma entrevista tem um cariz subjetivo, pois depende da relação estabelecida entre o entrevistador e o entrevistado, mas a informação a recolher deve ser fiel e baseada em factos, descritiva e dar resposta aos objetivos definidos para a investigação.

Barriball e While (1994) alertam para a equivalência de significado de termos ou palavras que ajudam a padronizar a entrevista semiestruturada e facilitam a comparação de respostas.

Para o nosso trabalho de investigação, a professora investigadora teve necessidade de caracterizar as práticas de ensino relativamente à utilização de representações múltiplas, principalmente o papel das representações visuais.

Para recolher estes dados, a equipa de investigação decidiu aplicar uma entrevista aos professores do grupo de docência da escola da professora investigadora que lecionavam o tópico *Figuras planas. Perímetros e áreas* ao mesmo ano de escolaridade.

A equipa de investigação considerou pertinente a realização de uma entrevista semiestruturada, para permitir uma conversa aberta, oral e individual, de forma a melhor caracterizar as práticas de ensino, relativamente às representações matemáticas, com especial destaque para as representações visuais. Pretendíamos saber: (i) as representações mais valorizadas e mais usadas pelos entrevistados e se estas coincidiam, ou não, umas com as outras (averiguação de factos); (ii) as suas opiniões, sentimentos e motivações relativamente ao uso especificamente de representações visuais, com exemplificação para o ensino de um conteúdo específico (*Áreas de figuras planas. Perímetros e áreas*); (iii) as atitudes e decisões sobre o uso de determinada representação, com relevo para as visuais.

Os entrevistados foram devidamente informados do anonimato da participação, dos objetivos da entrevista, e todos se disponibilizaram a participar de forma livre e consentida, tendo autorizado a sua gravação áudio.

Para permitir a comparação de respostas dos três entrevistados, houve necessidade de, a todos eles, definir representação simbólica, verbal e visual, salvaguardando a validade e a confiabilidade das respostas (Barriball & While, 1994). Pretendeu-se evitar ambiguidades nestes conceitos, para caracterizar melhor as práticas de ensino, relativamente às representações.

3.8.2.3 Guião de entrevista semiestruturada

A professora investigadora começou por informar os entrevistados da justificação da necessidade de recolha destes dados para um trabalho de investigação focado em representações matemáticas. Para complementar o trabalho precisou de recolher informações sobre práticas docentes nos seguintes conteúdos: círculo e circunferência; polígonos inscritos e circunscritos a uma circunferência; área do polígono regular e área do círculo. Durante a entrevista, para complementar e apoiar a conversa, houve a manipulação dos materiais utilizados nas aulas por cada um dos entrevistados, com o propósito de explicar e clarificar as suas escolhas.

Foram realizadas três entrevistas individuais, na escola, na sala de Departamentos, durante a interrupção letiva da Páscoa. A professora investigadora apoiou a sua conversa no seguinte guião (Figura 13), embora nem sempre tenha percorrido as perguntas pela mesma ordem. Todas as entrevistas tiveram uma duração aproximada de uma hora e foram áudio gravadas.

1. Número de anos de serviço docente que tens:
2. Número de aulas que utilizaste na lecionação do conteúdo "Figuras planas. Perímetros e áreas".
3. Domínios e conceitos necessários do ano anterior para lecionar este conteúdo.
   Números e operações. Geometria e medida. Álgebra. Organização e tratamento de dados.
4. Número de vezes que lecionaste este conteúdo, de acordo com o Programa de Matemática de 2013.
5. Como costumas ensiná-lo? Mudas alguma coisa de ano para ano? Se sim, o quê?
- Como trabalharam os alunos?
- Tipo de trabalho mais frequente? Porquê?
- Materiais/recursos para expor a matéria
- Local de seleção das tarefas que decidiste explorar nas aulas sobre este conteúdo curricular.
- Tipo de materiais manipulativos para apoiar a aprendizagem dos alunos:
6. Relativamente ao ensino de 6.1 (6.2, etc., para um de cada vez), como fizeste para o ensinar? Utilizaste figuras? Tabelas, quadros, esquemas, desenhos, … Em que situações? Detetaste dificuldades nos alunos na utilização de figuras? Encontra-las, às figuras e às dificuldades, noutros tópicos? Que tipo de apoio escrito costumas usar? O quadro, PPT, outros? Do que expões, o que pedes aos alunos para registarem no caderno?
- Abordagem utilizada para lecionar (…)
- A Tarefa proposta no livro adotado, tal como é apresentada. A Tarefa proposta no livro adotado, com adaptações. Quais? Indicação da fórmula para o cálculo da área de um círculo, seguida de resolução de exercícios e problemas de aplicação. Outra. Faz uma descrição sucinta. Mostra-me o caderno dos alunos, as fichas que fizeste, o material que usaste, … Como fizeste para ensinar cada um deles? Utilizaste figuras? Em que situações? Detetas dificuldades nos alunos na utilização de figuras? Encontra-las noutros tópicos? Que tipo de apoio escrito usaste? O quadro, PPT, outros? Do que expões o que pediste aos alunos para registarem no caderno?
- Tipo de representações matemáticas durante a exposição da matéria
- Tipo de representações matemáticas escritas espera que os seus alunos utilizem
- Tipo de representações escritas valorizadas no trabalho dos seus alunos?
- Tipo de representação mais frequente e a menos frequente.
- Tipo de representação escrita que mais valorizou para a que menos valorizou
- Identifique dificuldades que os seus alunos evidenciam relativamente às representações matemáticas utilizadas durante a lecionação do conteúdo "Figuras planas. Áreas e perímetros."

   6.1. Perímetro do círculo
   6.2. Elementos da circunferência e do círculo
   6.3. Polígonos inscritos numa circunferência e polígonos circunscritos a uma circunferência
   6.4. Área de um polígono regular
   6.5. Área de um círculo

Figura 13: Guião da entrevista semiestruturada

3.8.3 Fase 3

Para a Fase 3, a recolha de dados foi semelhante à recolha de dados da Fase 1. Assim, os dados provieram da gravação áudio das aulas, de fotos dos registos escritos dos alunos em diferentes fases da resposta à tarefa, da observação participante da professora, dos seus registos nos planos de aula e dos materiais que construiu de apoio à aula, nomeadamente uma apresentação em PowerPoint de apoio à apresentação dos trabalhos na última aula. Este documento foi elaborado para suportar e facilitar as intervenções, tanto da professora como dos alunos, assim como a compreensão, pelos restantes, do percurso percorrido por cada grupo de alunos. De igual forma, a professora usou um gravador áudio portátil para gravar as interações entre ela e cada grupo de alunos, mantendo-o na secretária nas situações de diálogo com a turma inteira. Cada aluno podia registar as conclusões que considerou relevantes e usar as representações que considerou mais apropriadas, apesar das respostas serem discutidas em grupo. Com estes dados, a professora escreveu quatro narrações multimodais (NM3 no Apêndice 3, NM4 no Apêndice 4, NM5 no Apêndice 5 e NM6 no Apêndice 6).

3.9 Tratamento e análise de dados

3.9.1 Descrição geral da análise dos dados

Começamos por nos referir ao modo como realizamos a análise dos dados relativos à Fase 1 e à Fase 3. Nestas fases, a análise dos dados fez-se de acordo com a situação de recolha de dados. Sempre que havia gravação de aulas com trabalho autónomo dos alunos, em par ou em grupo (o que aconteceu nas Fases 1 e 3), adotou-se o procedimento a seguir descrito.

Numa primeira fase, os dados foram revistos várias vezes para identificar o percurso que cada grupo fez para resolver a tarefa. Relacionaram-se as perguntas da professora com as respostas dos alunos, identificando o seu trabalho autónomo, ou a situação que requeria a intervenção da professora. Em cada grupo, a professora recorreu à comunicação oral e aos registos escritos individuais para se inteirar do percurso matemático realizado pelos alunos e aceder ao seu raciocínio. Nesta primeira fase da análise dos dados, foi dada ênfase particular à identificação: (i) do trabalho autónomo realizado pelos alunos; (ii) das fases do trabalho dos alunos que careciam de uma intervenção explícita da professora, provocada pela descontinuidade de trabalho produtivo no grupo.

Consideramos que há continuidade na atividade dos alunos se eles não têm dificuldade em resolver o problema e se obtêm a resposta correta através da aplicação de qualquer estratégia ou representação. Da mesma forma, há descontinuidade na atividade dos alunos se são incapazes de algum passo na realização da tarefa, ou se são incapazes de progredir sem a ajuda da professora.

Numa segunda fase, os dados de cada grupo foram analisados para identificar as representações e a sequência de transformações de representações usadas em dois momentos: (i) no trabalho autónomo dos alunos; (ii) pela professora durante as suas intervenções nas fases de descontinuidade de trabalho produtivo no grupo, e, destas, as que resultaram e como nas representações usadas pelos alunos nas suas respostas finais.

Em suma, as gravações foram analisadas para identificar as representações visuais e suas transformações, que foram usadas e feitas durante a realização da tarefa. Para o efeito, foram identificadas duas categorias de análise: Representações e Transformações de representações. A cada categoria e subcategoria foi atribuído um código (Cohen et al., 2007).

Com o objetivo de clarificar as categorias e distinguir os exemplos para os conteúdos matemáticos das duas intervenções, elaboramos duas tabelas relativas às categorias e subcategorias de análise e códigos respetivos. A Tabela 10 para a categoria Representações e a Tabela 11 para a categoria Transformações de representações, ambas com exemplos da Intervenção 1 e da Intervenção 2.

Tabela 10. Categorias e subcategorias de análise e códigos respetivos (Representações)

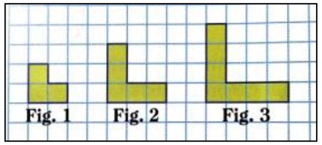
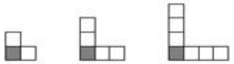
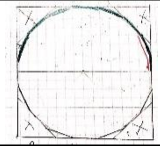
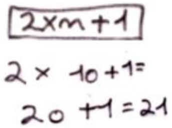
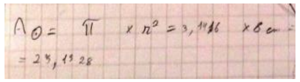
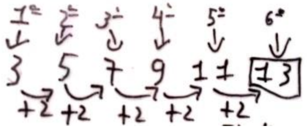
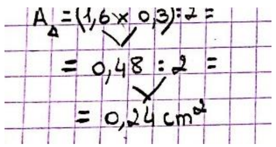
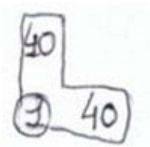
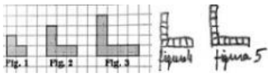
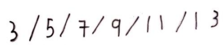
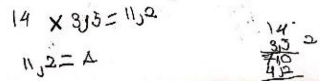
Categorias de análise e códigos respetivos				Descrição da categoria	Exemplos	
					Intervenção 1	Intervenção 2
Representação	Visual	RV	RV-F	Representação Visual – Figura		 Representação visual figurativa em dois suportes (papel e geoplano)
			RV-E	Representação Visual – Esquema	Fig. 7 → 15 Fig. 10 → 21 Fig. 100 → 201	
			RV-T	Representação Visual – Tabela	Fig 1 3 | Fig 2 5 | Fig 3 7 | Fig 4 9 | Fig 5 11	
	Simbólica	RS	RS-N	Representação Simbólica – Numérica	3 / 5 / 7 / 9 / 11 / 13	$A_{\square} = 64\ cm^2$ $A_{\circ} = < 64$ $A_{\square} = 5{,}7 \times 5{,}7 = 32{,}49\ cm^2 \approx 32{,}5\ cm^2$ $A_{\circ} = < 64$ e $> 32{,}5$
			RS-A	Representação Simbólica – Algébrica	$\boxed{2 \times n + 1}$	
	Verbal	RLN		Representação em Linguagem Natural	Não, porque não dá um número inteiro.	Subtraímos à área do quadrado as áreas dos 12 triâng

Tabela 11: Categorias e subcategorias de análise e códigos respetivos (Transformações de Representações)

Categorias de análise e códigos respetivos		Descrição da categoria	Exemplos: Intervenção 1		Exemplos: Intervenção 2	
Transformações de Representações – Tratamento	T_R	Operação numa representação sem mudança do sistema de representação		O uso da cor (cinzento) evidenciou certas características das figuras.		Os triângulos desenhados sucessivamente nos cantos do quadrado sugerem a retirada desses espaços.
	$T_{R:R}$	Alteração de uma representação noutra sem mudança do sistema de representação		Alteração simbólica realizada na expressão geral, substituindo o termo de ordem n pelo termo de ordem 10 [$T_{RS\text{-}A:\ RS\text{-}N}$]		Alteração simbólica da fórmula geral com substituição dos valores adequados. $T_{RS\text{-}A:\ RS\text{-}N}$
	$T_{R\to RV}$	*Tratamento Visual*: Operação visual numa representação não visual sem mudança do sistema de representação.	 Elementos visuais (as setas e o quadrado à volta do número13) foram adicionados aos termos da sequência 3 5 7 9 11 13 [$T_{RS\text{-}N\to RV}$]			Elementos visuais (setas) que foram adicionados aos termos numéricos para indicar a prioridade das operações. [$T_{SR\text{-}N\to RV}$]
	$T_{R\to RS}$	Tratamento Simbólico: Operação simbólica numa representação não simbólica sem mudança do sistema de representação.		Elementos simbólicos (números 1 e 40) foram adicionados à representação visual – figurativa [$T_{RV\text{-}F\to RS}$]		Elementos simbólicos (números) que foram adicionados à representação visual figurativa – [$T_{VR\text{-}F\to RS}$]
Transformações de Representações – Conversão	$R \xrightarrow{C} R$	Alteração de uma representação para outra noutro tipo de representação com mudança do sistema de representação.	 $\xrightarrow{C}$ 		 $\xrightarrow{C}$ 	
			Mudança de uma representação no sistema de representação visual (figurativa) para um sistema de sistema de representação simbólico (numérico) [$RV\text{-}F \xrightarrow{C} RS\text{-}N$]			

As conversões têm sempre duas representações: a representação inicial num sistema de representação e a representação final noutro sistema de representação. O usuário terá de utilizar duas representações equivalentes, mas de dois sistemas de representação diferentes, passando de uma para outra.

Nos tratamentos, a alteração da representação faz-se na mesma representação. Se a alteração que se faz é no mesmo sistema de representação da representação em causa (visual, verbal ou simbólico), estamos perante um tratamento do tipo $T_{R:R}$, e na Tabela 10 elucidamos com um tratamento simbólico que envolve representações em linguagem algébrica e numérica (ambas simbólicas). Nesse exemplo, o aluno começou pela representação algébrica (expressão geral) e procedeu à substituição do termo de ordem n por um termo numérico, tendo de seguida efetuado novamente um tratamento simbólico aos termos numéricos da expressão obtida, efetuando o seu cálculo. Desde o princípio ao fim, o aluno trabalhou no sistema simbólico.

Caso se utilize outro sistema de representação para evidenciar determinadas características por cima de uma representação de um sistema de representação diferente, estamos perante tratamentos do tipo $T_{R \rightarrow RV}$ ou $T_{R \rightarrow RS}$. A diferença entre estes dois tratamentos é que se utilizaram elementos de outros sistemas de representação diferentes para realizar os tratamentos às representações: no primeiro utilizaram-se elementos visuais numa representação não visual (ou simbólica ou verbal); no segundo utilizaram-se elementos simbólicos numa representação não simbólica (ou visual ou verbal). Mas nunca se deixou de trabalhar no registo de representação original. No entanto, como a representação não é pura, no sentido em que não possui apenas elementos de um só sistema de representação, tendo sido adicionados elementos de outros sistemas de representação, classificamos esta categoria de Tratamento com alteração do sistema de representação.

A análise dos resultados da Fase 2 seguiu os procedimentos seguintes: a professora começou por analisar o capítulo *Figuras planas. Perímetros e áreas*, do segundo volume do livro adotado na escola para o 6.º ano de escolaridade, no ano letivo que precedeu o início da sua atuação com vista ao seu desenvolvimento profissional.

A professora pretendia um melhor conhecimento das tarefas relativamente ao tipo de representação e respetivas transformações usadas e esperadas. A análise dos dados foi feita em dois momentos: numa primeira fase, analisou-se cada tarefa para identificar as linguagens usadas no enunciado de cada tarefa e identificaram-se as transformações de representações que a resposta requeria; numa segunda fase, identificou-se o tipo de transformação que os alunos usaram efetivamente nas suas respostas, selecionando aquelas em que eles usaram representações diferentes das expectáveis. Para cada uma das análises feitas, foram formadas duas categorias de análise (Tabela 12).

Tabela 12: Categorias de análise (Características das tarefas do capítulo "Áreas de figuras planas")

Categorias	Subcategorias	
Linguagens (usadas no enunciado das tarefas)	Verbal Verbal e visual Verbal e simbólica Verbal, simbólica e visual	
Transformações de linguagens (na resposta esperada às tarefas e nas respostas dos alunos)	Dentro do mesmo tipo de linguagem	Simbólica Visual Verbal
	Entre linguagens	Visual para simbólica; Verbal para simbólica Visual para verbal Verbal para visual Simbólica para verbal

Depois de formadas estas categorias, fez-se a caracterização das tarefas daquele capítulo.

Para a análise dos dados recolhidos para a Parte 5 da Fase 2, formaram-se duas categorias de análise: Representações e Transformações de representações, à semelhança das categorias para a Intervenção 1 e para a Intervenção 2.

Os dados foram analisados relacionando duas vertentes: representações usadas e correção da resposta. Formaram-se três categorias de análise consoante a correção ou incorreção das respostas: *Correto* – resposta correta e resposta com evidência de chegar à resposta correta; *Incorreto* – respostas incorretas e respostas onde só se identificam os dados relevantes do problema; *Não responde* – Ausência de resposta, sem qualquer tentativa, nem mesmo de identificar os dados relevantes do problema. Encontraram-se evidências de dificuldades relativamente à representação visual, reta numérica. Não se consideraram erros relacionados com a não compreensão dos conceitos matemáticos ou de representação. Também não foram considerados erros decorrentes das seguintes dificuldades:

– Não seleção do m.m.c., se os alunos desenharam corretamente a reta numérica e selecionaram na resposta outro múltiplo comum.

– Erros de contagem nas marcas de múltiplos na reta numérica, se um erro condicionasse a contagem seguinte e os alunos respondessem de acordo com esse erro.

Para a análise dos dados recolhidos para a Parte 6 da Fase 2, formaram-se duas categorias de análise: a primeira categoria considera uma entrada da tabela (linha ou coluna) com a letra que identifica os triângulos (A, B, C, …) e a outra entrada com a classificação de triângulos quanto aos seus lados ou quanto aos seus ângulos. A segunda categoria considera a classificação de triângulos quanto aos seus lados ou quanto aos seus ângulos (linha ou coluna) e cada possibilidade (escaleno, isósceles ou equilátero; retângulo, acutângulo ou obtusângulo) na outra entrada.

No final, analisamos o desempenho dos alunos em termos de transformações de representações, identificando os tratamentos e as conversões feitas pelos alunos durante a resolução da tarefa.

Para organizar todos os dados recolhidos durante as três fases da investigação, procedemos à elaboração de narrações multimodais.

3.9.2 Narração multimodal

Uma Narração Multimodal (NM) é um instrumento que se refere a duas entidades diferentes: um processo e um produto. No processo há um protocolo para fazer uma Narração Multimodal que propõe:

> a) Um conjunto de indicações sobre a recolha de dados da sala de aula, seu contexto e o uso de registos multimodais; b) Um conjunto de passos para o narrador fazer um documento único descrevendo o curso da ação e do discurso entre os personagens na sala de aula, que agrega e transforma os dados recolhidos e incorpora o ponto de vista do professor de forma descritiva; c) Um conjunto de passos para validar uma Narração Multimodal que inclui a verificação das características essenciais de uma Narração Multimodal, bem como da sua estrutura interna. (Lopes, Viegas, & Pinto, 2018, pp. 23-24).

No produto há um documento que foi elaborado tendo por suporte um conjunto de dados independentes com "uma descrição multimodal, autocontida, validada, pública e partilhável de uma prática de ensino" (Lopes et al., 2018, p. 24).

Em síntese, uma narração multimodal é uma descrição detalhada de uma ou várias aulas ou parte dela(s), tendo por base determinados documentos auxiliares relativos aos dados recolhidos (Lopes et al., 2014; Lopes et al., 2018). São exemplos desses documentos a gravação áudio ou vídeo da aula, o plano de aula, a tarefa realizada, os registos do professor, os registos dos alunos, etc., que servirão de base à sua construção. Esta variedade de dados enriquece a narração e, ao mesmo tempo, permite a sua verificação. Normalmente, a narração multimodal é escrita pelo próprio professor, de forma a incluir as suas intenções e perceções.

Uma narração multimodal é constituída por duas partes essenciais:

(1) um resumo com a apresentação e contextualização que contém a identificação do tema, os objetivos, a organização espacial e temporal, e outras informações que se considerem pertinentes;
(2) a narração de episódios, com um início e um fim, que podem constituir várias aulas, uma aula ou parte dela.

O professor pode narrar no discurso direto ou indireto, incluir excertos que considere importantes para a compreensão da aula pelo leitor ou para explicitar ações e decisões. Por fim, a narração multimodal é validada por peritos externos, tendo por base os dados disponíveis que podem ser acedidos diretamente, se necessário.

A validação de uma narração multimodal por investigadores independentes tem o objetivo de assegurar que a narração é legível, autocontida, fidedigna e congruente com os dados recolhidos (Lopes et al., 2014). Depois de validada, a narração multimodal não é alterada, podendo tornar-se pública e ser usada para diversas finalidades. O cumprimento destes procedimentos faz de uma narração multimodal "uma descrição validada de uma realidade irrepetível (o que aconteceu na sala de aula), confiável (congruente com os dados) e pública" (Lopes et al., 2018, p. 24), podendo "ser um objeto de investigação" (Lopes et al., 2018, p. 15).

Para o presente estudo, foram elaboradas seis narrações multimodais: uma para a Fase 1 (NM1 – Apêndice 1), outra para a Fase 2 (NM2 – Apêndice 2), e quatro para a Fase 3 (NM3– Apêndice 3, NM4 – Apêndice 4, NM5 – Apêndice 5 e NM6 – Apêndice 6). A NM3 refere-se às aulas em que se explorou a Tarefa 1; a NM4 refere-se às aulas em que se explorou a Tarefa 2; a NM5 e a NM6 referem-se às aulas em que se explorou a Tarefa 3, sendo que a NM5 descreve todo o processo que envolveu a sua resolução e a NM6 descreve a aula de apresentação e comparação dos resultados obtidos por cada grupo e respetivo percurso. A análise da

Intervenção 2 foi feita a partir destas quatro narrações multimodais.

Todas as narrações multimodais foram validadas por peritos externos, tendo por base os dados disponíveis que puderam ser acedidos diretamente, quando necessário, em particular os registos dos alunos em diferentes fases da resposta à tarefa. Todas as narrações multimodais elaboradas para este trabalho seguiram o protocolo descrito em Lopes et al., (2014). Basearam-se nos dados recolhidos e na descrição de intenções e decisões da professora investigadora em diferentes fases das aulas. Todas as narrações multimodais das aulas consistiram nas duas partes já referidas anteriormente. Foram validadas com recurso aos dados recolhidos para verificar a sua conformidade com a narrativa e se esta estava autocontida e legível. As narrações multimodais foram usadas para a análise dos dados.

4 Resultados

Os dados foram analisados para identificar as representações relevantes e respetivas transformações, usadas pela professora e pelos alunos:

(1) No trabalho autónomo dos alunos;

(2) Decorrente da intervenção da professora.

Estes foram direcionados para responder às quatro questões de investigação. Para cada uma das subcategorias das representações, selecionamos uma resposta que serve os nossos propósitos como exemplo, para caracterizar as representações usadas pelos alunos. Seguimos um procedimento similar para as transformações de representações. No entanto, só selecionamos exemplos para as subcategorias relacionadas com as representações visuais, pois o foco do nosso estudo recai sobre as transformações (em especial os tratamentos visuais) que envolvem esse tipo de representação.

No final da apresentação dos resultados de cada uma das secções relativas às três fases do estudo (Fase 1, Fase 2 e Fase 3), apresentamos uma secção com a síntese dos resultados para cada questão de investigação (respetivamente, Secção 4.2 para as QI1 e QI2, Secção 4.4 para a QI3 e Secção 4.6 para a QI4).

4.1 Da Fase 1 – Intervenção 1

Nesta secção apresentamos os resultados que nos vão permitir responder às questões de investigação QI1 e QI2, que relembramos.

QI1: *Que características devem ter as representações visuais no sentido de dar continuidade à atividade dos alunos?*

QI2: *Qual é o impacto dos tratamentos visuais de uma determinada forma de representação na atividade dos alunos durante a resolução de uma tarefa matemática?*

Os resultados que sustentam a resposta à primeira questão de investigação encontram-se ao longo de toda a descrição. Os resultados que sustentam a resposta à segunda questão de investigação encontram-se principalmente na descrição relativa à intervenção da professora e ao trabalho dos alunos decorrente dessa intervenção. Por facilidade de compreensão, apresentamos os resultados de forma sequencial de acontecimento, mas identificamos o momento a partir do qual os resultados nos permitem responder à segunda questão de investigação.

4.1.1 Trabalho autónomo dos alunos – Representações iniciais e transformações

Todos os grupos começaram a exploração da sequência pelo desenho da figura (Figura 14), como sugerido na tarefa (ver tarefa da Figura 8) (questão 1).

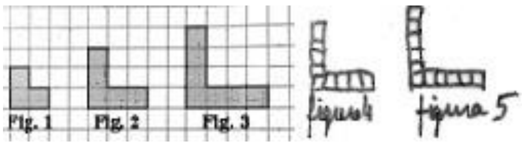


Figura 14: Representação visual apresentada na tarefa, à esquerda, e representação feita pelos alunos, à direita (NM1, Apêndice 1)

Todos os grupos compararam os termos conhecidos e determinaram os dois termos seguintes através dos termos prévios (questão 2 e questão 6 da tarefa). Catorze alunos fizeram uma conversão da representação visual fornecida para uma representação em linguagem natural: *A regra é adicionar 2 ao número anterior*.

Contudo, dois alunos também realizaram um tratamento à representação visual (T_{RV}), adicionando os dois quadrados à figura anterior em cada etapa para identificar a lei de formação da sequência – generalização próxima (Figura 15). É aqui a primeira vez que surge um tratamento visual.

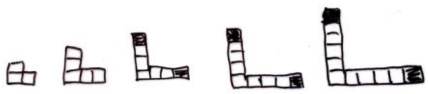


Figura 15: Tratamento ($T_{RV\text{-}F}$) da representação visual (RV-F), Grupo I

Posteriormente, para responder à segunda questão da tarefa, todos os alunos abandonaram a exploração do desenho fornecido e usaram representações numéricas, convertendo o padrão figurativo num padrão numérico (3/5/7/9/11/13/ ...). Dez alunos usaram representações esquemáticas (Figura 16).

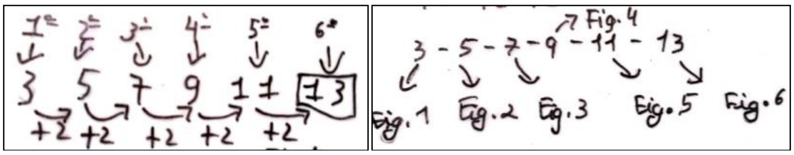
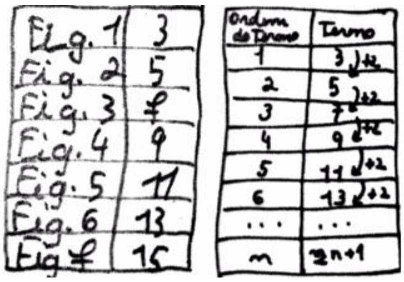


Figura 16: Representação visual esquemática (RV-E) com tratamentos visuais numa representação simbólica - numérica ($T_{RS\text{-}N \rightarrow RV}$): diagrama com relações entre os elementos em linha e coluna (Grupo I, à esquerda) e em coluna (Grupo II, à direita)

As representações da Figura 16 são ambas esquemáticas. Foram construídas tendo por base uma representação simbólica numérica à qual foram adicionados elementos visuais, tendo sido feitos através de um tratamento visual. Ambas ilustram as características específicas da representação esquemática inseridas no sistema de representação visual, porque ambas possuem elementos que apelam à perceção visual (leitura global). À esquerda, as setas verticais relacionam a ordem (e.g. 6.º) do termo de sequência com o valor do termo (e.g. 13); o quadrado destaca o número 13 e as setas curvas apontam a relação entre os termos numéricos (+2). A representação à direita relaciona apenas os termos da sequência com a ordem das figuras, enfatizando essa característica, mas sem a linguagem simbólica ou tratamento numérico que exprima regras claras entre os elementos.

Oito alunos converteram a representação visual fornecida na tarefa numa representação tabular (Figura 17).



(1. $T_{RS\text{-}N \rightarrow RV}$)
(2. RV-T)
(3. $T_{RV\text{-}T}$)

Figura 17: Representação tabular sem tratamentos visuais (Grupo IV, à esquerda); com tratamentos visuais (Grupo III, à direita)

Essa representação tabular, tal como a representação esquemática na Figura 16, é desenvolvida em linguagem visual, permitindo a leitura global, e também possui a peculiaridade de permitir um tratamento em linguagem simbólica. O resultado de realizar uma transformação numa representação esquemática, numérica ou tabular, foi passar para a exploração dos termos numéricos da sequência, abandonando a representação visual sugerida (RV-F) e, portanto, o padrão figurativo.

De seguida, vamos referir-nos especificamente às transformações de representações, conversões e tratamentos, e em especial aos tratamentos visuais feitos pelos alunos durante a parte inicial do seu trabalho.

4.1.1.1 Transformações de representações – Trabalhos dos alunos

Durante a parte inicial do trabalho dos alunos, verificaram-se tratamentos visuais da representação visual fornecida, $T_{RV\text{-}F}$ (Figura 15), e tratamentos visuais de representações numéricas, $T_{RS\text{-}N \rightarrow RV}$, que as transformaram em representações visuais esquemáticas (ver o exemplo na Figura 16). Deve-se enfatizar que todos os alunos já tinham realizado a conversão da representação figurativa para uma representação numérica ao responder à questão 2 e, por consequência, começaram a explorar os seus termos numéricos (Figura 18).

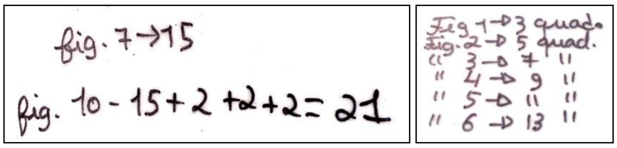


Figura 18: Conversão (RV-F $\xrightarrow{c}$RS-N) da representação fornecida (RV-F) numa representação numérica (RS-N), (Grupo III, à esquerda), e através de uma representação esquemática (Grupo IV, à direita), ambas obtidas sem tratamentos visuais

Até aqui, o trabalho foi semelhante em todos os grupos, começando a divergir a partir desta altura. Dois grupos (Grupos I e III) conseguiram resolver a tarefa com autonomia e os outros dois (Grupos II e IV) não o fizeram, necessitando da intervenção da professora para o conseguir. Vamos referir-nos, em primeiro lugar, aos grupos que terminaram a tarefa sem a intervenção da professora.

4.1.2 Grupos que completaram a tarefa sem a intervenção da professora

Os grupos I e III usaram uma das estratégias de generalização com uma representação em tabela explorada nas duas aulas anteriores. Eles solucionaram bem a questão estabelecendo uma relação entre a posição do termo na sequência e o seu valor, e encontraram uma expressão algébrica geral, mesmo antes de ser solicitado.

Para o fazer, o Grupo III organizou os termos numéricos da sequência numa tabela (Figura 17, à direita), usando um tratamento visual, e o Grupo I organizou-os num esquema (Figura 19), usando o mesmo tipo de tratamento. Ambos procuraram as regularidades nos termos da sequência.

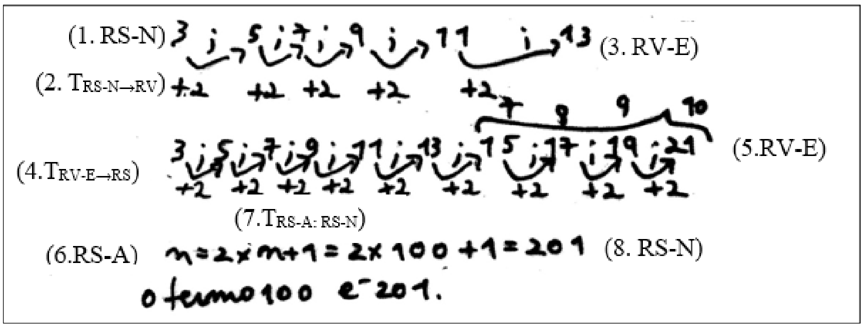


Figura 19: Sequência de representações e transformações de representações usando tratamentos visuais em representações simbólicas ($T_{RS\text{-}N \rightarrow RV}$), Grupo I

Depois de reconhecer que a regra da sequência era adicionar 2 ao termo anterior, os alunos utilizaram os múltiplos de 2. Relacionaram os múltiplos naturais de 2 (2, 4, 6, ...), um a um com os termos da sequência. Depois disso, observaram a necessidade de adicionar uma unidade a cada um dos múltiplos de 2 para obter os termos da sequência (3, 5, 7, 9, ...) e, finalmente, obtiveram a expressão geral (RS-A). De seguida, apresentamos as representações e transformações de representações efetuadas por cada um dos Grupos I e III, durante este trabalho.

4.1.2.1 Transformações de representações – Trabalhos dos alunos

Em termos de transformações, o trabalho do Grupo I (Figura 19), descrito na secção anterior, pode ser sintetizado da seguinte forma (Figura 20).

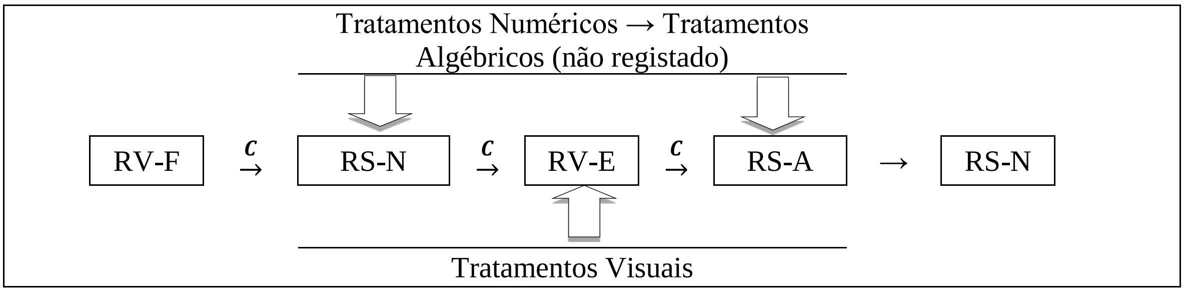


Figura 20: Sequência de transformações de representações, Grupo I

O trabalho do Grupo III (Figura 17, à direita), descrito na secção anterior, pode ser sintetizado da seguinte forma (Figura 21).

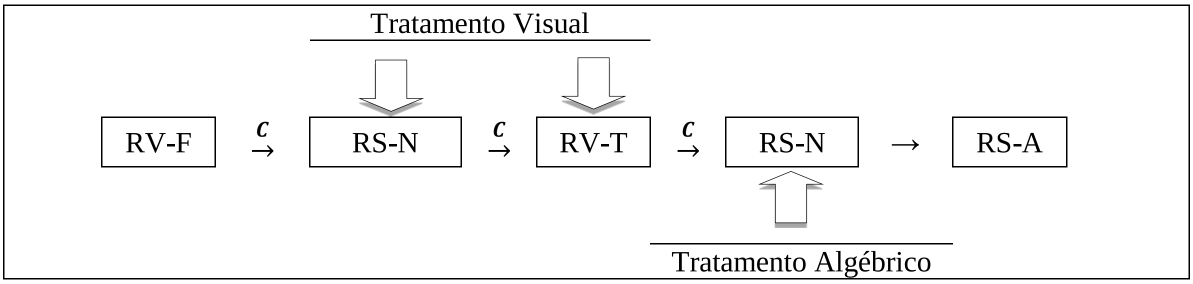


Figura 21: Sequência de transformações de representações, Grupo III

Em geral, os alunos converteram a representação visual fornecida numa representação algébrica (RV-F $\xrightarrow{C}$RS-A) através de tratamentos visuais e simbólicos. Os tratamentos visuais de uma representação tabular ($T_{RV\text{-}T}$) e de uma representação esquemática ($T_{RV\text{-}E}$) incluem setas para representar as relações entre os elementos numéricos (RS-N). Mas também exigem procedimentos numéricos (Figura 17, à direita e Figura 19).

Os tratamentos visuais facilitaram os tratamentos numéricos e a conversão em linguagem algébrica e permitiram que os alunos chegassem à resposta correta.

4.1.3 Desempenho dos grupos que precisaram da intervenção da professora

Os grupos II e IV tiveram dificuldade em determinar o número de quadrados na figura 100 da sequência. O Grupo II abandonou a representação visual figurativa (Excerto 3):

> "Um dos membros do Grupo II sugere contar o número de quadrados até à figura 100, mas nem os outros membros nem eu aceitamos essa estratégia, pois não é a melhor e mais eficiente nesta situação, visto ser muito lento e cansativo desenhar todos os números até ao 100.º termo. O grupo encontra outra estratégia, com base numa regra de proporcionalidade direta. Encorajo-os a usá-la e afasto-me para o Grupo IV."

Excerto 3: Razão de abandono do uso da representação visual, pelos alunos (NM1, Apêndice 1)

Os alunos dos dois grupos decidiram trabalhar com uma representação tabular. O Grupo II escolheu uma aplicação (incorreta) do método da proporção direta (Excerto 4). Neste momento, os alunos ainda não tinham aprendido as situações para as quais esse método é (ou não) apropriado. Embora a professora tenha percebido que a estratégia levaria a dificuldades e não era apropriada neste caso, encorajou-os à experiência com a esperança de que a discussão dentro do grupo os levasse à mesma conclusão. Como isso não aconteceu, a professora pediu-lhes para indicarem a sequência de termos, levando-os a reconhecer que estes eram todos números ímpares e, por essa razão, 210 não poderia ser um termo da sequência. A seguinte transcrição da narração multimodal (Excerto 4) mostra evidências de tratamentos visuais numa representação tabular visual ($T_{RV\text{-}T \rightarrow RS}$), sem os terem registado:

> "Eu abordo o grupo II, encontrando-os ainda a trabalhar com o termo de ordem 100. Madalena já se acalmou. Joaquim começa a responder, mas Madalena interrompe-o, explicando o que eles fizeram. Eles conjeturam que, se o 10.º termo tiver 21 quadrados, o 100.º termo tem 210. Eu tento encontrar dois valores da tabela cujo produto seja 210, mas não consigo. Eles tomam consciência da situação, percebendo que todos os termos da sequência devem ser números ímpares, e 210 é um número par, o que contradiz as características dos termos numéricos da sequência."

Excerto 4: Evidências de tratamentos visuais numa representação visual (NM1, Apêndice 1)

Enquanto o Grupo II estava a discutir e a analisar a eficiência da sua estratégia e a decidir escolher outra, a professora mudou-se para outro grupo. Os alunos do Grupo IV seguiram um caminho semelhante aos do Grupo II, organizando os termos da sequência numa tabela ou esquema. Estabeleceram a relação entre os termos da sequência (para obter qualquer termo, adicionar 2 ao termo anterior), mas não conseguiram relacionar os valores com a ordem para obter uma expressão geral. Consciente das descontinuidades na atividade dos grupos, a professora interveio em ambos. O Grupo II solicitou explicitamente a sua ajuda.

4.1.3.1 Transformações de representações – Trabalhos dos alunos

Em termos de transformações de representações, o trabalho dos alunos do Grupo II, descrito na secção anterior, pode ser sintetizado da seguinte forma (Figura 22):

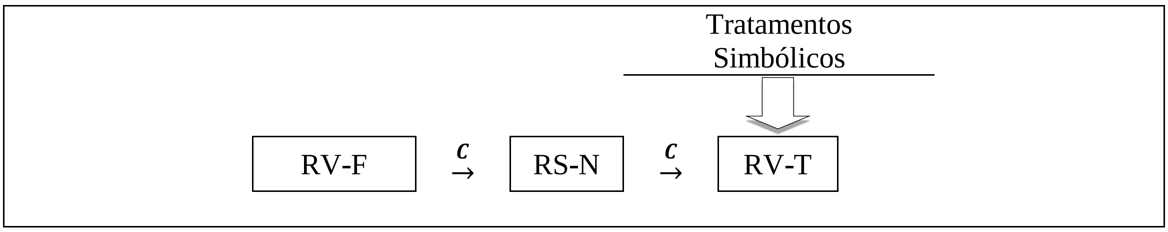


Figura 22: Sequência de transformações de representações (Grupo II)

O trabalho dos alunos do Grupo IV, descrito na secção anterior, pode ser sintetizado da seguinte forma (Figura 23):

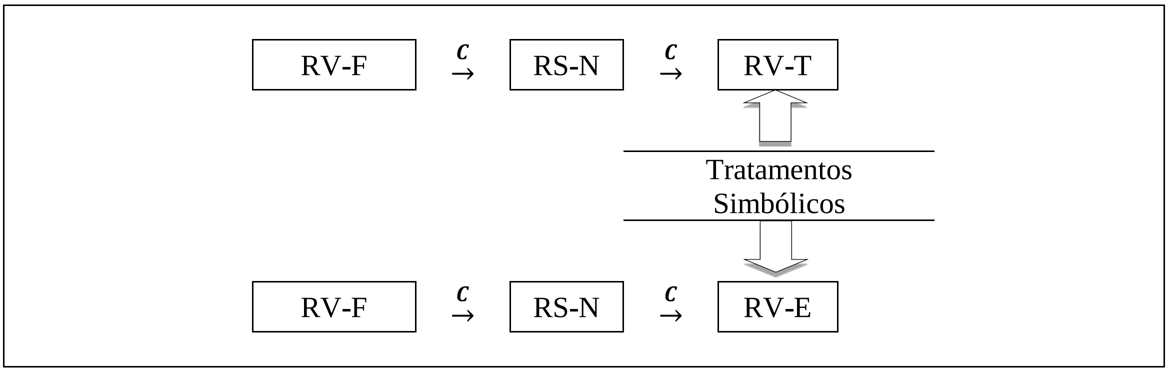


Figura 23: Sequência de transformações de representações (Grupo IV)

O Grupo II realizou um tratamento simbólico numa representação tabular ($T_{RV\text{-}T \rightarrow RS}$). Além deste tratamento, o Grupo IV realizou um tratamento visual na tabela, implícito no diálogo com a professora, mas sem fazer um registo escrito disso. Ambos os grupos realizaram tratamentos simbólicos sobre os elementos numéricos numa representação visual tabular ou numa representação visual esquemática. Esses tratamentos simbólicos incluíram operações ou procedimentos de cálculo decorrentes de uma estratégia inadequada. No trabalho escrito dos alunos, não houve tratamentos realizados em representações tabulares, embora essa seja a representação escolhida por três alunos como parte de sua estratégia para resolver o problema. No entanto, há evidências de que os alunos realizaram esses tratamentos mentalmente sem os anotar, como mostra a transcrição da narração multimodal: "Os alunos do Grupo II presumem que, se o 10.º termo tiver 21 quadrados, o 100.º termo tem 210" (NM1, Apêndice 1). Esta é a evidência de que os alunos relacionaram as duas colunas da representação tabular, embora os tratamentos simbólicos que eles usaram fossem errados e requeressem a intervenção da professora. A professora identificou uma falta de compreensão entre os alunos (para o Grupo II) e a realização inadequada de tratamentos numéricos (para o Grupo IV).

