Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

O papel das representações visuais na aprendizagem da Matemática no 2.º ciclo de escolaridade

Tese de Doutoramento em Didática de Ciências e Tecnologia,
Especialidade de Didática de Ciências Matemáticas

Maria Paula Montenegro Vieira Cardoso

Professora Doutora Maria Cecília Rosas Pereira Peixoto da Costa

Professor Doutor Joaquim Bernardino de Oliveira Lopes

Vila Real, 2019

Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

O papel das representações visuais na aprendizagem da Matemática no 2.º ciclo de escolaridade

– Apêndices –

Tese de Doutoramento em Didática de Ciências e Tecnologia,
Especialidade de Didática de Ciências Matemáticas

Maria Paula Montenegro Vieira Cardoso

Professora Doutora Maria Cecília Rosas Pereira Peixoto da Costa
Professor Doutor Joaquim Bernardino de Oliveira Lopes

Composição do Júri:

Professor Doutor Vítor Manuel de Jesus Filipe
Professor Doutor Pedro Manuel Baptista Palhares
Professora Doutora Maria Cecília Rosas Pereira Peixoto da Costa
Professora Doutora Ana Paula Florêncio Aires
Professor Doutor Fernando Manuel Lourenço Martins
Professora Doutora Elisa Maria da Silva Cardoso Saraiva

Vila Real, 2019

Apêndice 1 – Narração Multimodal 1 (NM1) – Generalização de um padrão figurativo

1. Contexto

A turma é constituída por dezoito alunos com idades compreendidas entre os onze e os treze anos. Cinco dos alunos apresentam retenções anteriores, tendo dois desses alunos necessidades educativas especiais (NEE). As aulas de matemática decorrem habitualmente numa sala normal de aulas como a sala em que esta ocorreu (Figura 1), com uma frequência de quatro ou cinco aulas semanais, duas das quais são consecutivas.

Data: XX de novembro de 20XX
Aula n.º 47
Sumário: Resolução da tarefa n.º 8: *O nome do Luís* (Pág. 87 do manual)
Hora: 10:40
Tempo da gravação: 40'43''

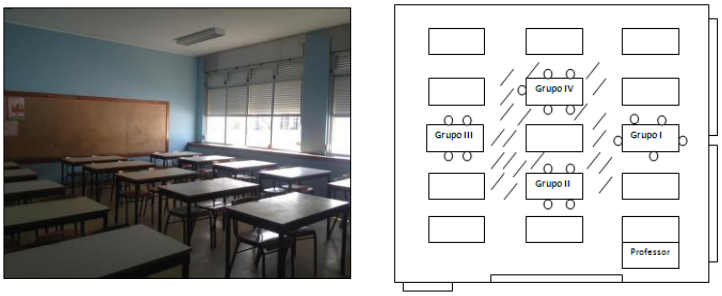


Figura 1: Sala X onde decorreu a aula e planta da sala.

O domínio em lecionação foi "Álgebra", o subdomínio "Sequências e regularidades" e, os conteúdos, os seguintes: (i) Determinação de termos de uma sequência definida por uma lei de formação recorrente ou por uma expressão geradora; (ii) Determinação da expressão geradora de uma sequência definida por uma lei de formação recorrente; e (iii) Problemas envolvendo a determinação de uma lei de formação compatível com uma sequência parcialmente conhecida. Todos os conteúdos tinham sido lecionados nas duas aulas anteriores através de um ensino dirigido e exemplificado com diferentes situações/exercícios, resolvidos no quadro preto, ora por mim ora pelos alunos, e respetivo registo nos cadernos diários. O teste de avaliação já estava marcado para o dia cinco de dezembro e ainda havia outros conteúdos para aprender: proporções e escalas. Havia que consolidar as aprendizagens, mas recorrendo a uma estratégia e condições de aprendizagem diferentes, para que não fosse "mais do mesmo", pois era a última aula antes do teste dedicada a estes assuntos. Pretendia uma tarefa em que os alunos pudessem explorar a relação e variação entre as grandezas envolvidas, sentissem necessidade de usar uma letra para representar uma das variáveis, compreendessem a noção de expressão geradora e lei de formação, as distinguissem e as obtivessem por mais do que uma forma, e formulassem e testassem conjeturas e as validassem. A tarefa n.º 8 "O nome do Luís", da página 87 do manual (Anexo 1), servia estes objetivos. Propus-lhes a sua resolução em trabalho de grupo desde que se comprometessem a respeitar as regras de uma boa convivência social, o que se prontificaram de imediato a fazer. Formei eu os quatro grupos, que queria o mais possível homogéneos entre si, mas que fossem heterogéneos, contendo todos os grupos alunos com diferentes graus de autonomia. Os grupos foram distribuídos pelo espaço como se vê na Fig. 1, o que me permite uma deslocação rápida entre os mesmos. O espaço por onde eu circulei durante a atividade encontra-se a tracejado na figura. Todos os nomes dos alunos são fictícios.

2. Síntese da aula

Os primeiros minutos da aula foram usados na entrada da sala de aula e respetivo posicionamento habitual de cada um de nós, na breve revisão da aula anterior com escrita do respetivo sumário, correção do trabalho de casa marcado na aula anterior, na formação dos grupos, e na indicação do trabalho que iriam desenvolver. Escrevi no quadro preto a identificação do trabalho que iam realizar. Uma das tarefas do livro tinha as características que eu considerava importantes para esta situação pois mobilizava os saberes disponíveis dos alunos e permitia aprofundar os conhecimentos e desenvolver as devidas competências. Não houve nem leitura nem explicação docente da tarefa. Os alunos selecionaram o material necessário, e sentaram-se nas mesas que eu indiquei, começando a trabalhar. Nessa altura liguei o gravador, aguardei um pouco e comecei a minha ronda pela sala. O trabalho foi decorrendo e eu ora visitava um grupo ora visitava outro, inteirando-me do ponto de situação em que se encontravam e verificando a correção das respostas nos registos individuais ou solicitando-o verbalmente. O tempo que permaneci com determinado grupo variou entre alguns segundos, 9" no mínimo, e 4'05" no máximo. A Tabela 1 indica a constituição dos grupos. O tom do burburinho foi-se intensificando à medida que o tempo passava.

Tabela 1: Constituição dos grupos

Grupo	Constituição
I	Mafalda, Josué, Marco, Fausta e Maria
II	Rogério, Romeu, Joaquim e Madalena
III	Tadeu, Jorge, Marta e Carmesim
IV	Amália, Roger, Raul, Samuel e José

3. Descrição do Episódio

Duração: 40'43"

(Início: 00'00") Aproximo-me de um dos grupos e vejo que todos os elementos olham uns para os outros para ver se já estão todos a postos para começarem a trabalhar. A Amália pergunta-me a data e eu aproximo-me do grupo. Como o José ainda não estava a postos para começar, o Roger incentiva-o e lembra-lhe os procedimentos necessários.

(0'40'') Roger: ***Zé, já abriste a lição?*** (Pausa) ***A lápis?!***

Como decidi que cada grupo apenas trabalhasse numa mesa, dou algumas indicações sobre o modo de organização dos materiais de maneira que apenas dois livros sejam suficientes para que os cinco alunos pudessem ter acesso à leitura conjunta e se sintam minimamente confortáveis.

Amália: ***Consegues ver?***

Samuel: ***Eu consigo.***

Agrada-me este cuidado. Depois de se sentirem todos confortáveis, dou o mote para o início do trabalho.

Prof.: ***Um de vós pode ler. José, lê lá.***

Decidi indicar o José para iniciar a leitura para lhe deixar bem claro que esperava que ele participasse na realização do trabalho. O José é um aluno com muitas dificuldades de aprendizagem e muito tímido. Distrai-se com facilidade e não realiza o trabalho, daí a minha preocupação com ele. Amália e Samuel incentivam-no a ler. O José começa a ler (Fig.2), ao seu ritmo, que os colegas respeitam.

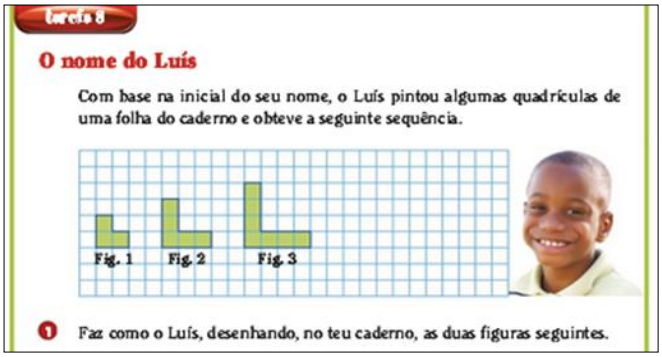


Figura 2: Pergunta Q1 da tarefa

Mal acaba de ler, os colegas dizem que é fácil. Selecionei uma tarefa de dificuldade intermédia para que os melhores alunos se sentissem mais seguros e pudessem ajudar, com mais facilidade, os colegas com mais dificuldade. E estes, por sua vez, manifestassem menos dificuldades em os compreender. Não vi inconveniente em estender a pergunta. O Samuel prevê este pedido e responde antes de eu terminar a frase.

Prof.: ***Desenham as duas figuras seguintes…***

Samuel: ***É só acrescentar mais 2*****, um em baixo e um em cima.**

Prof.: ***… e dizem como é que se fez.***

Roger: ***Professora, mas desenhamos esta a caneta, primeiro***. **(1'52")**

Confirmo. (…) Corrijo um erro de gramática, passo pelo grupo I, encontro a Maria com dificuldades a entender a pergunta à qual o Josué (NEE) já respondeu, clarifico-a e avanço para o grupo III. **(2'45")**

Prof.: ***Já começaram?*** Dois elementos do grupo põem-me a par do trabalho feito.

Tadeu: ***Stôra, temos que fazer a figura 4 e 5.***

Marta: ***São as duas.*** (Olho para os cadernos e vejo que apenas desenharam as figuras pedidas.)

Prof.: ***Podem fazer estas três que já estão feitas. São tão pequeninas que não custa nada a fazer.*** - Digo eu apontando para as três figuras da sequência já desenhadas no livro. Ignoram o meu comentário.

Tadeu: ***Temos que acrescentar um aqui e um aqui.*** (Aponta para o local que indica.)

Marta: ***E depois, na figura 4, temos que acrescentar um e … um…***

Tadeu: ***Então temos que acrescentar um aqui e um em baixo.***

Marta: ***… e depois na segunda metes o que acrescentaste aqui e depois acrescentas mais um. É, não é, professora*****? (3'11")**

No final, a Marta pediu uma confirmação, mas não senti que precisasse realmente dela. Entretanto, regresso ao Grupo IV aproximando-me em silêncio. Quando chego, os alunos contam e conferem o número de quadrados de cada termo da sequência.

(3'53") Samuel: ***Uma, duas, três, quatro; Uma, duas, três, quatro, cinco.*** Olho para o José e ele está empenhado no trabalho e não fui a única a reparar nisso.

Prof.: ***Muito bem, José. Estou a gostar de te ver*****.**

Roger: ***Eu já disse que estou admirado, Professora*****. (4'05")**

Durante a aula, o José fez todos os registos necessários para a resolução da tarefa (Figura 3).