4.1.4 Intervenção da professora

Embora os resultados que sustentam a primeira questão de investigação se encontrem em toda a Intervenção 1, os que sustentam a segunda questão de investigação encontram-se especificamente daqui para a frente, concretamente a partir da intervenção da professora. Por essa razão relembramos a QI2.

QI2. *Qual é o impacto dos tratamentos visuais de uma determinada forma de representação na atividade dos alunos durante a resolução de uma tarefa matemática?*

Vimos que os alunos dos Grupos II e IV realizaram tratamentos simbólicos, o que provocou descontinuidade na sua atividade, requerendo a intervenção da professora, a qual passamos a descrever. A professora apercebeu-se de que os alunos ignoraram o potencial da exploração da representação visual, por isso decidiu diversificar as estratégias. Sugeriu que os alunos examinassem mais de perto a representação visual figurativa original, para que pudessem encontrar as semelhanças e diferenças entre os desenhos. Como isso não conduziu ao resultado esperado, a professora destacou o que era constante da 1.ª para a 2.ª figura e da 2.ª para a 3.ª (Figura 24, a cinzento).

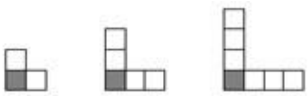


Figura 24: Tratamento visual feito pela professora (T_{RV-F}) à representação figurativa fornecida na tarefa

A professora fez algumas perguntas aos alunos para os familiarizar com a situação. Por exemplo, ela perguntou: “O que é semelhante entre as figuras 1 e 2?”, “E o que é diferente?”, “Como é a figura 1?”, “Como é a figura 2?”, “E como irá ser a figura 15? E a figura n?”. Os alunos deram respostas como: “Ambas as figuras 1 e 2 têm um quadrado comum no canto”, “A figura 1 tem um quadrado comum e um de cada lado”, “A figura 15 tem um quadrado comum e 15 de cada lado” e “A figura n terá um quadrado comum e n quadrados de cada lado”, e os alunos exclamaram “Aaaahhh!”. Após essa intervenção, os alunos rapidamente encontraram os termos de qualquer ordem e a expressão algébrica geral. A professora terminou a sua intervenção, sugerindo aos alunos a anotação das diferenças que encontraram.

De seguida, identificamos as transformações de representações feitas durante a intervenção da professora.

4.1.4.1 Transformações de representações

Em termos de representações escritas, a professora realizou um tratamento visual na representação figurativa inicial (T_{RV-F} na Figura 24). De seguida, oralmente, realizou uma conversão para a linguagem natural e vários tratamentos nessas representações orais, o que terminou com a conversão realizada pelos alunos, mas induzida pela professora, para uma representação algébrica. Este trabalho está esquematicamente representado na Figura 25.

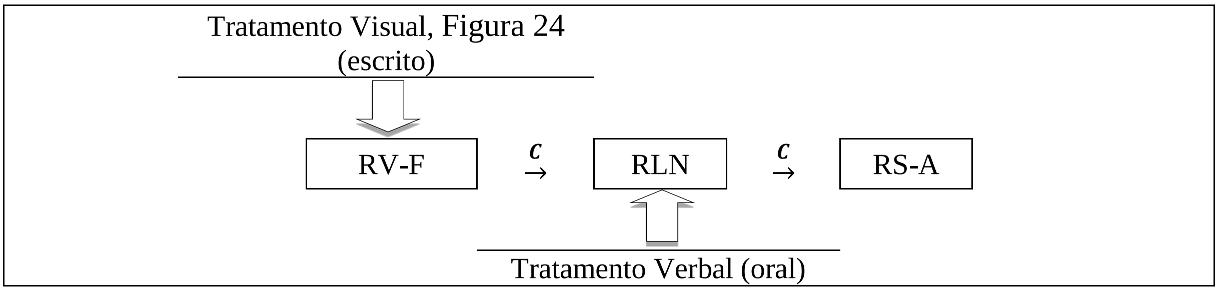


Figura 25: Sequência de transformações de representações durante a intervenção da professora

Depois da intervenção da professora, com apoio de um tratamento visual, os alunos fizeram o trabalho que a seguir se descreve.

4.1.5 Trabalho autónomo dos alunos depois da intervenção da professora

Depois de escrever expressões semelhantes a estas em linguagem natural, os alunos do Grupo II realizaram um tratamento visual para destacar as principais características e regularidades, permitindo uma leitura global (Figura 26).

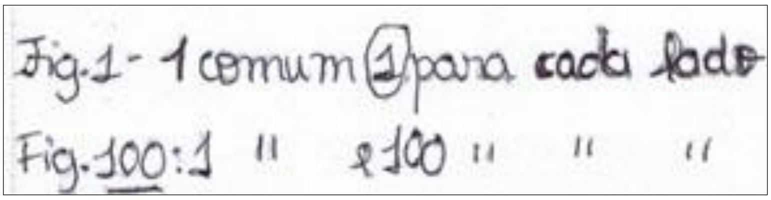


Figura 26: Tratamento visual numa representação em linguagem natural ($T_{RLN \rightarrow RV}$), Grupo II

Um dos alunos do Grupo II rodeou o número 1 e sublinhou o número 100 para destacar a sua importância, com um tratamento visual (visualização). Este esquema serviu de base para respostas subsequentes. A capacidade de interpretar, usar e refletir é reconhecida nessa situação; permitiu que os alunos pensassem, e depois comunicassem ideias desconhecidas ou visualizassem. Os alunos também fizeram alguns comentários, reconhecendo o quão fácil se tornou reconhecer o padrão dessa maneira. O Grupo II realizou este tratamento em resposta à terceira questão, ao tentar vincular a representação em linguagem natural com o termo de ordem 100. Isso serviu de base para uma conversão que o Grupo II realizou nas suas respostas às questões subsequentes. Por exemplo, a Figura 27 mostra como solucionaram a questão 4 da tarefa (ver Figura 8).

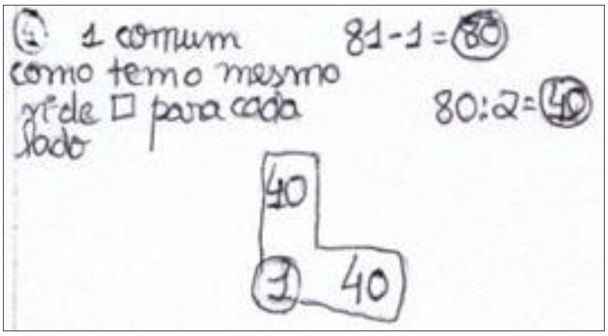


Figura 27: Conversão entre três representações de sistemas diferentes, e tratamentos simbólicos (ao centro, $T_{RV-F\rightarrow RS}$) e tratamentos visuais (à direita, $T_{RS-N\rightarrow RV}$), Grupo II

O mesmo aluno começou por usar uma representação verbal (RLN, Figura 27, à esquerda), passando para uma representação numérica (RS-N, Figura 27, à direita) e para uma representação visual (RV-E, Figura 27, no centro) obtidos através de um tratamento numérico da representação figurativa visual inicial ($T_{RV-F\rightarrow RS}\rightarrow$RV-E). O aluno recorreu a todas as representações, conforme necessário, para confirmar o resultado. Assim, para determinar a imagem que conteria 81 quadrados, o aluno subtraiu o quadrado do canto e dividiu o termo por 2 (RS-N), porque a figura tinha o mesmo número de quadrados de cada lado (RLN). Então, ele desenhou a figura (RV-F), para verificar se era possível ter quarenta quadrados de cada lado e um comum ($T_{RV-F\rightarrow RS}$). Ele leu a regra (RLN), confirmou que o esquema estava bem construído e passou para a pergunta seguinte. O aluno estava simultaneamente a generalizar e a particularizar. O Grupo II terminou esta atividade com a representação algébrica desejada. Os alunos do Grupo IV escreveram uma expressão geral que descobriram durante a intervenção da professora e empregaram-na para responder às outras questões, usando um esquema na resposta à questão 3 com um tratamento numérico (Figura 28).

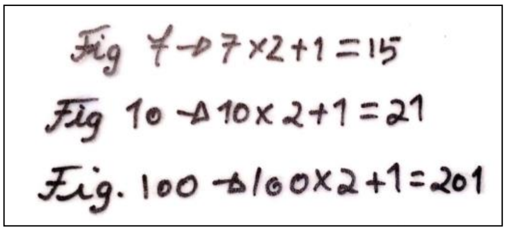


Figura 28: Representação esquemática com tratamentos simbólicos ($T_{RS-A:\,RS-N}$), Grupo IV

4.1.5.1 Transformações de representações – Trabalhos dos alunos

O Grupo II utilizou as representações e realizou as transformações de representações identificadas na Figura 29, imediatamente após a intervenção da professora:

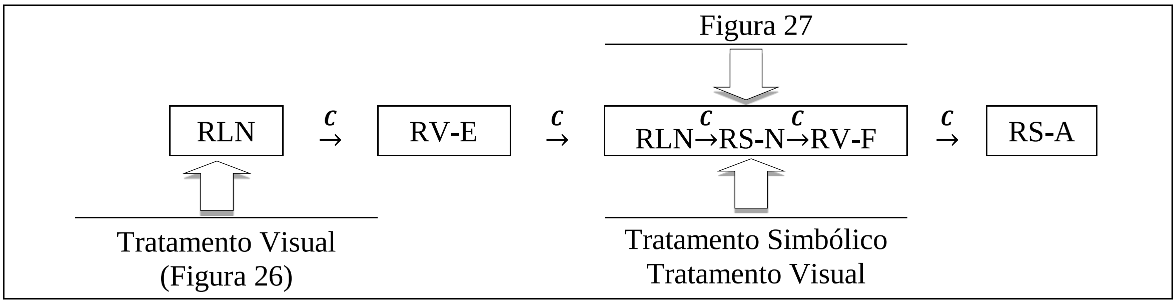


Figura 29: Sequência de transformações de representações (Grupo II)

O Grupo IV utilizou as representações e realizou as transformações de representações (Figura 30) imediatamente após a intervenção da professora:

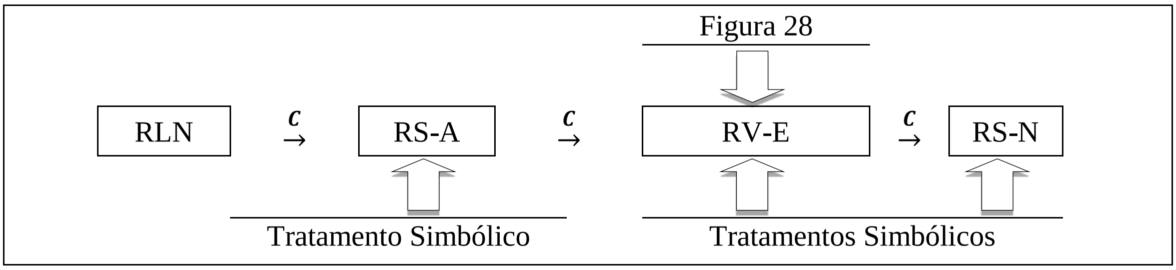


Figura 30: Sequência de transformações de representações (Grupo IV)

O Grupo II ultrapassou a descontinuidade da sua atividade através de tratamentos visuais que fez a representações de diferentes sistemas de representação. O Grupo IV ultrapassou a descontinuidade da sua atividade através do tratamento visual que a professora fez e que o grupo transportou para organizar o seu esquema, fazendo agora os tratamentos simbólicos (numéricos) com sucesso.

4.2 Síntese dos resultados às QI1 e QI2

QI1*: Que características devem ter as representações visuais no sentido de dar continuidade à atividade dos alunos?*

Na resolução desta tarefa, os alunos dos grupos II e IV tiveram dificuldades com as representações, nomeadamente na realização de cálculos e nas formas de ver e interpretar o crescimento dos termos da sequência. Estas descontinuidades foram ultrapassadas com a realização criativa de tratamentos visuais que ajudou os alunos a superar a rutura no seu esforço produtivo de resolver o problema. Estes resultados mostraram que as transformações de representações se basearam na realização de tratamentos visuais que foram essenciais na continuidade na atividade dos alunos, tanto nos grupos I e III, como nos grupos II e IV, depois do tratamento visual realizado pela professora durante a sua intervenção. Resultou também que as representações visuais têm características inerentes a elas próprias, nomeadamente a versatilidade e a conexão à visualização que permitiram a sobreposição de uma "segunda camada" sobre as representações, dando continuidade no trabalho produtivo. Neste contexto, a representação visual deixou de ser estática (exclusivamente com a função de signo) e foi usada de forma criativa para inspirar a atividade dos alunos – forma dinâmica. Com estes resultados, vimos que as representações visuais podem ser um ponto de partida para a realização de algo em Matemática, isto é, podem ser um artefacto. A realização de algo em Matemática apoiou-se, neste caso, num tipo de transformação de uma representação (um tratamento), particularmente um tratamento visual, que depende não de regras específicas, mas da criatividade do usuário.

QI2: *Qual é o impacto dos tratamentos visuais de uma determinada forma de representação na atividade dos alunos durante a resolução de uma tarefa matemática?*

Depois do tratamento visual efetuado pela professora durante a sua intervenção, os alunos do Grupo II realizaram mais transformações de representações que deram continuidade à sua atividade, facilitando as conversões entre as representações de diferentes tipos. Os tratamentos visuais tornaram-se importantes para a conversão de representações, pois a adição de elementos visuais transmitiu às representações uma nova funcionalidade de organização e de transmissão de informação relevante, recriando as representações com uma nova dinâmica, ao mesmo tempo que proporcionou um ambiente de aprendizagem com múltiplas representações para o mesmo objeto matemático. Essas representações construídas da realização de tratamentos visuais ajudaram a articular as ideias matemáticas comportando-se como entidades materiais com as quais os alunos puderam interagir, isto é, de artefacto passaram a ferramenta, gerando conhecimento matemático.

4.3 Da Fase 2 – Desenvolvimento profissional da professora

Os resultados da Fase 2 pretendem responder à terceira questão de investigação, que relembramos:

QI3: *Que ações deve o professor adotar para melhorar a sua prática de ensino usando as representações visuais como artefacto?*

A Fase 2 decorreu continuamente ao longo do tempo, mas, por conveniência de organização e de facilidade de compreensão do trabalho efetuado, organizamos em sete partes a narração multimodal que a descreve (NM2). Na descrição dos resultados ao longo desta fase, manteremos essa divisão, cuja descrição geral se encontra na Tabela 13.

Tabela 13: Descrição geral de cada uma das partes da Fase 2 do estudo

Parte	Ação	Justificação	Calendarização
1	Análise das representações das tarefas de um capítulo	Conhecimento teórico dos tipos de representações usados	Final do ano x
2	Teste diagnóstico	Caracterização dos tipos de representações familiares aos alunos	Início do ano x+1 (terceira semana de aulas)
3	Lecionação do domínio de conteúdos *Múltiplos e divisores*	Conhecimento prático dos tipos de representações usados, em grupo turma	Início do ano x+1 (primeiras 39 aulas)
4	Resolução de 4 problemas, em grupo	Conhecimento prático dos tipos de representações usados, em trabalho autónomo	Início do ano x+1 (39.ª aula)
5	Realização de um teste	Conhecimento das representações usadas por dois grupos distintos	Final de novembro e final de fevereiro
6	Organização da resposta a uma tarefa com uma tabela	Como alunos do 2.º ciclo reagem à elaboração de uma tabela	Abril do ano x+1
7	Realização de entrevistas a três colegas de grupo da escola	Caracterização das práticas de ensino relativamente ao uso de representações visuais	Final de abril

O tempo restante desta fase foi utilizado na reflexão e discussão dos resultados obtidos com a equipa de investigação e revisores externos, no processo de submissão dos artigos a revistas e conferências.

4.3.1 Parte 1 – Trabalho docente preparatório

Além da análise das tarefas do capítulo relativo às *Áreas de figuras planas*, da Parte 1, também fez parte a determinação do ponto de partida para as intervenções intermédias, que descrevemos nas restantes partes desta secção. Focamo-nos na Intervenção 1 para as identificar.

O Excerto 5 identifica a primeira.

Mais tarde apercebi-me que escreveram a semelhança entre as figuras da sequência, sinalizaram alguns elementos, destacando-os e utilizaram este esquema (Figura 15) para verificar para outras figuras da sequência e responder a outras perguntas.

Excerto 5: Evidência da utilização discente de representações visuais com intenção

A professora concluiu que os alunos poderiam utilizar as representações visuais para assinalar / destacar algumas características (ver Figura 26) de diferentes maneiras. Na Figura 24, a professora usou a cor com o mesmo objetivo.

A elaboração da Narração Multimodal 1 (NM1) permitiu à professora identificar as condições em que os grupos de alunos utilizaram os três sistemas de representação em simultâneo. O Excerto 6 da NM1 identifica as intenções da professora e a sua decisão sobre como abordar a análise das características da sequência. A elaboração da NM1, com a articulação dos dados recolhidos, nomeadamente, os registos escritos dos alunos, a gravação áudio da aula, e as intenções da professora, facilitou essa análise.

Verifico com eles a impossibilidade de desenhar o termo de ordem 100, logo a necessidade de encontrar outra forma de o descobrir. Sugiro olhar para as figuras com "olhos" (pausa) "de ver" para que consigam ver regularidades nelas. Direciono-lhes a atenção para que vejam que todas as figuras têm uma construção semelhante: têm uma quadrícula no vértice que é comum aos dois lados e o mesmo de número de quadrículas para cada lado.

Todos: Aaaahhhh!

Dão a resposta ao termo de ordem 100 e verificam que a sua primeira resolução se encontrava errada.

Excerto 6: Evidência da utilização docente de representações visuais com intenção

A segunda evidência encontrada pela professora foi o uso de representações visuais para justificar o raciocínio. No caso específico, um tratamento visual da representação visual proporcionada pelo uso da cor promoveu o uso de representações múltiplas e conversões entre elas (Excerto 7 da NM1).

Este esquema foi utilizado para resolver as questões seguintes, como foi o caso da questão 4. Para a sua resolução, o aluno fixou-se na regra de crescimento da sequência, em linguagem natural (sistema de representação verbal), fez o seu desenho (sistema de representação visual) e retirou ao total de quadrículas, a quadrícula do canto e dividiu por dois (sistema de representação simbólico).

Excerto 7: Consequência da realização do tratamento visual efetuado

A elaboração da Narração Multimodal 1 (MN1) permitiu à professora identificar as situações em que os alunos recorreram a usos menos convencionais das representações visuais, como vemos no Excerto 8 da NM1.

Mais tarde apercebo-me de que também o Grupo I utilizou pequenos sinais na representação que usaram, neste caso um esquema.

Excerto 8: Usos menos convencionais de representações visuais

Relativamente ao capítulo *Figuras planas. Perímetros e áreas*, do livro adotado na escola, encontrámos os resultados seguintes: O capítulo em questão tem um total de 84 tarefas. Destas, 12 tarefas introduzem o conteúdo e as outras são situações com o objetivo de consolidar a aprendizagem.

A Figura 31 mostra um exemplo de um enunciado de uma tarefa para a categoria de enunciado em linguagem natural.

3 Quais das seguintes afirmações são verdadeiras?

3.1. Um polígono diz-se inscrito numa circunferência se todos os seus pontos pertencem à parte interna da circunferência.

3.2. Um polígono diz-se circunscrito a uma circunferência se todos os seus vértices pertencem à circunferência.

3.3. Um polígono diz-se inscrito numa circunferência se algum dos seus pontos pertence à circunferência.

3.4. Um polígono diz-se inscrito numa circunferência se todos os seus vértices pertencem à circunferência.

Figura 31: Enunciado em linguagem natural

A Figura 32 mostra um exemplo de um enunciado de uma tarefa para a categoria de enunciado em linguagem verbal e simbólica.

tarefa 4

Traça uma circunferência de centro O e raio 2 cm. Marca um ponto A nessa circunferência e desenha o raio $[OA]$.

Traça a reta perpendicular a $[OA]$ que passa por A. Marca nessa reta um ponto B, distinto de A.

Justifica que:

1. $\overline{OB} > \overline{OA}$;
2. o ponto B está na parte externa da circunferência;
3. A é o único ponto em que a reta AB interseta a circunferência.

Figura 32: Enunciado em linguagem verbal e simbólica

A Figura 33 mostra um exemplo de um enunciado de uma tarefa para a categoria de enunciado em linguagem verbal e visual.

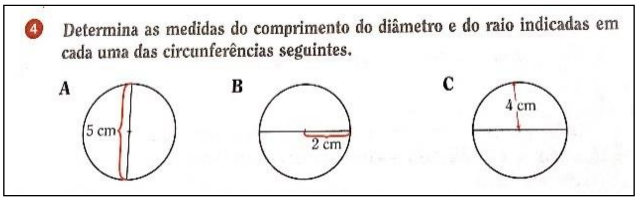


Figura 33: Enunciado em linguagem verbal e visual

A Figura 34 mostra um exemplo de um enunciado de uma tarefa para a categoria de enunciado em linguagem verbal, visual e simbólica.

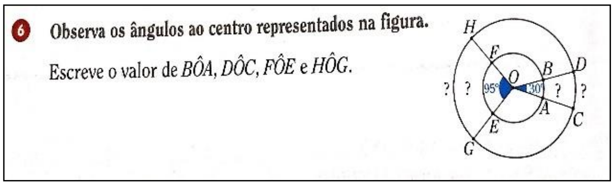


Figura 34: Enunciado em linguagem verbal, visual e simbólica

A justificação para a realização deste trabalho encontra-se no Excerto 9 da NM2:

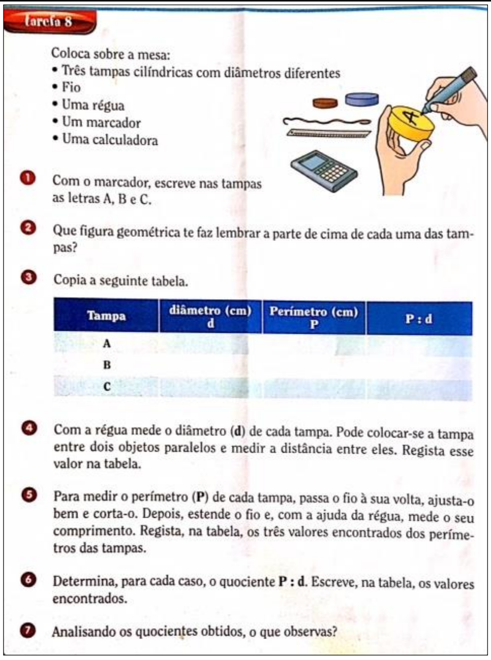
Este trabalho deu um determinado traquejo à professora na identificação rápida das representações e das transformações. Ainda ficou a conhecer as linguagens mais e menos frequentes e as diferentes combinações de linguagens.

(…)

Deste trabalho, verificou-se um predomínio de tratamentos simbólicos, decorrentes da resolução de expressões numéricas, e de conversões de linguagem visual para simbólica. A professora teria que realizar ações durante as aulas que contrariassem esta tendência. A partir daqui, tentou organizar a sua prática letiva de forma a tentar variar ao máximo as linguagens usadas.

Excerto 9: Relevância das primeiras ações realizadas no âmbito da Fase 2 (NM2, Apêndice 2)

Para nos apercebermos das representações presentes no enunciado, das representações esperadas nas respostas dos alunos e das representações que eles usavam efetivamente, fizemos a análise de três tarefas identificando as representações presentes no enunciado, as representações esperadas e as representações efetivamente usadas pelos alunos. A primeira tarefa selecionada é sobre o perímetro do círculo e espera-se que os alunos deem uma resposta em linguagem simbólica (Excerto 10).


Tarefa 8

Coloca sobre a mesa:
- Três tampas cilíndricas com diâmetros diferentes
- Fio
- Uma régua
- Um marcador
- Uma calculadora

1. Com o marcador, escreve nas tampas as letras A, B e C.
2. Que figura geométrica te faz lembrar a parte de cima de cada uma das tampas?
3. Copia a seguinte tabela.

Tampa	diâmetro (cm) d	Perímetro (cm) P	P : d
A			
B			
C			

4. Com a régua mede o diâmetro (**d**) de cada tampa. Pode colocar-se a tampa entre dois objetos paralelos e medir a distância entre eles. Regista esse valor na tabela.
5. Para medir o perímetro (**P**) de cada tampa, passa o fio à sua volta, ajusta-o bem e corta-o. Depois, estende o fio e, com a ajuda da régua, mede o seu comprimento. Regista, na tabela, os três valores encontrados dos perímetros das tampas.
6. Determina, para cada caso, o quociente **P : d**. Escreve, na tabela, os valores encontrados.
7. Analisando os quocientes obtidos, o que observas?

Fig.2: Tarefa 8 – Perímetro do círculo

O seu enunciado está escrito em linguagem verbal (palavras) e visual (imagens e tabela). Os alunos deviam medir o diâmetro e o perímetro de três tampas circulares e preencher a tabela na questão 3 da tarefa. Depois, deviam comparar o diâmetro com o perímetro nos valores encontrados para as três tampas – o perímetro é aproximadamente o triplo do diâmetro ou o diâmetro é aproximadamente um terço do perímetro.
Espera-se que eles transformem as representações em linguagem visual e verbal do enunciado da tarefa em representações simbólicas e encontrem um valor aproximado para o perímetro de cada uma das três tampas.
Espera-se que os alunos usem uma linguagem simbólica nas questões 3, 4, 5 e 6 e uma linguagem verbal na última questão da tarefa.
Espera-se que os alunos façam transformações em representações em linguagem simbólica.

(…)

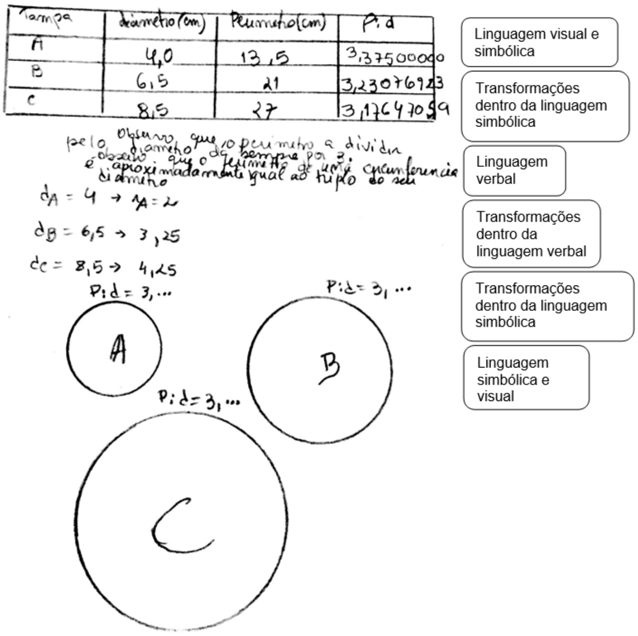


Fig. 3: Linguagens e transformações de linguagens nas respostas dos alunos à Tarefa 8

Excerto 10: Primeira tarefa selecionada e identificação das linguagens usadas no enunciado, esperadas e efetivamente usadas pelos alunos, (NM2, Apêndice 2)

A segunda tarefa selecionada (Excerto 11) é um exercício rotineiro que requer uma transformação da linguagem visual para linguagem simbólica.

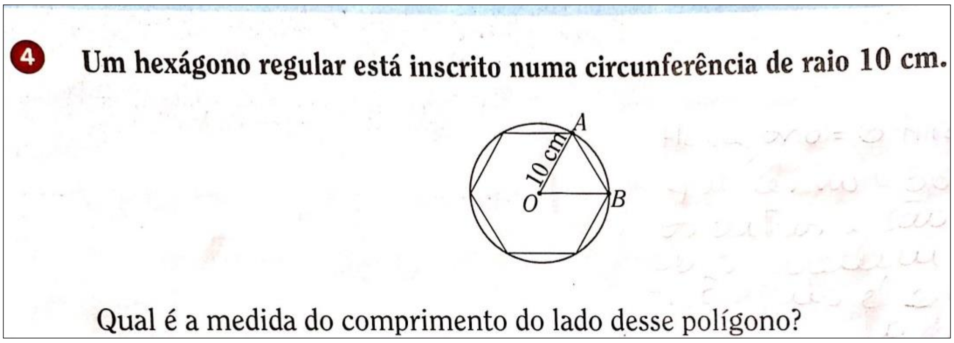


Fig. 4: Tarefa 1 – Polígono regular

O seu enunciado está escrito em linguagem verbal (palavras). Os alunos deviam determinar as medidas do comprimento do lado do polígono regular. Esperava-se que os alunos transformassem as representações em linguagem visual e verbal do enunciado da tarefa em representações simbólicas, usassem linguagem simbólica e/ou verbal e fizessem transformações em representações de linguagem verbal e simbólica.

(…)

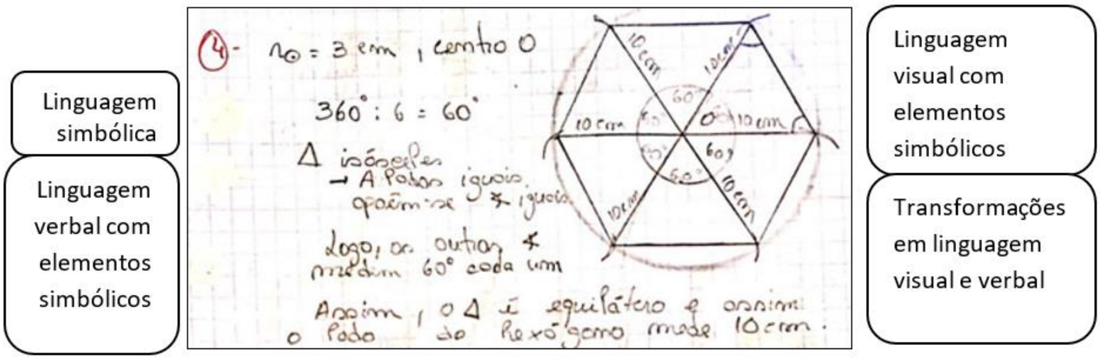


Fig.5: Linguagens e transformações de linguagens nas respostas dos alunos à Tarefa 4

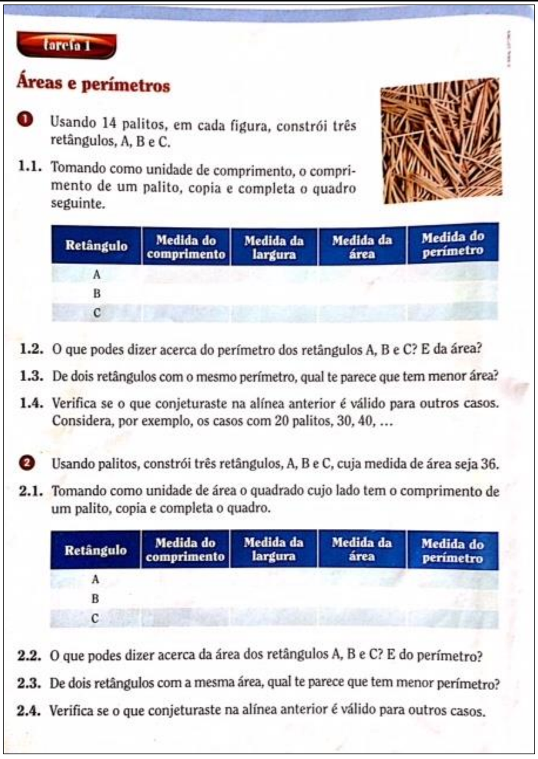
Excerto 11: Segunda tarefa selecionada e identificação das linguagens usadas no enunciado, esperadas e efetivamente usadas pelos alunos (NM2, Apêndice 2)

A última tarefa selecionada (Excerto 12) é uma tarefa de revisão das noções de área e de perímetro, especificamente para o retângulo.

Os alunos deviam construir 3 retângulos (A, B e C) com 14 palitos e completar a tabela com a medida do comprimento, da largura, da área e do perímetro de cada um dos retângulos construídos (Q1.1).

Depois deviam comparar o perímetro e a área dos três retângulos e encontrar uma relação entre os valores encontrados (todos os retângulos têm o mesmo perímetro, mas áreas diferentes; a área é maior quando a diferença entre a comprimento e a largura é menor) (Q1.2; Q1.3; Q1.4)

Na questão 2, os alunos tinham de comparar o perímetro de retângulos com a mesma área (36 unidades quadradas).


Tarefa 1

Áreas e perímetros

1 Usando 14 palitos, em cada figura, constrói três retângulos, A, B e C.

1.1. Tomando como unidade de comprimento, o comprimento de um palito, copia e completa o quadro seguinte.

Retângulo	Medida do comprimento	Medida da largura	Medida da área	Medida do perímetro
A				
B				
C				

1.2. O que podes dizer acerca do perímetro dos retângulos A, B e C? E da área?

1.3. De dois retângulos com o mesmo perímetro, qual te parece que tem menor área?

1.4. Verifica se o que conjeturaste na alínea anterior é válido para outros casos. Considera, por exemplo, os casos com 20 palitos, 30, 40, …

2 Usando palitos, constrói três retângulos, A, B e C, cuja medida de área seja 36.

2.1. Tomando como unidade de área o quadrado cujo lado tem o comprimento de um palito, copia e completa o quadro.

Retângulo	Medida do comprimento	Medida da largura	Medida da área	Medida do perímetro
A				
B				
C				

2.2. O que podes dizer acerca da área dos retângulos A, B e C? E do perímetro?

2.3. De dois retângulos com a mesma área, qual te parece que tem menor perímetro?

2.4. Verifica se o que conjeturaste na alínea anterior é válido para outros casos.

Fig. 6: Tarefa 1 – Áreas e perímetros

(…) esperamos uma resposta em linguagem verbal e simbólica. O seu enunciado está escrito em linguagem natural (palavras) e linguagem visual (imagens e tabela). Esperava-se que (i) os alunos transformassem as representações em linguagem verbal e visual do enunciado da tarefa em representações simbólicas; (ii) que os alunos usassem linguagem simbólica nas questões 1.1 e 2.1 e que usassem linguagem verbal na outra questão da tarefa; (iii) que os alunos fizessem transformações em linguagem verbal e simbólica.

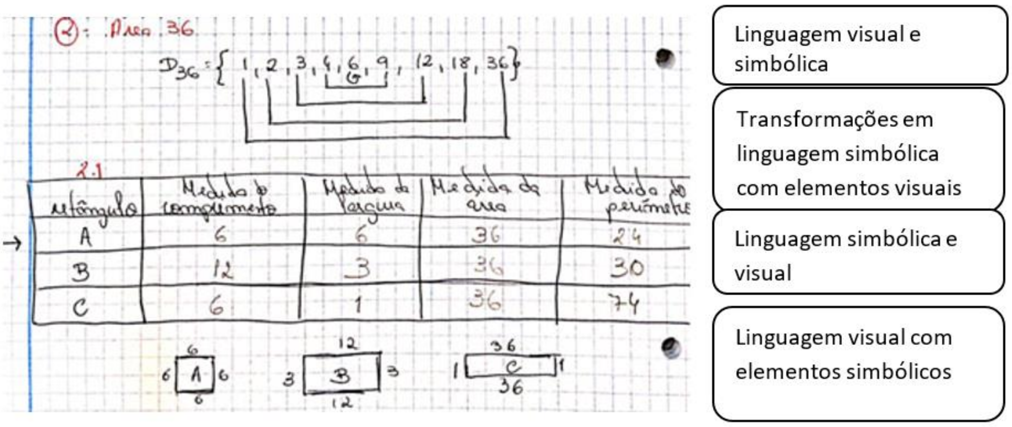


Fig.7: Linguagens e transformações de linguagens nas respostas dos alunos à Tarefa 1

Excerto 12: Terceira e última tarefa selecionada e identificação das linguagens usadas no enunciado, esperadas e efetivamente usadas pelos alunos (NM2, Apêndice 2)

A justificação para este trabalho encontra-se no Excerto 13 da NM2.

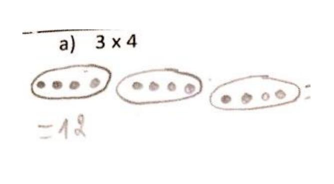
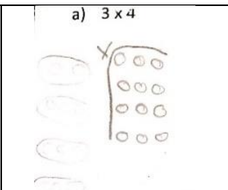
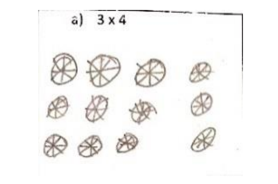
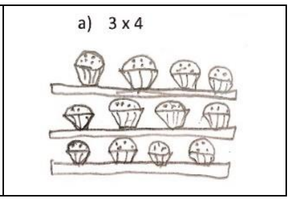
A sua intenção foi, além de conhecer melhor as representações e as transformações, encontrar formas de contrariar a tendência de se sujeitar às representações sugeridas ou induzidas. Decidiu-se por encontrar formas de acrescentar e/ou variar as representações.

Excerto 13: Primeira ilação que a professora retirou para contrariar a tendência de sobrevalorizar as representações simbólicas, em detrimento das restantes (NM2, Apêndice 2).

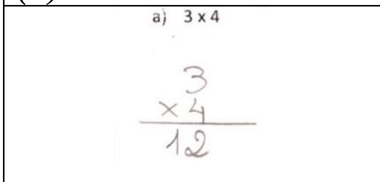
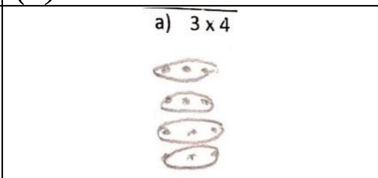
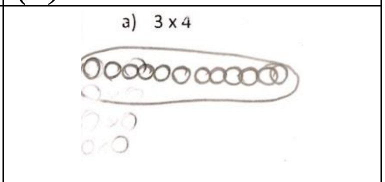
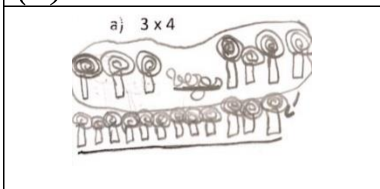
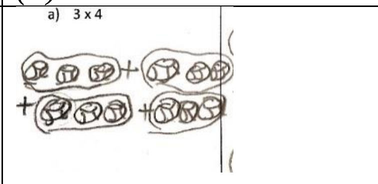
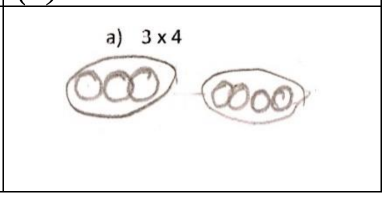
4.3.2 Parte 2 – Teste diagnóstico ao Grupo 2 de participantes no estudo

Com a mudança do ano letivo, o grupo de alunos participantes no estudo também mudou e tivemos necessidade de medir o quanto familiarizados estavam estes alunos com as diferentes representações matemáticas, especificamente, as representações simbólicas, verbais e visuais. Para cada uma das perguntas, a começar pela primeira (Excerto 14), os resultados do teste aplicado (ver subsecção 3.8.2) foram os seguintes:

- *Seis alunos representaram visualmente o produto com correção.*

- *Dois alunos representaram numericamente, através de um algoritmo vertical (A)*
- *Dois alunos representaram visualmente* 4×3 *(B)*
- *Dois alunos representaram visualmente o resultado (C)*
- *Três alunos fizeram uma representação visual literal da expressão numérica (D)*
- *Um aluno transformou o produto* 3×4 *na soma* $3 + 3 + 3 + 3$ *e representou-a visualmente (E)*
- *Um aluno representou visualmente os números, mas não a operação (F)*

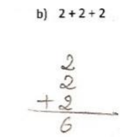
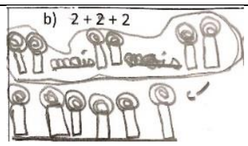
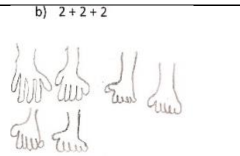
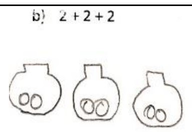
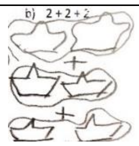
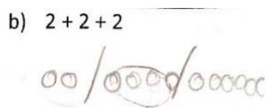
(A)	*(B)*	*(C)*
		
(D)	*(E)*	*(F)*
		

m

Excerto 14: Resposta à pergunta 1.a) do teste (NM2, Apêndice 2)

Na representação visual de um produto (pergunta 1.b) do teste), verificou-se diversidade nas respostas dos alunos relativamente ao que tinham de fazer. Tal diversidade mostra uma determinada liberdade no entendimento sobre representação visual, como se pode ver pela diversidade de respostas e de representações presentes no Excerto 15.