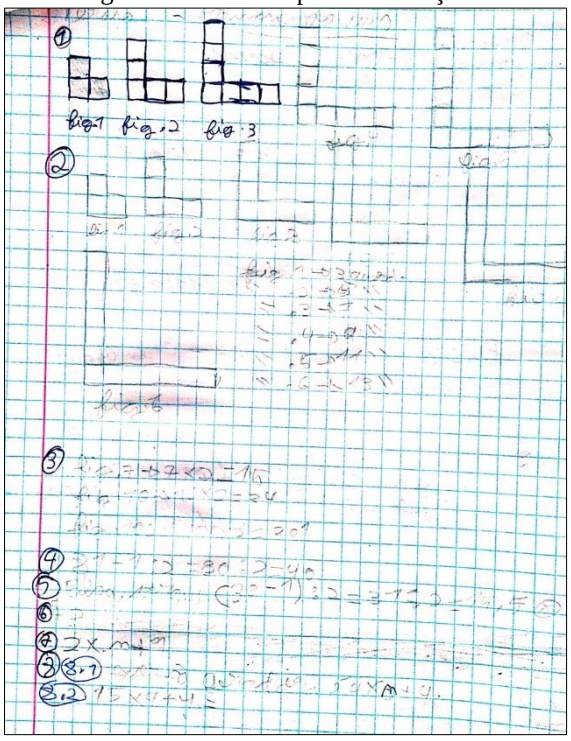


Figura ***3***: Registos do José durante a sua atividade

Samuel: ***Já está a primeira. Fizeste?*** - Diz, virando-se para os colegas.

Prof.: ***Como é que é a figura seguinte, José?***

Aguardo e o Samuel também aguarda por confirmar as suas respostas com os colegas. Entretanto o José não me responde, baixa os olhos, sorri e mexe-se na cadeira. Os colegas interagem uns com os outros. Não insisto, apercebendo-me do seu desconforto, incentivo-o a continuar e afasto-me. Aproximo-me do grupo II e inteiro-me do ponto de situação.

Prof.: ***Quantos quadradinhos tem?*** (Aponto para a primeira figura.)

Vários: ***Três.***

Madalena: ***Faz as duas figuras seguintes da sequência.*** Diz, dirigindo-se a outro colega.

Prof.: ***Ele já fez. Ele já fez a figura 4 e a figura 5.***

Vários: ***Nós também.***

Madalena: (Lendo a parte inicial da pergunta (Figura 4) e respondendo de seguida.) ***Temos que escrever 3, 6, 9, …*** (Reparo que comete um erro no 2.º termo e ignora o terceiro, mas como não o considero relevante nesta situação, deixo passar, pois estou certa de, quando escreverem os termos da sequência, vão fazê-lo corretamente.)

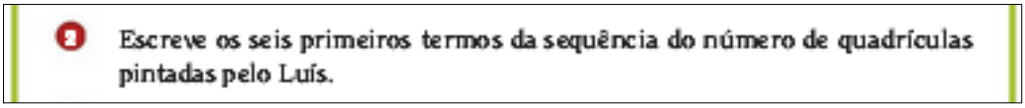


*Figura **4***: Enunciado da pergunta Q2 da tarefa

Prof.*: Concordam, os outros? Então façam.* - Incentivo e, reparando na sua anuência, afasto-me, aproximando-me do grupo I. Quando chego, eles encontram-se a confirmar o número de quadrados nas figuras que estão a construir. **(5'13")**

Maria: ***Esta tem três. Esta tem cinco. O que reparamos é "mais dois".***

Fausta: ***Então, esta tem três. Um, dois, três, quatro, cinco. Esta tem um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete.***

Maria: ***Nós só tínhamos esta. Não podes repetir esta. Estás a repetir esta.*** (Aponta para a figura 3, copiada do livro)***. Por isso daqui para aqui, temos que acrescentar mais dois. Daqui para aqui temos que acrescentar mais dois.*** (Aponta para as figuras seguintes.)

Prof.: ***Maria, acrescentar dois.*** – Emendo.

Entretanto reparo que o Josué está a construir uma figura como sendo a quarta figura sem recorrer a qualquer critério. O Josué é um dos alunos NEE. Tem muitas dificuldades e uma letra ilegível, na maioria das vezes. Dou-lhe a entender que se calhar o que está a fazer não está bem. Logo dois alunos do grupo se viram para o ajudar. Entretanto um destes alunos continuava a ser solicitado por um terceiro, mas foi capaz de ajudar os dois. Interagiram durante o tempo que lá estive, procurando confirmação nos colegas e não em mim. Em determinada altura, corrijo um pormenor pois a aluna está a verbalizar erradamente, e poderia confundir os colegas, que pretendo evitar. No final pedi-lhes para compararem todos os registos. **(7'45").** De seguida resolvem a pergunta Q2. Vou validando algumas respostas. Afasto-me deste grupo e aproximo-me do grupo II. **(8'52")**

Madaena: A 1 tem quantos? Tens que contar, Rafael.

Prof.: O que estais a fazer?

Romeu: ***Estamos a fazer uma espécie de tabela com os quadrados que tem cada uma.*** (Figura 5)

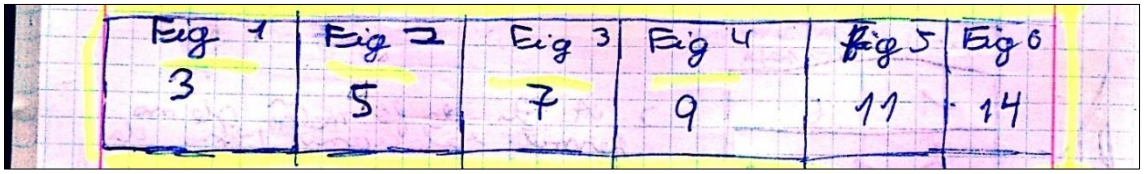


Figura 5: Tabela construída pelo Romeu

Verifico os termos da sequência já encontrados pelos alunos, confirmando-os um a um, e apontando para um erro no 6.º termo na tabela. Uma aluna doutro grupo levanta-se e aproxima-se de mim para esclarecer a sua interpretação da questão Q3, estando em dúvida se pretendem três respostas, uma para cada pergunta, ou saber ao todo, quantas quadrículas se devem pintar. (Figura 6).

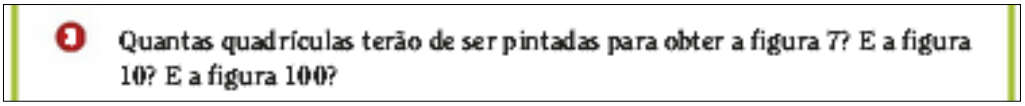


*Figura **6***: Enunciado da pergunta Q3 da tarefa

Noutro grupo também se verificaram, entre os elementos do grupo, as mesmas diferentes interpretações na mesma pergunta, que também quiseram esclarecer comigo. Apercebo-me que já começaram a organizar a informação numa tabela, e por isso sugiro que utilizem sempre a mesma tabela para incluir a informação nova. Aos **11'30"** a Madalena chama-me. Está contrariada, pois alguns colegas não se estão a envolver seriamente na atividade. Quando formei os grupos, dois destes alunos, um deles a Madalena, mostraram algum desagrado em ficarem juntos.

Madalena: A lei de formação é $n + 2$?

Prof.: n não! Não sabes qual é o n. (Reparo que está a pensar bem, mas a exprimir-se mal, pois está a utilizar o n para representar um termo qualquer da sequência.) **A lei de formação é "Ao termo anterior, vais adicionar duas unidades."**

Madalena: Então é… (Ouvem-se conversas paralelas entre os outros elementos do grupo.)

Prof.: A lei de formação é essa: Sabendo um termo, consigo obter o seguinte adicionando duas unidades.

Madalena: Então o que escrevo?

Prof.: Escreve o que te permite obter o termo seguinte. O que é que te permite obter o termo seguinte?

Madalena: A lei de formação é adicionar dois ao termo anterior.

Confirmo e afasto-me indo ver o que se passa no grupo III **(12'25")** onde nem todos trabalhavam. Chamo-os à atenção que a Marta está a fazer uma coisa que mais nenhum dos outros está a fazer, que é organizar a informação numa tabela. O Carmesim responde-me dizendo que estão a pensar e eu digo-lhe que têm de registar o pensamento. O Carmesim, que não gosta da escola, vai participando, manifesta as suas preocupações tentando evitar trabalhar. Vou confirmando as respostas dadas e logo aproveita para desviar o assunto da conversa. Não lhe presto atenção, ouvindo a Marta e o Tadeu, e o Carmesim vai-se interessando e vai também participando. Deixo-os a trabalhar e regresso ao grupo II, que acabaram de me chamar, onde já todos se encontram a tentar encontrar uma estratégia para encontrar o termo de ordem 100.

(14'25") No grupo do lado, Grupo II, continuam os mesmos problemas na pergunta Q3, que tentam resolver recorrendo à lei de formação, que lhes é pedida adiante na pergunta Q6. (Fig.7).

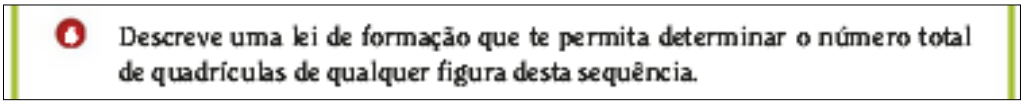


Figura 7: Enunciado da pergunta Q6 da tarefa

Um dos elementos do grupo sugere como estratégia contar o número de quadrículas até à figura 100, mas nem outros elementos nem eu aceitamos essa estratégia que verificamos não ser a melhor e mais eficiente nesta situação. Encontram outra, incentivo-os a utilizá-la e afasto-me até ao grupo IV. Estes já tinham descoberto a expressão geradora, pedida na pergunta Q7 (Figura 8).

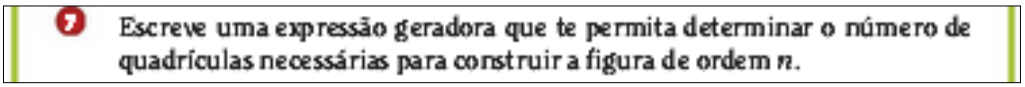


Figura 8: Enunciado da pergunta Q7 da tarefa

Pergunto aos outros elementos do grupo se concordam. **(15'30")** Um aluno explica e eu pergunto ao José se percebeu, repetida logo de seguida dos colegas. Em silêncio, o José sorri e abana negativamente com a cabeça. Peço aos colegas que lhe expliquem e eles mostram dificuldade em fazê-lo, manifestando-se na passagem da "batata quente" de uns para os outros. Lá começam a tentar explicar **(16'08")**. No seguimento desta explicação:

Prof.: *O que é o n*?

Samuel: *O n é o número. É o número por que se multiplica.*

Amália: O n é a ordem do termo.

Confirmo e peço para substituírem na expressão geradora que tinham descoberto, o n por 1, 2, 3, … e pergunto o que vai aparecendo. Quando o fazem, confrontam-me com um erro que, aparentemente, estou a cometer:

Roger: *Não se acrescenta 1.*

Samuel: *Só se acrescenta 2, ó Stôra. Não é preciso o 1. É só preciso o 2.*

Faço uma interjeição de surpresa. Estão a confundir a lei de formação com a expressão geradora.