- *Dois alunos representaram numericamente, através de um algoritmo vertical (G)*
- *Três alunos fizeram uma representação visual literal da expressão numérica (H)*
- *Três alunos representaram visualmente o resultado (I)*
- *Cinco alunos representaram visualmente os números em 3 conjuntos de 2 elementos, mas não a operação (J)*
- *Três alunos representaram a soma visualmente com três conjuntos com 2 elementos colocando o sinal + entre os conjuntos (K)*
- *Um aluno representou visualmente a soma acumulada das três parcelas (L)*

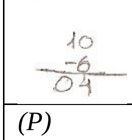
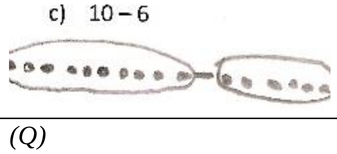
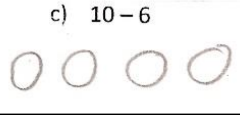
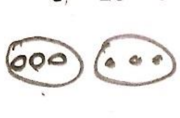
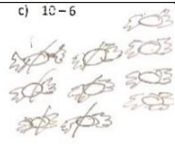
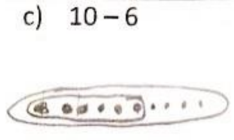
(G)	*(H)*	*(I)*
		
(J)	*(K)*	*(L)*
		

m

Excerto 15: Resposta à pergunta 1.b) do teste (NM2, Apêndice 2)

O Excerto 16 mostra exemplos de respostas à pergunta 1.c).

- *Dois alunos representaram numericamente, através de um algoritmo vertical (M)*
- *Sete alunos fizeram uma representação visual literal da expressão numérica (N)*
- *Um aluno representou visualmente o resultado (O)*
- *Um aluno fez uma representação visual incompreensível da situação (P)*
- *Seis alunos representaram a subtração visualmente(Q)*

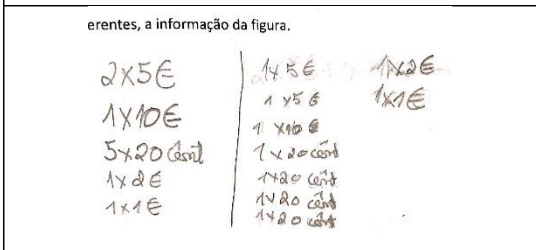
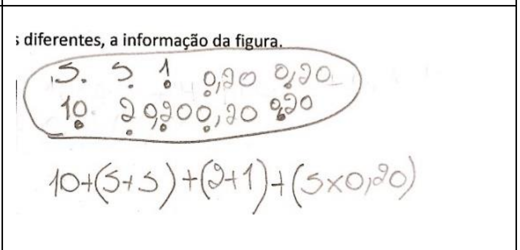
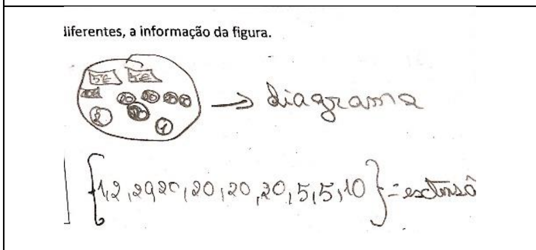
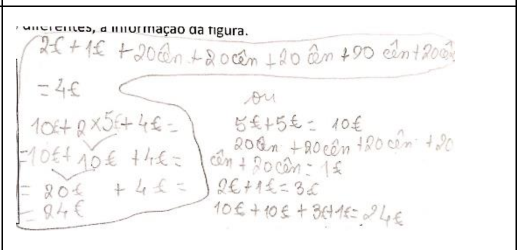
(M)	*(N)*	*(O)*
		
(P)	*(Q)*	
		

mm

Excerto 16: Resposta à pergunta 1.c) do teste (NM2, Apêndice 2)

As respostas à pergunta 2. (Excerto 17) confirmam os resultados encontrados na resposta à pergunta anterior, apesar de esta pergunta envolver uma operação (subtração) em que os alunos manifestam mais dificuldades.

- *Um aluno não representou a situação de nenhuma forma*
- *Seis alunos representaram de uma só maneira*
- *Treze alunos usaram uma representação numérica como primeira representação*
- *Dois alunos usaram o Diagrama de Vem como primeira representação*
- *Sete alunos consideraram representar de forma diferente, desde que as expressões numéricas fossem diferentes (R)*
- *Três alunos usaram um diagrama de Venn como uma das representações (S e T) – influência da abordagem feita no 5.º ano*
- *Dois alunos usaram a representação em extensão com chavetas (T) – influência da abordagem feita no 5.º ano*
- *Um aluno utilizou pequenos sinais para representar a prioridade das operações na resolução de expressões numéricas – influência da abordagem feita no 5.º ano*

(R)	(S)
	
(T)	(U)
	

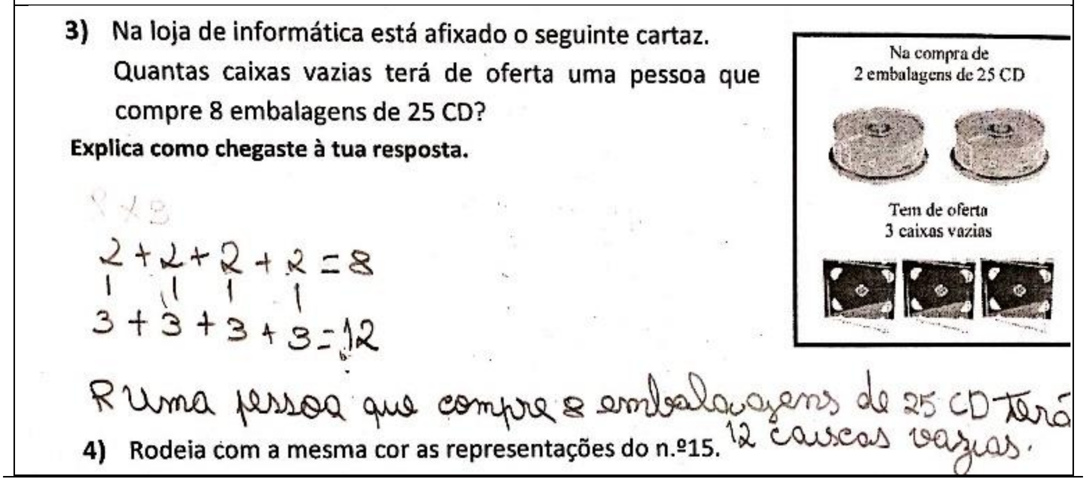
Excerto 17: Resposta à pergunta 2. do teste (NM2, Apêndice 2)

As respostas à pergunta 3. (Excerto 18) evidenciam uma confusão entre representações diferentes e estratégia diferente, não sendo elucidativas relativamente à distinção feita pelo aluno.

Também revelam a utilização de representações (diagrama de *Venn* e representação em extensão) de conjuntos que já são influência das representações utilizadas nas aulas no início do ano letivo e da Fase 2 deste estudo de investigação. Com efeito, este teste foi aplicado três semanas depois do início das aulas, respeitando a decisão tomada em grupo disciplinar de que os testes de diagnóstico seriam aplicados decorrido algum tempo após o início das aulas, para dar tempo aos alunos de se adaptarem às características da vida escolar no 2.º Ciclo.

- *Dos dez alunos que apresentaram a resposta correta:*
    - *Oito utilizaram uma representação numérica combinada com uma representação visual – esquema (V)*
    - *Dois alunos usaram uma representação numérica*
- *Os sete alunos que não resolveram bem o exercício utilizaram uma representação numérica*

(V)



3) Na loja de informática está afixado o seguinte cartaz.
Quantas caixas vazias terá de oferta uma pessoa que compre 8 embalagens de 25 CD?
Explica como chegaste à tua resposta.

$2+2+2+2=8$

$3+3+3+3=12$

R Uma pessoa que compre 8 embalagens de 25 CD terá 12 caixas vazias.

4) Rodeia com a mesma cor as representações do n.º15.

Excerto 18: Resposta à pergunta 3. do teste (NM2, Apêndice 2)

É provável que os alunos já conhecessem este tipo de exercício ou este mesmo, pois este exercício foi retirado de uma prova de aferição. O seu conhecimento explicaria o número de alunos que utilizaram um esquema para o resolver, pois este é um tipo de exercício que se pode resolver utilizando esse tipo de representação, e para o qual há uma certa sensibilidade dos professores para o explorar.

As respostas à pergunta 4. estão agrupadas segundo as categorias formadas (Excerto 19).

- *Três alunos rodearam todas as representações do n.º 15*
- *Um aluno selecionou uma das cinco representações do n.º 15*
- *Um aluno não selecionou a imagem com as bolas pretas*
- *Um aluno não selecionou a soma de cinco parcelas iguais a 3*
- *Três alunos selecionaram três das cinco representações do n.º 15*
- *Quatro alunos selecionaram quatro das cinco representações do n.º 15*
- *Quatro alunos não selecionaram a expressão 'O triplo de cinco'*
- *Sete alunos não selecionaram a expressão 'O quíntuplo de três'*
- *Dois alunos selecionaram 15:5=3 como representação de 15*
- *Cinco alunos selecionaram a imagem com as bolas brancas como não representando o n.º 15*
- *Doze alunos representaram a imagem com as bolas brancas como representando o n.º 15.*

Excerto 19: Resposta à pergunta 4. do teste (NM2, Apêndice 2)

O Excerto 20 sintetiza a informação que retirámos de todas as respostas a este teste de diagnóstico.

Reconheci algumas das representações já usadas durante este ano letivo: O diagrama de Venn (usado por dois alunos), a escrita de um conjunto em extensão, com uso de chavetas (usado por dois alunos), a utilização de pequenos sinais para indicar a prioridade das operações durante a resolução de expressões numéricas (usada por um aluno) e os parênteses para dar prioridade a operações que a não teriam numa situação normal (um aluno). O número baixo destas ocorrências mostra a fraca familiarização com que os alunos estavam com estas representações.
Confirmei que, à data, os alunos ainda não tinham reconhecido a equivalência em representações dos três sistemas de representação (verbal, visual e simbólico).
Os alunos utilizaram as representações visuais atribuindo-lhes as mesmas regras sequenciais características das representações verbais e simbólicas.
Confirmei que a utilização de um esquema promoveu o sucesso na resposta ao problema da pergunta 3.

Excerto 20: Síntese da informação retirada das respostas do teste diagnóstico aplicado ao Grupo 2 de participantes neste estudo de investigação (NM2, Apêndice 2)

Depois deste trabalho preparatório, realizado no final do ano x, e da aplicação do teste de diagnóstico, aplicado no início do ano x+1, a professora investigadora organizou uma série de intervenções letivas intermédias para aplicar a partir do início do ano x+1, no sentido de começar a dar resposta à questão de investigação (QI3).

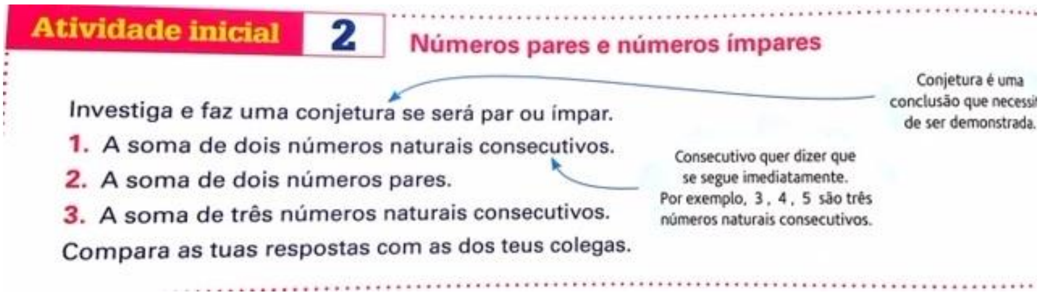
4.3.3 Parte 3 – Os primeiros tratamentos visuais

Do conjunto de intervenções intermédias que a professora investigadora desenvolveu, conseguiu identificar como essencial, em termos de representações, a fase de preparação das suas aulas, com especial destaque para a caracterização das tarefas a explorar.

Conhecer as tarefas do ponto de vista das representações nos seus enunciados, das representações que se espera que os alunos utilizem na sua resolução e as transformações de representações que podem proporcionar, é essencial para garantir um ensino e uma aprendizagem com representações múltiplas.

O Excerto 21 é um exemplo da análise que a professora investigadora fez das tarefas relativamente à identificação do sistema de representação constante nas representações do enunciado das tarefas e uma antevisão das representações usadas pelos alunos nas suas respostas.

Atividade resolvida em grande grupo: "Números pares e números ímpares", p.12. O seu enunciado está escrito numa representação verbal. Espera-se que os alunos utilizem representações numéricas na resposta. O leque de representações é limitado.


Atividade inicial 2 **Números pares e números ímpares**

Investiga e faz uma conjetura se será par ou ímpar.

1. A soma de dois números naturais consecutivos.
2. A soma de dois números pares.
3. A soma de três números naturais consecutivos.

Compara as tuas respostas com as dos teus colegas.

Conjetura é uma conclusão que necessi de ser demonstrada.

Consecutivo quer dizer que se segue imediatamente. Por exemplo, 3, 4, 5 são três números naturais consecutivos.

Excerto 21: Exemplo da análise do enunciado de uma tarefa e tarefa, (NM2, Apêndice 2)

A professora investigadora também identificou algumas situações em que pode enriquecer uma situação de aprendizagem com outras transformações se fizer pequenas alterações às tarefas.

Na sua prática letiva, foi possível enriquecer as tarefas que se selecionam, acrescentando outro(s) tipo(s) de representação. O Excerto 22 mostra uma sugestão a que o professor pode atender durante a fase de exploração de determinada tarefa, sugerindo a elaboração da resposta num sistema de representação diferente dos sistemas que a tarefa propõe.

Esta foi a primeira mudança na sua prática.

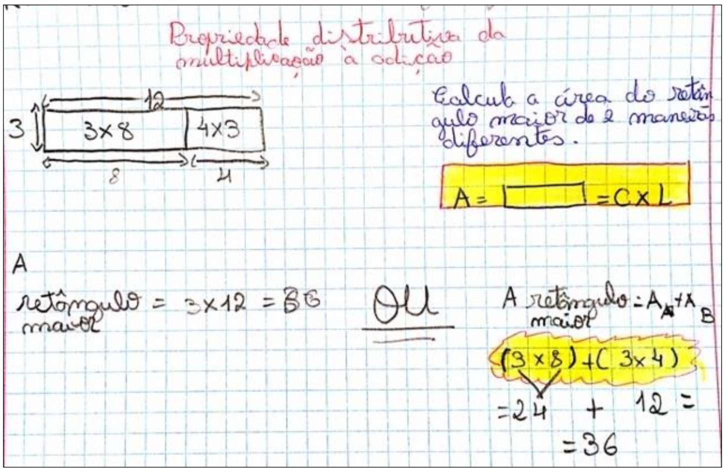
Na síntese das conjeturas, elaboramos um diagrama de Carroll, aumentando o leque de variedade das representações, para uma representação visual.

Excerto 22: Exemplo de alteração de representação na resposta a uma tarefa (NM2, Apêndice 2)

A professora ainda reconheceu a sua preocupação relativamente às representações usadas e exploradas durante as aulas e assegurou-se da identificação das representações que os alunos efetivamente usaram durante a resolução de tarefas e que tipo de transformações de representações realizaram.

O Excerto 23 mostra essa preocupação:

Aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição de números naturais no cálculo de áreas.



Pretendia proporcionar um leque o mais variado possível de representações em diferentes registos. Os alunos usaram representações em três registos: discursivo em linguagem natural, discursivo simbólico (numérico) e não discursivo icónico (figura geométrica). Fizeram tratamentos no registo numérico e icónico e conversões entre os três registos.

Excerto 23: Exemplo de uma atividade com representações múltiplas (NM2, Apêndice 2)

Relativamente ao seu desenvolvimento profissional, a professora passou a conseguir classificar melhor as tarefas no que concerne às representações e transformações de representações, que permitiram identificar mais rapidamente as tarefas que eram mais difíceis de proporcionar uma maior diversidade de representações (Excerto 24).

As tarefas de consolidação são as mais difíceis de variar as representações. Representações numéricas requerem representações numéricas, na maioria das vezes.

Excerto 24: Tipo de tarefa que dificulta o uso de representações múltiplas, (NM2, Apêndice 2)

A professora também percebeu a possibilidade de variar os sistemas de representação utilizados nas respostas, bem como reconheceu algumas situações propícias ao uso de representações visuais (Excerto 25).

É possível resolver um problema nos três registos de representação. As sínteses propiciam o uso de representações visuais.

Excerto 25: Tipos de tarefas que facilitam o uso de representações múltiplas, (NM2, Apêndice 2)

A professora percebeu que o uso de representações múltiplas deve ser frequente, porque os alunos levam tempo para se familiarizarem e se sentirem confortáveis com o seu uso. No entanto, a mecanização não pode ser permitida, pois existe o risco de diminuir o seu impacto (Excerto 26).

Os alunos precisam de tempo para exercitar diferentes representações. No entanto, há o perigo de mecanizarem, se o trabalho for repetitivo. Torna-se necessário equilibrar a sua utilização.

Excerto 26: Cuidados a ter no uso de representações múltiplas, (NM2, Apêndice 2)

A professora confirmou a realização de tratamentos visuais por meio da cor, o que possibilitou a diversificação de representações (Excerto 27).

A introdução da cor pode ser usada nas representações para destacar informação relevante e melhor estabelecer a correspondência entre representações. Diversificar a forma de apresentar a resolução aumenta o leque de representações.

Excerto 27: Utilização da cor como forma de realizar tratamentos visuais, (NM2, Apêndice 2)

A professora concluiu que uma das formas de facilitar o uso de representações múltiplas é dar aos alunos a oportunidade de escolher a representação com que lhes é mais fácil trabalhar e avançar devagar, exigindo depois resoluções noutro tipo de representação (Excerto 28).

Procurar a representação que melhor se adequa pode ser difícil. Numa fase inicial, cada aluno deve poder escolher a representação com que quer trabalhar. Combinação de sistemas de representação podem facilitar a leitura, a escrita e a organização da informação. Representações com elementos de outros sistemas de representação podem ser uma mais valia para o professor.

Excerto 28: Formas de facilitar o uso de representações múltiplas, (NM2, Apêndice 2)

A professora concluiu que a escolha da representação visual mais adequada e o seu uso é característico de cada conteúdo matemático. Também apurou que mudar de conteúdo requer um novo trabalho de análise e autorreflexão (Excerto 29).

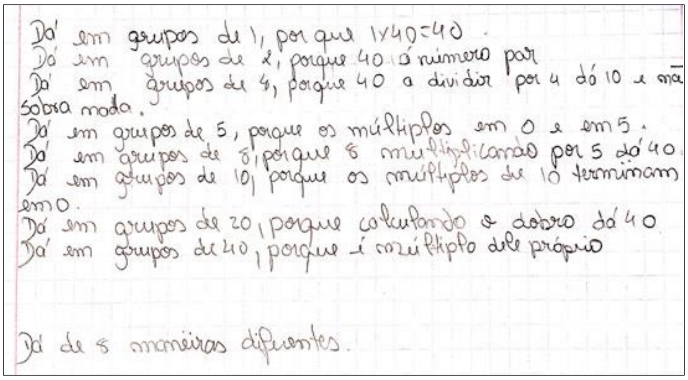
A utilização de representações visuais não é evidente, permite uma grande variedade e a decisão de se escolher a melhor ou a que mais se adequa. Quanto mais se usar mais se usa, pelo menos numa fase inicial de compreensão de algo, que pode ser usada para a definição de um conteúdo (representação visual como signo) ou durante a resolução de um problema (representação visual como artefacto com recurso a tratamentos visuais).

Excerto 29: Adequabilidade de representações visuais aos conteúdos matemáticos (NM2, Apêndice 2)

Parte 4 – A apropriação discente das representações

No final da lecionação do conteúdo Múltiplos e divisores, a professora organizou um trabalho de grupo para que os alunos resolvessem uma tarefa constituída por quatro problemas (ver secção 3.8.2); selecionou as suas respostas de acordo com as representações que usaram nas suas resoluções. Formaram-se quatro grupos, que a professora numerou de 1 a 4.

Para resolver o problema 1), os alunos usaram representações diferentes e a cada representação associou-se uma estratégia diferente. O Grupo 1 usou uma estratégia que combinou regras de divisibilidade e os divisores de 40, com representações verbais (Figura 35).


Dá em grupos de 1, porque 1×40=40.
Dá em grupos de 2, porque 40 é número par
Dá em grupos de 4, porque 40 a dividir por 4 dá 10 e não sobra nada.
Dá em grupos de 5, porque os múltiplos em 0 e em 5.
Dá em grupos de 8, porque 8 multiplicando por 5 dá 40
Dá em grupos de 10, porque os múltiplos de 10 terminam em 0.
Dá em grupos de 20, porque colocando o dobro dá 40
Dá em grupos de 40, porque é múltiplo dele próprio

Dá de 8 maneiras diferentes.

Figura 35: Estratégia usando regras de divisibilidade e os divisores de 40, com representações verbais (NM2, Apêndice 2)

Os alunos do Grupo 2 procuraram os números naturais cujo produto era 40, usando uma representação visual – esquema, (RV-E) como representação final (Figura 36).

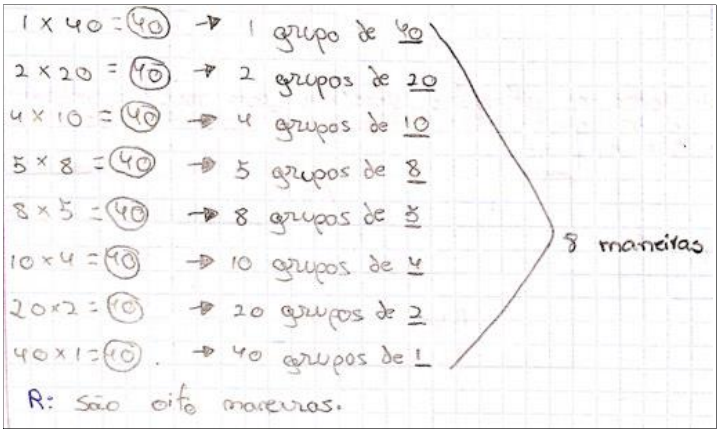


Figura 36: Estratégia usando números naturais cujo produto é 40, com uma representação visual - esquema (NM2, Apêndice 2)

Os alunos do Grupo 3 identificaram os divisores de 40 com uma representação simbólica, RS-N, e responderam com uma representação verbal, RLN, (Figura 37).

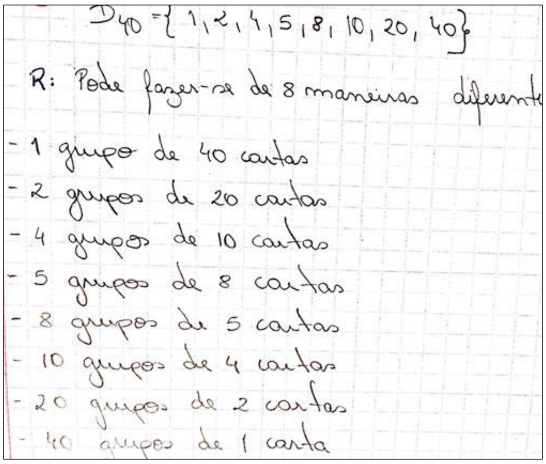


Figura 37: Estratégia usando os divisores de 40, com representações simbólicas e verbais (NM2, Apêndice 2)

Para resolver o problema 2, três grupos decidiram determinar o máximo divisor comum de 48 e de 36. O Grupo 1 usou o algoritmo de Euclides com uma representação visual-tabela (RV-T) (Figura 38, à esquerda), procedimento aprendido no ano letivo anterior. O Grupo 3 e o Grupo 4 fizeram a decomposição em fatores primos e aplicaram a regra “produto dos fatores comuns de menor expoente” (Figura 38, à direita), usando duas representações: uma representação visual-tabela (RV-T) para a divisão e uma representação visual-esquema (RV-E) para a resposta. Os três grupos também usaram representações simbólicas (RS).

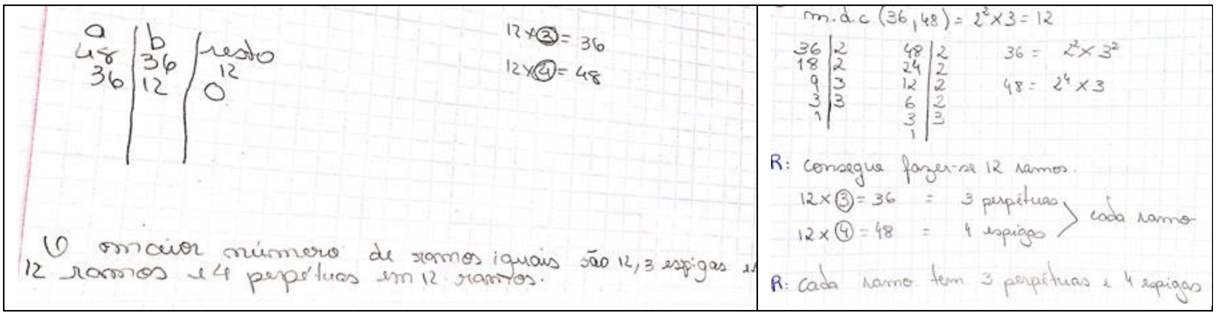


Figura 38: Estratégia usando o m.d.c. (48, 36), com o algoritmo de Euclides (à esquerda) e fatorização em números primos (à direita), com representações visuais e simbólicas (NM2, Apêndice 2)

Os alunos do Grupo 2 descobriram que o número de ramos tinha de ser um número par, 12, mas demonstraram muitas dificuldades com o algoritmo da divisão. Eles usaram os critérios de divisibilidade por 2, 4, 6, 8, 10 e 12 como estratégia; usaram uma representação verbal, RLN, para justificar o seu raciocínio, e uma representação simbólica, RS-N, para efetuarem os cálculos. As dificuldades que demonstraram forçaram à intervenção da professora. Ela sugeriu o desenho dos ramos, o que fizeram (Figura 39) e que serviu à representação final na resposta deste grupo de alunos.

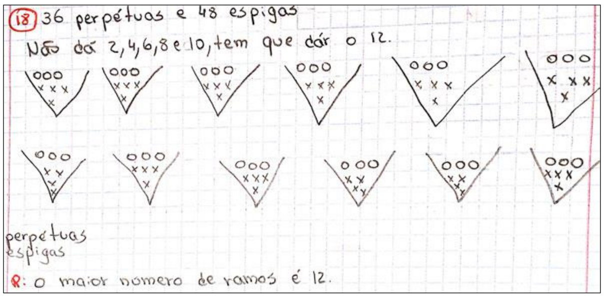


Figura 39: Estratégia usando a representação visual sugerida pela professora em virtude das dificuldades dos alunos com os procedimentos de cálculo (NM2, Apêndice 2)

Para resolver o Problema 3.i), todos os grupos determinaram o mínimo múltiplo comum de 9 e 15 (m.m.c. (9, 15)) com representações simbólicas (RS-N). Os alunos do Grupo 3 decompuseram 9 e 15 em fatores primos (RV-T) e aplicaram a regra “produto dos fatores primos não comuns e comuns de maior expoente” (Figura 40, à esquerda); os alunos dos Grupos 1, 2, e 4 identificaram os múltiplos comuns e, destes, selecionaram o menor (Figura 40, à direita).

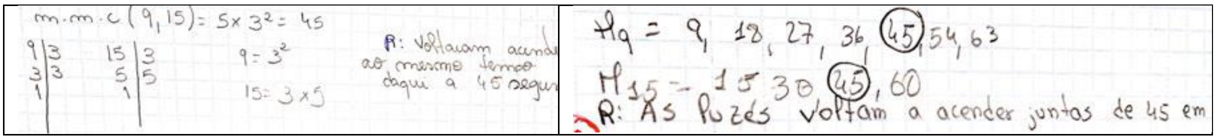


Figura 40: Representações simbólicas na estratégia do m.d.c. com fatorização em fatores primos (à esquerda) e múltiplos de 9 e 15 (à direita) (NM2, Apêndice 2)

Para resolver o Problema 3.ii), os alunos usaram como estratégia: (i) diferença entre a meia-noite e a primeira hora em que as luzes se ligaram juntas; (ii) equivalência de valores em horas e minutos para segundos; (iii) divisão desse valor pelo m.m.c.. Os alunos usaram principalmente representações simbólicas, RS-N, (Figura 41).

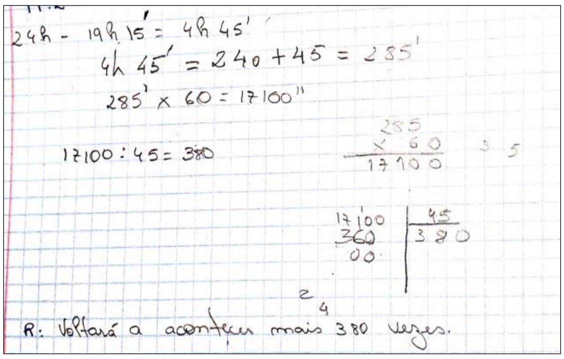


Figura 41:Estratégia com representações simbólicas (NM2, Apêndice 2)

Os alunos também usaram representações visuais, um esquema simples (RV-E) (Figura 42) no algoritmo e na correspondência entre as unidades de tempo (minuto, segundo e hora).

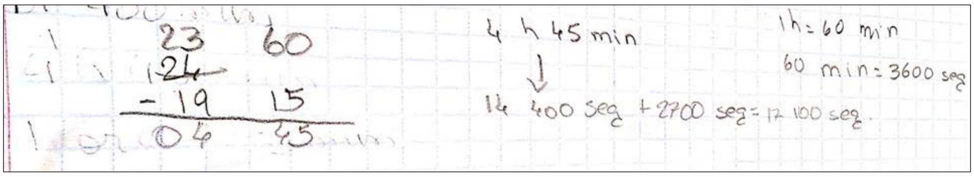


Figura 42: Estratégia usando representações visuais – esquema simples no algoritmo da subtração, (NM2, Apêndice 2)

Para resolver o Problema 4, todos os grupos construíram retângulos usando representações visuais figurativas, RV-F, como sugerido. Todos os grupos identificaram os divisores de 48, mas nenhum dos alunos o reconheceu. Para isso, a professora sugeriu que os escrevessem por ordem crescente, e eles usaram uma representação simbólica, RS-N (Figura 43).

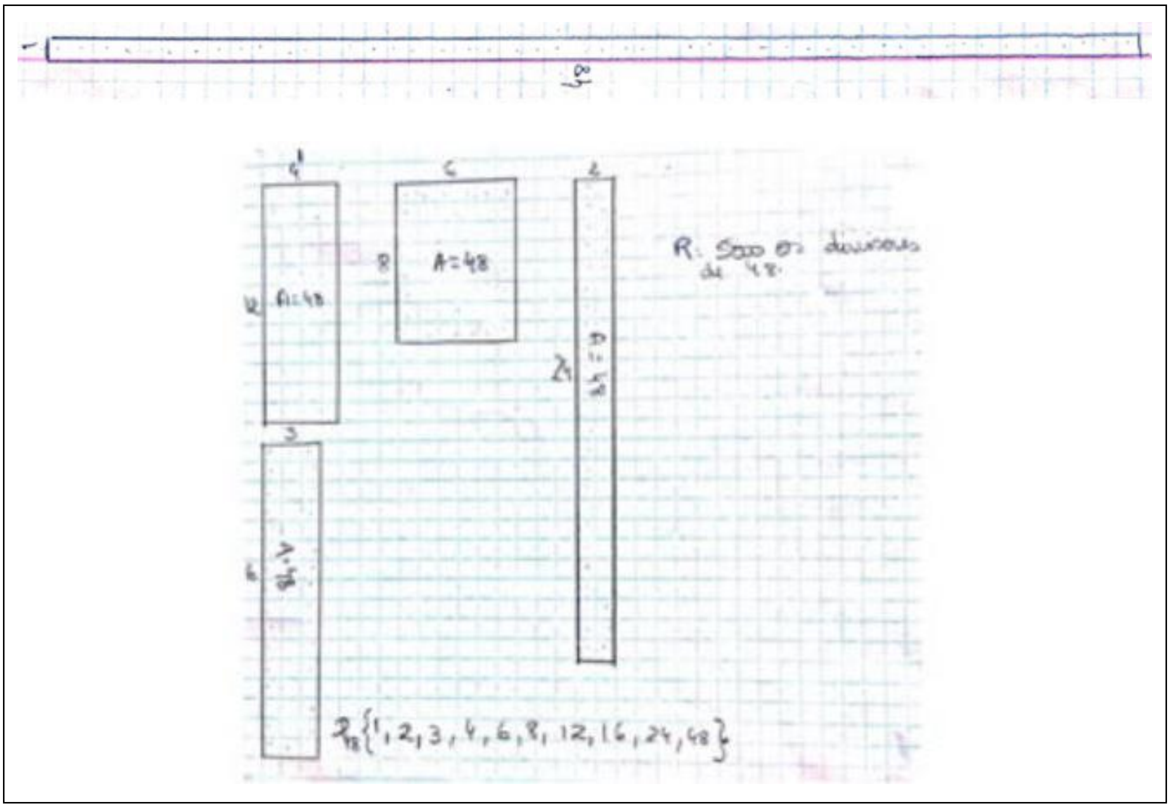


Figura 43: Estratégia com representações visuais de retângulos e representações simbólicas, (NM2, Apêndice 2)

4.3.4 Parte 5 – Um estudo comparativo

A Tabela 14 sumariza os resultados do teste (ver Secção 3.8.2) do primeiro momento de aplicação (M1) para o segundo (M2).

Tabela 14: Resultados do teste dos Grupos A e B, nos dois momentos de aplicação

M1→M2	Grupo A ($n = 18$)	Grupo B ($n = 17$)
Correto → Correto	6	10
Correto → Incorreto	2	3
Correto → Não responde	2	-
Incorreto → Correto	3	2
Incorreto → Incorreto	1	1
Incorreto → Não responde	4	-
Não responde → Correto	-	1

No Grupo A, da primeira para a segunda aplicação, ocorreram as situações seguintes:

– Cinco dos seis alunos que responderam corretamente nos dois momentos, mantiveram a representação simbólica (RS-N) da primeira para a segunda aplicação (Figura 44) destacando o número com um círculo à volta.

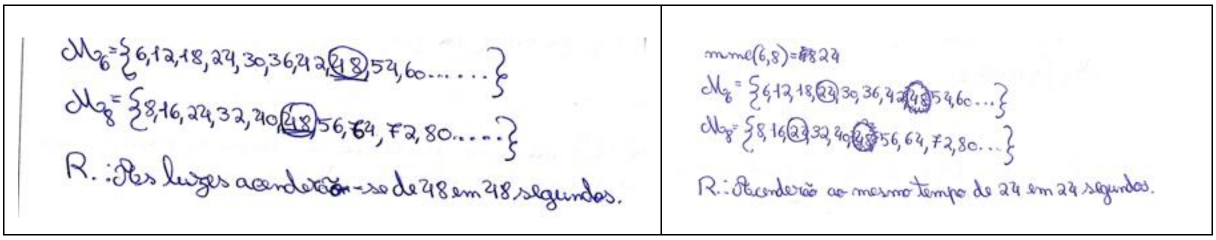


Figura 44: Representações simbólicas, nos dois momentos de aplicação, M1 e M2, Grupo A

Um aluno mudou a representação visual, esquema, RV-E, feito na primeira aplicação para uma representação simbólica na segunda aplicação (Figura 45).

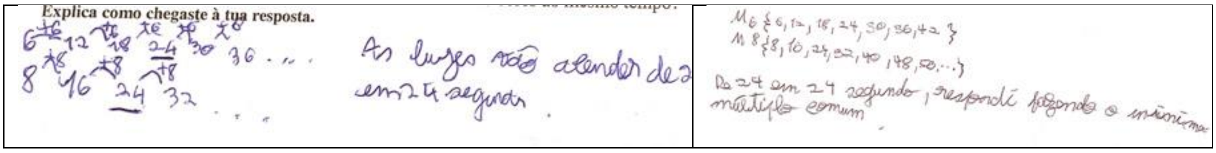


Figura 45: Representação visual (RV-E) em M1 e representação simbólica (RS-N) em M2, Grupo A

– Dois dos quatro alunos que responderam corretamente na primeira aplicação usando representações simbólicas (RS-N) responderam incorretamente na segunda, e os outros dois não responderam.

– Os três alunos que responderam incorretamente na primeira aplicação usando representações simbólicas (RS-N), responderam corretamente na segunda com representações do mesmo tipo (RS-N).

– Quatro dos cinco alunos responderam incorretamente na primeira aplicação com representações simbólicas (RS-N), e um usou representações verbais (RLN); na segunda aplicação, um respondeu incorretamente com uma representação numérica e quatro não responderam.

No Grupo B da primeira aplicação para a segunda, ocorreram as seguintes situações:

– Dez alunos responderam corretamente da primeira aplicação para a segunda. Quatro deles mantiveram a representação simbólica (RS-N) da primeira aplicação para a segunda (Figura 46) com um tratamento visual (círculo à volta do número 24) para destacar o m.m.c. (6, 8).

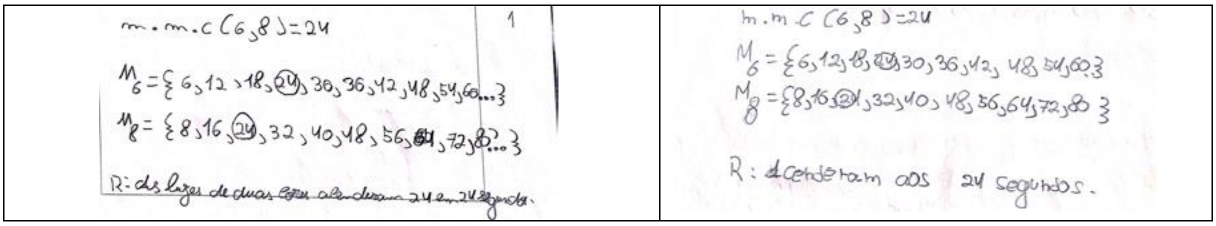


Figura 46: Representações simbólicas (RS-N) nos dois momentos, Grupo B

Quatro alunos mantiveram a representação visual, reta numérica, da primeira para a segunda aplicação (Figura 47) com tratamentos diferentes, mas ambos visuais.

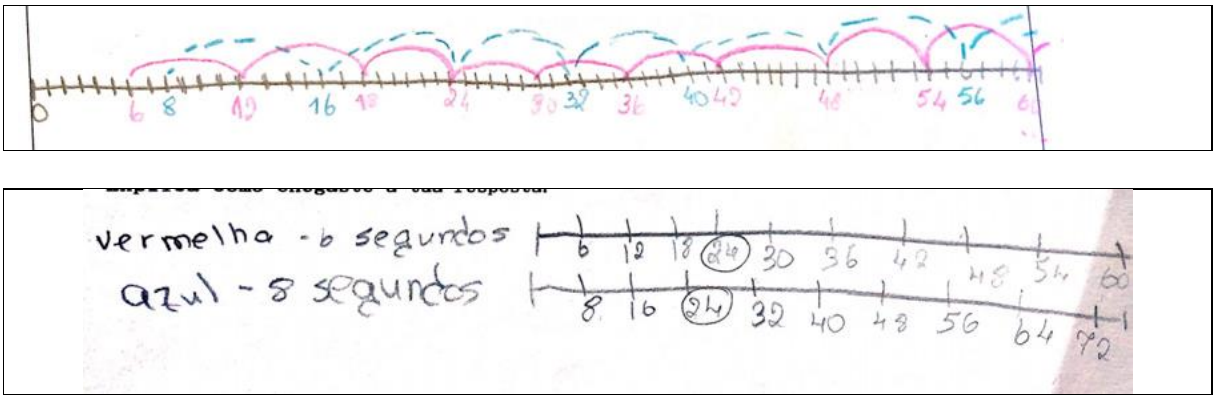


Figura 47: Representação visual, reta numérica, nos dois momentos, Grupo B

Dois alunos usaram uma representação visual, reta numérica, (Figura 48, à esquerda) na primeira aplicação e mudaram para uma representação simbólica, RS-N, na segunda aplicação (Figura 48, à direita).

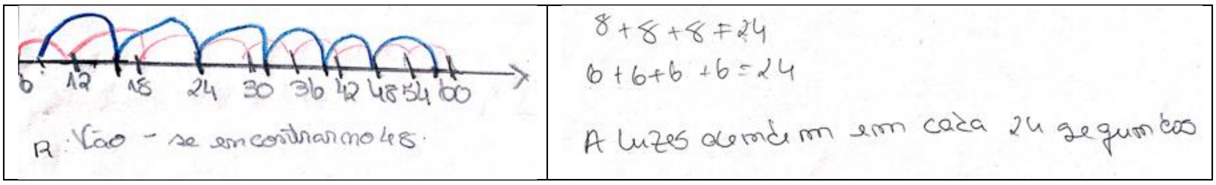


Figura 48: Representação visual, M1, para representação simbólica no M2, Grupo B

Dois alunos foram bem-sucedidos na primeira aplicação (Figura 49, à esquerda) com uma representação visual e ambos falharam na segunda aplicação (Figura 49, à direita) usando a mesma representação.

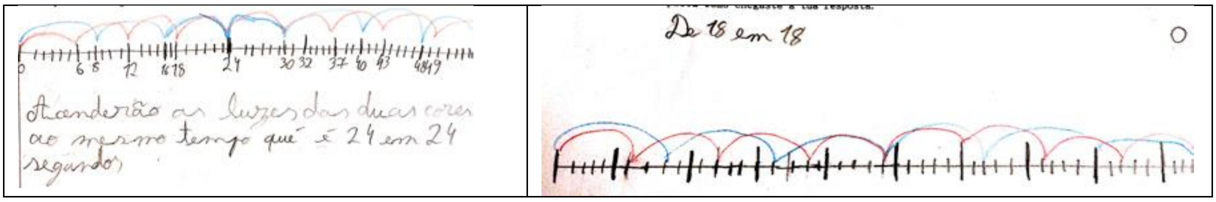


Figura 49: Representação visual, reta numérica, Grupo B

Um aluno não foi bem-sucedido nos dois momentos de aplicação com uma representação visual, reta numérica (Figura 50).

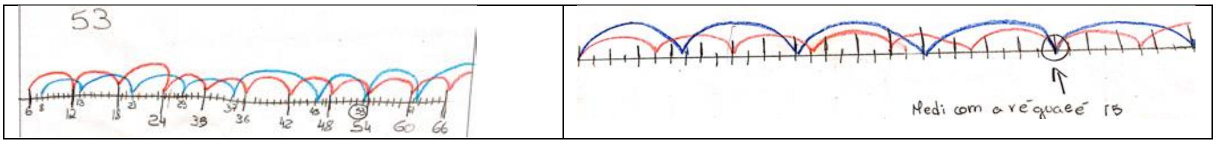


Figura 50: Representação visual, reta numérica, Grupo B

Dois alunos não foram bem-sucedidos na primeira aplicação com uma representação visual (Figura 51, à esquerda) e foram bem-sucedidos na segunda aplicação, com uma representação simbólica (Figura 51, à direita).