Samuel: A Stôra disse $2 \times n + 1$. *O 1 não é preciso.*

Prof.: *Foram vocês que disseram.* Lembro-lhes que apenas estou a usar a expressão que eles me indicaram. Roger sente-se na obrigação de esclarecer o colega de grupo:

Roger: $2 \times n + 1$. Olha. Diz, virando-se para o colega. ***Aqui a figura 1 tem 3, a segunda tem 5. Nós temos que acrescentar 2. Então 2×1, que é a ordem do termo, dá 2 e temos que acrescentar 1 para ficar igual.*** **(17'59")** – Confirmo, e os alunos "ajeitam-se" nas respostas até chegarem a um consenso. Esclarecida a situação, calculam o termo de ordem 10 e de ordem 100. A Figura 9 mostra o trabalho final deste grupo.

Figura **9**: Representação em tabela do Grupo III

Mais tarde apercebo-me de que também o Grupo I utilizou pequenos sinais na representação que usaram, neste caso um esquema (Figura 10). Eles usaram pequenas setas para indicar uma ordem para a direita indicando quanto deviam adicionar para obter o termo seguinte da sequência.

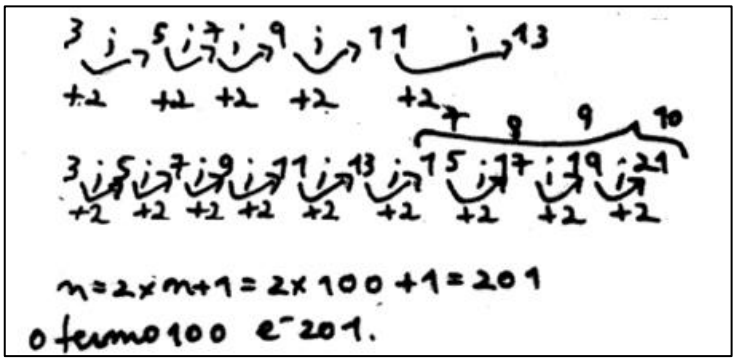


*Figura **10**:* Representação em esquema do Grupo I

De seguida respondem à pergunta Q4 (Figura 11) **(18'30"):**

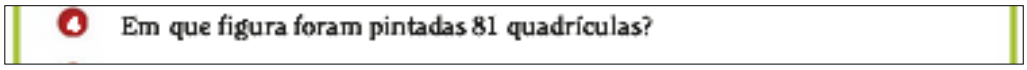


*Figura **11***: Enunciado da pergunta Q4 da tarefa

O Roger resolve rapidamente, o Samuel surpreende-se e eu confirmo repetindo a pergunta Q4 aos colegas. Como estratégia, utilizaram o cálculo inverso da expressão geradora. Recomendo-lhes que ajudem o José, deixo-os a trabalhar. Eu abordo o grupo II, encontrando-os ainda a trabalhar com o termo de ordem 100. Madalena já se acalmou. Joaquim começa a responder, mas Madalena interrompe-o, explicando o que eles fizeram. Os alunos do Grupo II presumem que, se o 10.º termo tiver 21 quadrados, o 100.º termo tem 210. Eu tento encontrar dois valores da tabela cujo produto seja 210, mas não consigo. Eles tomam consciência da situação, percebendo que todos os termos da sequência devem ser números ímpares, e 210 é um número par, o que contradiz as características dos termos numéricos da sequência. Dou-lhes tempo, indo ver o trabalho que ocorre no grupo IV.

Valido a resposta à pergunta Q5 (Figura 12), que resolveram com recurso à expressão geradora e solicito outra forma de explicação através da análise das figuras, com o objetivo de que relacionassem os dois tipos de representação, numérica e geométrica. **(21'33")** Não conseguem.

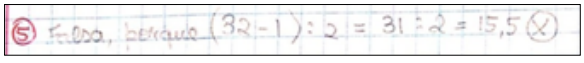


*Figura **12***: Resposta à pergunta Q5 do grupo IV

Não se apercebem que ainda não passei à pergunta seguinte, por isso volto a explicitar o que pretendo que me respondam agora. Peço-lhes que olhem a figura 3 da sequência com atenção. O Roger diz que para um lado são 4 e para o outro são outras 4. Contraponho que estão a contar duas vezes o mesmo quadrado e assim seriam 8, mas são apenas 7, o que reconhecem. Destaco, pintando a quadrícula que é comum aos dois e descobrem a regularidade. De seguida, solicito-lhes que analisem as características dos termos da

sequência. Com o trabalho que descrevo a seguir pretendi alargar as suas formas de encontrar as respostas, por isso, vou fazendo perguntas do género "quanto dá 2×1?" para que se apercebam do seguinte: o dobro de um número, par ou ímpar, é sempre um número par e, se a esse número adicionarmos uma unidade, obtemos um número ímpar, sempre, logo todos os termos da sequência são números ímpares, o que nos permite responder mais facilmente à questão 5 - (Figura 13) – cuja resposta já tinham descoberto por outra via, isto é, através da expressão geradora.

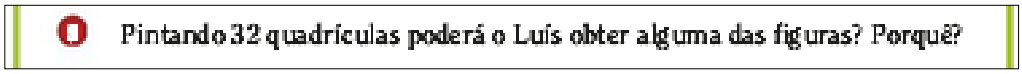


*Figura **13***: Enunciado da pergunta Q5

(24'15") Entretanto dirijo-me ao grupo I, que me tinha chamado alguns momentos antes:

Prof.: Maria, qual é o problema?

Maria e Fausta (ao mesmo tempo): **Já não é preciso.**

Prof.: Já não é preciso?! Ai que bom! (Sorrio.) **Então conta-me.**

Maria: Se nós somarmos um número ímpar com um número par dá sempre um número ímpar, não dá?