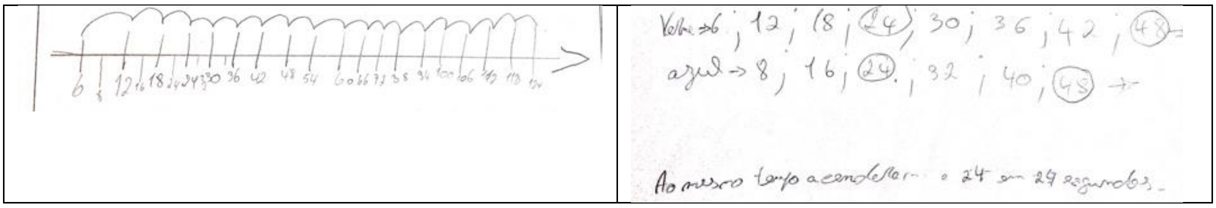


Figura 51: Representação visual, reta numérica no M1, e representação simbólica no M2, Grupo B

Um aluno foi bem-sucedido na primeira aplicação com uma representação simbólica (Figura 52, à esquerda) e malsucedido na segunda aplicação, com uma representação visual (Figura 52, à direita).

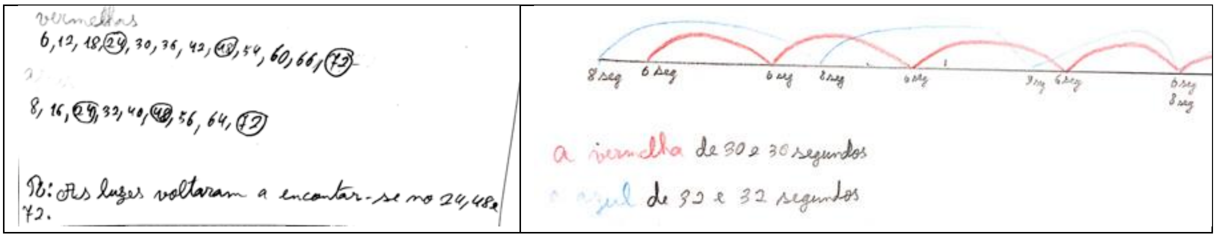


Figura 52: Representação simbólica em M1 e representação visual em M2, Grupo B.

Um aluno não respondeu na primeira aplicação e respondeu corretamente na segunda com uma representação visual, reta numérica, depois de várias tentativas (Figura 53).

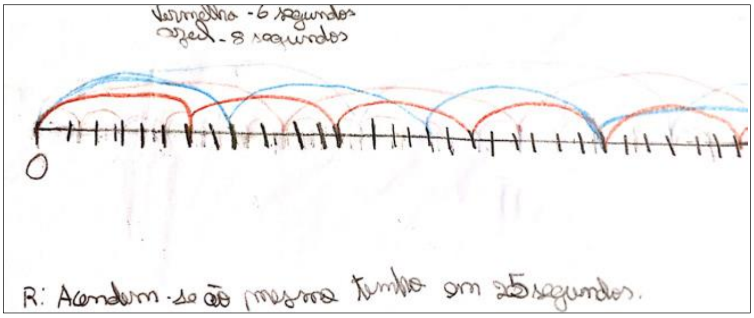


Figura 53: Evidência de dificuldades na representação visual, Grupo B

As dificuldades encontradas na representação visual, reta numérica, nas respostas do Grupo B foram:

- Mínimo múltiplo comum não selecionado (Figura 48, à esquerda).

- Erros de contagem nas marcas dos múltiplos (Figura 50, à esquerda e Figura 53).

- Confusão na escala de números na reta numérica (Figura 50, à direita).

- Não utilização de duas cores diferentes para os múltiplos de dois números (Figura 51, à esquerda).

- Não reconhecimento da escala correta na reta numérica (Figura 52, à direita).

Os alunos do Grupo A usaram representações simbólicas e visuais na resolução do problema nos dois momentos de aplicação. Um aluno do Grupo A usou uma representação visual, um esquema, na primeira aplicação. Os alunos do Grupo B usaram representações simbólicas e visuais.

No caso das transformações de representações, o Grupo A realizou tratamentos sem

(Figura 44) e com mudança do sistema de representação dominante (Figura 45). Os alunos deste grupo fizeram conversões do enunciado do problema, em linguagem natural, para representações simbólicas (Figura 44) e uma para representações visuais. Os alunos do Grupo B fizeram tratamentos sem mudança do sistema de representação dominante em representações simbólicas e em visuais. Os alunos do grupo B converteram representações em linguagem natural para simbólica, e para linguagem visual (esquema e reta numérica).

4.3.5 Parte 6 – Construção discente de uma tabela

Os alunos estavam a iniciar a aprendizagem do conteúdo *Triângulos e paralelogramos*. A aula tinha o objetivo de consolidar a classificação de triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos. A tarefa requeria que os alunos usassem uma tabela para representar este conceito geométrico. Numa das aulas anteriores, tinham construído o esquema seguinte (Figura 54).

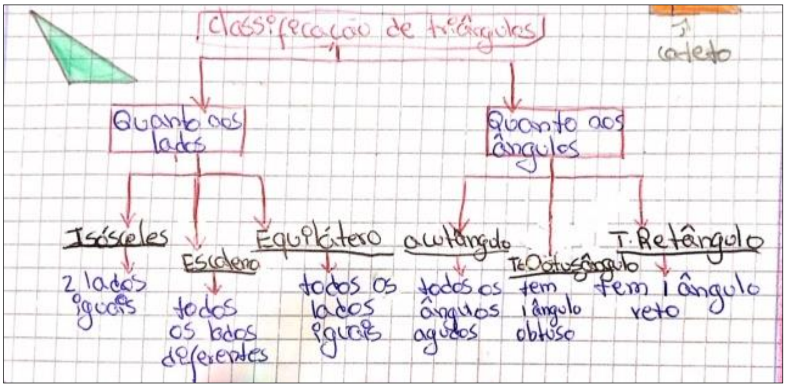


Figura 54: Esquema elaborado numa aula anterior e disponível para consulta durante a resolução da tarefa

Numa das aulas seguintes, a professora apresentou a tarefa cujo enunciado combina uma representação em linguagem verbal com uma representação visual, figurativa (Figura 55).

Q1: Constrói uma tabela para classificar cada um dos triângulos das figuras seguintes, relativamente aos lados e aos ângulos.

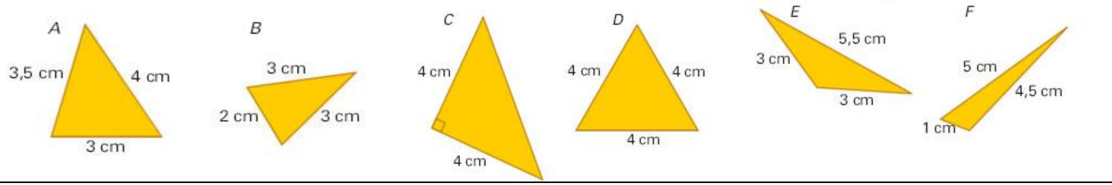


Figura 55: Questão apresentada aos alunos (Neves, & Faria, 2013)

A atividade foi planeada para 15 minutos e desenvolvida para trabalho individual. Os alunos podiam consultar o livro e o caderno diário. No entanto, mostraram insegurança, da qual a professora se apercebeu pelo tempo que estavam a demorar a começar a escrever. Para ultrapassar esta situação, a professora consciencializou os alunos de que estavam na posse de todas as ferramentas necessárias para realizar a tarefa com sucesso, isto é, consciencializou-os de que sabiam o que era uma tabela e classificar triângulos. Também lhes lembrou que podiam consultar o caderno diário e o livro para procurarem a informação de que necessitassem.

Começamos por analisar os registos escritos dos alunos, tendo classificado todas as tabelas de ‘adequadas’ (ver Secção 3.9). Na primeira categoria, encontramos 15 ocorrências e na segunda categoria, duas. Algumas das tabelas da primeira categoria tinham informação adicional, como por exemplo, o perímetro, representações figurativas dos triângulos ou as medidas dos seus lados. Na primeira categoria, o procedimento habitual foi a construção da tabela com três colunas, com ou sem as linhas horizontais e verticais de divisão das células. A Figura 56 mostra um exemplo desta categoria sem linhas de divisão e com inclusão de informação adicional (perímetro).

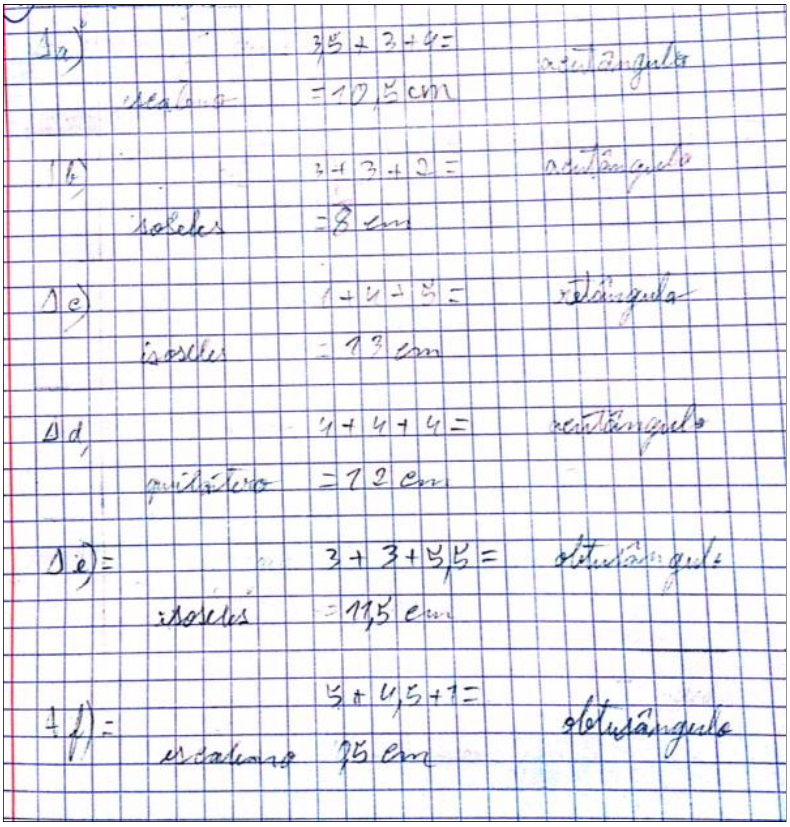


Figura 56: Exemplo de uma tabela da primeira categoria sem linhas de separação das células e com informação adicional (perímetro)

Das 15 tabelas desta categoria, 14 têm um título nas colunas.

Os alunos usaram expressões como *Triângulo*, *Classificação quanto aos seus lados* e *Classificação quanto aos seus ângulos.*

Uma delas incluiu uma coluna com o desenho do triângulo (Figura 57).

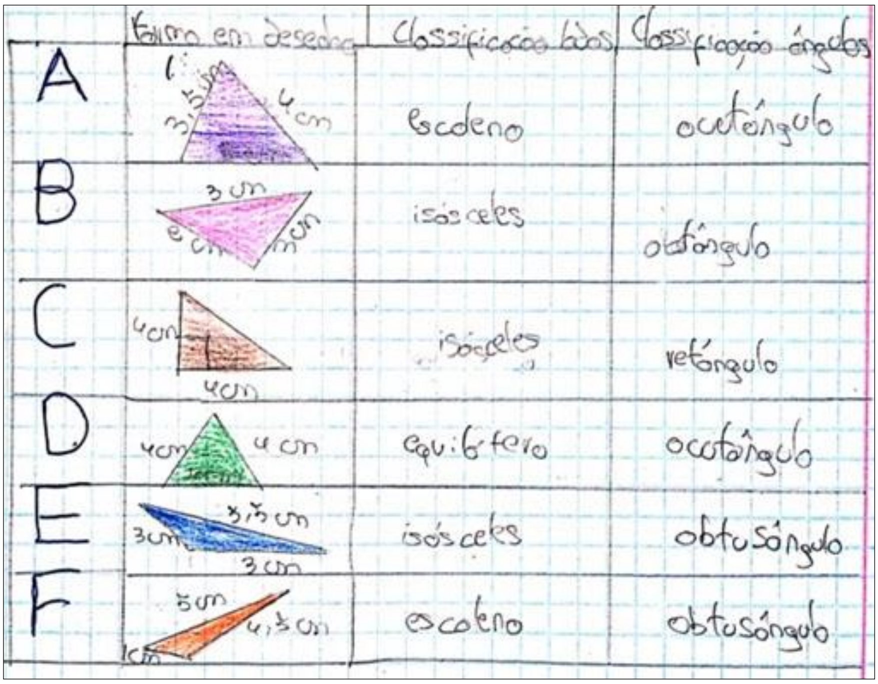


Figura 57: Exemplo de uma tabela da primeira categoria com títulos nas colunas, com linhas de separação das células e com informação adicional (desenho dos triângulos e medida dos lados)

Nesta categoria, encontrámos uma tabela na qual o aluno considerou sete colunas e construiu a tabela com a mesma organização na linha com informação adicional relacionada com a medida dos lados dos triângulos (Figura 58).

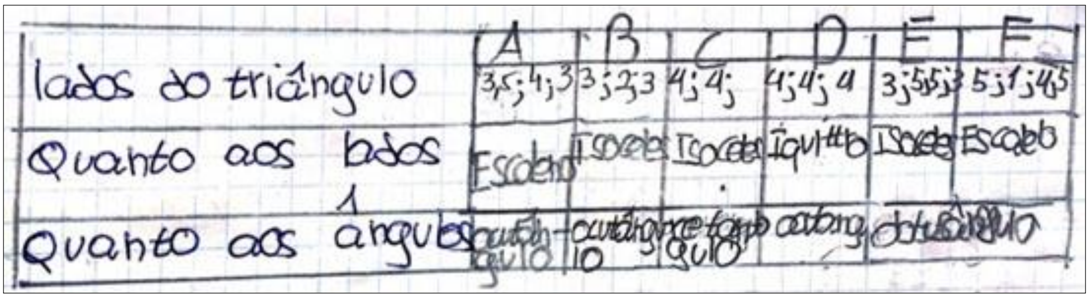


Figura 58: Exemplo de uma tabela da primeira categoria com títulos e colunas, com linhas de separação entre as células e com informação adicional (medidas dos lados dos triângulos)

Na segunda categoria (C2) encontramos duas tabelas. Ambas são tabelas construídas por outras duas justapostas. Os alunos construíram a tabela com duas colunas (ou três linhas), de acordo com a classificação dos triângulos quanto aos seus lados e quanto aos seus ângulos. Eles utilizaram a letra identificativa do triângulo para relacionar cada um na célula respetiva (Figura

59 e Figura 60).

Figura 59: Exemplo de uma tabela da categoria C_2 constituída por duas tabelas justapostas (vertical), mas as variáveis podem ser relacionadas.

A tabela da Figura 60 tem uma incorreção, mas não a consideramos por ser irrelevante para o nosso estudo.

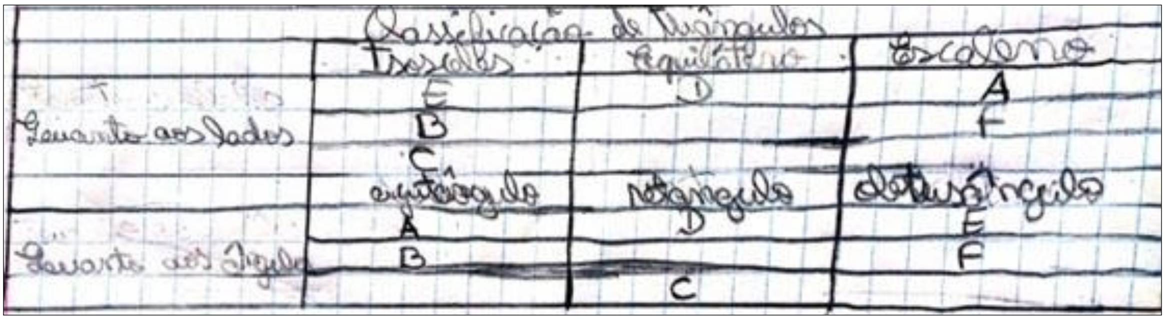
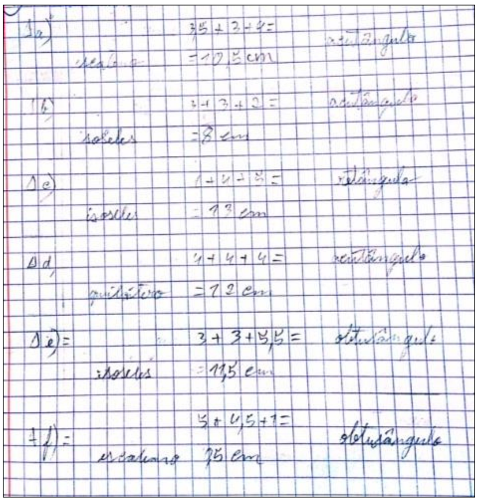
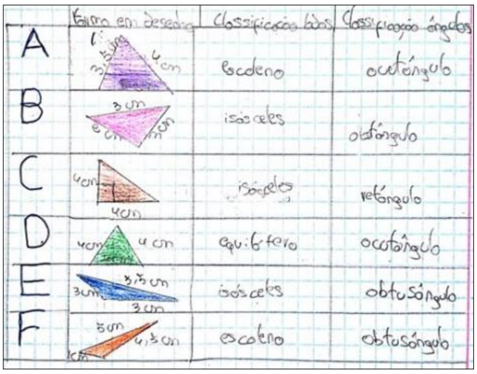
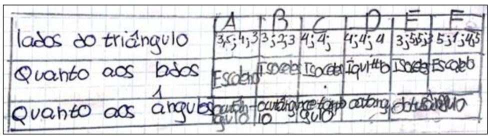
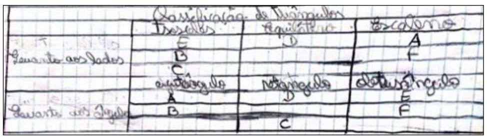


Figura 60: Exemplo de uma tabela da categoria C_2 constituída por duas tabelas justapostas (horizontal), mas as variáveis podem ser relacionadas

Oito dias depois da resolução desta tarefa, a professora organizou uma discussão coletiva para analisarem as tabelas e identificarem os pontos fortes e pontos fracos, e formas de melhoria, das cinco tabelas que a professora selecionou. Os alunos reconheceram que a tabela é uma forma prática de organizar a informação numa resposta.

Os alunos referiram os pontos fortes e fracos presentes em cada uma das tabelas selecionadas pela professora investigadora. Estes estão registados na Tabela 15.

Tabela 15: Pontos fortes e pontos fracos das tabelas, referidos pelos alunos

Tabela		Pontos fortes	Pontos fracos
Primeira categoria		Inclui informação adicional (perimetro). Bem organizada, apesar de não ter linhas.	Não tem linhas
		Bem organizada. Os desenhos tornam a informação mais clara.	-
		-	Letra ilegível. Escrita fora das margens. “*Está tudo muito apertadinho.*”
Segunda categoria		Bem organizada, Letra legível.	Retângulos pequenos. A organização podia ser melhor.
		Bem organizada.	Tamanho das células muito pequeno. A organização podia ser melhor.

Em termos de transformações de representações, a introdução da tabela tornou possível o aumento do número e da qualidade das transformações de representações. Com efeito, os alunos começaram por uma representação em linguagem natural (enunciado da tarefa) e duas representações visuais: figurativa (Figura 55) e esquema (Figura 54), que foram transformados numa representação visual (tabela). Quando os alunos responderam à tarefa, através da tabela, fizeram tratamentos simbólicos e/ou visuais. Um exemplo de cada um é o cálculo do perímetro e o desenho dos triângulos. Eles também fizeram conversões: (i) de representações figurativas dos triângulos para a sua classificação em linguagem natural; (ii) de representações simbólicas e sua classificação para linguagem natural.

4.3.6 Parte 7 – Caracterização de práticas docentes

Os três professores entrevistados e a professora investigadora trabalham em conjunto há vários anos, tendo participado juntos em projetos e realizado formação semelhante na área da Matemática.

Tivemos como propósito desta entrevista conhecer: (i) as representações mais valorizadas e mais usadas pelos entrevistados e se coincidiam, ou não, umas com as outras (averiguação de factos); (ii) as suas opiniões, sentimentos e motivações relativamente ao uso especificamente de representações visuais, com exemplificação para a docência de um conteúdo específico (*Áreas de figuras planas. Perímetros e áreas*); (iii) as atitudes e decisões sobre o uso de determinada representação, com relevo para as visuais.

Os três entrevistados referiram utilizar representações visuais como apoio ao ensino e à aprendizagem. Reconheceram o valor das representações visuais principalmente para a visualização, colocando-as mais ao nível das representações internas pela sua utilização de forma abstrata. Pelos dados recolhidos, as concretizações mais comuns fazem-se através de exercícios de completamento de tabelas e gráficos nos diversos conteúdos matemáticos. Embora constatem a existência de representações diferentes para o mesmo objeto matemático, reconhecem que valorizam todas as representações, mas utilizam mais as representações simbólicas e as verbais.

> *Valoriza mais as representações simbólicas e gráficas, gostando de trabalhar muito a linguagem simbólica.*
> *Trabalha muito a linguagem simbólica traduzindo da linguagem natural para a linguagem simbólica.*
> *Habitualmente cinge-se às representações que os exercícios sugerem. A representação que usa mais vezes é a simbólica, mas (…) nunca limita os alunos na resolução, desde que esteja correto.*
> *O Professor B sente que os alunos têm dificuldade em verbalizar o que pensam. Esta dificuldade manifesta-se também na escrita.*
>
> Professor B, NM2, Apêndice 2

Quando resolvem os exercícios, os alunos utilizam predominantemente o cálculo algébrico.
Os alunos escolhem a via mais fácil e as representações mais fáceis, e numericamente é mais fácil, apesar de apresentarem dificuldades na escrita matemática.
A representação que os alunos mais valorizam é a representação simbólica sendo também a que mais utilizam.

Professor C, NM2, Apêndice 2

No que respeita à utilização de representações múltiplas, o Professor C faz referência e reconhece que é necessária preparação para a sua utilização no ensino e na aprendizagem. Há também evidência de incompreensão sobre as razões que levam os alunos ao não reconhecimento de equivalência de representações, mesmo quando o professor insiste na sua equivalência.

O professor C reconhece que utilizar as três linguagens (simbólica, verbal e visual) no ensino e na aprendizagem requer preparação.
Considera que só compreendemos melhor quando somos capazes de resolver de muitas formas diferentes, e também com linguagens diferentes. Também refere que hoje percebemos coisas que julgávamos que já sabíamos antes, mas efetivamente só agora as compreendemos. Não compreende por que razão os alunos consideram que as representações que se utilizam, por exemplo, nas funções (diagrama, tabela, gráfico, expressão algébrica) são diferentes, quando, na realidade, os professores frisam várias vezes que são representações equivalentes.

Professor C, NM2, Apêndice 2

Quanto às representações visuais, os professores entrevistados reconheceram que são importantes, que o seu uso não é fácil para os alunos, e que ajudam na visualização, principalmente na Geometria, consoante os seguintes testemunhos:

Reconhece que na Geometria são as representações visuais as que mais se destacam, mas quando resolvem as tarefas não as utilizam.
Relativamente ao uso de tabelas, os alunos preenchem as tabelas, mas não as constroem.
(…) os alunos têm dificuldades em escrever e em desenhar.
(…) *os alunos têm muitas dificuldades em usar esquemas na resolução de problemas, apesar de os professores os usarem.*

Professor A, NM2, Apêndice 2

Também usa representações visuais principalmente para visualizar.
Considera algumas representações visuais importantes para que os alunos percebam melhor a informação, mas também reconhece que por vezes limitam o seu desempenho, referindo-se especificamente ao caso do exercício que tinha uma tabela com uma linha e que os alunos não perceberam que podiam acrescentar mais linhas para continuarem a completá-la.

Professor B, NM2, Apêndice 2

Das representações matemáticas, o Professor C utiliza esquemas (feito por ele ou pelos

alunos) durante a exposição da matéria com desenhos e escrita.
Quando resolvem os exercícios, os alunos utilizam por vezes, e apenas se solicitado, a decomposição de figuras.
Apesar de o Professor C usar muitos esquemas e figuras na exposição dos assuntos, os alunos não as usam muito.

Professor C, NM2, Apêndice 2

Estas práticas de ensino relativamente à utilização das representações visuais não estão relacionadas com o tipo de material didático utilizado. Com efeito, verificou-se que cada professor utiliza o material que considera mais adequado, seja ele manipulável, virtual, o livro adotado ou nenhum, o que não condiciona a utilização de determinada representação ou o uso que lhe dá.

Os dados recolhidos também evidenciaram a sobrevalorização das representações simbólicas nos registos escritos e consequentemente na resolução de tarefas. Verificou-se a utilização de representações visuais como artefacto nas práticas dos três professores. A característica comum a esta utilização foi o seu uso pelo professor como suporte para a explicação dos conteúdos. Com efeito, tanto o Professor A como o Professor B utilizaram materiais manipuláveis com representações visuais às quais fizeram determinados tratamentos que possibilitaram a realização de algo em Matemática. Neste caso foi a obtenção da fórmula para a área do círculo. Também o Professor C o fez, utilizando um documento digital (vídeo da Escola Virtual) para realizar tratamentos visuais em figuras. Por essa razão, podemos dizer que as representações visuais foram utilizadas como artefacto nas práticas de ensino, isto é, foram o ponto de partida para fazer algo em Matemática, mas pelo professor.

Após este trabalho de reflexão e análise sobre a prática docente e conhecimento das práticas de ensino dos colegas de grupo, realizado na Fase 2 do estudo de investigação, a professora investigadora sentiu-se mais confiante para utilizar representações diferentes e conhecer algumas formas de extrair mais valor das representações visuais, através da realização de tratamentos visuais. No final desta fase, a equipa de investigação reorientou o estudo com base nos resultados obtidos durante esta fase de desenvolvimento profissional.

4.4 Síntese dos resultados à QI3

Recordamos a terceira questão de investigação:

QI3: *Que ações deve o professor adotar para melhorar a sua prática de ensino usando as representações visuais como artefacto?*

A professora investigadora começou a preparar o início do ano letivo seguinte no final do ano letivo anterior (ano x), realizando o trabalho descrito na Parte 1 da Fase 2. Começou por analisar todas as tarefas do capítulo "Áreas de figuras planas" do livro adotado para o 6.º ano de escolaridade para caracterizar as representações utilizadas no enunciado das tarefas e as representações sugeridas aos alunos para a sua resolução. O seu objetivo neste trabalho era adquirir alguma destreza, flexibilidade e fluência na caracterização das tarefas no que respeita às representações e suas transformações. Deste trabalho, concluiu-se que o uso conjunto de três sistemas de representação, durante as aulas de Matemática, tem de ser intencional (Montenegro etal., 2017), uma vez que a maioria das tarefas que propostas aos alunos, e que constavam na sua grande maioria do livro de Matemática adotado, recorriam a um sistema de representação, usualmente verbal, recorrendo a representações visuais ou simbólicas como complemento. Normalmente, o sistema de representação mais comum que se exigia na resposta do aluno era o sistema de representação simbólico (Montenegro et al., 2017).

Depois desta Parte 1, com maior incidência para o ano letivo seguinte (ano x+1), a professora investigadora planificou o seu trabalho de forma a proporcionar diversas situações de aprendizagem com recurso aos três sistemas de representação (verbal, visual e simbólico). Fê-lo em diversos conteúdos matemáticos de todos os temas curriculares, realizando uma autorreflexão aprofundada com base nas representações utilizadas nas 39 aulas referentes ao domínio de conteúdos *Múltiplos e divisores*. Depois de três semanas de aulas, enquanto decorria a recolha de dados para a Fase 2, os alunos resolveram um teste diagnóstico com vista a caracterizar a sua utilização no que respeita às representações. Os alunos já se começavam a familiarizar com as representações usadas desde o início do ano letivo em curso. Os alunos não reconheciam a equivalência de representações em sistemas diferentes, manifestando dificuldade em representar o mesmo objeto ou a mesma situação com representações de sistemas diferentes. Quando o faziam, faziam-no *à letra*, utilizando para as representações visuais as mesmas regras sequenciais, o que mostra pouca familiarização e pouca destreza no seu uso.

Devido às características de cada estudo em pormenor para este domínio de conteúdos, dividimo-lo em três partes, a Parte 3, a Parte 4 e a Parte 5, extraindo os resultados seguintes para a Parte 3:

A utilização sistemática de representações múltiplas durante as aulas tem como efeito uma diversificação de representações nas respostas dos alunos às tarefas. No entanto, esta utilização não se refletiu no imediato, demorando o seu tempo a ser reconhecida pelos alunos. O professor pode alterar o tipo de representação sugerido numa tarefa, tendo como efeito aumentar a variedade de representações e, consequentemente, de transformações de representações. Outro exemplo é utilizar representações equivalentes durante a explicação de determinados conteúdos, como a explicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, relacionando as representações simbólicas com áreas de retângulos, introduzindo por consequência, representações visuais.

As tarefas de consolidação de matéria requerem uma atenção especial do professor no sentido de contrariar o predomínio de representações simbólicas. As tarefas de síntese prestam-se, ainda, à utilização de representações múltiplas, em particular de representações visuais. A utilização da cor nos registos escritos para destacar informação é uma estratégia que pode ser utilizada para a correspondência entre representações.

Devido à dificuldade inerente à utilização de representações múltiplas, é conveniente que o professor dê tempo para que o aluno se familiarize com as representações, assim como uma certa liberdade para que possa, numa fase inicial, decidir qual a representação com que é mais fácil para si trabalhar. Tudo indica que as representações visuais têm um papel importante no início da exploração de conteúdos novos, sendo a pouco e pouco substituídas por outras mais abstratas.

Na Parte 4, a professora investigadora apercebeu-se de que, quando os alunos têm liberdade para escolher a representação com que pretendem trabalhar, se verifica uma variedade de representações ou combinação de representações nas respostas dos alunos semelhante ao número de grupos de trabalho. Quando a situação lhes é familiar, os alunos utilizam representações simbólicas. No entanto, quando se deparam com dificuldades, mostram tendência para usar as representações visuais e trabalhar sobre elas, isto é, fazem uso das representações visuais como artefacto.

Na Parte 5, verificou-se que as práticas de ensino do professor se basearem em representações múltiplas não é suficiente para que os alunos as utilizem. Com efeito, apenas o grupo de alunos que as utilizavam por iniciativa própria durante as aulas é que manteve o seu uso durante a realização do teste, o que mostra um nível de familiarização com representações múltiplas diferente nos dois grupos. A lecionação de conteúdos pode recorrer à exploração conjunta de representações de sistemas de representação diferentes. A este respeito, Montenegro et al., (2017b), cujo trabalho está descrito na Parte 5, analisaram duas situações de aprendizagem diferindo na utilização (conjunta, ou não) de diferentes sistemas de representação na lecionação do conteúdo *Divisores de um número natural*.

Não é habitual os alunos deste nível de ensino terem a iniciativa de construir tabelas, nem de os professores lhes pedirem para realizar tal tarefa. Esta afirmação foi corroborada pelos três professores entrevistados. O professor, na sua prática letiva, pode enriquecer as tarefas que seleciona, acrescentando outro(s) tipo(s) de representação. Por exemplo, Montenegro et al., (2017d) fazem referência a um exercício rotineiro, ao qual se juntou uma representação visual (tabela) que aumentou o leque de transformações de representações, nomeadamente de conversões (Parte 6). Aqui, analisamos as tabelas que um grupo de alunos construiu, para conhecermos a adequabilidade, ou não, da solicitação de tal tarefa a alunos deste nível de ensino. Os resultados mostraram que, depois de uma insegurança inicial, os alunos foram todos capazes de o fazer, apresentando níveis diferentes de organização dos dados disponíveis e de abstração.

A Parte 7 da Fase 2 possibilitou à professora investigadora conhecer a forma como os seus colegas de grupo, em particular os que lecionavam Matemática ao 6.º ano de escolaridade nesse ano letivo, apreendiam um ensino baseado em representações múltiplas e o papel que atribuíam, no processo de ensino e de aprendizagem, a cada um dos sistemas de representação que utilizavam nas aulas. Esta parte foi importante para poder caracterizar as práticas de ensino e ouvir outras maneiras de entender as representações, em particular conhecer o uso dado às representações visuais, para a ajudar a distanciar das suas próprias convicções. Por exemplo, uma delas relaciona-se com a intuição da professora investigadora de que talvez se usassem apenas as representações visuais como signo. No entanto, constatou que os professores as usavam também como artefacto.

4.5 Da Fase 3 – Intervenção 2

Nesta secção apresentamos os resultados que nos vão permitir responder à quarta questão de investigação (QI4), que relembramos:

QI4: *De que forma pode o professor induzir os alunos a usarem o artefacto "representações visuais" como uma ferramenta? Como podem os alunos usar representações visuais como uma ferramenta epistémica na aprendizagem da Matemática?*

A Intervenção 2 constou de duas partes (Tabela 16). A Parte 1 teve como objetivo a preparação da Parte 2, com o desenvolvimento de duas tarefas específicas para munir os alunos da ferramenta "tratamentos visuais", através do recurso ao artefacto "representações visuais". Cada uma das tarefas da Parte 1 teve por base uma situação nova de aprendizagem:

- Tarefa 1 "Polígonos e círculos" – Lecionação e aprendizagem das noções de polígonos inscritos numa circunferência, polígonos circunscritos a uma circunferência, e aproximação de perímetros e de áreas de polígonos regulares e de círculos.
- Tarefa 2 "Área do polígono regular" – Lecionação e aprendizagem da fórmula para calcular a área de um polígono regular.

A Parte 2 teve como objetivo verificar se os alunos recorriam, ou não, e como, a essa ferramenta e o que faziam com ela, na lecionação e aprendizagem da fórmula para a área de um círculo, com o objetivo de reconhecer, ou não, os tratamentos visuais como uma ferramenta matemática epistémica, objetivo final do nosso trabalho.

Tabela 16: Caracterização da Intervenção 2

Intervenção 2	Ferramenta T_{RV}	Conteúdo curricular	Narração Multimodal
Parte 1 Familiarização dos alunos com a realização de tratamentos visuais (T_{RV})	Sobreposição de figuras; Pintura	Polígonos inscritos numa circunferência: Polígonos circunscritos a uma circunferência; Áreas por aproximação	NM3 – desenvolvimento da atividade
	Decomposição e rearranjo de figuras	Área do polígono regular	NM4 – desenvolvimento da atividade
Parte 2 Reutilização da ferramenta T_{RV}	Tratamentos visuais: pintura, sobreposição de figuras; decomposição e rearranjo de figuras	Área do círculo	NM5 – desenvolvimento da atividade NM6 – apresentação dos trabalhos e discussão coletiva

De seguida, descrevemos o trabalho preparatório que constituiu a primeira parte da Intervenção 2. Constou da descrição da forma como a professora investigadora dotou os alunos das competências necessárias para a realização de tratamentos visuais.

4.5.1 Parte 1 – Realizando tratamentos visuais

A professora investigadora utilizou dois tipos de tratamentos visuais: a sobreposição de figuras e a cor na primeira tarefa para a aprendizagem de Polígonos inscritos numa circunferência, Polígonos circunscritos a uma circunferência e Áreas por aproximação (MEC 2013), cuja atividade está descrita na Narração Multimodal 3 (NM3 – Apêndice 3); e a decomposição e rearranjo de figuras geométricas na segunda tarefa para a aprendizagem da fórmula para a área de um polígono regular (MEC, 2013) cuja atividade está descrita na Narração Multimodal 4 (NM4 – Apêndice 4).

4.5.1.1 Sequência de ensino sobre polígonos inscritos numa circunferência, polígonos circunscritos a uma circunferência e áreas por aproximação – Tarefa 1

A Tarefa "Polígonos e círculos" (Ver Figura 9) é constituída por um conjunto de oito perguntas e 13 figuras geométricas (10 círculos divididos em 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 e 12 partes iguais, e três figuras regulares (triângulo, pentágono e octógono) circunscritas a uma circunferência.

As perguntas começavam pela exploração das três últimas figuras que levavam os alunos a conhecer as suas características, nomeadamente o seu número de lados e respetiva nomenclatura, regularidade, e comparação do perímetro e da área entre cada uma das figuras com as medidas correspondentes da circunferência no seu interior. Tinha o objetivo didático de que se apercebessem da aproximação dos dois perímetros e das duas áreas, respetivamente de cada um dos polígonos com uma circunferência correspondente, à medida que o número de lados do polígono aumentava, o que reconheceram na resposta à pergunta 2.a) e 3.a) (Figura 61).

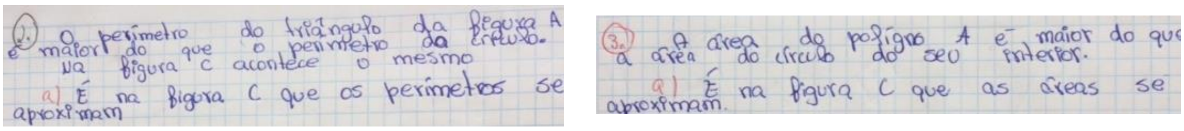


Figura 61: Respostas às questões 2 e 3 da tarefa (NM3, Apêndice 3)

De seguida, os alunos continuaram a resolver a tarefa através da exploração das restantes figuras. Começaram por desenhar o polígono inscrito em cada uma delas, bastando para isso que unissem os seus vértices que já estavam marcados na circunferência, ficando com as duas figuras sobrepostas. Seguiu-se a comparação entre os perímetros e as áreas das duas figuras geométricas em cada exemplo. Para o fazer a professora sugeriu a utilização da cor (Figura 62).

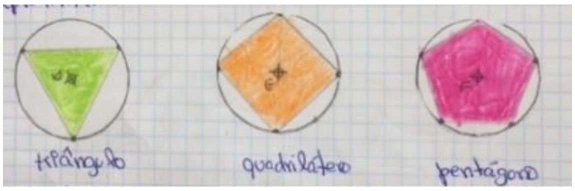


Figura 62: Tratamento visual, T_{RV} (sobreposição e pintura) efetuado às figuras (NM3, Apêndice 3)

4.5.1.1.1 Transformações de representações – Trabalho conjunto

Em termos de representações escritas, os alunos trabalharam sempre com representações em linguagem natural e representações visuais figurativas, e realizaram um tratamento visual na representação figurativa inicial ($T_{RV\text{-}F}$ na Figura 62). Este trabalho conjunto está esquematizado na Figura 63.

Tratamento Visual

RV-F $\xrightarrow{c}$ RLN $\xrightarrow{c}$ RV-F $\xrightarrow{c}$ RLN

Figura 63: Sequência de transformações de representações feitas durante a realização da tarefa "Polígonos e círculos"

4.5.1.2 Sequência de ensino sobre áreas de polígonos regulares – Tarefa 2

Uma das estratégias utilizadas pela professora investigadora na lecionação de uma fórmula para a área de uma figura nova é partir de um retângulo, cuja fórmula para a área já era conhecida desde o 1.º Ciclo do Ensino Básico, e rearranjar o retângulo de forma a transformá-lo na figura pretendida. Por exemplo, para determinar a fórmula para a área de um triângulo e de um paralelogramo partiu-se de um retângulo e transformou-se esse retângulo num triângulo e num paralelogramo, tendo-se, de seguida, estabelecido o paralelo entre os elementos de cada uma das figuras (e.g. para o triângulo, comprimento do retângulo com a base do triângulo; largura do retângulo com a altura do triângulo). Para esta aula, a professora começou por relembrar como tinham descoberto, no ano letivo anterior, a fórmula para calcular a área do triângulo e do paralelogramo. A Figura 64 mostra os registos que a professora foi fazendo no quadro durante esta introdução.

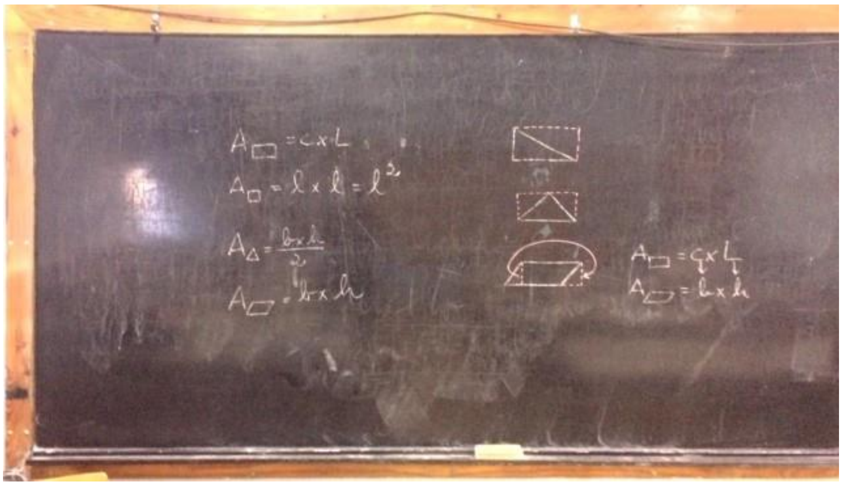


Figura 64: Registos feitos pela professora no quadro preto (NM3, Apêndice 3)

Depois desta introdução, a professora forneceu um octógono em papel branco para que os alunos o decompusessem em triângulos (Figura 65).

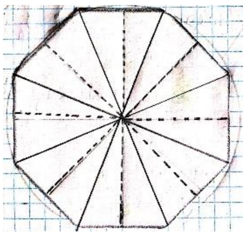


Figura 65: Divisão do octógono em oito triângulos geometricamente iguais e marcação dos respetivos apótemas a tracejado (NM3, Apêndice 3)

A professora pretendia que os alunos reconhecessem que as áreas do octógono e dos oito triângulos eram equivalentes, o que fizeram, como se vê pelo Excerto 30 da NM4):

(35'01'') Prof.: *Quem tem mais área, o polígono que vocês colaram ou aqueles triângulos todos?*

Responderam que teriam a mesma área e relembramos o nome de figuras com a mesma área (figuras equivalentes). Perguntaram o que faziam com os triângulos. De seguida, pedi-lhes que arranjassem uma maneira de fazer um retângulo com os triângulos. Ainda disse que podia ser também um paralelogramo. Não conseguiram fazer um retângulo, fizeram um paralelogramo.