Tento exemplificar, mas a aluna corta-me a palavra, lê a pergunta e a resposta que o grupo deu, aguardando confirmação, que dou, solicitando outra forma de justificação. Aproveitam para confirmar outras respostas. Reparo também que a Maria já não cometeu o erro que lhe corrigi no início da atividade. **(25'50").** Regresso ao Grupo II, que se encontram desanimados ainda às voltas com a pergunta Q3. Reparo que já estão nisto há tempo demais, mas esperei até que solicitassem a minha ajuda, o que acontece agora. Dizem claramente que não conseguem fazer e o Romeu adianta mesmo que tem a cabeça a deitar fumo. Verifico com eles a impossibilidade de desenhar o termo de ordem 100, logo a necessidade de encontrar outra forma de o descobrir. Sugiro olhar para as figuras com "olhos" (pausa) "de ver" para que consigam ver regularidades nelas. Direciono-lhes a atenção para que vejam que todas as figuras têm uma construção semelhante: têm uma quadrícula no vértice que é comum aos dois lados e o mesmo de número de quadrículas para cada lado (Figura 14).

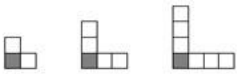


*Figura **14***: Alteração à representação visual fornecida que a professora fez

Todos: Ahhhhhhhhh!

Dão a resposta ao termo de ordem 100 e verificam que a sua primeira resolução se encontrava errada. O Romeu diz que fez doutra maneira, mas deu-lhe 200. Com pressa de passar ao grupo seguinte que não está a trabalhar, não presto atenção ao que diz o Romeu, afasto-me e aproximo-me do Grupo III. Estes não se encontram a trabalhar convenientemente, discutindo outros assuntos estranhos à atividade e até à matemática. Tento focar a sua atenção na realização da tarefa. Verificamos a expressão geradora e deixo-os a trabalhar indo até ao grupo II. Esclareço uma dúvida à Marta sobre a expressão geradora e deixo-os a trabalhar pois já possuem as ferramentas necessárias para resolver facilmente o resto da tarefa, e passo ao grupo II. A Mafalda queixa-se que isto é confuso, esclareço e incentivo a continuar.

Mais tarde apercebi-me que escreveram a semelhança entre as figuras da sequência, sinalizaram alguns elementos, destacando-os e utilizaram este esquema (Figura 15) para verificar para outras figuras da sequência e responder a outras perguntas.

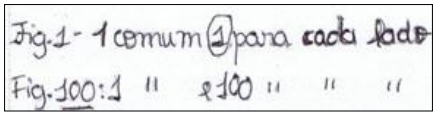


*Figura **15***: Esquema utilizado por uma aluna

Este esquema foi utilizado para resolver as questões seguintes, como foi o caso da questão 4. Para a sua resolução, o aluno fixou-se na regra de crescimento da sequência, em linguagem natural (sistema de representação verbal, Figura 16, à esquerda), fez o seu desenho (sistema de representação visual, Figura 16, ao centro) e retirou ao total de quadrículas, a quadrícula do canto e dividiu por dois (sistema de representação simbólico – numérico, Figura 16, à direita).

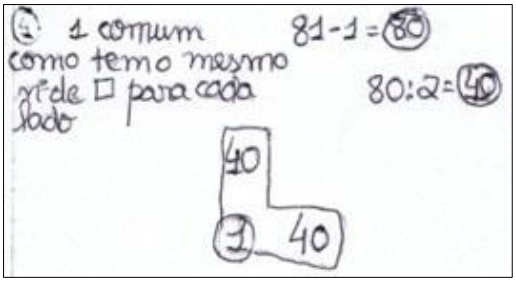


Figura 16: Resposta de um aluno com representações nos três sistemas de representação

Dirijo-me ao grupo IV. Finalmente chegam à pergunta Q7 à qual têm que responder uma coisa que já descobriram para resolverem outras perguntas. Não há dúvidas, apesar de darem duas expressões, mas são equivalentes. Passam à pergunta seguinte, que se refere a outra sequência também com a mesma situação da letra do nome do Luís, mas agora referindo-se ao perímetro das figuras. Vendo que o trabalho está a decorrer sem dificuldades avanço para o grupo I, que também já se encontra nesta questão. **(30'30")** Aproveito para perguntar o que é o perímetro e que unidades de medida teriam de usar. À primeira respondem que é a soma de todos os lados, que eu emendo dizendo que é a medida da linha que é a sua fronteira. À segunda respondem que é a quadrícula, quando as efetivamente estão a usar o lado da quadrícula. Emendo-os. Já me dizem qual a lei de formação. Prestam pouca atenção pois estão ansiosos por responder às questões. Apercebo-me que estão com dificuldade em contar com correção os lados das quadrículas e oriento-os numa forma de contagem menos confusa, traçando um pequeno traço perpendicular ao lado da quadrícula e procedendo com uma ordem determinada, por exemplo da esquerda para a direita. Procedem à contagem dos perímetros e vão-se emendando uns aos outros e eu a eles. Aos **33'01"** regresso ao grupo II, a Mafalda, agora já bastante animada, explica o que estão a fazer e o Joaquim deixa claro que da próxima vez é ele que me explica. Deixo-os a trabalhar e acerco-me do grupo III. Verifico a resposta ao termo de ordem 100 (210 quadrículas). O Carmesim continua distraído e arredado do trabalho. Peço-lhes para verificarem que todos os termos da sequência são constituídos por números ímpares, e reconhecem que a figura 100 não pode ter 210 quadrículas, logo a resposta está errada. Deixo-os a trabalhar e regresso ao grupo IV, onde uns dizem que vai bem e outros que vai mal, estando atrás da expressão geradora que ainda não encontraram. Faço perguntas simples sobre os primeiros termos da sequência, eles dizem a lei de formação e o Roger diz a expressão geradora. Solicito aos colegas que confirmem, deixo-os a trabalhar e volto ao grupo II, solicitando ao Joaquim que me explique o que estão a fazer. **(35'46")**

Joaquim: 32, não é senhora professora? 32. Então tem 1 em comum, dá 31. Depois 31 a dividir por dois lados não dá um número inteiro, dá 15,5.