Excerto 30: Reconhecimento de equivalência de áreas de figuras com formas diferentes (NM4, Apêndice 4)

A Figura 66, à esquerda, mostra o paralelogramo que os alunos construíram com os oito triângulos resultantes do octógono. Depois do paralelogramo construído, transformou-se num retângulo (esquema na Figura 63, à direita).

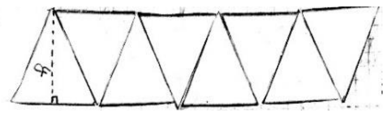
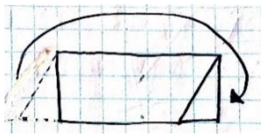



Figura 66: Rearranjo dos oito triângulos num paralelogramo (à esquerda) e esquematização da transformação deste num retângulo (à direita), (NM4, Apêndice 4)

Depois deste rearranjo, estabeleceram um paralelo entre os elementos das três figuras (octógono, paralelogramo e retângulo), fazendo a correspondência entre a altura do paralelogramo com o apótema do polígono regular e com a largura do retângulo (Figura 67).

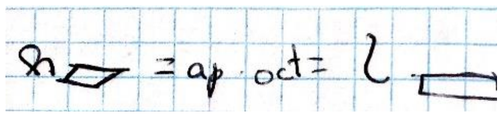


Figura 67: Correspondência entre os elementos das figuras consideradas, (NM4, Apêndice 4)

De seguida, procederam à correspondência entre o comprimento do retângulo com a base do paralelogramo e o semiperímetro do octógono até encontrar a fórmula para calcular a área de um polígono regular (Excerto 31 da NM4).

Prof.: *Nós sabemos que a altura é igual a…*
Duarte: *…largura.*
Prof.: *Não.*
Vários alunos: *... apótema.*
Prof.: *e estivemos a ver que a base*
Belmira: *...é igual a metade do perímetro da figura.*
Duarte: *Isso já sabíamos.*
Prof.: *Então, agora olhem para aqui. Nós aqui tínhamos a fórmula do paralelogramo, que era* $base \times altura$*. Substituímos a altura pelo apótema, a base pelo semiperímetro. É outra maneira de dizer metade do perímetro, e ficamos a saber como determinar a área do octógono. Já aqui têm a fórmula*.

Excerto 31: Reconhecimento da fórmula da área do polígino regular (NM4, Apêndice 4)

Os alunos registaram esta informação no quadro preto e no caderno diário a partir da fórmula da área do paralelogramo (Figura 68, à esquerda) e a partir da fórmula do retângulo (Figura 68, à direita), todas escritas em linguagem simbólica (RS).

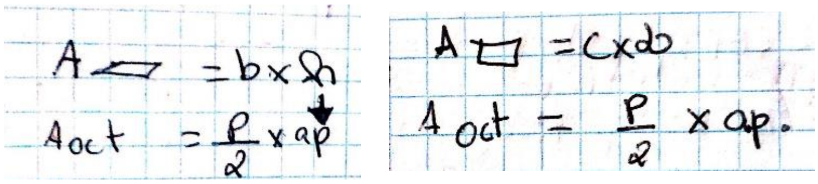


Figura 68: Paralelo entre as fórmulas do paralelogramo (à esquerda) e do retângulo (à direita) com a fórmula do perímetro regular, (NM4, Apêndice 4)

Por último, escreveu-se a fórmula em linguagem natural (RLN) (Figura 69).

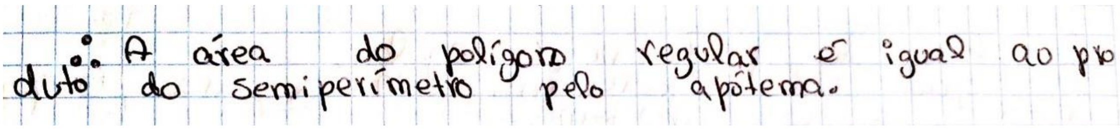


Figura 69: Representação em linguagem natural (RLN) da fórmula para a área de um polígono regular, (NM4, Apêndice 4)

4.5.1.2.1 Transformações de representações – Trabalho conjunto

Em termos de representações escritas, os alunos trabalharam sempre com representações em linguagem natural, representações visuais figurativas e representações simbólicas. Começaram por realizar um tratamento visual na representação figurativa inicial ($T_{RV\text{-}F}$ na Figura 65 e Figura 66), que consistiu na decomposição e rearranjo de uma figura noutras equivalentes. Tendo por base este trabalho, os alunos compararam as figuras construídas para estabelecer correspondências entre os elementos constituintes de cada uma delas através de representações verbais orais e representações simbólicas escritas, tendo culminado numa representação verbal. Fizeram ainda um tratamento visual numa representação simbólica, com uma seta para indicar a correspondência entre os elementos de duas figuras. Este trabalho está representado esquematicamente na Figura 70.

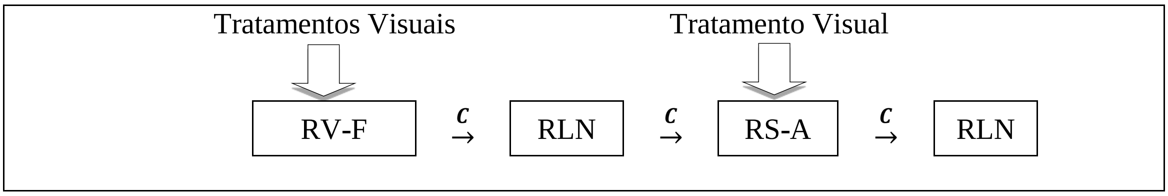


Figura 70: Sequência de transformações de representações feitas durante a realização da Tarefa 2 “Área do polígono regular”

Através destas duas tarefas, a professora induziu os alunos a trabalhar representações visuais e a utilizar tratamentos visuais. O ponto de partida para a realização do trabalho foi, em ambos os casos, o artefacto “representações visuais”. Estas representações visuais foram depois utilizadas como ferramentas matemáticas na produção de conhecimento, respetivamente, de polígonos inscritos numa circunferência, polígonos circunscritos a uma circunferência, áreas e perímetros por aproximação e fórmula para a área de um polígono regular.

4.5.2 Parte 2 – Reutilizando tratamentos visuais – Tarefa 3

A segunda parte da Intervenção 2 consta da exploração de uma tarefa constituída por um problema que foi resolvido numa série de quatro aulas, em que cerca de metade do tempo de cada aula foi usada no registo fotográfico de todos os trabalhos e os alunos não o podiam alterar enquanto não se terminasse a sessão fotográfica dos mesmos.

Tal como foi feito para a Intervenção 1, os dados foram analisados para identificar as representações relevantes e respetivas transformações usadas pelos alunos e pela professora:

(1) No trabalho autónomo dos alunos.

(2) No trabalho decorrente da intervenção da professora.

Esta análise foi dirigida para a resposta à segunda parte da quarta questão de investigação (QI4), que recordamos:

QI4: *Como podem os alunos usar representações visuais como uma ferramenta epistémica na aprendizagem da Matemática?*

Similarmente ao que fizemos para a análise de dados da Intervenção 1, de cada uma das subcategorias de representações, selecionamos uma resposta que serve os nossos propósitos como um exemplo para caracterizar as representações usadas pelos alunos. Também seguimos um procedimento semelhante com as transformações de representações. Da mesma forma, apenas apresentamos respostas das categorias relacionadas com as transformações visuais, pois o foco do nosso estudo recai sobre as transformações que envolvem este tipo de representação.

4.5.3 Trabalho autónomo dos alunos – Representações iniciais e transformações

Todos os grupos começaram a resolução da Tarefa 3 (ver Figura 10) fazendo um tratamento visual à representação visual figurativa fornecida. Fizeram dois tratamentos visuais distintos:

- Sobreposição de figuras, com ou sem utilização de cor (seis grupos);
- Decomposição e rearranjo de figuras (um grupo).

No entanto, o tratamento visual dos grupos que recorreram à “Sobreposição de figuras” apresentou três variantes, que passamos a descrever:

– Desenho de um polígono regular inscrito na circunferência – Grupos I e VII.

O Grupo I utilizou o hexágono inscrito na circunferência que desenhou, ao longo de todo o seu trabalho (Figura 71, à esquerda). Os alunos do Grupo VII começaram por desenhar um quadrilátero inscrito na circunferência, mas abandonaram esta estratégia por terem dificuldade em calcular a diferença entre as áreas do círculo e do quadrado inscrito alterando para um quadrado circunscrito à circunferência (Figura 71, ao centro). Mas também com esta figura, sentiram o mesmo problema, por isso o Grupo substituiu-a por um polígono de muitos lados, figura que nunca desenharam, mas que representaram no geoplano (Figura 71, à direita). Justificaram a sua ideia usando uma representação verbal, dizendo que “se o polígono tiver muitos lados, a sua área aproxima-se da área do círculo”. Posteriormente, calcularam a sua área (conversão para linguagem simbólica seguido de tratamento simbólico).

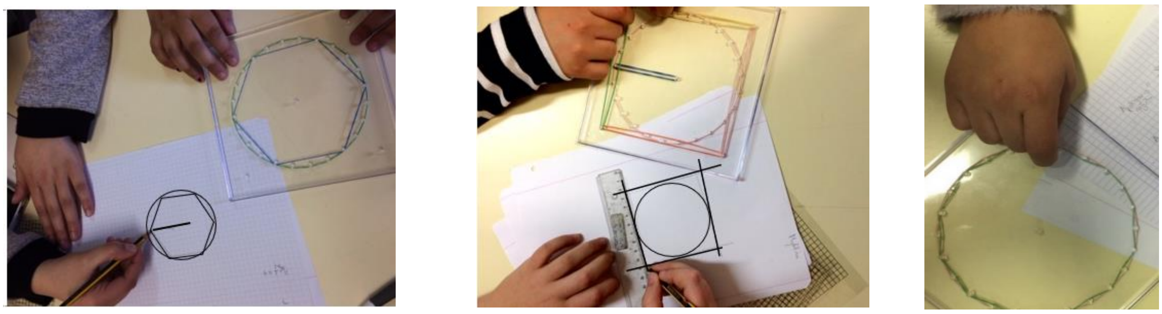


Figura 71: Tratamento visual (TRV) à representação visual fornecida, Grupo I (à esquerda) e Grupo VII (ao centro e à direita)

– Desenho de um quadrado circunscrito à circunferência e de outro inscrito na circunferência – Grupos IV, V e VI (Figura 72).

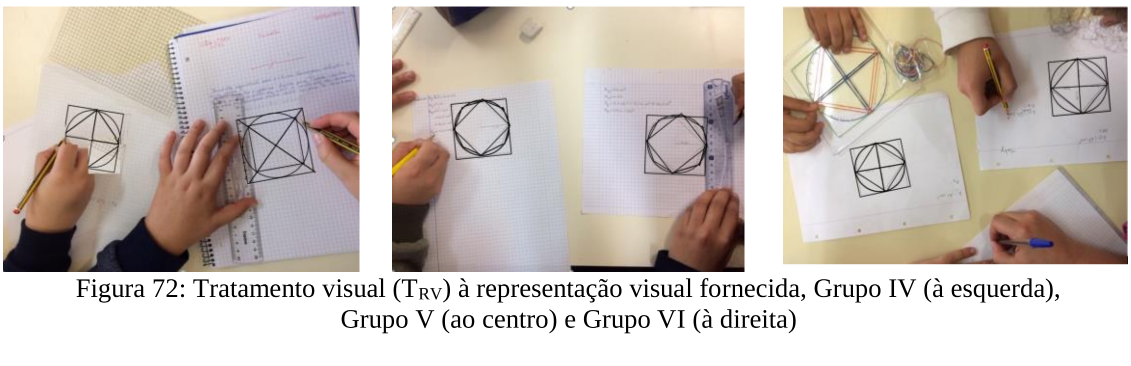


Figura 72: Tratamento visual (T_{RV}) à representação visual fornecida, Grupo IV (à esquerda), Grupo V (ao centro) e Grupo VI (à direita)

Os elementos do Grupo IV desenharam de forma diferente os dois quadrados (ver os registos dos dois alunos na Figura 72, à esquerda) – um dos alunos fez coincidir os vértices do quadrado inscrito no ponto médio dos lados do quadrado circunscrito e o outro aluno colocou os vértices dos dois quadrados nas diagonais dos quadrados que estavam na mesma reta suporte. Os elementos dos outros grupos fizeram desenhos semelhantes entre si, fazendo coincidir o vértice do quadrado inscrito com o ponto médio do lado do quadrado circunscrito à circunferência. Posteriormente, calcularam a área do círculo partindo da área dos dois quadrados.

- Desenho de um quadrado circunscrito à circunferência e foram retirando os excessos de área do quadrado relativamente ao círculo. Obtiveram um polígono regular circunscrito à circunferência – Grupo III (Figura 73).

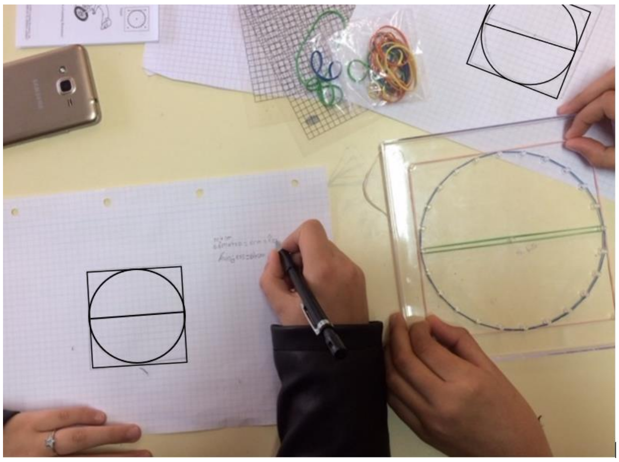


Figura 73: Tratamento visual (T_{RV}) à representação visual fornecida, Grupo III

Posteriormente, os alunos calcularam a sua área. Como o polígono tem muitos lados, a sua área aproxima-se da área do círculo.

Relativamente ao tratamento visual “Decomposição e rearranjo de figuras”, o Grupo começou pelo:

- Desenho de um polígono (regular e com muitos lados) inscrito na circunferência, divisão do mesmo em triângulos, sendo o centro da circunferência um dos vértices de todos os triângulos; recorte dos triângulos e rearranjo dos triângulos num paralelogramo – Grupo II (Figura 74).

Figura 74: Tratamento visual (T_{RV}) à representação visual fornecida, Grupo II: decomposição em triângulos geometricamente iguais

Posteriormente, os alunos calcularam a área do paralelogramo, procedimento já conhecido.

4.5.3.1 Transformações de representações – Trabalhos dos alunos

Todos os grupos pegaram na representação visual figurativa fornecida (RV-F), um círculo, e começaram a realizar tratamentos visuais, utilizando conhecimentos das aulas de exploração dos conteúdos relativos às noções de polígono inscrito numa circunferência, polígono circunscrito a uma circunferência, sem decomposição de figuras (todos os grupos à exceção do Grupo II) ou com decomposição de figuras (Grupo II). Este trabalho está esquematicamente representado na Figura 75.

Tratamentos Visuais (Grupos I, III, IV, V, VI, VII) Sobreposição de figuras	Tratamento Visual (Grupo II) Decomposição e rearranjo de figuras
⇩ RV-F $\xrightarrow{c}$ RLN	⇩ RV-F $\xrightarrow{c}$ RLN

Figura 75: Transformações iniciais e identificação do tipo de tratamento visual efetuado por cada um dos sete grupos

Todos os grupos, em determinada altura da resolução do problema, precisaram da ajuda da professora para resolver situações pontuais relacionadas com procedimentos de cálculo, ou insegurança em determinado procedimento, ou na adequabilidade da sua aplicação, mas que se mostraram impeditivas da continuidade do trabalho. No entanto, estas situações não foram consideradas como descontinuidades para o nosso trabalho de investigação, por não estarem relacionadas com o foco do nosso estudo que são as transformações que envolvem representações visuais. Assim, nesta secção consideramos a intervenção da professora, caso ela tenha resolvido a situação através de um tratamento visual ou da sua sugestão. Também neste caso, excluímos os tratamentos realizados na dedução da fórmula da área do círculo, uma vez que não faziam parte do conjunto de tratamentos visuais necessários para apresentar um valor aproximado para a área do círculo.

4.5.4 Grupos que terminaram a tarefa sem a intervenção da professora

Os Grupos I, IV, VI e VII terminaram a tarefa sem precisarem que a professora realizasse tratamentos visuais para promover a continuidade do seu trabalho, enquanto encontravam um valor aproximado para a área do círculo.

O Grupo I decidiu desenhar um polígono regular inscrito no círculo.

Começaram por desenhar um quadrado, mas depois mudaram para um hexágono, depois de a professora lhes ter perguntado se não achavam ter poucos lados. Marcaram no desenho o raio da circunferência e o apótema do hexágono (tratamento visual), e escreveram as suas medidas no desenho (tratamento simbólico). Mediram um lado do hexágono, calcularam o seu perímetro e dividiram por dois (tratamento simbólico). Utilizaram a fórmula para a área de um polígono regular para calcular a área do hexágono (tratamento simbólico) e apresentaram este valor como um valor aproximado para a área do círculo (ver Figura 76, à esquerda). Com a ajuda da professora, deduziram a fórmula para a área do círculo (tratamento simbólico), a partir da fórmula para a área do polígono regular (ver registos feitos pela professora na Figura 76, à direita). Em termos de representações, começaram por uma representação visual e fizeram conversões para uma representação simbólica, alternando entre ambas.

Por fim, os alunos utilizaram esta fórmula para calcular um valor mais aproximado para a área do círculo.

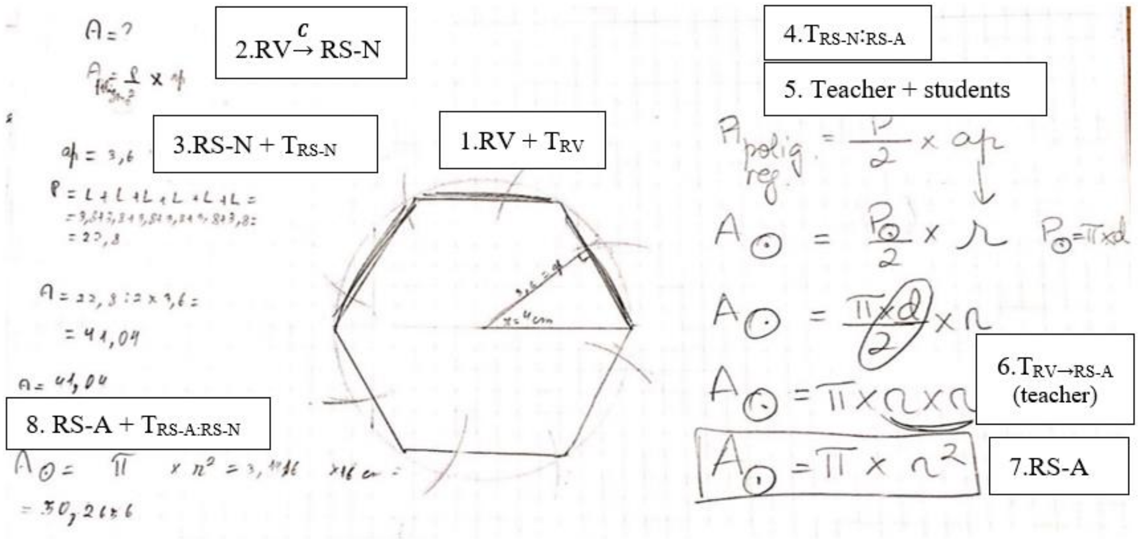


Figura 76: Sequência de transformações, Grupo I (NM5, Apêndice 5; NM6, Apêndice 6)

No final, os alunos escreveram um relatório (representação verbal) para apoiarem a apresentação do seu trabalho (Figura 77).

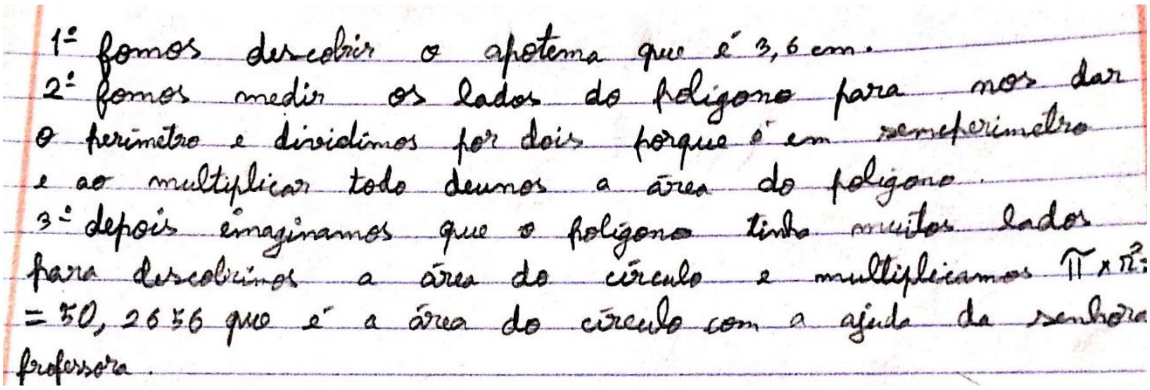

1º fomos descobrir o apotema que é 3,6 cm.
2º fomos medir os lados do polígono para nos dar o perímetro e dividimos por dois porque é em semiperímetro e ao multiplicar todo deunos a área do polígono.
3º depois imaginamos que o polígono tinha muitos lados para descobrirmos a área do círculo e multiplicamos π x r²: = 50,2656 que é a área do círculo com a ajuda da senhora professora.

Figura 77: Relatório da atividade, Grupo I (NM5, Apêndice 5; NM6, Apêndice 6)

Referir-nos-emos agora ao trabalho efetuado pelo Grupo IV.

Os elementos do Grupo IV fizeram um tratamento visual que consistiu no enquadramento do círculo em dois quadrados: um quadrado circunscrito ao círculo e um quadrado inscrito no círculo. Este grupo era constituído por dois elementos e cada elemento desenhou o quadrado inscrito em posições diferentes (ver Figura 78, em baixo), o que influenciou o trabalho subsequente.

Cada aluno mediu o lado dos dois quadrados e calculou a sua área, encontrando dois valores diferentes para a área do quadrado inscrito (ver Figura 78, em cima).

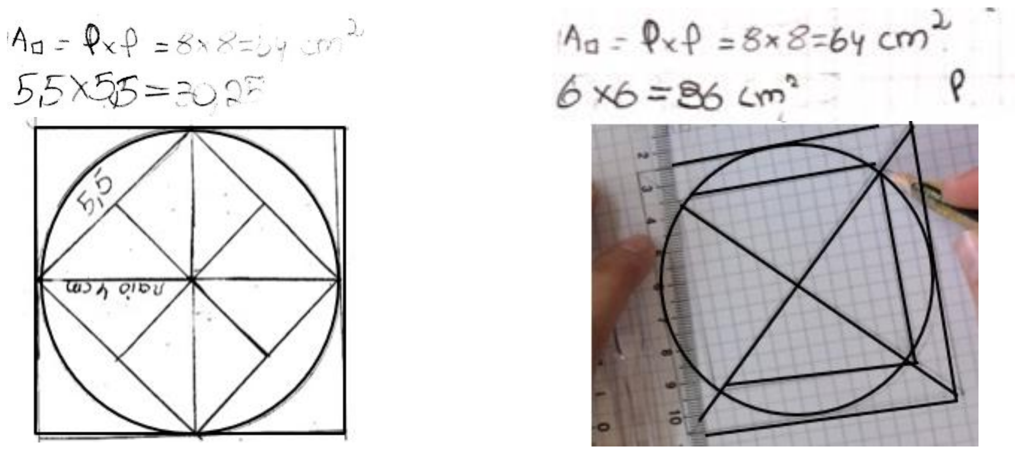
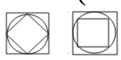


Figura 78: Tratamento visual feito à representação visual fornecida, Grupo IV

Esta diferença deu origem a dificuldades, como se pode ver no Excerto 32 da Narração Multimodal 5 (NM5, Apêndice 5).

Deixei-os a trabalhar e dirigi-me ao Grupo IV, que estava sem saber o que fazer. Pouco depois percebi que tinha sido por terem encontrado valores diferentes, por terem enquadrado os quadrados de maneira diferente (Ver Fig. 4, em cima):

Jorge  Filipe

Lembrei-lhes o objetivo. E recordamos o que tinham feito, entretanto. Tinham parado, porque tinham encontrado valores diferentes: 6 e 5,5 para o lado do quadrado inscrito. Resolvemos arredondar para 6, mas para descobrir o erro resolvi rever o que tinham feito e comparar o trabalho dos dois. Reparei que tinham desenhado o quadrado inscrito de forma diferente, por isso encontraram valores diferentes, mas estavam a usar a mesma estratégia.

Excerto 32: Dificuldades causadas por usos diferentes da mesma representação visual, Grupo IV, (NM5, Apêndice 5)

Depois de se ultrapassar esta situação, um dos alunos resolveu desenhar um quadrado sobreposto ao seu, na mesma posição do quadrado que o colega tinha desenhado, e o resultado lembrou-lhes um polígono regular de muitos lados, que teria uma área muito aproximada da área do círculo (Excerto 33).

O Grupo IV valeu-se das posições em que cada elemento tinha colocado os quadrados inscritos, sobrepondo-os num desenho e aperceberam-se que podiam encher o círculo com um polígono regular. Marcaram os pontos vértices do polígono na circunferência e desenharam-no. De seguida, calcularam a sua área e apresentaram este valor como a área aproximada do círculo: 48 cm^2.

Excerto 33: A sobreposição de figuras como forma de realizar tratamentos visuais, Grupo IV, (NM5, Apêndice 5)

Desenharam-no, calcularam a sua área (Figura 79) e apresentaram este valor como um valor aproximado para a área do círculo.

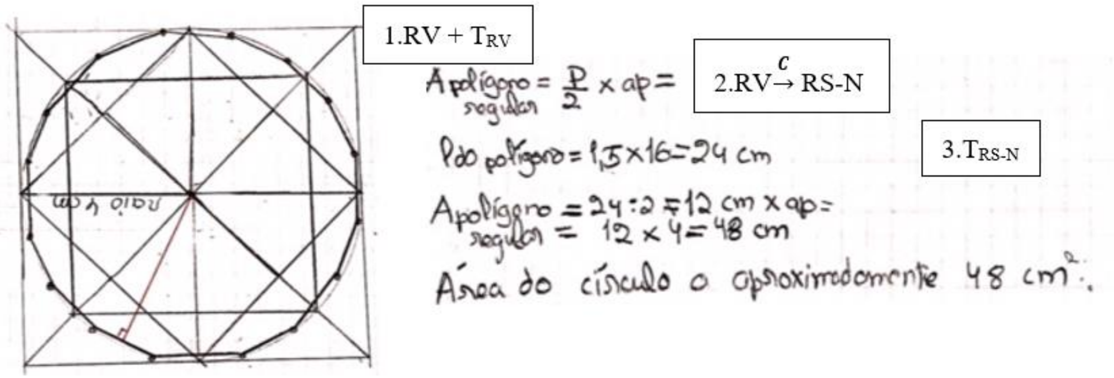
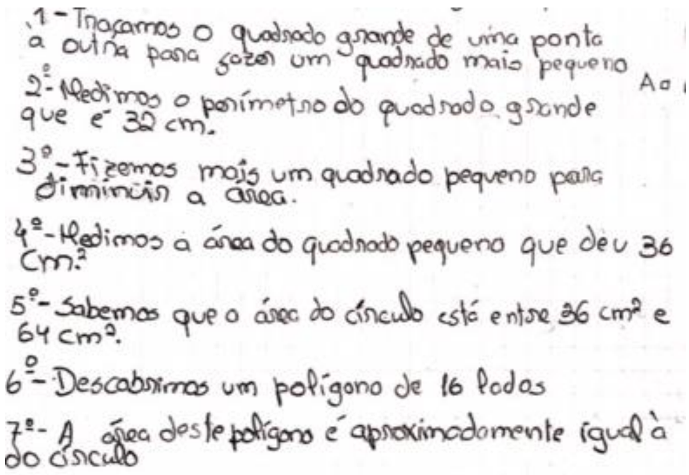


Figura 79: Sequência de transformações de representações, Grupo IV (NM5, Apêndice 5; NM6, Apêndice 6)

No final, os alunos escreveram um relatório para apoiarem a apresentação do seu trabalho (Figura 80).



1 - Traçamos o quadrado grande de uma ponta a outra para fazer um quadrado mais pequeno
2º - Medimos o perímetro do quadrado grande que é 32 cm.
3º - Fizemos mais um quadrado pequeno para diminuir a área.
4º - Medimos a área do quadrado pequeno que deu 36 cm².
5º - Sabemos que a área do círculo está entre 36 cm² e 64 cm².
6º - Descobrimos um polígono de 16 lados
7º - A área deste polígono é aproximadamente igual à do círculo

Figura 80: Relatório da atividade, Grupo IV (NM5, Apêndice 5; NM6, Apêndice 6)

Relativamente ao Grupo VI, os elementos deste grupo começaram por utilizar uma representação visual figurativa, RV-F (o círculo de raio 4 cm), à qual fizeram um tratamento visual (T_{RV-F}) que consistiu no enquadramento do círculo em dois quadrados.

Os vértices do quadrado inscrito coincidiram com o ponto médio de cada lado do quadrado circunscrito (Fig. 18 do Excerto 34).

Calcularam a área do quadrado circunscrito e do quadrado inscrito e enquadraram a área do círculo entre os dois valores encontrados.

Utilizaram uma representação verbal para o fazer (RLN). De seguida, num registo simbólico numérico (RS-N), calcularam a diferença entre as áreas dos dois quadrados, que corresponde às áreas dos quatro triângulos (ver Fig. 18 do Excerto 34).

Aperceberam-se de que uma parte dessa área pertencia ao círculo, mas outra parte não. Tiveram dúvidas de como encontrariam solução para esta situação, como se vê pelo Excerto 34 da NM5).

Aproximei-me do Grupo VI e revimos as conclusões a que já tinham chegado: A área do quadrado circunscrito era 65 cm^2 e a área do quadrado inscrito era 30,8 cm^2, mas o nosso objetivo era calcular a área do círculo. Perguntei-lhes se estas medidas eram as mais exatas que podiam encontrar para a área do círculo. Passado alguns minutos chamaram-me novamente a disseram que já sabiam como fazer. Quando explicaram, pareceu-me que seguiam o raciocínio de outros pares/grupos. Mas quando me estava a certificar da sua estratégia, apercebi-me que tinha percebido mal. Os alunos queriam calcular a diferença entre as áreas dos dois quadrados e tinham dúvidas se a poderiam dividir por dois, para, de seguida, adicionar metade à área do quadrado inscrito estimando, assim, a área do círculo. Concordei que nada nos dizia com certeza que era metade, mas aparentemente parecia assim ser e como procurávamos um valor aproximado, podiam partir desse princípio.
Assim fizeram (ver Fig. 18, a vermelho).

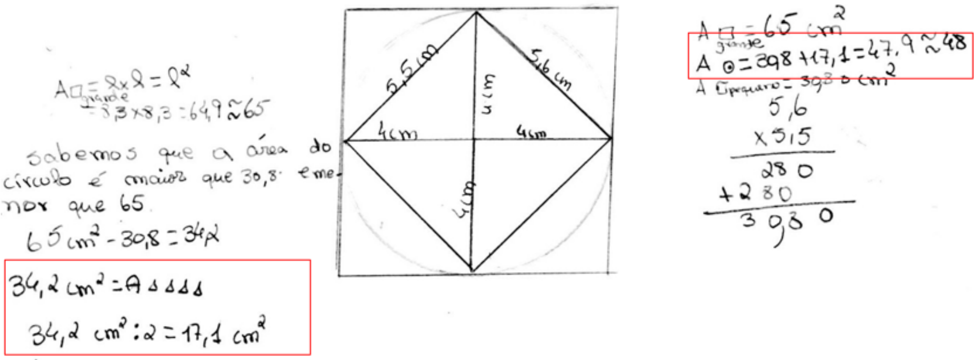


Fig. 18: Trabalho do Grupo VI ao fim da terceira aula, encontrando para a área do círculo o valor de 48 cm^2.

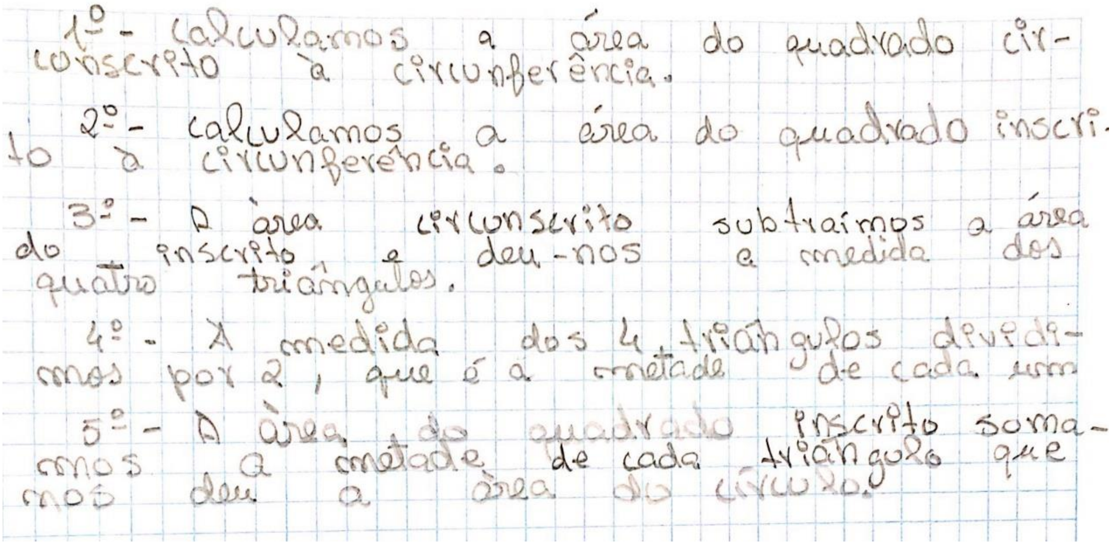
Apesar de não ser audível na gravação o trabalho que o Grupo VI fez, ouve-se o seguinte diálogo entre mim e um dos elementos:

> (29’49’’) Rui: (…) *e é metade de cada um.*
> Prof.: *Depois que é que vocês fizeram?*
> Rui: *Somamos a área do quadrado pequeno com metade da área do triângulo e deu-nos a área do círculo.*
> Prof: *Portanto o quadrado pequeno é o quadrado inscrito.*

Pensava que já tínhamos esgotado todas as possibilidades. Fiquei surpreendida por ainda encontrarem uma nova forma de calcular um valor aproximado para a área do círculo. Portanto, todos os grupos foram traçando o seu caminho, de tal forma que no final, todos tinham algo diferente para contar e para acrescentar. E chegaram por vias diferentes ao resultado.

Excerto 34: Percurso na resolução da tarefa realizado pelo Grupo VI, (NM5, Apêndice 5)

Os alunos consideraram que seria metade da área ocupada pelos triângulos e adicionaram esse valor à área do quadrado inscrito na circunferência, obtendo o valor de 48 centímetros quadrados para a área do círculo (ver Fig. 18 do 34, assinalado a vermelho). Por fim, converteram todo o trabalho realizado numa representação verbal (RLN), através da escrita do relatório da atividade (Figura 81).



1º - Calculamos a área do quadrado cir-conscrito à circunferência.

2º - calculamos a área do quadrado inscri-to à circunferência.

3º - A àrea circunscrito subtraímos a área do inscrito e deu-nos a medida dos quatro triângulos.

4º - A medida dos 4 triângulos dividi-mos por 2, que é a metade de cada um

5º - A àrea do quadrado inscrito soma-mos a metade de cada triângulo que nos deu a àrea do círculo.

Figura 81: Relatório da atividade, Grupo IV (NM5, Apêndice 5; NM6, Apêndice 6)

Os elementos do Grupo VII começaram por utilizar uma representação visual (o círculo de raio 4 cm) à qual fizeram um tratamento visual que consistiu no desenho de um quadrado circunscrito (Figura 82).

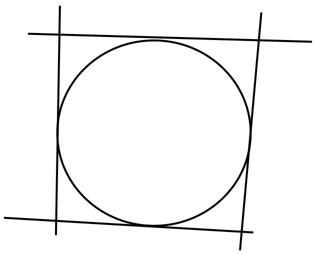


Figura 82: Tratamento visual inicial, Grupo VII, (NM5, Apêndice 5; NM6, Apêndice 6)

Abandonaram esta ideia quando reconhecerem que a diferença geométrica entre a área do quadrado e a do círculo tinha uma forma não poligonal, cujo procedimento para calcular a área, eles desconheciam. Tentaram com um quadrado inscrito no círculo, ideia que abandonaram pela mesma razão. Justificaram que resolveriam este problema se usassem um polígono de muitos lados, pois a sua fronteira coincidiria com a do círculo, como verificaram utilizando o geoplano (Figura 83). Destas representações visual e verbal, passaram para uma representação algébrica, escrevendo a fórmula da área de um polígono regular, servindo de base para o trabalho posterior.

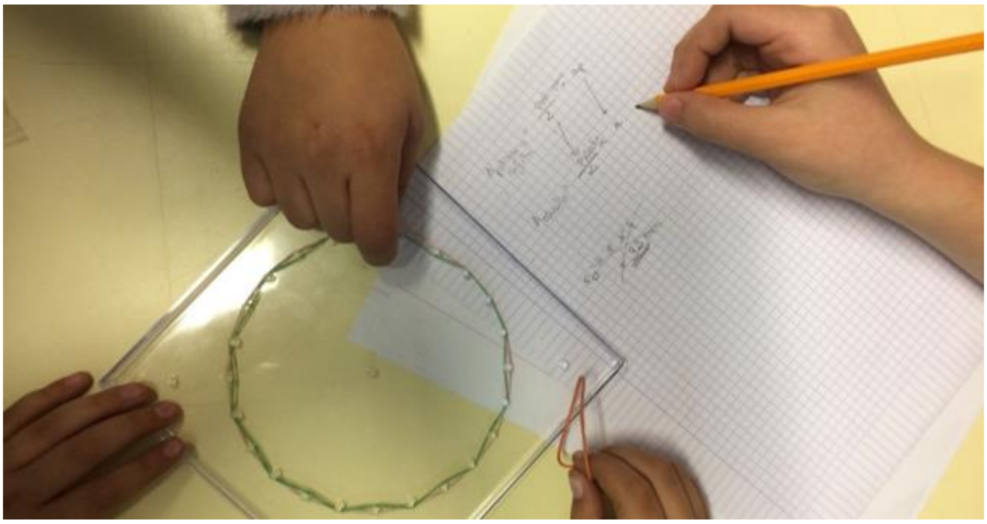


Figura 83: Representações visual e simbólica, Grupo VII, (NM5, Apêndice 5; NM6, Apêndice 6)

A esta representação algébrica, os alunos fizeram um tratamento simbólico transformando-a numa representação simbólica numérica (Figura 84).

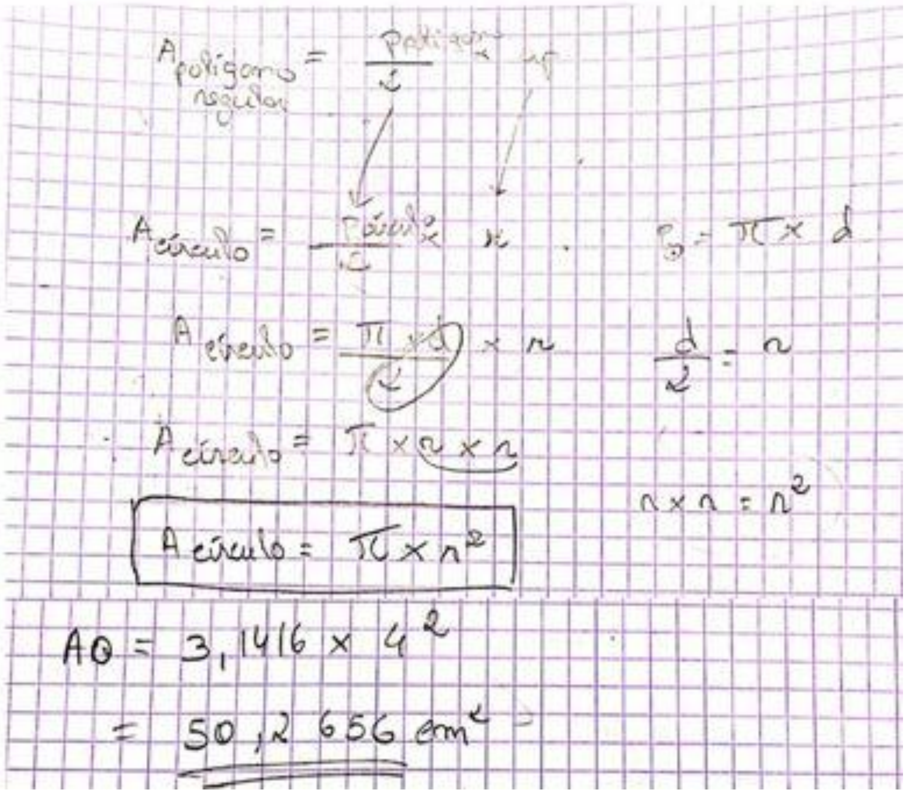
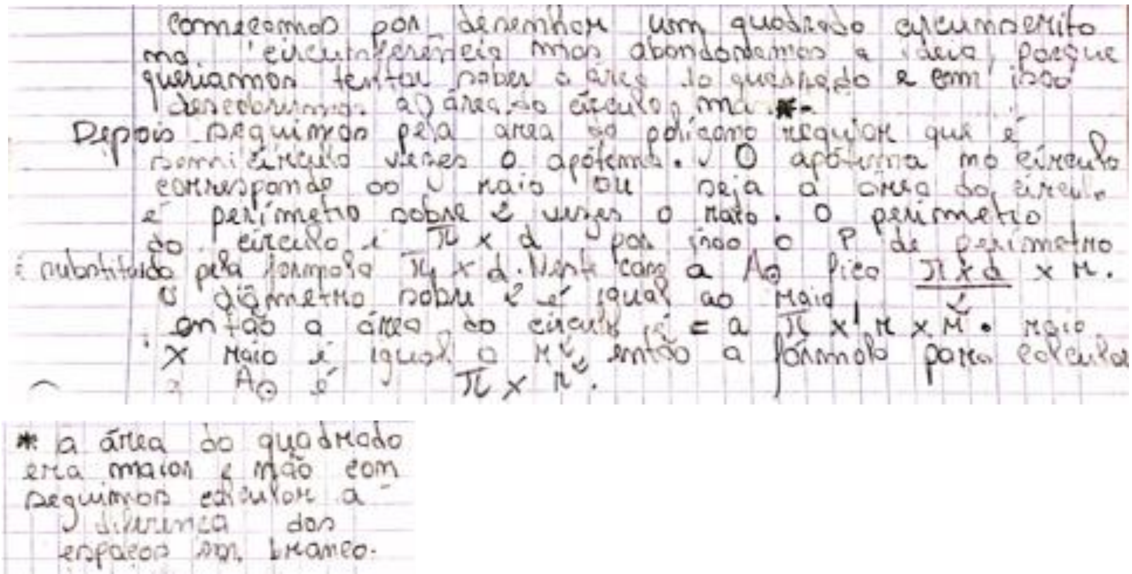


Figura 84: Tratamento visual e tratamento simbólico, Grupo VII

Por fim, terminaram o trabalho, convertendo para uma representação verbal, através da escrita do relatório (Figura 85).