Romeu e Joaquim (juntos): Por isso não é possível…

Joaquim: …fazer uma figura… (Confirmo, dizendo que a ordem do termo tem que ser sempre um número natural).

Joaquim: … dá 15,5. Vamos para a Q6. Afinal este grupo é bom.

Concordo, dizendo-lhes que, quando querem, trabalham bem. A Mafalda já sorri.

Deixo-os e aproximo-me do grupo III. A Marta diz que não conseguem fazer. Pedem-me ajuda para descobrir o termo de ordem 100. Relembro-lhes que tem de ser um número ímpar, que tínhamos verificado da última vez que lá tinha estado. Proponho-lhes observar a constituição das figuras da sequência. Peço-lhes para compararem as figuras, peço ao Carmesim que confirme o que estou a fazer, pretendendo captar-lhe a atenção. Logo o Tadeu descobre que são 201, mas os outros fazem alguma confusão. Repetimos o procedimento, verificamos as contas e passam à seguinte. Mostram dificuldades. Volto ao grupo II. A Mafalda está outra vez aborrecida com os colegas. Deixo que se entendam e vou ao grupo IV, confirmo a expressão geradora, e regresso novamente ao grupo II, e encontro-os já mais calmos. Entretanto toca para sair, e marco o TPC: acabar a resolução da tarefa.

Apêndice 2 – Narração Multimodal 2 (NM2) – Autorreflexão – Desenvolvimento profissional

Constituição da NM2

Para facilidade de leitura e de organização do processo de autorreflexão no âmbito do desenvolvimento profissional, procedemos à estrutura seguinte desta narração multimodal.

1 Contexto geral
2 Estrutura da NM2
3 PARTE 1
- 3.1 Contexto
- 3.2 Tarefas selecionadas

4 PARTE 2
- 4.1 Contexto
- 4.2 Tarefas selecionadas
  - 4.2.1 Resultados encontrados à pergunta 1)
    - 4.2.1.1 O que a professora ficou a saber com as respostas à pergunta 1.a)
    - 4.2.1.2 O que a professora ficou a saber com as respostas à pergunta 1.b)
    - 4.2.1.3 O que a professora ficou a saber com as respostas à pergunta 1.c)
  - 4.2.2 Resultados encontrados à pergunta 2)
    - 4.2.2.1 O que a professora ficou a saber com as respostas à pergunta 2)
  - 4.2.3 Resultados encontrados à pergunta 3)
    - 4.2.3.1 O que a professora ficou a saber com as respostas à pergunta 3)
  - 4.2.4 Resultados encontrados à pergunta 4)
    - 4.2.4.1 O que a professora ficou a saber com as respostas à pergunta 4)
- 4.3 Após a realização deste teste a professora apercebeu-se que…

5 PARTE 3
- 5.1 Contexto
- 5.2 Síntese da série de aulas
- 5.3 Análise e resultados da sequência de ensino
  - 5.3.1 Planificação semanal 1 (aulas n.º 2, 3, 4 e 5)
    - 5.3.1.1 Após a realização destas tarefas na semana indicada a professora apercebeu-se que…
  - 5.3.2 Planificação semanal 2 (aulas n.º 6, 7, 8 e 9)
    - 5.3.2.1 Após a realização destas tarefas na semana indicada a professora apercebeu-se que…
  - 5.3.3 Planificação semanal 3 (aulas n.º 10, 11, 12, 13 e 14)
    - 5.3.3.1 Após a realização destas tarefas na semana indicada a professora apercebeu-se que…
  - 5.3.4 Planificação semanal 4 (aulas n.º 15, 16, 17 e 18)
    - 5.3.4.1 Após a realização destas tarefas na semana indicada a professora apercebeu-se que…
  - 5.3.5 Planificação semanal 5 (aulas n.º 19, 20, 21, 22 e 23)
    - 5.3.5.1 Após a realização destas tarefas na semana indicada a professora apercebeu-se que…
  - 5.3.6 Planificação semanal 6 (aulas n.º 24, 25 e 26)
    - 5.3.6.1 Após a realização destas tarefas na semana indicada a professora apercebeu-se que…
  - 5.3.7 Planificação semanal 7 (aulas n.º 27, 28, 29 e 30)
    - 5.3.7.1 Após a realização destas tarefas na semana indicada a professora apercebeu-se que…
  - 5.3.8 Planificação semanal 8 (aulas n.º 31, 32, 33, 34 e 35)
    - 5.3.8.1 Após a realização destas tarefas na semana indicada a professora apercebeu-se que…
  - 5.3.9 Planificação semanal 9 (aulas n.º 36, 37, 38 e 39)
    - 5.3.9.1 Após a realização destas tarefas na semana indicada a professora apercebeu-se que…

6. PARTE 4
- 6.1 Contexto
- 6.2 Análise e resultados do trabalho de grupo sobre resolução de problemas com mdc e mmc

1. PARTE 5
   7.1 Contexto
   7.2 Análise e resultados do teste aplicado
8. PARTE 6
   8.1 Contexto
   8.2 Análise e resultados da tarefa explorada
9. PARTE 7
   9.1 Contexto
   9.2 Professor A
      9.2.1 Materiais usados pelo Professor A
      9.2.2 As representações vistas pelo Professor A
   9.3 Professor B
      9.3.1 Materiais usados pelo Professor B
      9.3.2 As representações vistas pelo Professor B
   9.4 Professor C
      9.4.1 Materiais usados pelo Professor C
      9.4.2 As representações vistas pelo Professor C