Começamos por desenhar um quadrado circunscrito
na circunferência mas abandonamos a ideia, porque
queriamos tentar saber a área do quadrado e com isso
descobrirmos a área do círculo, mas *.
Depois seguimos pela área do polígono regular que é
semiperímetro vezes o apótema. O apótema no círculo
corresponde ao raio ou seja a área do círculo
é perímetro sobre 2 vezes o raio. O perímetro
do círculo é $\pi \times d$ por isso o P de perímetro
é substituido pela formula $\pi \times d$. Neste caso a $A_{\odot}$ fica $\frac{\pi \times d}{2} \times r$.
O diâmetro sobre 2 é igual ao raio
então a área do círculo é = a $\pi \times r \times r$. raio
× raio é igual a r^2 então a fórmula para calcular
a $A_{\odot}$ é $\pi \times r^2$.

* a área do quadrado
era maior e não conseguimos calcular a
diferença dos
espaços em branco.

Figura 85: Relatório da atividade, Grupo IV (NM5, Apêndice 5; NM6, Apêndice 6)

4.5.4.1 Transformações visuais de representações – Trabalho dos alunos

Em termos de representações, os alunos utilizaram os três sistemas de representação: verbal, visual e simbólico.

Os alunos do Grupo I começaram por realizar uma representação visual (círculo de raio 4 cm), à qual realizaram um tratamento visual.

Depois converteram as informações fornecidas pela representação visual obtida (hexágono inscrito na circunferência) e mediram os segmentos adequados.

Procederam aos cálculos que consideraram adequados através de representações simbólicas. Com a ajuda da professora, os alunos compararam as figuras construídas (hexágono e círculo) para estabelecer uma correspondência entre os elementos constituintes de cada uma das figuras, o que fizeram através de representações verbais orais e representações simbólicas escritas, até encontrarem a fórmula para o cálculo da área de um círculo (Figura 76).

A professora fez várias representações não convencionais, através de tratamentos visuais nas representações simbólicas. Depois deste trabalho, os alunos calcularam a área do círculo através dela.

Por último, converteram todo o trabalho realizado numa representação verbal, através do relatório escrito. Este trabalho está esquematicamente representado na Figura 86.

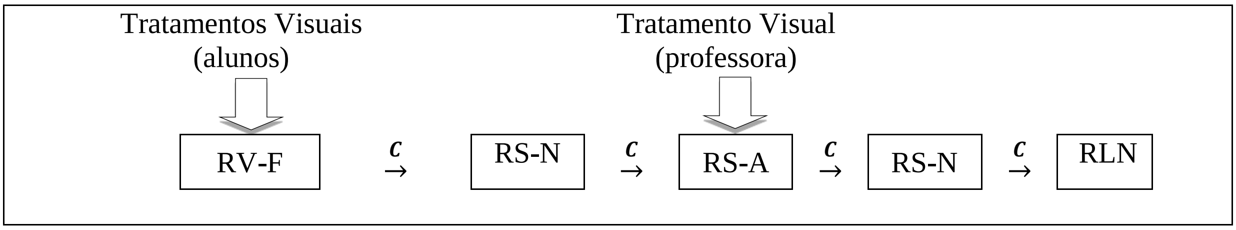


Figura 86: Sequência de transformações de representações, Grupo I

Os elementos do Grupo IV começaram por realizar uma representação visual (círculo de raio 4 cm), à qual realizaram um tratamento visual que consistiu no enquadramento do círculo em dois quadrados: um quadrado circunscrito ao círculo e um quadrado inscrito no mesmo círculo. De seguida, converteram as informações da figura em representações simbólicas (numéricas). Como não tivessem conseguido a solução pretendida, decidiram realizar novo tratamento visual à representação visual figurativa, obtendo nova representação visual, possibilitando a sua conversão para uma representação simbólica – numérica. Culminaram com a conversão para uma representação verbal, através da escrita do relatório. A sequência de transformações de representações realizada por este grupo está esquematizada na Figura 87.

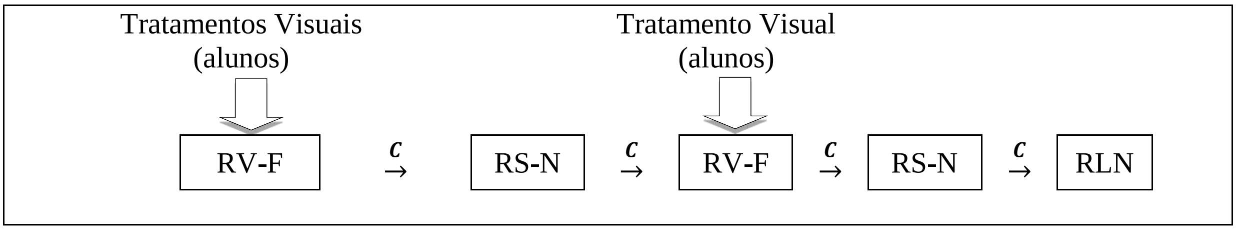


Figura 87: Sequência de transformações de representações, Grupo IV

Os elementos do Grupo VI começaram por utilizar uma representação visual (o círculo de raio 4 cm) à qual fizeram um tratamento visual que consistiu no enquadramento do círculo em dois quadrados. De seguida, utilizaram representações simbólicas numéricas para calcular os valores que consideraram adequados para a obtenção de um valor aproximado para a área do círculo. Por fim, terminaram com a conversão do trabalho realizado numa representação verbal, através da escrita do relatório. A sequência de transformações de representações realizada por este grupo está esquematizada na Figura 88.

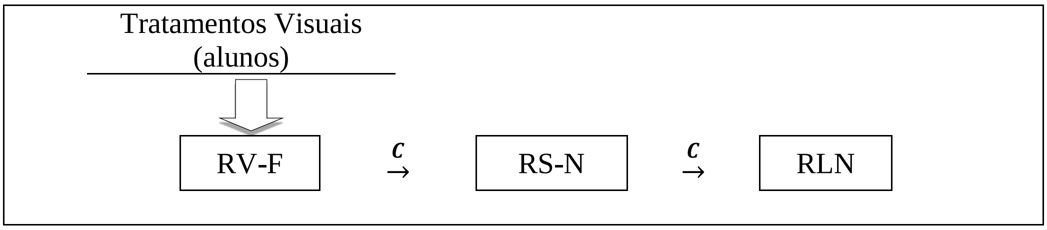


Figura 88: Sequência de transformações de representações, Grupo VI

Os elementos do Grupo VII começaram por utilizar uma representação visual, RV-F, (o círculo de raio 4 cm), à qual fizeram dois tratamentos visuais ($T_{RV\text{-}F}$) – um quadrado inscrito e um quadrado circunscrito. Justificaram verbalmente (RLN) que anulariam a diferença de áreas do quadrado para o círculo se usassem um polígono de muitos lados, pois a sua fronteira coincidiria com a circunferência. Desta representação verbal, passaram para uma representação algébrica (RS-A), escrevendo a fórmula da área de um polígono regular, à qual fizeram um tratamento simbólico ($T_{RS\text{-}A}$), transformando-a numa representação simbólica numérica (RS-N). Por fim, terminaram o trabalho, convertendo para uma representação verbal (RLN), através da escrita do relatório. A sequência de transformações de representações realizada por este grupo está esquematizada na Figura 89.

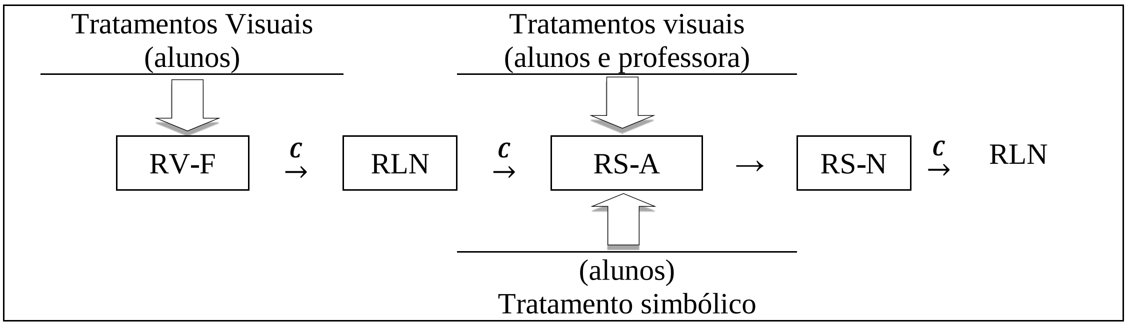


Figura 89: Sequência de transformações de representações, Grupo VII

4.5.5 Desempenho dos grupos que precisaram da intervenção da professora

Os Grupos II, III e V precisaram da intervenção da professora para completarem o tratamento visual iniciado. As descontinuidades verificadas no trabalho dos três grupos foram as seguintes:

Grupo II – causada por terem perdido a visão de conjunto dos diferentes procedimentos que tinham de realizar, apesar de terem dito logo de início a estratégia que pretendiam seguir. Nesta altura disseram já não saber o que iam fazer com os triângulos.

Grupo III e Grupo V – causada por não encontrarem maneira de medir a diferença de área entre o círculo e o quadrado circunscrito à circunferência (Grupo III) e o quadrado inscrito na circunferência e o círculo (Grupo V).

4.5.6 Intervenção da professora

Os elementos do Grupo II, similarmente aos elementos do Grupo V, já tinham iniciado um tratamento visual à representação visual figurativa fornecida. No entanto, em determinada altura do seu trabalho precisaram da intervenção da professora para executar o tratamento visual que tinham na ideia (Excerto 35):

Prof.: *Então e agora o que é que vão fazer?*
Duarte: *Vamos cortar.*
Prof.: *Pronto, e mais? E depois, cortam e depois?*
Duarte: *Fazemos uma figura.*
Prof.: *E que figura é que tens que fazer?*
Duarte: *Fazemos um…* (…), *um pent…, um paralelogramo.*

Excerto 35: Dificuldade manifestada pelos alunos na realização do tratamento visual; Grupo II, (NM5, Apêndice 5)

Os elementos do Grupo III precisaram da intervenção da professora para identificarem a forma geométrica que poderiam associar aos espaços de superfície entre as duas figuras sobrepostas, o círculo e o quadrado. Foi através da sugestão da professora de desenharem triângulos (tratamento visual), que conseguiram diminuir os valores das áreas por enquadramento (Excerto 36).

Bela*: Então…*
(12’44’’) Belmira: *Estes espacinhos aqui.*
Prof.: *E estes espacinhos aqui têm mais ou menos que forma?*
Belmira e Bela: *De um triângulo.*
Prof.: *Consegues desenhar aí um triângulo?*
Belmira e Bela: *Sim.*
Prof.: *Desenha lá.*
Belmira: *Bela, pega na tua régua.*
Prof.: *Pensem lá bem. Quanto menos triângulos, melhor*.

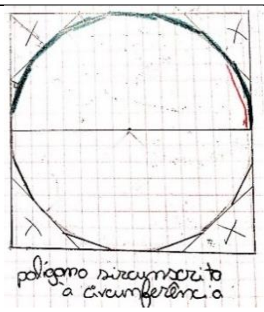


Fig.11: Foto do trabalho do Grupo II,
com sinalização dos triângulos considerados.

Desenham os triângulos que na figura do lado, estão sinalizados com uma cruz.

Excerto 36: Tratamento visual sugerido pela professora; Grupo III, (NM5, Apêndice 5)

No início do trabalho do Grupo V, a professora sugeriu que os alunos do grupo fizessem um tratamento visual à figura que tinham iniciado, como se vê pelo Excerto 37 (NM5):

Isaura: *Temos que primeiro saber a área do quadrado.*
Francisco*: Dá 64.*
Prof.: *Podem já escrever aqui. Área do quadrado igual a 64.* Aguardo que escrevam. *E agora?*

Como não respondessem, pergunto:

Prof.: *E o círculo? Tem maior ou menor área que 64?*
Isaura: *Menor.*
Prof.: *Então já podem escrever isso: Área do círculo é menor que 64. Escrevem. E agora?* (Silêncio). *Vejam lá se descobrem outra maneira. Sabemos que é menor do que 64, mas pode ser 63, 62, 61, 60, 50, 20… vejam lá se arranjam uma maneira de ver… o contrário. Ela é mais pequenina do que esta, mas é maior do que outra. Vejam lá se descobrem outra. Têm aqui um quadrado.*
Isaura: *Sim.*
Prof.: *Vamos continuar a usar quadrados.*
Isaura: *Sim. Temos que fazer aqui um círculo, ou inscrever aqui outro.*
Prof.: *Experimentem. Tentem fazer isso muito direitinho, está bem? Como é que vão fazer? Tem que ser um quadrado. Tem que ter os lados todos iguais. Experimenta. Procurai o sítio certo.*
Isaura: *Sim.*

[Nota: Os alunos já tinham desenhado o círculo e um quadrado circunscrito a esse círculo. Como não soubessem o que fazer de seguida, procurei que descobrissem a área do círculo por enquadramento. Para isso teriam de desenhar outro quadrado inscrito no círculo. Os dois quadrados, um circunscrito e outro inscrito podem ver-se na Fig. 3.] Deixo-os a trabalhar e aproximo-me do Grupo VI.

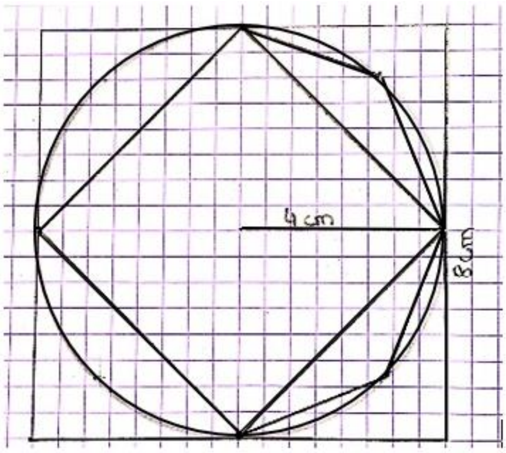


Fig.3: Quadrado inscrito (sugerido pela professora) numa circunferência e quadrado circunscrito a uma circunferência (Grupo V)

Excerto 37: Dificuldades manifestadas pelos alunos na realização do tratamento visual, Grupo V, (NM5, Apêndice 5)

Depois de desenharem o quadrado inscrito e de calcularem a sua área, obtiveram a área do círculo por enquadramento.

No entanto, a professora considerou que os alunos ainda poderiam diminuir os limites, por isso perguntou-lhes como o poderiam fazer. Os alunos sugeriram o desenho de triângulos, isto é, fizeram novo tratamento visual à figura (Excerto 38, NM5).

Isaura: *Deu 32 e ...*
Prof.: *Pronto, vamos arredondar.*
Isaura: *Deu 32,5.*
Prof.: *32 e meio. E agora, olha. Sabemos que a área do círculo ... está entre que valores?*
Fausto: *Menos de 64.*
Prof.: *E?*
Isaura: *Maior que 32,5.*
Prof.: *Escrevam.* Aguardo. *Pronto. E agora conseguem arranjar… dar um só valor à área do círculo? Porque pode ser 35, 36, 37, 38, 39, até 63, não? Ainda há um grande…*
Isaura: *Distância.*
Prof.: U*ma grande distância, um grande intervalo. Vejam lá se conseguem diminuir essa diferença.*
Fausto: *Hã?*
Prof.: *Como é que podem diminuir essa diferença? Vejam lá. Portanto, a diferença está aqui, não é? Nestes pedacinhos. Conseguem descobrir a medida desses pedacinhos? Vejam lá se arranjam uma maneira de descobrir.*
Isaura: *Acho que sim.*
Prof.: *Como? Diz como.*
Isaura: *Temos que fazer mais os lados.*
Prof.: *Diz como?*
Isaura: *Assim e assim.*
Prof.: *Triângulos, pode ser. Pronto, experimentem.*

Excerto 38: Reconhecimento da adequabilidade de repetição do tratamento visual realizado; Grupo V, (NM5, Apêndice 5)

4.5.6.1 Transformações visuais de representações

Em termos de transformações que envolvessem as representações visuais, a professora realizou-as verbalmente, em todos os grupos, e todas com as mesmas características.

No Grupo II, os alunos manifestaram uma descontinuidade no seu trabalho depois de dividirem o octógono em triângulos, não sabendo como fazer o seu rearranjo. A professora lembrou-lhes que poderia ser num paralelogramo.

No Grupo III, os alunos manifestaram uma descontinuidade no seu trabalho depois de desenharem e calcularem a área do quadrado circunscrito ao círculo e verificarem que tinham de retirar a área da diferença entre as duas figuras. A professora levou-os a identificarem a forma aproximada dessa área sobrante.

No Grupo V, os alunos manifestaram duas descontinuidades no seu trabalho depois de desenharem um quadrado circunscrito ao círculo e de calcularem a sua área: (i) verificaram a necessidade de reduzir esse valor, acrescentando um quadrado inscrito no círculo; (ii) preencheram a área sobrante entre o quadrado inscrito e o círculo, de forma a diminuir o valor das áreas por enquadramento. A professora levou os alunos a desenhar o quadrado inscrito e a preencher os espaços sobrantes.

Esquematicamente para os três grupos (Figura 90),

Tratamento visual através de uma representação verbal oral:
Rearranjo de figuras − Grupo II
Forma da área sobrante – Grupo III
Preenchimento da área sobrante – Grupo V

RV-F $\xrightarrow{c}$ RLN

Figura 90: Sequência de transformações de representações feitas até ao final da intervenção da professora nos Grupo II, III e V

4.5.7 Trabalho autónomo dos alunos depois da intervenção da professora

Depois da intervenção da professora, os elementos do Grupo II rearranjaram os triângulos num paralelogramo e calcularam a sua área. Começaram por apresentar diversos erros de cálculo, que corrigiram depois de a professora lhes ter dado o correspondente *feedback* (ver Figura 91, à direita). Foi este o valor que apresentaram para a área aproximada do círculo.

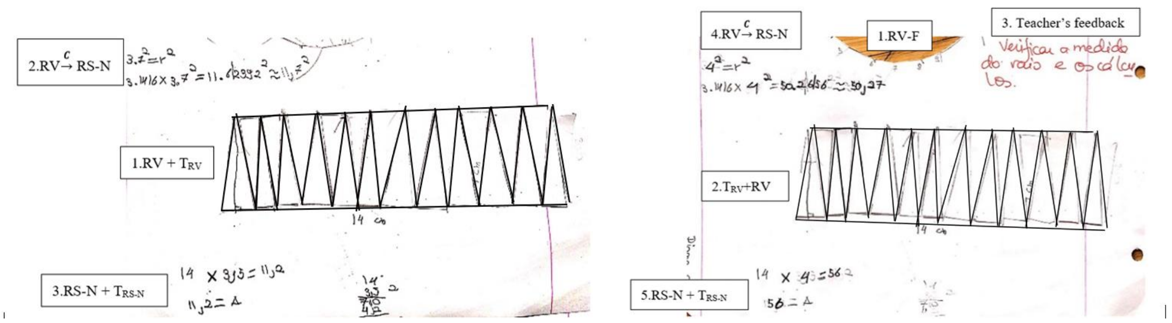


Figura 91: Sequência de transformações de representações depois da intervenção da professora, Grupo II (NM5, Apêndice 5)

Depois deste trabalho, os alunos, juntamente com a professora, deduziram a fórmula da área do círculo a partir tanto da fórmula do paralelogramo como do polígono regular, escrevendo apenas a segunda (Figura 92).

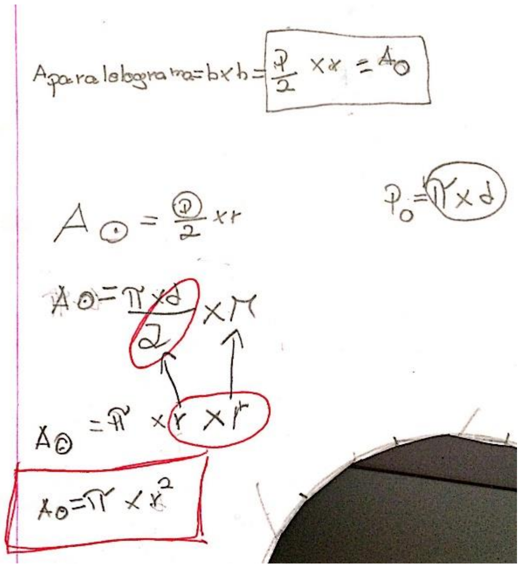


Figura 92: Registos simbólicos algébricos, Grupo II

No final, os alunos escreveram um relatório para apoiarem a apresentação do seu trabalho (Figura 93).

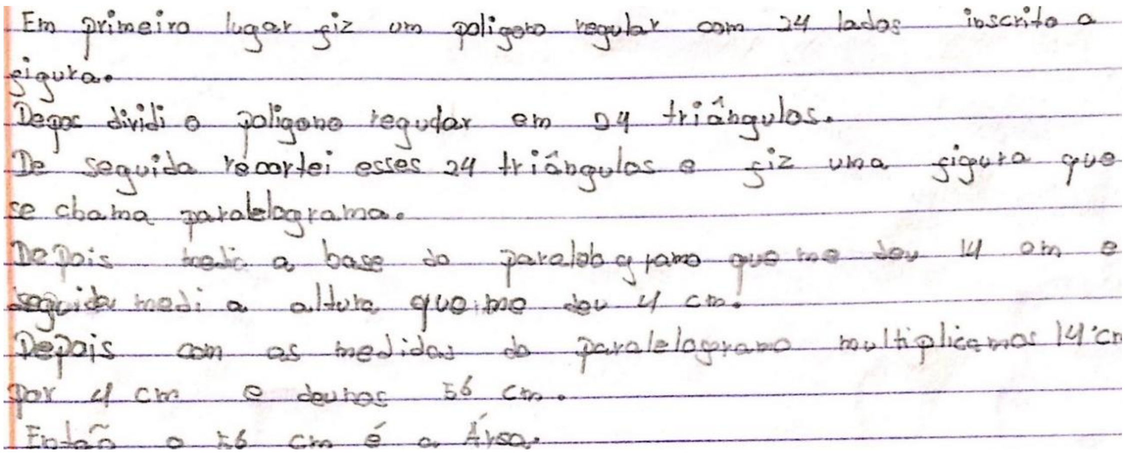

Em primeiro lugar fiz um poligono regular com 24 lados inscrito a figura.
Depoc dividi o poligono regudar em 24 triângulos.
De seguida recortei esses 24 triângulos e fiz uma figura que se chama paralelograma.
Depois medi a base do paralelogramo que me deu 14 cm e seguida medi a altura que me deu 4 cm.
Depois com as medidas do paralelogramo multiplicamos 14 cm por 4 cm e deu-nos 56 cm.
Então o 56 cm é a Área.

Figura 93: Relatório da atividade, Grupo II (NM5, Apêndice 5; NM6, Apêndice 6)

Depois da intervenção da professora, os elementos do Grupo III desenharam quatro triângulos nos cantos do quadrado circunscrito ao círculo (ver na Figura 94 os triângulos assinalados com uma cruz) e depois desenharam mais oito triângulos (ver na Figura 94 os triângulos pintados), de forma a retirarem quase toda a área sobrante entre o círculo e o quadrado. Calcularam a área de um dos triângulos maiores e multiplicaram-na por quatro; depois calcularam a área de um dos triângulos pequenos e multiplicaram-na por oito. Por fim, à área do quadrado circunscrito retiraram a área dos quatro triângulos e ao resultado retiraram a área dos oito triângulos, obtendo assim um valor aproximado para a área do círculo.

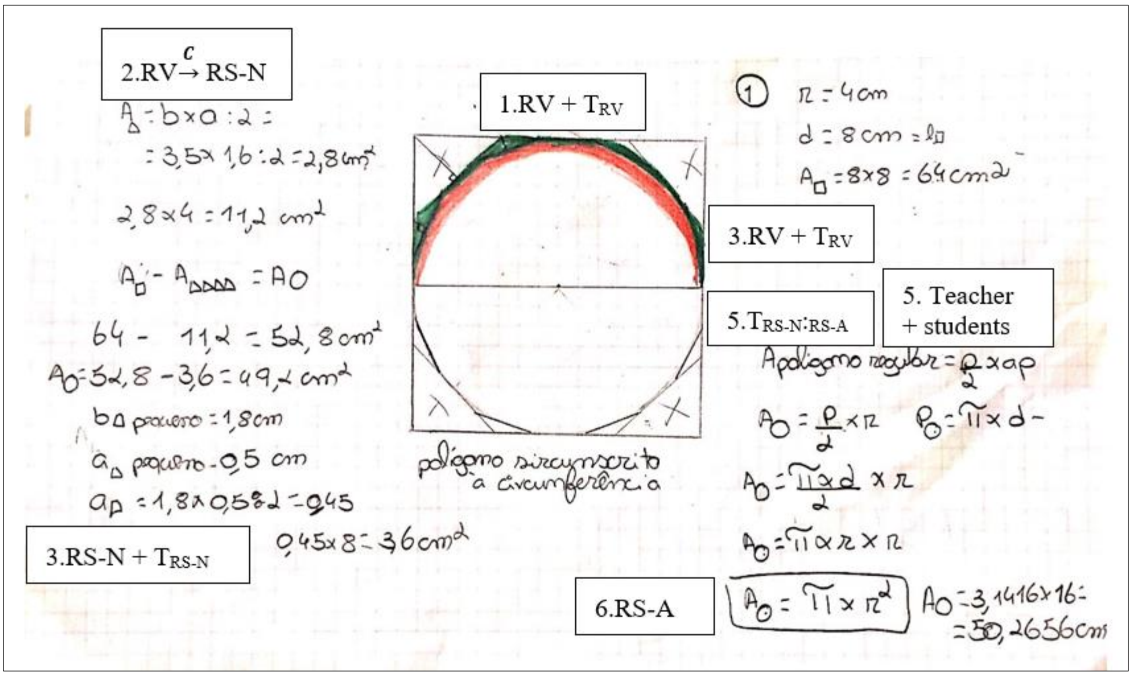


Figura 94: Sequência de transformações de representações depois da intervenção da professora, Grupo III

No final, os alunos fizeram a conversão do seu trabalho para uma representação verbal, através da escrita de um relatório para apoiarem a apresentação do seu trabalho (Figura 95).

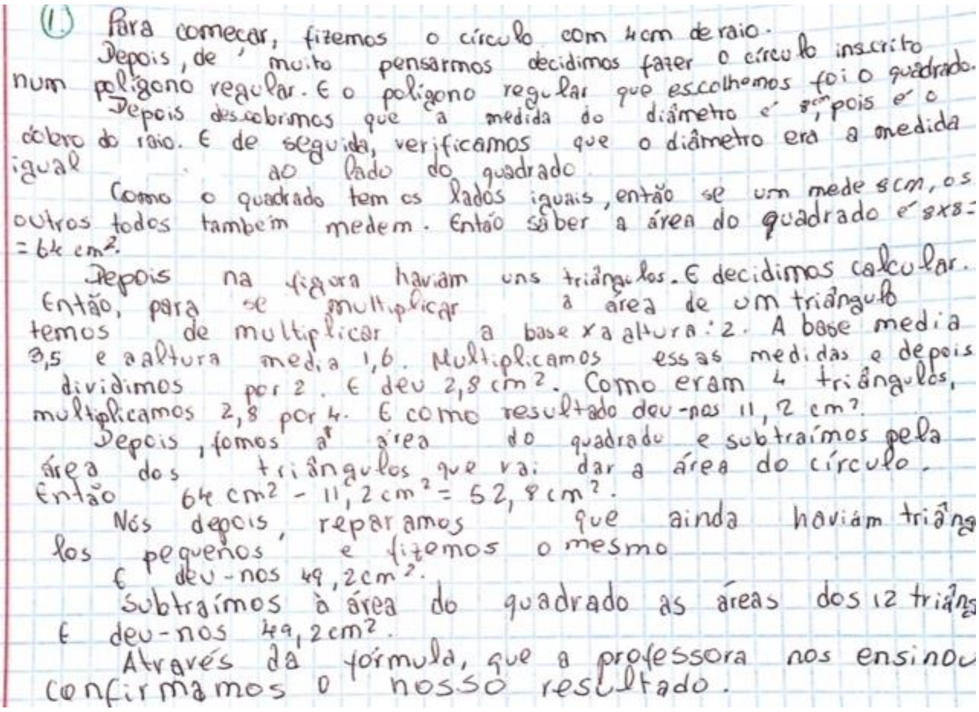

(1) Para começar, fizemos o círculo com 4cm de raio.
Depois, de muito pensarmos decidimos fazer o círculo inscrito num polígono regular. E o polígono regular que escolhemos foi o quadrado.
Depois descobrimos que a medida do diâmetro é 8cm, pois é o dobro do raio. E de seguida, verificamos que o diâmetro era a medida igual ao lado do quadrado.
Como o quadrado tem os lados iguais, então se um mede 8cm, os outros todos também medem. Então saber a área do quadrado é 8x8= = 64 cm².
Depois na figura haviam uns triângulos. E decidimos calcular. Então, para se multiplicar a área de um triângulo temos de multiplicar a base x a altura : 2. A base media 3,5 e a altura media 1,6. Multiplicamos essas medidas e depois dividimos por 2. E deu 2,8 cm². Como eram 4 triângulos, multiplicamos 2,8 por 4. E como resultado deu-nos 11,2 cm².
Depois, fomos à área do quadrado e subtraímos pela área dos triângulos que vai dar a área do círculo. Então 64 cm² - 11,2 cm² = 52,8 cm².
Nós depois, reparamos que ainda haviam triângulos pequenos e fizemos o mesmo
E deu-nos 49,2cm².
Subtraímos à área do quadrado as áreas dos 12 triângulos
E deu-nos 49,2cm².
Através da fórmula, que a professora nos ensinou confirmamos o nosso resultado.

Figura 95: Relatório da atividade, Grupo III (NM5, Apêndice 5; NM6, Apêndice 6)

Depois da intervenção da professora, os elementos do Grupo V desenharam quatro triângulos justapostos aos lados do quadrado inscrito.

De seguida repetiram um procedimento semelhante para outros oito, cada um justaposto a um dos lados dos triângulos anteriores e, foram pintando a superfície ocupada (tratamento visual). Calcularam as áreas de cada um dos triângulos, multiplicaram por quatro ou por oito, conforme o caso, e adicionaram estes dois valores à área do quadrado inscrito (Figura 96).

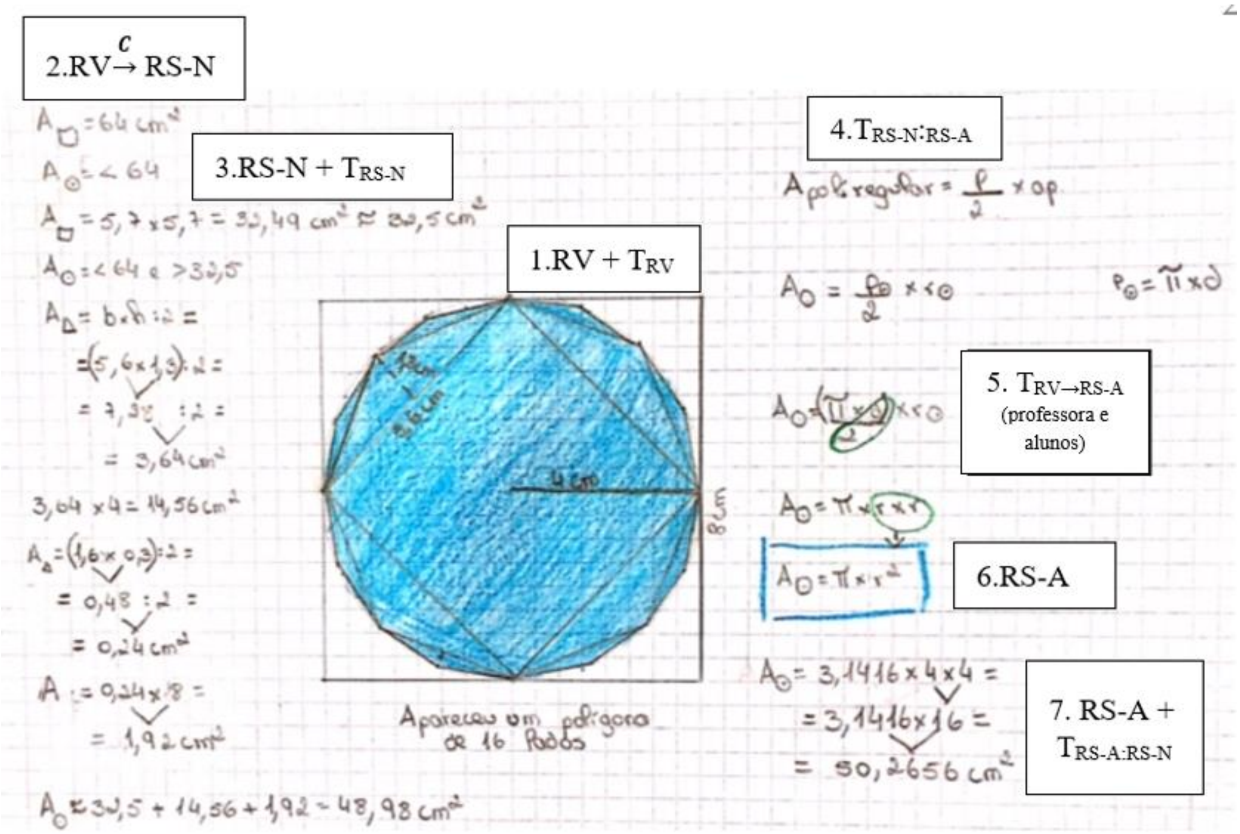
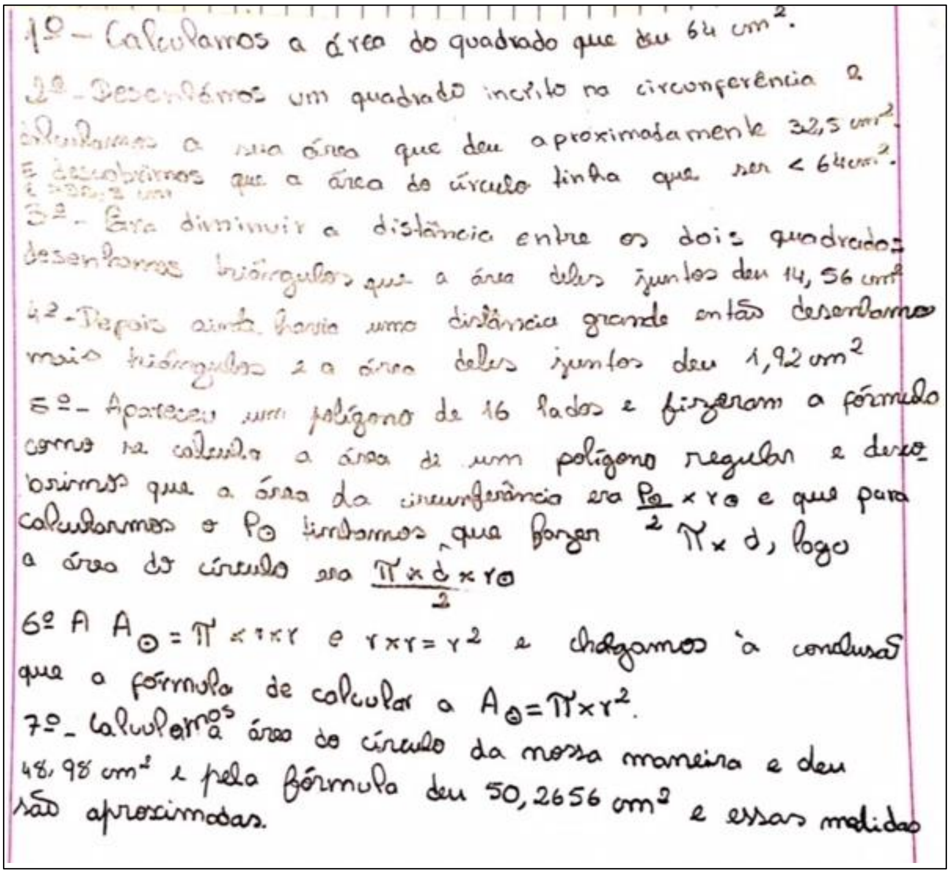


Figura 96: Sequência de transformações depois da intervenção da professora, Grupo V

Os alunos deste grupo apoiaram as representações simbólicas e respetivos tratamentos na representação visual, através de tratamentos visuais, alternando entre ambas.

Culminaram o trabalho realizando representações verbais na escrita do relatório (Figura 97).



1º – Calculamos a área do quadrado que deu 64 cm^2.
2º - Desenhámos um quadrado inscrito na circunferência e
calculamos a sua área que deu aproximadamente 32,5 cm^2.
E descobrimos que a área do círculo tinha que ser < 64 cm^2.
3º - Para diminuir a distância entre os dois quadrados
desenhamos triângulos que a área deles juntos deu 14,56 cm^2
4º - Depois ainda havia uma distância grande então desenhamos
mais triângulos e a área deles juntos deu 1,92 cm^2
5º - Apareceu um polígono de 16 lados e fizeram a fórmula
como se calcula a área de um polígono regular e desco-
brimos que a área da circunferência era $\frac{P_\odot}{2} \times r_\odot$ e que para
calcularmos o $P_\odot$ tínhamos que fazer $\pi \times d$, logo
a área do círculo era $\frac{\pi \times d}{2} \times r_\odot$
6º A $A_\odot = \pi \times r \times r$ e $r \times r = r^2$ e chegamos à conclusão
que a fórmula de calcular a $A_\odot = \pi \times r^2$.
7º - Calculamos a área do círculo da nossa maneira e deu
48,98 cm^2 e pela fórmula deu 50,2656 cm^2 e essas medidas
são aproximadas.

Figura 97: Relatório da atividade, Grupo V (NM5, Apêndice 5; NM6, Apêndice 6)

4.5.7.1 Transformações visuais de representações – Trabalho dos alunos

Em termos de representações, depois da intervenção da professora, os alunos dos Grupos II, utilizaram os três sistemas de representação: verbal, visual e simbólico.

Os alunos do Grupo II fizeram um tratamento visual aos triângulos, rearranjando-os num paralelogramo. De seguida, fizeram a conversão para uma representação simbólica (numérica), procedendo aos cálculos que consideraram adequados e culminaram numa representação verbal, através do relatório escrito. Os alunos compararam as figuras construídas (octógono e paralelogramo) para estabelecer uma correspondência entre os elementos constituintes de cada uma das figuras, o que fizeram através de representações verbais orais e representações simbólicas escritas, até encontrarem a fórmula para o cálculo da área de um círculo (Figura 92). Fizeram ainda um tratamento visual numa representação simbólica, com uma seta para indicar a correspondência entre elementos de duas figuras.

A sequência de transformações de representações realizada por este grupo está esquematizada na Figura 98.

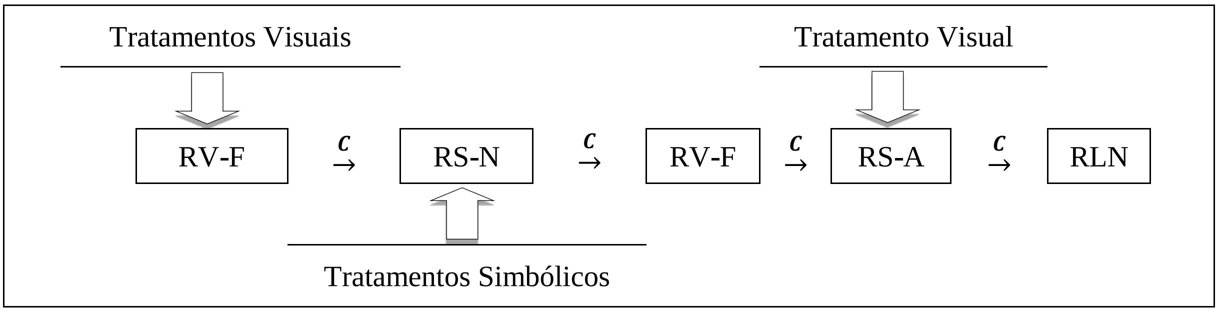


Figura 98: Sequência de transformações de representações feitas depois da intervenção da professora, Grupo II

Os alunos do Grupo III começaram por fazer um tratamento visual à representação visual fornecida (RV-F). De seguida, converteram para linguagem simbólica numérica (RS-N) e procederam aos cálculos necessários para encontrarem um valor aproximado para a área do círculo, através de tratamentos simbólicos. De seguida, com a ajuda da professora, fizeram um tratamento simbólico numa representação simbólica algébrica (RS-A) para encontrarem a fórmula para o cálculo da área de um círculo. Por fim, converteram todo o trabalho efetuado numa representação verbal (RLN), através da escrita do relatório.

Esquematicamente, podemos representar as transformações de representações efetuadas por este grupo da seguinte forma (Figura 99):

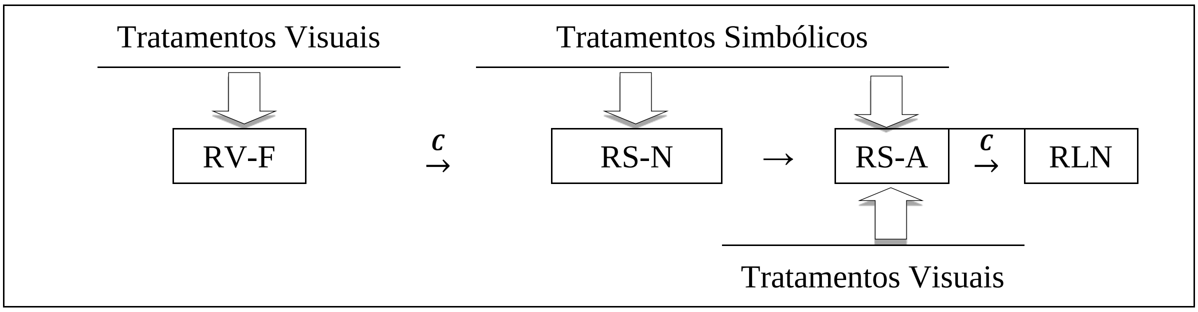


Figura 99: Sequência de transformações de representações feitas depois da intervenção da professora, Grupo III

Os alunos do Grupo V começaram por fazer tratamentos visuais à representação visual figurativa fornecida (RV-F). De seguida, converteram para uma representação simbólica numérica (RS-N) e procederam aos cálculos necessários para encontrarem um valor aproximado para a área do círculo, através de tratamentos simbólicos. A seguir, com a ajuda da professora, fizeram um tratamento visual numa representação simbólica algébrica (RS-A) para encontrarem a fórmula para o cálculo da área de um círculo. Por fim, culminaram com uma representação verbal (RLN), através da escrita do relatório da atividade.

A sequência de transformações de representações realizada por este grupo está esquematizada na Figura 100.

Tratamentos Visuais Tratamento Visual

$$\text{RV-F} \xrightarrow{c} \text{RS-N} \rightarrow \text{RS-A} \xrightarrow{c} \text{RLN}$$

Figura 100: Sequência de transformações de representações feitas depois da intervenção da professora, Grupo V

4.6 Síntese dos resultados à QI4

A QI4 é constituída por duas partes. A primeira parte da QI4 pretende responder à seguinte questão: *De que forma pode o professor induzir os alunos a usarem o artefacto "representações visuais" como uma ferramenta?*

A primeira parte da Intervenção 2, desenhada para responder a esta primeira parte da QI4, consta da exploração de duas tarefas que foram executadas em duas sessões de aulas: a primeira sessão incluiu parte de uma aula e a aula seguinte; a segunda sessão consta de duas aulas. As duas sessões estão intermediadas por 13 dias. A professora utilizou dois tipos de tratamentos visuais: a sobreposição de figuras e a cor na primeira tarefa (Polígonos e círculos), e a decomposição e rearranjo de figuras geométricas na segunda tarefa (Área de um polígono regular), atividades descritas, respetivamente, na Narração Multimodal 3 (NM3) e na Narração Multimodal 4 (NM4). Em termos de representações escritas, todos os alunos trabalharam com representações em linguagem natural, representações simbólicas e representações visuais figurativas, e realizaram conversões e tratamentos visuais na representação figurativa inicial (TRV-F).

A estratégia utilizada pela professora foi rearranjar a figura de forma a transformá-la numa figura equivalente, cuja fórmula para a área já fosse conhecida. Para isso, a professora forneceu um octógono em papel branco para que os alunos o decompusessem em triângulos, fazendo um tratamento visual. A professora pretendia que os alunos reconhecessem que as áreas do octógono e dos oito triângulos eram equivalentes, o que fizeram. De seguida, rearranjaram os triângulos num paralelogramo e esquematizou-se a sua transformação num retângulo. Depois deste rearranjo, os alunos e a professora estabeleceram a equivalência entre os elementos das três figuras (octógono, paralelogramo e retângulo), correspondendo a altura do paralelogramo com o apótema do polígono regular e com a largura do retângulo. De seguida, procederam à correspondência entre o comprimento do retângulo com a base do paralelogramo e o semiperímetro do octógono até encontrar a fórmula para calcular a área de um polígono regular.

Fizeram tratamentos visuais em representações visuais, usaram representações simbólicas para deduzirem a fórmula para calcular a área de um polígono regular e escreveram a fórmula em linguagem natural. Em termos de representações escritas, todos os alunos usaram representações em linguagem natural, representações visuais figurativas e representações simbólicas. Começaram por um tratamento visual na representação figurativa inicial ($T_{RV\text{-}F}$), que consistiu na decomposição e rearranjo de uma figura noutras equivalentes. Depois, os alunos compararam as figuras construídas e estabeleceram correspondências entre os elementos de cada uma delas com representações verbais orais e representações simbólicas escritas, tendo culminado com uma representação verbal. Fizeram um tratamento visual numa representação simbólica (seta para indicar a correspondência entre elementos de duas figuras).

A segunda parte da QI4 pretende responder à seguinte questão: *Como podem os alunos usar representações visuais como uma ferramenta epistémica na aprendizagem da Matemática?*

Todos os grupos começaram a resolução da tarefa com um tratamento visual à representação visual figurativa fornecida (círculo). Fizeram dois tratamentos visuais distintos:

T1: Sobreposição de figuras, com ou sem utilização de cor (seis grupos), com três variantes: Desenho de um polígono inscrito na circunferência (Grupos I e VII), Desenho de um quadrado circunscrito à circunferência e de outro inscrito na circunferência (Grupos IV, V e VI) e Desenho de um quadrado circunscrito à circunferência e subtração dos excessos de área do quadrado relativamente ao círculo. Obtiveram um polígono circunscrito à circunferência (Grupo III).

T2: Decomposição e rearranjo de figuras (um grupo). Desenho de um polígono (com muitos lados) inscrito na circunferência, divisão do mesmo em triângulos, sendo o centro da circunferência um dos vértices de todos os triângulos; recorte dos triângulos e rearranjo dos triângulos num paralelogramo (Grupo II).

Os Grupos I, IV, VI e VII terminaram a tarefa sem precisarem que a professora realizasse tratamentos visuais para promover a continuidade do seu trabalho, enquanto encontravam um valor aproximado para a área do círculo. Os Grupos II, III e V, pelo contrário, precisaram da intervenção da professora. As descontinuidades verificadas no trabalho destes três grupos foram as seguintes:

Grupo II – causada por terem perdido a visão de conjunto dos diferentes procedimentos que tinham de realizar, apesar de terem dito logo de início a estratégia que pretendiam seguir. Nesta altura disseram já não saber o que iam fazer com os triângulos.

Grupo III e Grupo V – causada por não encontrarem maneira de medir a diferença de área entre o círculo e o quadrado circunscrito à circunferência (Grupo III) e o quadrado inscrito na circunferência e o círculo (Grupo V).

Os alunos realizaram transformações de representações verbais, visuais e simbólicas, fazendo tratamentos e conversões. No entanto, apesar desta semelhança de transformações, a partir de determinada altura, o percurso matemático percorrido por cada par/grupo de alunos foi divergindo, como consequência das suas opções de resolução, mesmo aqueles grupos que optaram por realizar o mesmo tratamento visual inicial.

5 Discussão, conclusões e trabalhos futuros

5.1 Contributos, contexto em que foram obtidos e limitações do estudo

Foi nosso objetivo geral explorar modos de aumentar o impacto do uso de representações visuais como ferramenta epistémica no ensino e na aprendizagem, em diferentes domínios de conteúdos matemáticos do 2.º Ciclo do Ensino Básico. Em particular, exploramos, na Álgebra e na Geometria e Medida, algumas transformações de e para representações visuais e o papel importante que tiveram como parte do método de ensino do professor, bem como na compreensão e aprendizagem de determinados conteúdos. Na secção seguinte identificamos os contributos do estudo, os quais desdobraremos depois para nos referirmos às suas especificações.

5.1.1 Contributos do estudo

De acordo com os resultados obtidos para as quatro questões de investigação, identificamos os três contributos gerais do nosso estudo:

1. *A realização de tratamentos visuais permite a manipulação de qualquer tipo de representação, facilita a continuidade da atividade discente e potencia as transformações de representações, diversificando-as, ao variar as estratégias de ensino e/ou de resolução de uma tarefa.*

2. *O conhecimento e as habilidades de selecionar, criar e usar os tratamentos visuais do professor resultam do seu desenvolvimento profissional, intencional e sistemático, e têm um papel importante na aprendizagem dos alunos.*

3. *Os tratamentos visuais são uma ferramenta matemática que pode proporcionar uma mediação epistémica, possibilitando uma aprendizagem dos alunos em vários níveis de sofisticação, e de acordo com os "seus" percursos na resolução da tarefa.*

De seguida referir-nos-emos especificamente a cada um deles, apoiando-nos nos resultados encontrados na nossa investigação.

5.1.1.1 Contributo 1 – Potencialidades das representações e dos tratamentos visuais

O Contributo 1 diz respeito às potencialidades das representações e dos tratamentos visuais para a aprendizagem da Matemática. Os resultados encontrados permitiram-nos identificar os requisitos para passar de um uso de representações visuais como signo para um uso de representações visuais como artefacto. Este contributo pode ser desdobrado em:

1.1. *As representações visuais, através de tratamentos visuais, permitem a manipulação de qualquer tipo de representação, nomeadamente verbal, simbólica e visual* (resposta à QI1).

As representações visuais, quer como base, quer como acrescento a outra representação, alteram o sistema de representação, tornando-as mais versáteis, o que permite outras formas de ver e trabalhar as tarefas. Ao longo deste trabalho, utilizamos muitas figuras retiradas dos registos dos alunos. Uma das características que é transversal à grande maioria é serem representações nas quais se notam elementos de sistemas de representação diferentes. Começa-se com uma representação inicial, num qualquer sistema de representação, e fazem-se acrescentos de elementos de outros sistemas de representação, obtendo-se uma representação a partir da inicial com uma "segunda pele" noutro sistema de representação, com outras características. Em qualquer das situações, os elementos visuais estão sempre presentes. São exemplos:

a) A Figura 15 e a Figura 24 mostram o acrescento de elementos visuais a representações visuais figurativas.
b) A Figura 16, à esquerda, ou a Figura 19 mostram o acrescento de elementos visuais a uma representação simbólica numérica − Esses elementos visuais que se acrescentaram transformaram a representação simbólica numa representação visual (esquema).

c) A Figura 26 mostra o acrescento de elementos visuais a uma representação verbal − Esses elementos visuais que se acrescentaram transformaram a representação verbal numa representação visual (esquema) que serviu de base à execução do trabalho posterior (Figura 27).
d) A Figura 84, ou a Figura 92 mostram elementos visuais que foram acrescentados a uma representação simbólica algébrica − Esses elementos visuais que se acrescentaram formaram uma "segunda pele", evidenciando determinadas propriedades e/ou justificações. Foram suficientes para que os alunos compreendessem essa situação em particular, mas não houve evidências de que fossem capazes de o aplicar a uma situação nova.
e) A Figura 27, ao centro, mostra uma representação visual à qual foram acrescentados elementos simbólicos, traduzindo um determinado grau de abstração evidenciado pela adaptação da representação visual.

Este tipo de representações esteve presente quando a professora ou os alunos fizeram tratamentos visuais. O efeito foi ter resultado num número maior de transformações de representações e de ter facilitado as conversões entre representações de sistemas diferentes de representação.

1.2. *A versatilidade das representações visuais, através da realização de tratamentos visuais, amplia a sua utilização de simples signo a artefacto, como um ponto de partida para fazer algo na atividade matemática* (resposta à QI1).

O nosso estudo mostra que é possível as representações visuais serem usadas como artefacto, não só pelo professor, mas também pelos alunos, desde que o professor a isso os induza. São disso exemplo, duas situações do nosso estudo: o trabalho dos alunos feito após a realização do tratamento visual efetuado pela professora (Figura 27) e o trabalho realizado pelos alunos na segunda parte da Intervenção 2.

Mais especificamente:

a) Os elementos visuais que se acrescentaram nas Figuras 15 e 24 transformaram a representação visual que tinha o estatuto de signo para o estatuto de artefacto, com potencialidades para funcionar como uma ferramenta matemática. Os elementos visuais que se acrescentaram permitiram uma leitura da representação, evidenciando informação diferente; o da Figura 15 evidenciou a lei de formação da sequência e o da Figura 24 evidenciou a expressão geral. A adição desses elementos permitiu a realização de algo na atividade matemática, tanto na da professora como na dos alunos. Embora se tenham adicionado os mesmos elementos, o que se fez em cada uma das situações foi diferente, resultando em dois tipos de generalização diferente (próxima e distante).

b) A Figura 26 mostra o acrescento de elementos visuais a uma representação verbal − Os elementos visuais que se acrescentaram na Figura 26 transformaram a representação inicial (verbal) numa representação de um sistema diferente (visual), que permitiu a realização de conversões entre representações dos três sistemas de representação (Figura 27).

1.3. *As representações visuais são um artefacto à disposição do professor durante o ensino, e dos alunos durante a resolução de tarefas, pois possuem características intrínsecas, potenciadoras de transformações de representações, facilitando a continuidade da atividade dos alunos* (resposta à QI1).

As sequências de transformações das representações [Figura 20, Figura 21, Figura 22, Figura 23, Figura 25, Figura 29 e Figura 30] mostram que as representações visuais foram usadas em todo o trabalho por todos os alunos, durante a Intervenção 1. Os alunos dos Grupos I e III usaram representações visuais em tabela ou esquema, tendo mostrado continuidade na sua atividade, realizando tratamentos efetivos sobre essas representações, quando relacionaram as linhas e colunas na tabela ou no esquema. O Grupo IV começou com uma representação visual numa tabela (Figura 17, à esquerda), realizando um tratamento mantendo-se no sistema visual. O Grupo II também começou com uma representação visual (esquema), mas os tratamentos realizados foram insuficientes para permitir conversões (e.g. Figura 16, à direita). Esta falta de habilidade na realização de tratamentos simbólicos para representações visuais (Grupo II), ou ausência de tratamentos simbólicos (Grupo IV), levou a descontinuidades na atividade desses alunos.

No trabalho destes grupos, observou-se que a presença de representações visuais, por si só, pode não ser suficiente para permitir que os alunos continuem a sua atividade. A diferença entre os tipos de tratamento realizados pelos alunos dos Grupos II e IV e os alunos dos Grupos I e III na parte inicial de seu trabalho é que os primeiros grupos realizaram tratamentos simbólicos [ver Figura 16, à direita e Figura 18, à direita], causando descontinuidades na sua atividade, enquanto os Grupos I e III realizaram tratamentos visuais [ver Figura 17, à direita e Figura 19], o que permitiu que a sua atividade fosse contínua. Esta continuidade também foi observada nos Grupos II e IV, após o tratamento visual da Figura 24 [ver a Figura 27 para o Grupo II] realizada pela professora. Esta intervenção abriu novas possibilidades de ver e compreender a tarefa, permitindo que os alunos alcançassem o resultado desejado [ver Figura 27 e Figura 28] e que já tinham sido alcançados pelos Grupos I e III. As representações visuais podem ser utilizadas não só como representação de conceitos (signo), mas também como representação de processos enquanto se procuram soluções para determinada situação problemática, facilitando a continuidade da atividade matemática.

1.4. *A utilização de representações visuais, e em particular de tratamentos visuais, proporciona variedade de transformação de representações e permite variar as estratégias de ensino e/ou de resolução de uma tarefa* (resposta à QI2).
1.5. *A utilização de tratamentos visuais pelo professor pode aumentar o número e as características das conversões efetuadas pelos alunos* (resposta à QI2).

Uma das estratégias a que o professor pode recorrer para promover a continuidade da atividade dos seus alunos é realizar tratamentos visuais às representações com que os alunos estão a trabalhar, o que vai condicionar as transformações seguintes. Na intervenção 1, tanto os alunos como a professora fizeram um tratamento visual à representação visual fornecida (Figura 15 e Figura 24, respetivamente). Tanto um tratamento como outro facilitaram a conversão de uma representação visual para outra simbólica (numérica e algébrica). O tratamento efetuado pelos alunos facilitou a generalização próxima, ligada à lei de formação de uma sequência; por seu lado, o tratamento feito pela professora facilitou a generalização distante, ligada à expressão geral da sequência. Neste caso, fez-se uma conversão para uma representação algébrica com um nível de dificuldade diferente, na medida em que o segundo tratamento potenciou uma conversão para um nível abstrato mais elevado (generalização distante) através da escrita da expressão geradora.

5.1.1.2 Contributo 2 – Importância do desenvolvimento profissional para selecionar, criar e usar tratamentos visuais

O Contributo 2 decorrente do desenvolvimento profissional da professora investigadora revela a importância do desenvolvimento profissional para selecionar, criar e usar tratamentos visuais, podendo ser desdobrado em:

2.1. *Na preparação das suas aulas, especificamente durante a seleção das tarefas, o professor pode considerar o conhecimento existente sobre as transformações de representações permitindo-lhe um melhor reconhecimento, em termos de representações, do valor das tarefas (resposta à QI3).*

A análise da qualidade de uma tarefa não é fácil e existem poucos instrumentos de uso rápido à disposição do professor para a verificar. A análise de uma tarefa em termos de representações e transformações de representações mostrou ser uma forma eficaz e fácil para apurar essa qualidade. A realização da primeira parte da Fase 2 permitiu à professora caracterizar as tarefas no que concerne às representações presentes no enunciado, expectáveis nas respostas dos alunos e efetivamente utilizadas por eles.

Quando se usam representações nos três sistemas de representação – verbal, visual e simbólico – e a representação visual tem potencialidades para ser usada como uma ferramenta matemática, é quase garantida a diversidade de transformações de representações. Trabalhar as tarefas como são apresentadas nos livros escolares não é garantia de diversidade de representações, mas se o professor tiver conhecimento de transformações de representações pode, com pequenas alterações às mesmas, aumentar o seu leque.

Se, por um lado, as representações visuais são versáteis, permitindo uma utilização diversificada, por outro, esta versatilidade pode ser uma dificuldade na procura da(s) representação(ões) visual(ais) mais adequada(s) e da melhor forma de a(s) utilizar. A Matemática é uma disciplina com domínios de conteúdos diversificados assentes numa grande variedade de representações em que a utilização dinâmica de representações visuais não depende da aplicação de regras pré-estabelecidas, mas sim de uma utilização com algum poder de manipulação e criatividade. Vimos que as representações visuais são um artefacto, mas é a utilização de representações visuais como ferramenta matemática epistémica (através de tratamentos visuais) cuja forma de utilização é pouco evidente, tendo o professor um desafio em criar situações de aprendizagem que a promovam. Mesmo nesta situação, há que contar com a criatividade dos alunos quando reutilizam os tratamentos visuais. Este domínio exige intencionalidade do professor com um uso sistemático e posterior reflexão, o que supõe o seu desenvolvimento profissional. Os resultados mostraram como a professora investigadora, durante a fase de desenvolvimento profissional, recorreu ao conhecimento existente para se apoderar desse conhecimento e transpô-lo para a sua atividade docente. Partiu do trabalho realizado por Duval (1993; 2006a; 2006b) de análise de representações através das transformações de representações, da noção de artefacto e de ferramenta de Monaghan, Trouche e Borwein, (2016) e de modelo de Nia e de Vries (2017), para ser capaz de criticar as tarefas no que respeita às representações múltiplas e valorizar as representações visuais.

Este conhecimento requer um trabalho profundo de análise com reflexão das implicações das ações do professor na atividade realizada pelos alunos, para reconhecimento e utilização de representações e transformações de representações. Para além de que o professor melhora o seu conhecimento e capacidades ao fazê-lo, isto é, desenvolve-se profissionalmente.

Da análise dos resultados da Intervenção 1 (descritos na NM1) resultaram evidências relativas à utilização das representações visuais. A primeira evidência relevante para o uso de representações visuais que a professora investigadora encontrou foi a facilidade com que elas puderam atuar nas representações de qualquer sistema de representação, destacando informações relevantes, podendo ser usadas para assinalar ou destacar algumas características de maneiras diferentes, através de pequenos sinais, da cor e da decomposição.

A segunda evidência encontrada pela professora investigadora foi a possibilidade de usar representações visuais para justificar o raciocínio realizado. No caso específico, um tratamento visual da representação visual, proporcionada pelo uso da cor, permitiu promover o uso de representações múltiplas e conversões entre elas (Figura 27), facilitando as conversões de representações.

Este primeiro trabalho de autorreflexão e de análise acabou por influenciar o sentido do percurso feito durante o seu desenvolvimento profissional, nas intervenções intermédias. Durante esta fase, a professora investigadora também teve a oportunidade de trabalhar em conjunto com outros investigadores. Inicialmente com investigadores para validar as narrações multimodais e posteriormente com revisores científicos.

2.2. *Como os tratamentos visuais dependem também da criatividade do usuário, torna-se necessário escolher os mais apropriados a determinada situação de aprendizagem ou domínio de conteúdo matemático, o que requer desenvolvimento profissional (resposta à QI3).*

O estudo pormenorizado (Partes 3, 4 e 5 da Fase 2) de um domínio de conteúdos (Múltiplos e divisores) permitiu à professora selecionar as representações visuais mais adequadas a este domínio (Parte 3), comparar os efeitos do seu uso (Parte 5) e saber como os alunos as utilizavam e que utilidade lhe davam (Parte 4). Estas partes também lhe permitiram desenvolver uma determinada destreza na utilização conjunta dos três sistemas de representação.

Os tratamentos visuais podem ser realizados de formas diferentes, consoante o tipo de representação em que vão atuar. Acrescente-se que a utilização de tratamentos visuais está ligada à criatividade do utilizador. Por esta razão, a sua utilização e entendimento é subjetivo, de modo que, para os usar de forma consciente e eficaz, o professor tem de ter algum conhecimento da maneira como os alunos os vão entender e utilizar, o que requer a análise da própria prática.

O desenvolvimento profissional, tendo por base a análise da própria prática, tendo a autorreflexão sido feita de forma sistematizada, com revisão de literatura e em equipa com investigadores, torna-o mais consistente. Foi a reflexão aturada sobre a Intervenção 1, a escrita das narrações multimodais, de artigos e respetiva discussão com a equipa de investigação e revisores que potenciaram um melhor conhecimento das situações concretas exploradas nas intervenções de todas as fases do estudo.

A elaboração de narrações multimodais facilitou o processo de desenvolvimento profissional, ao nível de autorreflexão. Com efeito, a análise da narração multimodal da primeira intervenção (NM1) permitiu um melhor conhecimento do uso das representações visuais, o que condicionou a sucessão das intervenções intermédias da Fase 2, imprimindo uma nova orientação ao estudo. A análise da narração multimodal da sucessão das intervenções intermédias (MN2) permitiu conhecer com detalhe as características das representações utilizadas pelos alunos, assim como identificar as ações que o professor deve realizar, durante a preparação da aula e durante o ensino, para promover uma situação com representações múltiplas.

Os resultados mostraram como o professor, durante a fase de desenvolvimento profissional, recorreu ao conhecimento existente para adaptar e escolher as representações mais adequadas a cada domínio de conteúdos. Por exemplo, associar um diagrama de *Venn* a conjuntos finitos (e.g. divisores de um número natural) e uma reta numérica a conjuntos infinitos (e.g. múltiplos de um número natural). Destacar no primeiro caso a interseção de conjuntos para identificar o m.d.c. de dois ou mais números naturais, ou os divisores comuns desses números são outro exemplo [resultados da Parte 3 da Fase 2]. No entanto, verificou-se que os alunos levam o seu tempo para reconhecer a equivalência de representações de sistemas diferentes. Para que possa avaliar como os alunos se apropriam dessa equivalência e proporcionar, ao mesmo tempo, uma situação para que eles o possam reconhecer, o professor pode proporcionar atividades de resolução de problemas com liberdade de utilização de representações [resultados da Parte 4 da Fase 2]. Proporcionar um tempo da aula para analisar as respostas de cada aluno ou grupo de alunos, pode ajudar a este entendimento.

Durante a Parte 7 da Fase 2, caracterizamos as práticas de ensino dos professores entrevistados, tendo constatado a utilização de representações visuais como artefacto. No entanto, todos confirmaram que, embora os professores as usassem, os alunos não o faziam. Tornava-se necessário averiguar em que condições o começavam a fazer.

Como não é habitual os alunos usarem as representações visuais como artefacto, apesar de os professores o fazerem com alguma regularidade, dados que obtivemos da realização das entrevistas, e a sua utilização não ser evidente nem para os alunos nem para o professor, torna-se necessário que o professor faça uma exploração exaustiva das condições que potenciam o seu uso, para o poderem proporcionar aos alunos. Ainda, a utilização de ferramentas em Matemática é um processo contínuo, em constante desenvolvimento e melhoria, o que torna mais premente este conhecimento.

5.1.1.3 Contributo 3 – Os tratamentos visuais usados como ferramenta para construir conhecimento matemático

O Contributo 3 identifica a realização de tratamentos visuais sobre as representações como uma ação necessária para transformar o artefacto "representações visuais" numa ferramenta matemática epistémica. Esta utilização como ferramenta proporcionou uma mediação epistémica e uma aprendizagem dos alunos em vários níveis de sofisticação, de acordo com os "seus" percursos na resolução da tarefa. Este contributo pode ser desdobrado em:

3.1. *A utilização de tratamentos visuais pode ser uma técnica à disposição do professor para levar os alunos a construir o seu conhecimento, isto é, os tratamentos visuais* *podem ser uma ferramenta matemática que pode proporcionar uma mediação epistémica* (resposta à QI4).

Por um lado, as representações múltiplas são de utilização complexa, as representações visuais quando utilizadas como signo não trazem grande vantagem à aprendizagem. Por outro, a utilização docente como artefacto não garante uma utilização semelhante pelos alunos. No entanto, apesar destas dificuldades, quando as representações visuais são utilizadas com tratamentos visuais permitem a realização de outras transformações de representações, promovendo a flexibilidade de representações através da realização de conversões, tornando o trabalho mais sofisticado.

Os alunos selecionaram conhecimentos pré-adquiridos, relacionaram-nos com a atividade presente, calcularam, inferiram conhecimentos, transpuseram e transferiram para uma situação nova (depois da intervenção da professora na Intervenção 1 e no caso da segunda parte da Intervenção 2). Estas situações evidenciaram o uso de representações visuais como mediador epistémico para construir conhecimento. E em ambas, estas situações de aprendizagem foram proporcionadas pela professora.

3.2. *Os tratamentos visuais, quando utilizados como ferramenta matemática epistémica, permitem a aprendizagem em vários níveis de sofisticação, permitindo ao aluno fazer o "seu" percurso matemático na resolução de uma tarefa (resposta à QI4).*

Durante a exploração da Tarefa 3 da Intervenção 2, alguns grupos optaram pelo desenho de um polígono de muitos lados, que serviu de cálculo aproximado à área do círculo. – Grupos I, II, V e VII. Todos tiveram um desempenho com níveis de sofisticação diferentes:

- Grupo I – A obtenção da solução adveio da utilização de um polígono simples (hexágono) sobreposto ao círculo e do cálculo da sua área.
- Grupo V – A obtenção da solução adveio da construção de um polígono simples (quadrado) ao qual foram acrescentados triângulos, resultando num polígono de 16 lados, para aproximar as áreas, e do cálculo da sua área.
- Grupo II – A obtenção da solução deveu-se à utilização de um polígono de 24 ou 12 lados, dividido em triângulos iguais, ao recorte e ao rearranjo noutra figura geométrica (paralelogramo), e do cálculo da sua área.
- Grupo VII – A obtenção da solução deveu-se à utilização de um polígono de muitos

lados sobreposto ao círculo e da procura da correspondência de medidas entre esse polígono e o círculo.

O trabalho realizado pelo Grupo I corresponde ao nível mais simples de sofisticação; é o trabalho mais concreto, visto apoiar-se ao longo do trabalho numa figura geométrica concreta. Em contrapartida, o trabalho realizado pelo Grupo VII corresponde ao trabalho mais complexo de sofisticação, pois revela um certo nível de abstração quando os alunos transpõem a informação de uma figura geométrica para um sistema de representação simbólico algébrico, apesar das dificuldades que revelaram mais tarde ao nível da comunicação matemática. Tudo indica que este nível de sofisticação está relacionado com a maior ou menor facilidade com que os alunos compreendem e assimilam os conteúdos, podendo ser adaptados à sua cultura matemática. No entanto, ressaltamos que, seja simples seja complexo o nível de sofisticação, os alunos mantiveram-se em atividade, não se tendo verificado impedimentos na construção do conhecimento.

Apesar de algumas representações visuais serem convencionais e com determinadas regras de manipulação e utilização, como é, por exemplo, o caso de tabelas e gráficos, é sempre possível dar-lhes nova utilização, dependendo também da adição de elementos de outros tipos de representações. Na Intervenção 2, seis grupos de alunos utilizaram o mesmo tratamento visual na mesma representação visual, isto é, a inscrição e/ou circunscrição de polígonos no círculo. Este tratamento desta representação visual permitiu explorações diferentes em cada um deles, dependendo da criatividade, do conhecimento adquirido e do trajeto seguido por cada aluno ou grupo de alunos. Verificou-se o mesmo trajeto nos elementos do grupo, mas também houve casos (exemplo no Grupo II e Grupo IV) em que cada elemento do grupo fez o mesmo tratamento visual de forma diferente do seu colega de grupo. Trabalhar com representações visuais adapta-se à individualidade de cada um, pois uma das orientações metodológicas a que os professores devem atender é ter em consideração não apenas as características das turmas, mas também as dos alunos. Nesse sentido, podemos afirmar que a utilização dinâmica de representações visuais potencia situações de não discriminação provocadas pela fraca preparação dos alunos.

Foi grande a diversidade de estratégias e, dentro da mesma estratégia, houve maneiras diferentes de chegar ao resultado – Exemplo do Grupo III, IV e VI que, usando todos os grupos quadrados inscritos e circunscritos, encontraram a solução de formas diferentes:

- Grupo III – Retirar o espaço sobrante entre o quadrado circunscrito e o círculo.
- Grupo IV – Acrescentar espaço ao quadrado inscrito até preencher o círculo.
- Grupo VI – Dividir ao meio o espaço sobrante entre o quadrado circunscrito e o quadrado inscrito e acrescentar este valor ao quadrado inscrito.

3.3. *A inclusão de situações com tratamentos visuais pode desenvolver a comunicação matemática na sala de aula, tanto ao nível da comunicação oral como escrita (resposta à QI4).*

O trabalho autónomo desenvolvido durante a Parte 2 da Intervenção 2 (Fase 3 do estudo), assente em representações múltiplas com constante transformação de representações (tratamentos e conversões), potenciou a continuada troca de impressões e ideias com os pares na explicação das suas ideias. Uma das evidências é o facto de ter havido dois grupos de alunos (Grupo II e Grupo IV), que fizeram registos diferentes dentro do grupo, mas tinham clara consciência de que o trabalho era equivalente e levava ao mesmo resultado, evidente na troca de impressões que se gerou entre eles.

Durante a Parte 2 da Intervenção 2, os alunos utilizaram as representações visuais, não como representação final, mas como mediador epistémico, sendo evidências desse uso:

- selecionar o tratamento que consideraram mais fácil para conseguir calcular um valor aproximado da área do círculo;
- relacionar o conteúdo em questão com aprendizagens e conceitos já aprendidos, nomeadamente a aproximação das áreas de círculos e polígonos inscritos ou circunscritos a esses círculos, e a relação entre os elementos de figuras, e.g. paralelogramo, círculo e polígono regular;
- calcular valores intermédios (exemplo das áreas dos polígonos inscritos ou circunscritos, ou ambos, que lhes permitiu conhecer um valor aproximado para a área do círculo;
- concluir determinadas equivalências, e.g. em determinadas figuras;
- transferência de situações através do reconhecimento da utilização de tratamentos visuais a uma situação nova.

Esta atividade também tornou necessária a comunicação matemática, porque os alunos tinham de identificar e explicar à professora a estratégia seguida ou que iam seguir, bem como justificar raciocínios, o que fizeram várias vezes ao longo do trabalho. Com efeito, de cada vez que a professora investigadora se aproximava de um grupo, pedia-lhes para a porem ao corrente do trabalho efetuado, do que iam fazer de seguida, das dificuldades que tinham, de como tencionavam ultrapassá-las, e outras.

Este trabalho facilitou a escrita do relatório final, atividade realizada com total autonomia. Com efeito, os alunos elaboraram o relatório da atividade enquanto a professora apoiava o trabalho dos grupos mais atrasados. O relatório ficou pronto dentro do tempo previsto, o que mostra a sua autonomia na realização dessa tarefa.

5.1.2 Contexto em que o estudo decorreu

Este estudo surgiu no contexto da frequência de um curso de doutoramento com a possibilidade de investigação de avaliação da pertinência, ou não, de utilizar representações visuais no ensino e na aprendizagem de conteúdos matemáticos durante o 2.º Ciclo do Ensino Básico. Baseou-se na crença da professora investigadora nos benefícios da utilização de representações visuais, contrariada pela relutância dos seus alunos na sua utilização e pela descrença dos seus colegas de trabalho quanto à possibilidade de os alunos as usarem com eficiência. A frequência do curso de doutoramento permitiu-lhe conhecer o trabalho feito nessa área até à data, confrontar e partilhar as experiências, ideias e resultados com investigadores e ajustar as suas crenças.

A professora baseou a sua investigação num trabalho letivo com representações múltiplas, procurando dar às representações visuais o mesmo destaque que já se dá às representações verbais e simbólicas. Para o fazer, teve de se aplicar no seu desenvolvimento profissional, pois se esta utilização não é óbvia para os alunos, também o não é para os professores, tendo de ser, à partida, intencional. Embora o currículo em vigor (MEC, 2013) apenas valorize as conversões de representações verbais e simbólicas, o professor tem liberdade para as explorar como entender, de forma que introduzir representações visuais não prejudicou as conversões entre as representações verbais e simbólicas, nem contrariou as orientações da tutela. Com efeito:

> [as] escolas e os professores devem decidir quais as metodologias e os recursos mais adequados para auxiliar os seus alunos a alcançar os desempenhos definidos nas Metas Curriculares. A experiência acumulada dos professores e

das escolas é um elemento fundamental no sucesso de qualquer projeto educativo, não se pretendendo, por isso, espartilhar e diminuir a sua liberdade pedagógica nem condicionar a sua prática letiva. Pelo contrário, o presente Programa reconhece e valoriza a autonomia dos professores e das escolas, não impondo, portanto, metodologias específicas" (MEC, 2013, p. 28).

5.1.3 Limitações do estudo

O contexto em que o estudo foi feito e a metodologia adotada na investigação levam-nos a colocar algumas condições para a compreensão e generalização dos contributos formulados. Fez-se o estudo de determinados tratamentos visuais em dois conteúdos de dois domínios de conteúdos matemáticos, da Álgebra e da Geometria e Medida. Apesar de ser dada uma ideia de como utilizar as representações visuais de forma dinâmica e com estatuto de ferramenta matemática epistémica nesses conteúdos, não há regras nem orientações específicas para o fazer, dependendo muito da criatividade dos utilizadores e da vontade expressa em os utilizar. Por essa razão, nada nos diz se e como podemos extrapolar estes tipos de tratamento para outros conteúdos, nem mesmo para outros conteúdos dos mesmos domínios de conteúdos.

O facto de os tratamentos visuais permitirem aos alunos seguir as suas iniciativas também abre a porta a muitas outras situações que não foram abordadas neste estudo. Da mesma forma, os tratamentos visuais podem ser utilizados de modo diferente pelo professor. Sublinhe-se que no presente trabalho apenas está a visão e exploração de uma professora.

A destreza na utilização de representações múltiplas na sala de aula, tanto para o professor como para os alunos, vai-se adquirindo ao longo dos anos. Estudar a maneira como um professor e um conjunto de alunos utilizam representações visuais de forma dinâmica requer muito tempo. Este prolongar no tempo torna inviável a gravação e análise de todas as aulas e, consequentemente, a escrita de narrações multimodais para todas elas. Para além disso, o prolongamento no tempo pressupõe a recolha de muitos dados, assim como a aplicação do professor, o que só poderá ser feito se ele próprio estiver diretamente implicado no estudo. Assim, tem de haver uma motivação intrínseca do professor, de forma a poder conciliar os objetivos do estudo com os objetivos pedagógicos, para conseguir coordenar todos os propósitos.

Durante a Fase 2, de desenvolvimento profissional, foram recolhidos muitos mais dados do que os analisados, o que se traduziu na inviabilidade de se analisarem todos. Por esta razão, procedeu-se a uma seleção dos mesmos, de acordo com as necessidades de resposta às questões da professora investigadora. Todas as decisões que a professora investigadora tomou durante esta Fase 2 estiveram diretamente relacionadas com as necessidades que sentiu de desenvolvimento profissional. Estiveram também sujeitas à planificação das unidades didáticas curriculares, assim como às tarefas utilizadas que selecionou do livro adotado, acabando por condicionar as representações usadas. Como essas tarefas se manifestaram inadequadas para atingir os seus propósitos, a professora investigadora sentiu necessidade de adaptar algumas ou construir novas.

No final, uma breve nota sobre as implicações pedagógicas do trabalho do professor relativamente ao uso de representações visuais. O professor pode fazer uma caracterização das representações no enunciado das tarefas e das representações expectáveis nas respostas dos alunos. No entanto, como não há indicações claras nos currículos, a exploração e reinvenção de representações é baseada numa decisão pedagógica do professor, de acordo com as suas crenças, o que vai ter necessariamente determinadas implicações pedagógicas. Também a forma como os grupos de alunos entenderam e trabalharam as representações visuais se mostrou muito própria. Estas características tornaram este trabalho peculiar.

5.2 Discussão dos principais contributos

Nesta secção vamos referir-nos à discussão dos principais contributos através dos contributos específicos de cada contributo geral, relacionando-o com a questão de investigação de cujos resultados foi possível a sua extração.

5.2.1 Contributos relativos à primeira questão de investigação

O Contributo 1 diz respeito às potencialidades das representações e dos tratamentos visuais para a aprendizagem da Matemática. Os resultados à primeira questão de investigação permitiram-nos identificar três contributos mais específicos, pois *a realização de tratamentos* *visuais permite a manipulação de qualquer tipo de representação, facilita a continuidade da atividade discente e potencia as transformações de representações.*

As representações visuais têm sido estudadas em áreas de conhecimento e de atividade muito distintas. Dreyfus (1991) deteta relutância em usar as representações visuais na sala de aula. Vários estudos apontam para a importância das representações visuais no ensino e na aprendizagem da Matemática (e.g. Palacios, 2006; Presmeg, 2006; Stylianou & Silver, 2004). São vários os estudos de procura de informação sobre as vantagens do uso de determinadas representações visuais (e.g. Fagnant & Vlassis, 2013; Stylianou & Silver, 2004; Ryve et al., 2013), sendo estas importantes para potenciar o sucesso na resolução de problemas e a diversificação de estratégias de resolução (Ainsworth, 2006). Há, portanto, o reconhecimento da relação entre o uso de representações visuais e o ensino da Matemática (e.g. Duval, 2006a; El Mouhayar & Jurdak, 2013; Presmeg, 2006), e sabe-se que as representações usadas como signo não trazem mais valias à aprendizagem (NCTM, 2008). O nosso estudo permitiu confirmar que a presença de representações visuais, por si só, pode não ser suficiente para permitir que os alunos continuem a sua atividade, pois mostra que foi necessária a realização de tratamentos visuais que permitiram a manipulação de representações (seja visual, simbólica ou verbal).

Os resultados do nosso estudo deixam claro que as representações visuais permitem a realização de tratamentos ou de uma espécie de transformação de representações, que é fundamental para permitir a continuidade na atividade dos alunos. Ao contrário do que é sugerido por alguns estudos (e.g. Hegarty & Kozhevnikov, 1999; David & Tomaz, 2012), os nossos resultados não apontam para a necessidade de as representações visuais terem características específicas ou para serem de um tipo particular para permitir a continuidade da atividade dos alunos, embora algumas representações visuais possam ser mais úteis que outras, dependendo da situação. No entanto, foi a introdução de tratamentos visuais, espontaneamente pelos alunos ou induzida pela professora, que apoiou a continuidade na atividade discente (Contributo específico 1.1).

Acrescente-se que a realização de transformações de representações é fundamental para uma compreensão da Matemática (e.g. Duval, 2006; Ainsworth, 2006; Presmeg, 2006), e que cada vez mais se valoriza a visualização e as representações visuais. Os principais atributos das representações visuais que são eficazes nos tratamentos são a versatilidade e a conexão à visualização, permitindo-nos responder à QI1 (*Que características devem ter as representações visuais no sentido de dar continuidade à atividade dos alunos?*). Quando a representação visual é usada neste contexto, deixa de funcionar apenas de forma estática (como signo definindo conceitos), passando também a poder ser usada de forma criativa para inspirar a atividade dos alunos – forma dinâmica. No entanto, ainda não se conhecem bem as melhores formas de explorar as representações visuais nem as formas de potenciar a realização de transformações de representações.

O Contributo específico 1.2 refere-se à versatilidade das representações visuais, característica já apontada por vários autores (e.g. Dreyfus, 1991; Stylianou & Silver, 2004). Esta valência das representações visuais, que lhes é dada pelas suas características versáteis, amplia o seu estudo como artefacto (e.g. Ewenstein & Whyte, 2007). O nosso estudo aponta a realização de tratamentos visuais como uma forma de ampliar a sua utilização de signo a artefacto, na realização da atividade matemática.

Os nossos resultados evidenciam que as representações visuais podem suportar a continuidade na atividade dos alunos na abordagem de uma tarefa de álgebra, através de tratamentos visuais como a "segunda camada" de qualquer representação inicial, o que facilitou as conversões (Contributo 1.3).

No nosso estudo, constatamos que as representações visuais são um artefacto que pode ser utilizado para resolver problemas relacionados com a falta de experiências letivas com representações múltiplas. Como vários autores defendem, a ausência ou a pouca frequência destas situações provocam dificuldades na flexibilidade entre representações matemáticas, impedindo a sua compreensão (e.g. Duval, 2006a; Ainsworth, 2006; Presmeg, 2006). Os nossos resultados mostram que essa dificuldade pode ser ultrapassada através da utilização dinâmica de representações visuais, pois as características intrínsecas das representações visuais são potenciadoras de transformações de representações, facilitando a continuidade da atividade dos alunos (Contributo 1.3). No entanto, é possível que, na realização de uma tarefa, as representações possam dificultar as operações e/ou outras formas de a ver.

Este estudo argumenta que, se as representações visuais forem utilizadas de forma eficiente na atividade matemática (como artefacto e que classificamos de forma dinâmica), a realização criativa de tratamentos visuais pode ajudar os alunos a superar a rutura no seu esforço produtivo de resolver o problema.

5.2.2 Contributos relativos à segunda questão de investigação

Os resultados à QI2 também contribuíram para o enunciado do Contributo 1, que diz respeito às potencialidades das representações e dos tratamentos visuais para a aprendizagem da Matemática. Contribuíram mais especificamente para a segunda parte do enunciado do Contributo 1, isto é, que *a realização de tratamentos visuais potencia as transformações de representações, diversificando-as, ao variar as estratégias de ensino e/ou de resolução de uma tarefa*.

A discussão dos contributos específicos anteriores (1.1, 1.2 e 1.3) apontou para a importância de um tipo de transformação de uma representação (um tratamento), particularmente um tratamento visual, que depende não de regras específicas, mas da criatividade do usuário.

A realização de tratamentos simbólicos teve menos impacto na capacidade dos alunos de completar a tarefa, não tendo funcionado para os alunos que precisam "entender para fazer", ou para aqueles que têm dificuldade em cálculos numéricos, ou para aqueles que não estão à vontade com as tabelas. Em contrapartida, os tratamentos visuais permitiram produzir mais transformações dando continuidade à atividade matemática dos alunos, o que facilitou as conversões entre as representações de diferentes tipos (Contributo 1.4), proporcionando variedade de transformação de representações. Warren e Cooper (2008) argumentam que a generalização implica ver o que é igual e o que é diferente. Vários autores referem-se também à importância de “ver” o padrão de uma sequência e à dificuldade que é, por vezes, de o fazer (e.g. Barbosa, 2012). O nosso estudo mostra uma forma de ajudar os alunos a “ver” o padrão de uma sequência através de tratamentos visuais, pois a realização de um tratamento visual nessa base condicionou as transformações de representações que se seguiram, em número e em qualidade (Contributo 1.5).

Os tratamentos visuais tornaram-se importantes para a conversão de representações. Os símbolos visuais que se acrescentaram a determinada representação transformaram-na e deram-lhe uma nova característica de organização e transmissão da informação. Nesta situação de aprendizagem, o uso de tratamentos visuais em representações, independentemente do sistema em que elas ocorreram, proporcionou um ambiente de aprendizagem com representações múltiplas para o mesmo objeto matemático. As diferenças entre o trabalho desenvolvido por cada grupo, favoreceu, de modos diferentes, a flexibilidade entre as representações que foram desenvolvidas, garantindo a abstração, de acordo com vários autores (e.g. Dreyfus, 1991). Isso confirma a conclusão de Callejo e Zapatera (2014) de que o sucesso nas conversões é altamente dependente do conhecimento do aluno e da sua capacidade de controlar e regular o processo de solução do problema.

O nosso estudo permite-nos acrescentar que o sucesso das conversões também depende do uso criativo de tratamentos visuais, que nos permitiu responder à segunda questão de investigação (*Qual é o impacto dos tratamentos visuais de uma determinada forma de representação na atividade dos alunos durante a resolução de uma tarefa matemática?*). Refira-se que isso pode ser promovido pelo uso criativo da professora de tratamentos visuais, quando está a ajudar os alunos durante as descontinuidades na produtividade do trabalho enquanto estão a resolver o problema.

Entendemos que o tipo de tratamento visual realizado nas representações (qualquer tipo de representação) também faz parte dessa habilidade e não pode ser reduzido a meros procedimentos mecânicos com regras, como argumentaram David e Tomaz (2012). Nesta perspetiva, o uso de um tratamento visual assume uma importância especial na aprendizagem bem-sucedida, sendo particularmente verdadeiro para o desempenho de conversões de representações e para a flexibilidade entre representações. Vários autores identificaram dificuldades em atividades de conversão (e.g. Duval, 2006a; Presmeg, 2006). Neste trabalho, confirmamos que a exploração dinâmica das representações visuais ampliou as características dos tratamentos visuais, facilitou as conversões e proporcionou flexibilidade na conversão das representações simbólicas e verbais, o que beneficiou os alunos deste nível etário (Contributo 1.5).

Com o que foi dito nestes parágrafos anteriores, confirmamos a sugestão feita por Stylianou e Silver (2004) de que os alunos mais jovens devem desenvolver uma rotina e uma capacidade de explorar e operar representações visuais. Por nossa vez, acrescentamos que esse desenvolvimento requer situações de aprendizagem adequadas, pois as crianças da primeira infância usam uma variedade de representações visuais espontâneas para resolver problemas (Deliyianni, E., Monoyiou, A., Elia, I., Georgiou, C., & Zannettou, E., 2009). Representações essas que vão abandonando ao longo da escolaridade, podendo estar a perder-se uma oportunidade espontânea para desenvolver competências visuais.

Em concordância com Ewenstein e Whyte (2007), também consideramos que as representações visuais podem ser usadas na Matemática como artefactos de conhecimento segundo as mesmas duas dimensões: (i) ajudam a articular, a trocar e a compreender ideias matemáticas; (ii) manifestam-se na prática, como entidades materiais, com os quais os alunos podem interagir à medida que geram conhecimento individual ou coletivamente. Com efeito, a característica material das representações visuais, através da realização de tratamentos visuais, permitiu-lhes interagir, gerando conhecimento, no caso a expressão algébrica.

5.2.3 Contributos relativos à terceira questão de investigação

O Contributo 2 é decorrente do desenvolvimento profissional realizado pela professora investigadora e revela a importância *do conhecimento e das habilidades de selecionar, criar e usar os tratamentos visuais do professor resultarem do seu desenvolvimento profissional, intencional e sistemático, e terem um papel importante na aprendizagem dos alunos*.

Os resultados obtidos como resposta à terceira questão de investigação permitiram-nos identificar dois contributos mais específicos, nomeadamente *a importância do conhecimento existente sobre as transformações de representações permitirem ao professor fazer uma avaliação mais consciente do valor das tarefas, em termos de representações* (Contributo específico 2.1), *de forma a conseguir fazer uma escolha consciente dos tratamentos visuais mais apropriados a determinada situação de aprendizagem ou domínio de conteúdo matemático* (Contributo específico 2.2).

Até aqui, a discussão apontou para a importância de um tipo de transformação de uma representação (um tratamento), particularmente um tratamento visual, que depende da criatividade do usuário. As representações visuais foram reconhecidas como um artefacto à disposição dos alunos para ser acionado como uma ferramenta, mas cuja utilização não é evidente. Esta necessita de ser desenvolvida e aprendida, pressupondo uma preparação pedagógica do professor para o realizar, no sentido de identificar as ações necessárias para levar os alunos a fazer um uso das representações visuais como uma ferramenta matemática epistémica.

A autorreflexão durante a fase de desenvolvimento profissional serviu de base para o desenho de uma sucessão de intervenções intermédias. A professora investigadora, baseando o conhecimento na pesquisa realizada nessa área de investigação, encontrou uma maneira de operacionalizar a análise das características das representações, e baseando-se no trabalho de Duval (1993; 2006a; 2006b), através das transformações de representações. Esta operação permitiu-lhe refletir sobre o conhecimento profissional adquirido, uma vez que confrontou as suas ideias e crenças com resultados existentes na literatura e com os seus pares. Os resultados que obteve na sua investigação foram alvo de discussão com outros investigadores durante a validação das narrações multimodais, e do processo de revisão durante a publicação em revistas e conferências de trabalhos realizados. Estas foram as ações que potenciaram a sua autorreflexão. Esse desenvolvimento aumentou o conhecimento do professor sobre o ensino e a aprendizagem (Collins et al., 2004; Norton e McCloskey, 2008; Morgan et al., 2014; Lopes & Cunha, 2017) com representações visuais, promovendo o seu conhecimento sobre o tema, características dessas intervenções e os seus processos de conceção e desenvolvimento.

É consensual a importância das representações visuais no ensino e na aprendizagem, mas ainda não o é a forma como se deve fazer. Alguns autores defendem a sua utilização para fazer a ponte entre outras representações (e.g. Palacios, 2006; Presmeg, 2006; Stylianou & Silver, 2004), outros consideram-nas essenciais na resolução de determinados problemas (e.g. Rellensmann et al., 2017; Zahner & Corter, 2010). O nosso estudo mostra que também podem ser importantes na exploração de outras representações, desencadeando outras ações cognitivas.

A sucessão de intervenções intermédias forneceu informações importantes por meio da análise do modo como os alunos trabalhavam e pensavam: (i) o conhecimento das características das tarefas em termos de representações e suas transformações; (ii) a forma como o professor pode incluir as representações visuais no ensino, permitindo-lhe responder à terceira questão de investigação (*Que ações deve o professor adotar para melhorar a sua prática de ensino usando as representações visuais como artefacto?*).

A literatura identifica a linguagem simbólica como a mais utilizada nas aulas de Matemática. Por nossa parte, verificamos ser o sistema de representação mais solicitado nas respostas dos alunos (Montenegro et al., 2017). Pelo exposto, o nosso estudo confirma a necessidade da realização de algumas ações para contrariar essa tendência. Na mesma linha, Stylianou e Silver (2004) defendem a necessidade de algumas rotinas para que os jovens desenvolvam as suas capacidades de explorar e operar representações visuais. A partir da nossa investigação, acrescentamos que essas rotinas não têm a ver com a realização de tarefas baseadas em procedimentos, mas sim tornar frequente a realização de oportunidades para explorar representações visuais.

5.2.4 Contributos relativos à quarta questão de investigação

A discussão anterior apontou para a importância do tratamento visual, que depende da criatividade do usuário. As representações visuais foram reconhecidas como um artefacto à disposição dos alunos, podendo ser acionadas como uma ferramenta, mas cuja utilização não é evidente. Necessita de ser desenvolvida e aprendida, o que pressupõe uma preparação pedagógica do professor para o fazer, com identificação das ações e intenções necessárias nas práticas de ensino, de forma a uma utilização efetiva de representações visuais como uma ferramenta matemática, idealizando a sua utilização pelos alunos.

O Contributo 3 refere-se aos tratamentos visuais como *ferramenta para construir conhecimento matemático, proporcionando uma mediação epistémica possibilitando uma aprendizagem dos alunos em vários níveis de sofisticação, e de acordo com os "seus" percursos na resolução da tarefa*. Os resultados à quarta questão de investigação permitiram-nos identificar três contributos mais específicos, que reconhece os *tratamentos visuais como uma técnica à disposição do professor para levar os alunos a construir o seu conhecimento, isto é, os tratamentos visuais podem ser uma ferramenta matemática que pode proporcionar uma mediação epistémica* (Contributo específico 3.1). Quando assim utilizados, *possibilitam a aprendizagem em vários níveis de sofisticação, permitindo ao aluno fazer o "seu" percurso matemático na resolução de uma tarefa* (Contributo específico 3.2), podendo *desenvolver a comunicação matemática na sala de aula, tanto ao nível da comunicação oral como escrita* (Contributo específico 3.3).

Já vimos que as representações visuais podem ser usadas como signo ou como processo na busca de uma solução para um problema, e que essa utilização depende da forma como o professor orienta o seu uso na sala de aula. Godin e Kaput (1996) defendem uma investigação mais aprofundada sobre o que torna poderosos os sistemas de representação. Não obstante os estudos realizados, a natureza dual que pode ser associada às representações visuais (natureza intrínseca e intencional) continua a ser apontada por autores, de que são exemplo Nia e de Vries (2017), como algo que necessita de ser explorado e investigado.

O sistema de representação visual possui um vasto e variado domínio de aplicabilidade.

Com efeito, ele pode ser aplicado em variados contextos do domínio da Matemática, e não só, tendo significado (em sentido semântico) em relação a muitas representações de outros sistemas de representação. A este aspeto de poder de representação, Goldin e Kaput (1996) chamam de versatilidade. O poder e a utilidade da representação dependem claramente de fazer parte de um sistema estruturado e do grau de flexibilidade ou versatilidade no que pode representar (Goldin & Kaput, 1996).

Começamos por responder e discutir a primeira parte da QI4 (*De que forma pode o professor induzir os alunos a usarem o artefacto "representações visuais" como uma ferramenta?*). A Parte 1 da Fase 3 foi organizada para responder à primeira parte da QI4, de modo que utilizaremos esses resultados na sua discussão.

Stylianou e Silver (2004), entre outros autores, defendem rotinas para que os jovens desenvolvam as suas capacidades de explorar e operar representações visuais. O nosso estudo mostra que uma dessas formas de explorar e operar com representações visuais é através de tratamentos visuais.

Também Knuuttila e Boon (2011) defendem a manipulação como condição necessária para o reconhecimento de um artefacto como mediador epistémico. O nosso estudo mostrou os tratamentos visuais como uma forma de manipulação sobre as representações de qualquer sistema de representação.

A utilização de representações visuais alia a natureza intrínseca e intencional dos modelos definidas por Nia e de Vries (2017). A natureza intrínseca das representações visuais, relacionada com a versatilidade com que podem ser usadas, confere-lhes o estatuto de artefacto sendo o ponto de partida para fazer algo. O nosso estudo mostra que os alunos, depois de conhecerem algumas formas da utilização de representações como artefacto, apropriaram-se eles próprios dos tratamentos visuais realizados noutras situações de aprendizagem e utilizaram-nas como ferramenta de aprendizagem, o que nos permitiu responder à segunda parte da quarta questão de investigação (*Como podem os alunos usar representações visuais como uma ferramenta epistémica na aprendizagem da Matemática?*). Ao realizar ações materiais com as representações visuais, os alunos recorreram ao seu conhecimento adquirido (representações mentais). As ações com o artefacto (representações visuais) através da ferramenta (tratamento visual) fizeram com que alterassem as suas representações mentais, atualizando-as. De acordo com Radford (2014), ocorreu aprendizagem; tendo havido aprendizagem, houve construção de conhecimento. Assim, os tratamentos visuais constituíram-se como uma ferramenta matemática epistémica.

Monaghan, Trouche e Borwein, (2016) fazem referência à utilização das representações visuais como um artefacto, que pode ser acionado como ponto de partida para fazer algo em Matemática. Dão alguns exemplos de como um utilizador o pode fazer. No nosso trabalho, identificamos algumas maneiras em que o professor as usa dessa forma na sua prática (ver e.g. as práticas dos professores entrevistados na Parte 7 da Fase 2, Secção 4.3.7), mas, e sendo esse o nosso contributo mais importante: alunos deste nível etário são também capazes de o fazer, mediante determinadas condições de aprendizagem.

Lopes et al., (2010) consideram ações como a seleção, a relação, o cálculo, a conclusão, transposição ou transferência para outro contexto, necessárias para considerar um artefacto com vertente epistémica. Pelo exposto, o uso dado às representações visuais através de tratamentos visuais revelou-se ter sido o de ferramenta matemática epistémica.

5.3 Conclusões e trabalhos futuros

De acordo com os resultados encontrados na resposta às questões de investigação, podemos concluir que as representações visuais são um artefacto à disposição do professor e dos alunos, podendo, em certas condições de uso, transformar-se em ferramentas matemáticas epistémicas, através de tratamentos visuais. Quando isso acontece:

1. *Permitem a continuidade da atividade dos alunos, abrindo outras possibilidades de ver e compreender as tarefas.*

Devido às características inerentes às representações visuais, a realização de tratamentos visuais pode facilitar a flexibilidade entre as representações múltiplas. Contudo, estas características, e a forma como cada um as pode usar, não são óbvias para os alunos. Este estudo mostra que o uso criativo de tratamentos visuais é necessário nas aulas de Matemática trazendo vantagens à aprendizagem, pois o seu uso criativo abre outras possibilidades de ver e compreender as tarefas, o que permite aos alunos continuar em atividade, tornando-os capazes de resolver as tarefas com sucesso.

2. *Potenciam as transformações de representações, melhorando a aprendizagem*

As representações visuais possuem características intrínsecas potenciadoras de transformações de representações, sendo um artefacto à disposição de alunos e professores. A utilização de representações visuais acrescenta ao método de trabalho do professor a possibilidade de as utilizar na exploração de outras quaisquer representações, pois permitem facilmente o acrescento, nelas próprias, de elementos de outros tipos de representações. No entanto, essa utilização tem de ser intencional e sistemática, e o professor tem de desenvolver em si essas competências, através do seu desenvolvimento profissional.

A sua utilização durante a atividade abre caminho a conversões entre representações aumentando a flexibilidade no raciocínio. Contudo, estes tratamentos nem sempre são evidentes e pode ser requerida a intervenção do professor para que as conversões ocorram. Esta intervenção pode ser compreendida de modos diferentes e pode diversificar as estratégias dos alunos. A exploração das representações visuais não é inata, tendo esta habilidade de ser aprendida e desenvolvida. Encontramos efeitos tanto na preparação das suas aulas como na sua prática de ensino. Na preparação das suas aulas, o professor pode considerar o conhecimento sobre as transformações de representações, permitindo-lhe uma seleção e/ou exploração mais consciente das tarefas. Também pode considerar preparar os seus alunos com capacidades para utilizar determinados tratamentos visuais os quais possam utilizar em situações novas, levando-os, assim, a construir o seu próprio conhecimento. O estatuto que as representações visuais podem assumir na sala de aula depende da intencionalidade didática do professor e do modo como elas são efetivamente usadas no contexto das atividades que os alunos realizam.

3. *Permitem um trabalho em vários níveis de sofisticação dependente da cultura matemática do aluno, desenvolvendo a comunicação matemática dentro da sala de aula – pode ser acionado para se transformar numa ferramenta matemática epistémica.*

Os tratamentos visuais mostraram ser uma ferramenta à disposição do professor que permitiram explorar e operar as representações visuais para introduzir e explorar conhecimentos novos (Parte 1 da Fase 3). Esta ferramenta proporcionou uma mediação com múltiplas representações, pois aumentou a flexibilidade e fluência entre representações de diferentes sistemas. Esta construção de conhecimento relaciona-se com as características de cada um, induzindo a flexibilidade nas representações e, consequentemente, no raciocínio e na abstração.

A professora realizou a autorreflexão através da análise detalhada da sua prática através do uso e análise de narrações multimodais. O desenvolvimento profissional no sentido aqui abordado, cuja autorreflexão se baseou na elaboração de narrações multimodais, ajudou a professora a selecionar ou criar os tratamentos visuais mais apropriados a determinada situação de aprendizagem ou conteúdo matemático. No entanto, seria relevante estudar o uso de narrações multimodais em cada um dos outros modelos de desenvolvimento profissional considerados por Sparks e Loucks-Horsley (1989), ou seja, o desenvolvimento profissional autónomo, o desenvolvimento curricular e organizacional e o desenvolvimento profissional através de cursos de formação de curta duração.

Os nossos resultados mostraram que as representações visuais são um artefacto, que pode ser acionado através da realização de tratamentos visuais, transformando-se numa ferramenta matemática epistémica com a possibilidade de permitir a aprendizagem em vários níveis de sofisticação, não excluindo da aprendizagem e do sucesso nenhum aluno, adaptando-se à sua cultura matemática. Podemos concluir que os tratamentos visuais podem proporcionar uma mediação epistémica ao proporcionar diversidade de estratégias de resolução das tarefas, desenvolvendo a comunicação matemática.

Da mesma forma que a capacidade de construir representação gráfica com versatilidade deve ser vista como um importante objetivo educacional em Matemática, acrescentamos, com o nosso estudo, que essa versatilidade se pode verificar com qualquer tipo de representação visual em qualquer domínio de conteúdos da Matemática − Números e operações, Geometria e Álgebra. Os alunos adaptaram a utilização de representações visuais e os tratamentos visuais aos seus conhecimentos e habilidades, não sendo estas impeditivas para a continuidade do seu trabalho, mas sim uma alavanca para ultrapassar dificuldades. A versatilidade dos tratamentos visuais garante novos *insights* nos alunos, pois abre um conjunto de possibilidades para a exploração de situações matemáticas. Isto representa um desafio para os professores na procura e seleção das situações e para os alunos para os usar, tornando a aprendizagem da Matemática mais versátil. Nesse sentido, promove-se o uso de representações múltiplas nas aulas de Matemática.

Como referimos, os tratamentos visuais são uma ferramenta à disposição do professor e dos alunos que a podem utilizar criativamente. Por serem uma ferramenta que pode ser utilizada com criatividade, há sempre a possibilidade de ser melhorada, podendo proporcionar outras formas de ser utilizada, nestes ou noutros domínios de conteúdos. Torna-se importante a sua exploração exaustiva para conseguirmos tirar delas um maior proveito.

Como trabalhos futuros, já referimos as dificuldades que os alunos apresentaram na substituição de uma entidade por uma representação e as dificuldades que apresentaram na substituição de um termo por outro (mesmo sendo os dois do mesmo tipo, no caso ambos simbólicos) numa expressão algébrica, que os próprios alunos reconheceram (ver no final da NM5, o Desempenho do Grupo VII). Que poderá ser feito nos anos letivos anteriores para diluir essas dificuldades? As representações visuais poderão ter algum papel nisso?

Neste trabalho apenas nos foi possível investigar e proceder à análise de transformações de representações de Duval. Seria decerto pertinente e com vantagens para o ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos, como por exemplo os números racionais, fazer um estudo semelhante com outras abordagens semióticas, já que este conteúdo permite várias representações simbólicas (e.g. percentagem, dízima, fração, numeral misto) cuja equivalência se assemelha a conversões.

Referências

Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with multiple representations. *Learning and Instruction, 16*(3), 183–198.

Akker, J. van den, Bannan, B., Kelly, A. E., Nieveen, N., Plomp, T., (2013). *Educational Design Research. Part A: An introduction.* (Eds.) Tjeerd Plomp & Nienke Nieveen. Netherlands Institute for Curriculum Development (SLO), Enschede: the Netherlands.

Altay, M. K., Akyüz, E. Ö., & Erhan, G. K. (2014). A study of middle grade students' performances in mathematical pattern tasks according to their grade level and pattern presentation context. *Procedia – Social and Behavioural Sciences, 116,* 4542–4546.

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *52,* 215–241.

Barbosa, A. C. C. (2010). *A resolução de problemas que envolvem a generalização de padrões em contextos visuais: um estudo longitudinal com alunos do 2. º ciclo do ensino básico.* Tese de doutoramento, Universidade do Minho, Braga.

Bargagliotti, A. E., & Anderson, C. R. (2017). Using Learning Trajectories for Teacher Learning to Structure Professional Development. *Mathematical Thinking and Learning, 19*(4), 237-259.

Barriball, K. L., & While, A. (1994). Collecting Data using a semi-structured interview: a discussion paper. *Journal of advanced nursing*, *19*(2), 328-335.

Blikstein, I. (2006). *Técnicas de comunicação escrita*. S. Paulo: Ática.

Bogdan, R, & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação. Uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto: Porto Editora.

Boni, V., & Quaresma, S. J. (2005). Aprendendo a entrevistar: como fazer entrevistas em Ciências Sociais. *Em Tese*, *2*(1), 68-80.

Bransford, J. D., & Schwartz, D. L. (1999). Chapter 3: Rethinking transfer: A simple proposal with multiple implications. *Review of research in education, 24*(1), 61-100.

Bussi, M. B., & Mariotti, M. A. (2008). Semiotic mediation in the mathematics classroom: Artifacts and signs after a Vygotskian perspective. *Handbook of international research in mathematics education*, pp. New York. 2008: 746-783.

Çağdaş, V., & Stubkjær, E. (2011). Design research for cadastral systems. *Computers, Environment and Urban Systems, 35*(1), 77-87.

Callejo, M. L. & Zapatera, A. (2014). Flexibilidad en la resolución de problemas de identificación de patrones lineales en estudiantes de educación secundaria. *Bolema, 28*(48), 64–88.

Carmo, M., & Dias, M., C. (1982). *Introdução ao texto literário*: *Noções de linguística e literalidade.* Lisboa: Didáctica Editora.

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2007). *Research methods in education* (6th ed.). New York: Routledge.

Collins, A., Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004). Design research: Theoretical and methodological issues. *The Journal of the learning sciences, 13*(1), 15-42.

Conceição, A., Almeida, M., Conceição, C., & Costa, R. (2014). *Matemática sob investigação*. Porto, Portugal: Areal Editores, SA.

Coutinho, C. P., & Chaves, J. H. (2002). O estudo de caso na investigação em Tecnologia Educativa em Portugal. *Revista Portuguesa de Educação, 15*(1), 221-243.

Creswell, J. (2009). *Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches* (3th ed.). Los Angeles: SAGE.

David, M. M., & Tomaz, V. S. (2012). The role of visual representations for structuring classroom mathematical activity. *Educational Studies in Mathematics, 80*, 413–431.

de Jong, A. J. M., Ainsworth, S., Dobson, M., van der Hulst, A., Levonen, J., Reimann, P., ... Swaak, J. (1998). Acquiring knowledge in science and mathematics: the use of multiple representations in technology based learning environments. In M. W. van Someren (Ed.), *Learning with multiple representations*. (Advances in learning and instruction series). Oxford: Elsevier Science. 1998: 9-41.

Deliyianni, E., Monoyiou, A., Elia, I., Georgiou, C., & Zannettou, E. (2009). Pupils' visual representations in standard and problematic problem solving in mathematics: their role in the breach of the didactical contract. *European Early Childhood Education Research Journal, 17*(1), 95-110. DOI: 10.1080/13502930802689079

Desimone, L. (2009). Improving impact studies of teachers' professional development: Toward better conceptualizations and measures. *Educational Researcher, 38*(3), 181–199. https://doi.org/10.3102/0013189X08331140.

Dreyfus, T. (1991). On the status of visual reasoning in mathematics and mathematics education. In F. Furinghetti (Ed.), *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (PME), *1*, Assisi, Italy: Università di Genova. 33–48.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives 5*, 37–65.

Duval, R. (2006a). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*(1–2), 103–131.

Duval, R. (2006b). Transformations de représentations sémiotiques et démarches de pensée en mathématiques. In ULP. IREM de Strasbourg. In J-C. Rauscher (Eds.). *Actes du XXXIIe Colloque COPIRELEM*. Strasbourg, France: ULP. IREM. 67–89.

El Mouhayar, R., & Jurdak, M. (2013). Teachers' ability to identify and explain students' actions in near and far figural pattern generalisation tasks. *Educational Studies in Mathematics, 82*, 379–396.

El Mouhayar, R., & Jurdak, M. (2016). Variation of student numerical and figural reasoning approaches by pattern generalisation type, strategy use and grade level. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 47*(2), 197–215.

Ewenstein, B., & Whyte, J. K. (2007) Visual representations as 'artefacts of knowing', *Building Research & Information, 35*(1), 81-89, doi: 10.1080/09613210600950377

Fagnant, A., & Vlassis, J. (2013). Schematic representations in arithmetical problem solving: Analysis of their impact on grade 4 students. *Educational Studies in Mathematics*, *84*(1), 149-168.

Fischer, C., Fishman, B., Dede, C., Eisenkraft, A., Frumin, K., Foster, B., ... & McCoy, A. (2018). Investigating relationships between school context, teacher professional development, teaching practices, and student achievement in response to a nationwide science reform. *Teaching and Teacher Education*, *72*, 107-121.

Font, V., Godino, J. D., & D'Amore, B. (2007). An onto-semiotic approach to representations in mathematics education. *For the learning of mathematics*, *27*(2), 2-14.

Genouvrier, E., & Peytard, J. (1974). *Linguística e ensino do Portuguesa*. Coimbra: Livraria Almedina.

Goldin, G. A. (2008). Perspectives on representation in mathematical learning and problem solving. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education*. New York, NY: Routledge. 178–203.

Goldin, G. A., & Kaput, J. J. (1996). A joint perspective on the idea of representation in learning and doing mathematics. In Steffe, L. P., Nesher, P., Cobb, P., Goldin, G. A., & Greer, B. (1996), *Theories of Mathematical Learning*. Mahwah, NJ: Erlbaum. 397-430.

Gueudet, G., & Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers?. *Educational Studies in Mathematics*, *71*(3), 199-218.

Hargreaves, A. (2007). Sustainable leadership and development in education: Creating the future, conserving the past. *European Journal of Education*, *42*(2), 223-233.

Hegarty, M., & Kozhevnikov, M. (1999). Types of visual-spatial representations and mathematical problem solving. *Journal of Educational Psychology, 91*(4) 684–689.

Heinze, A., Star, J. R., & Verschaffel, L. (2009). Flexible and adaptive use of strategies and representations in mathematics education. *ZDM*, *41*, 535–540. DOI 10.1007/s11858-009-0214-4

Hevner, A. (2007). A Three Cycle View of Design Science Research. *Scandinavian Journal of Information Systems*, *19*(2), 87-92.

Hevner, A., March, S., Park, J., & Ram, S. (2004). Design Science in information systems research. *MIS Quarterly*, *28*(1), 75-105.

Iori, M. (2017). Objects, signs, and representations in the semio-cognitive analysis of the processes involved in teaching and learning mathematics: A Duvalian perspective. *Educational studies in mathematics*, *94*(3), 275-291.

Jaipal, K. (2010). Meaning making through multiple modalities in a Biology classroom: A multimodal semiotics discourse analysis. *Science Education*, *94*(1), 48-72.

Knuuttila, T. (2005). Models, representation, and mediation. *Philosophy of Science*, *72*(5), 1260-1271.

Knuuttila, T., & Boon, M. (2011). How do models give us knowledge? The case of Carnot's ideal heat engine. *European journal for philosophy of science*, *1*(3), 309-334.

Lemke, J. L. (2003). Mathematics in the middle: Measure, picture, gesture, sign, and word. Educational perspectives on mathematics as semiosis: *From thinking to interpreting to knowing*, *1*, 215-234.

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987). Rational number relations and proportions. In C. Janvier (Ed.) *Problems in representation in the teaching and learning of mathematics*. Hillsdale, NJ: Erlbaum. 40-77.

Lopes, J. B. & Cunha, A. E. (2017). Self-directed professional development to improve effective teaching: Key points for a model. Teaching and Teacher Education. 68, 262-274. https://doi.org/10.1016/j.tate.2017.09.009

Lopes, J., Cravino, J., & Silva, A. (2010). *Effective teaching for intended learning outcomes in Science and Technology (METILOST).* Nova York: New Science Publishers, Inc.

Lopes, J. B., Silva, A. A., Cravino, J. P., Santos, C. A., Cunha, A., Pinto, A., Silva, A., Viegas, C., Saraiva, E., & Branco, M. J. (2014). Constructing and using multimodal narratives to research in science education: Contributions based on practical classroom. *Research in Science Education*, *44*(3), 415–438.

Lopes, J. B., Silva, A. A., Cravino, J. P., Viegas, C., Cunha, A. E., Saraiva, E., Branco, M. J., Pinto, A., Silva, A. & Santos, C. A. (2010). *Investigação sobre a mediação de professores de Ciências Físicas em sala de aula*. Vila Real: Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro.

Lopes, J. B., Viegas, C., Pinto, A., & outros., (2018). *Melhorar práticas de ensino de Ciências e Tecnologia: Registar e investigar com narrações multimodais*. Lopes, J. B., Viegas, C., Pinto, A. (Eds.). Lisboa: Edições Sílabo.

Maia, A. M. S. (2017). *Linguagens de modelação para descrever processos e dinâmicas de ensino e de aprendizagem em e-learning no ensino superior*. Tese de doutoramento, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real.

Mao, Y., White, T., Sadler, P. M., & Sonnert, G. (2017). The association of precollege use of calculators with student performance in college calculus. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(1), 69-83.

Marmolejo, G. A., & González Astudillo, M. T. (2015). Control visual en la construcción del área de superficies planas en los textos escolares. Una metodología de análisis. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 18*(3), 301-328.

McCracken, G. (1988), *The Long Interview*. Beverly Hills, CA: Sage Publications.

Ministério da Educação. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

Ministério da Educação e Ciência [MEC]. (2013). *Programa e metas curriculares Matemática – Ensino básico.* Lisboa, Portugal: MEC.

Monaghan, J., Trouche, L., & Borwein, J. M. (2016). *Tools and mathematics*. Berlin: Springer International Publishing.

Montenegro, P., Campos, H., & Aires, A. P. (2017). Tasks involving perimeter and area of plane figures: Analyses of a mathematical textbook. In L. Gómez Chova, A. López Martínez, I. Candel Torres (Eds). EDULEARN2017 *Proceedings 9th International Conference on Education and New Learning Technologies*. Espanha, Barcelona: IATED Academy. 2469-2475.

Montenegro, P., Costa, C., & Lopes, B. (2015). A congruência de conversões entre representações em tarefa com padrões no 6.º ano de escolaridade. In *Investigação em Educação Matemática 2015 - Representações Matemáticas,* Manuel Vara Pires; Rosa Tomás Ferreira; António Domingos; Cristina Martins; Helena Martinho; Isabel Vale;

Nélia Amado; Susana Carreira; Teresa Pimentel; Leonor Santos, (Eds.). Portugal, Bragança: Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática (SPIEM). 115-129.

Montenegro, P., Costa, C., & Lopes, B. (2016). Transformações de representações visuais na exploração de múltiplos e divisores de um número natural. VPCT2016. Vila Real, Portugal. 48.

Montenegro, P., Costa, C., & Lopes, B. (2017a). Transformações de representações visuais na exploração de múltiplos e divisores de um número. *Comunicações Piracicaba, 24(1), 55-68.*

Montenegro, P., Costa, C., & Lopes, B. (2017b). The use of visual representations in Mathematics classes: a comparative case study. In L. Gómez Chova, A. López Martínez, I. Candel Torres (Eds). Proceedings of *11th International Technology, Education and Development Conference*, INTED2017. Spain, Valencia: IATED Academy. 6845-6852

Montenegro, P., Costa, C., & Lopes, B. (2017c). Multiple representations in problem solving with divisors and multiples. In L. Gómez Chova, A. López Martínez, I. Candel Torres (Eds). Proceedings of *11th International Technology, Education and Development Conference*, INTED2017. Spain, Valencia: IATED Academy. 6884-6890.

Montenegro, P., Costa, C., & Lopes, B. (2017d). Visual representation (table) to recreate a routine mathematical exercise. In L. Gómez Chova, A. López Martínez, I. Candel Torres (Eds). *Proceedings 9th International Conference on Education and New Learning Technologies*, EDULEARN2017. Spain, Barcelona: IATED Academy. 2514-2520.

Montenegro, P., Costa, C., & Lopes. J. B. (2018). Transformations in the Visual Representation of a Figural Pattern. *Mathematical Thinking and Learning*. *20*(2), 91-107. DOI: 10.1080/10986065.2018.1441599.

Moreno, R., Ozogul, G., & Reisslein, M. (2011). Teaching with concrete and abstract visual representations: Effects on students' problem solving, problem representations, and learning perceptions. *Journal of Educational Psychology*, *103*(1), 32-47.

Mottet, G. (1996). Images et activités scientifiques. Reintegrer l'image. *Aster*, *22*, 3-13.

Moyer, P. S. (2001). Are we having fun yet? How teachers use manipulatives to teach mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *47*(2), 175-197.

Moyer-Packenham, P. S. (2005). Using virtual manipulation to investigate patterns and generate rules in algebra. *Teaching Children Mathematics*, *11*(8), 437–444.

Murchison, J. M. (2010). *Ethnography essentials: Designing, conducting, and presenting your research*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Myers, M. D. (1997). Qualitative research in information systems. *Management Information Systems Quarterly*, *21*(2), 241-242.

National Council of Teachers of Mathematics [NCTM]. (2008). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Neves, M. A. F., & Faria, L. (2016). *Máximo 6*, Matemática. Manual digital. Porto: Porto Editora.

Nia, M. G., & de Vries, M. J. (2017). Models as artefacts of a dual nature: a philosophical contribution to teaching about models designed and used in engineering practice. *International Journal of Technology and Design Education*, *27*(4), 627-653.

Nieveen, N., McKenney, S., & Van den Akker, J. (2006). Educational design research: the value of variety. In J. Van den Akker, K. Gravemeijer, S. McKenney, & N. Nieveen (Ed). London: Routledge. 151-158.

Norton, A. H., & McCloskey, A. (2008). Teaching experiments and professional development. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *11*(4), 285-305.

Orrill, C. H., Kim, O. K., Peters, S. A., Lischka, A. E., Jong, C., Sanchez, W. B., & Eli, J. A. (2015). Challenges and Strategies for Assessing Specialised Knowledge for Teaching. *Mathematics Teacher Education and Development*, *17*, 12-29.

Palacios, F. J. P. (2006). Uso (y abuso) de la imagen en la enseñanza de las ciencias. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *24*(1), 13–30.

Pape, S. J., & Tchoshanov, M. A. (2001). The role of representation (s) in developing mathematical understanding. *Theory into practice*, *40*(2), 118-127.

Pea, R. D. (1987). Socializing the knowledge transfer problem. *International Journal of Educational Research*, *11*(6), 639-663.

Peffers, K., Tuunanen, T., Rothenberger, M. A., & Chatterjee, S., (2007) A Design Science Research Methodology for Information Systems Research, *Journal of Management Information Systems*, *24*(3), 45-77.

Perkins, D. N., & Unger, C. (1994). A new look in representations for mathematics and science learning. *Instructional Science*, *22*(1), 1-37.

Plomp, T. (2013). Educational design research: An introduction. In T. Plomp & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research - Part A: An Introduction*. Enschede, the Netherlands: SLO. 10-51.

Ponte, J. P. (1994). O estudo de caso na investigação em educação matemática. *Quadrante*, *1*(3), 3-16. Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2004). Investigar a nossa prática: uma estratégia de formação e de construção do conhecimento profissional. In *Actas do VIII Simpósio do SEIEM*, Universidade de la Coruña.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. *Bolema*, 105-132.

Presmeg, N. (2006). Research on visualisation in learning and teaching mathematics: Emergence from psychology. In A. Gutiérrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education*. Dordrecht, Netherlands: Sense Publishers. 205–235.

Prodanov, C. C., & de Freitas, E. C. (2013). *Metodologia do Trabalho Científico: Métodos e Técnicas da Pesquisa e do Trabalho Acadêmico* - 2ª Edição. Novo Hamburgo: Editora Feevale.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational studies in mathematics*, *42*(3), 237-268.

Radford, L. (2013). Three key concepts of the theory of objectification: Knowledge, knowing, and learning. *Journal of Research in Mathematics Education*, *2*(1), 7–44.

Radford, L. (2014). On the role of representations and artefacts in knowing and learning. *Educational Studies in Mathematics, 85*(3), 405-422.

Rellensmann, J., Schukajlow, S., & Leopold, C. (2017). Make a drawing. Effects of strategic knowledge, drawing accuracy, and type of drawing on students' mathematical modelling performance. *Educational Studies in Mathematics*, *95*(1), 53-78.

Reveles, J., Cordova, R., & Kelly, G. (2004). Science literacy and academic identity formulation. *Journal of Research in Science Teaching*, *41*(10), 1111–1144.

Rivera, F. D., & Becker, J. (2008). Middle school children's cognitive perceptions of constructive and deconstructive generalisations involving linear figural patterns. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *40*(1), 65–82.

Ryve, A., Nilsson, P., & Pettersson, K. (2013). Analysing effective communication in mathematics group work: The role of visual mediators and technical terms. *Educational Studies in Mathematics*, *82*, 497–514.

Sandoval, W. A., & Reiser, B. J. (2004). Explanation-driven inquiry: Integrating conceptual and epistemic scaffolds for scientific inquiry. *Science Education*, *88*(3), 345-372. DOI: 10.1002/sce.10130.

Saraiva, E. (2017). *Estudo do papel da representação visual no contexto da mediação dos professores de ciências físicas*. Tese de doutoramento, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, Vila Real.

Saraiva, E., Lopes, J. B., Cravino, J. P., & Santos, C. A. (2012). How do teachers of physical sciences with different professional experience use visual representations with epistemic functions in the classroom? *Problems of Education in the 21st Century*, *42*(42), 97-114.

Saussure, F. (1978). *Curso de linguística geral*. (4.ª Ed.). Lisboa: Publicações D. Quixote.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan.

Sedig, K., & Sumner, M. (2006). Characterising interaction with visual mathematical representations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, *11*(1), 1–55.

Shagrir, L. (2010) Professional development of novice teacher educators: Professional self, interpersonal relations and teaching skills. *Professional Development in Education*, *(36)*1-2, 45-60. https://doi.org/10.1080/19415250903454809.

Soebari, T. S. & Aldridge, J. M. (2015). Using student perceptions of the learning environment to evaluate the effectiveness of a teacher professional development programme. *Learning Environments Research*, *18*(2), 163-178.

Sparks, D., & Loucks-Horsley, S. (1989). Five models of staff development. *Journal of staff development*, *10*(4), 40-57.

Speiser, B., & Walter, C. (1997). Performing algebra: Emergent discourse in a fifth-grade classroom. *Journal of Mathematical Behaviour*, *16*, 39–49.

Spiro, R. J., Coulson, R. L., Feltovich, P. J., & Anderson, D. K. (1988). Cognitive flexibility theory: Advanced knowledge acquisition in ill-structured domains. In *Tenth Annual Conference of the Cognitive Science Society*. Hillsdale, NJ: Erlbaum. 375-383.

Stake, R. E. (1998). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.

Stylianou, D. A., & Silver, E. A. (2004). The role of visual representations in advanced mathematical problem solving: An examination of expert–novice similarities and differences. *Mathematical Thinking and Learning*, *6*(4), 353–387.

Tunç-Pekkan, Z. (2015). An analysis of elementary school children's fractional knowledge depicted with circle, rectangle, and number line representations. *Educational Studies in Mathematics*, *89*(3), 419-441.

Venkat, H. & Askew, M. (2018). Mediating primary mathematics: theory, concepts, and a framework for studying practice. *Educational Studies in Mathematics*, *97*(71), 71-92. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9776-1

Villarroel, J. D., & Ortega, O. S. (2017). A study regarding the spontaneous use of geometric shapes in young children's drawings. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(1), 85-95.

Wang, F., & Hannafin, M. (2005). Design-based research and technology-enhanced learning environments. *ETR&D, 53*(4), 5-23. doi:10.1007/BF02504682

Warren, E., & Cooper, T. (2008). Generalising the pattern rule for visual growth patterns: Actions that support eight-year old's thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *67*(2), 171–185.

Wilkie, K. J., & Clarke, D. M. (2016). Developing students' functional thinking in algebra through different visualisations of a growing pattern's structure. *Mathematics Education Research Journal*, *28*(2), 223-243.

Yin, R. K. (2010). *Estudo de caso – Planejamento e métodos* (4 Ed.). Porto: Porto Editora.

Zahner, D., & Corter, J. E. (2010). The process of probability problem solving: Use of external visual representations. *Mathematical Thinking and Learning*, *12*(2), 177-204.