1. Contexto geral

Esta narração pretende registar e descrever as ações e reflexões que a professora considerou importantes para o seu desenvolvimento profissional no que concerne ao uso de representações visuais, no âmbito da frequência de um doutoramento. Não houve gravação de aulas pois tornava-se incomportável a sua audição já que o número de aulas seria bastante elevado. Por essa razão, esta narração não descreve uma aula nem partes dela, mas baseia-se em determinados momentos pontuais da sua atividade letiva durante cerca de ano e meio (parte final do ano x; ano x+1). No ano x, os alunos participantes são uma turma de 18 alunos que frequentavam o 6.º ano de escolaridade. No ano x+1, os alunos participantes são uma turma de 17 alunos que frequentavam o 5.º ano de escolaridade. A professora leciona neste nível de ensino há vários anos, pertence ao Grupo de docência 230, lecionando em todos os anos a disciplina de Matemática, à mesma turma, dando-lhe seguimento dentro do Ciclo. Tem consciência das dificuldades dos alunos a esta disciplina, e tem participado no processo de avaliação de aprendizagens desta disciplina para ampliar a sua experiência e melhorar a sua capacidade de avaliação das aprendizagens. A participação neste trabalho deu-lhe um conhecimento razoável das dificuldades e erros cometidos pelos alunos em diferentes conteúdos matemáticos, uma vez que trabalhou com outros professores de todas as regiões do país e durante a formação que fez nesse âmbito teve acesso a respostas de alunos de todas as regiões. No entanto, verificava que conhecer os erros e dificuldades dos alunos não é suficiente para lhes melhorar o desempenho. Visto que a Matemática é uma disciplina que recorre muito a registos escritos, a professora tinha a convicção de que era um domínio que podia explorar para encontrar formas de ajudar os alunos a melhorar o seu desempenho. Com efeito, um dos relatórios elaborados pelo IAVE sobre os resultados das Provas de Aferição era a dificuldade dos alunos na comunicação matemática, sendo uma das recomendações aos professores criarem condições para a sua melhoria. A professora tinha também consciência que podia melhorar o seu conhecimento sobre as representações matemáticas e a convicção de que se as conhecesse melhor poderia aí encontrar algo que a poderia ajudar a desenvolver a comunicação matemática na sala de aula. Também tinha a convicção de que as imagens que eram utilizadas nos enunciados dos problemas e as que se poderiam construir na sua resolução poderiam ajudar a superar ou diminuir as dificuldades de comunicação matemática. Apesar de refletir e discutir estes assuntos com colegas, tinha a consciência que estas ações seriam insuficientes. Por essa razão resolveu tentar a frequência de um doutoramento em Didática e foi neste âmbito que fez o seu desenvolvimento profissional.

Este trabalho de desenvolvimento profissional foi acompanhado pela equipa de diferentes professores da parte curricular do curso, foi sistematizado e posto à consideração a revisores exteriores à instituição universitária em que decorreu, estando muitos dos seus resultados publicados. Há dois grupos de alunos intervenientes nesta fase. Um primeiro grupo que participou na primeira parte desta narração e que é o mesmo que participou nas atividades descritas na Narração Multimodal 1 (NM1) e um segundo grupo que participou na Fase 2 e na Fase 3 do estudo de investigação. A autorreflexão no âmbito do desenvolvimento profissional que aqui se descreve, desenvolveu-se na Fase 2 do estudo. Durante estes dois anos letivos, as aulas de Matemática decorreram com uma frequência alternada de quatro ou cinco aulas semanais, duas das quais eram consecutivas. A Fase 3 do estudo foi organizada tendo por base as experiências e resultados obtidos durante as duas primeiras fases, principalmente a Fase 2, de desenvolvimento profissional. Esta narração multimodal descreve este processo de autorreflexão durante esse tempo.

A professora sempre valorizou os registos escritos e sentia que eram um domínio que podia conhecer melhor com vista a compreender as dificuldades evidenciadas pelos alunos do Ensino Básico em geral, em particular, os seus. Durante a frequência da parte curricular do curso de doutoramento, a professora consultou artigos relacionados com a investigação feita no domínio das representações matemáticas. Duval foi um dos investigadores cujos trabalhos considerou com potencialidades de concretizar o seu trabalho de investigação, ao nível da análise das

representações através das transformações de representações. Duval defende que as causas de tantas dificuldades na Matemática se devem à não distinção do objeto matemático das suas representações, da diversidade de registos de representação utilizados nas sulas de Matemática e da pouca fluência e flexibilidade entre as diferentes representações. A fim de compreender melhor as causas destas dificuldades, Duval identifica os registos de representação e as operações que podem ocorrer com eles, identificando duas: os tratamentos, se ocorrem dentro do mesmo registo e as conversões, se ocorrem entre representações de registos diferentes. A professora decidiu adotar e seguir uma classificação para as representações e transformações de representações muito aproximada desta, porque lhe permitia analisar concretamente as representações feitas, tanto por si como pelos alunos.

A professora também tinha a convicção de que as representações visuais não estavam a ser utilizadas na plenitude das suas potencialidades, mas não sabia como o fazer, pois quando sugeria que os seus alunos as utilizassem, encontrava alguma relutância por parte destes. Durante o primeiro ano do curso de doutoramento, a professora decidiu que desenvolveria o seu trabalho de investigação tentando compreender a forma como poderia retirar informações relevantes das representações matemáticas que ela e os alunos utilizavam. Para o efeito, recolheu alguns dados relativos ao ensino e aprendizagem de sequências com representações visuais e durante esse ano analisou esses dados. A decisão de começar por este tema matemático deveu-se a ser um tema onde facilmente se usam representações em três sistemas de representação: visual (sequências com figuras geométricas), simbólico (sequências numéricas e expressão geral) e verbal (características dos termos da sequência, lei de formação, justificação de raciocínios, etc.).

Desta investigação foram publicados dois artigos relativos às transformações de representações, um sobre tratamentos e outro sobre conversões. Embora ainda se estivesse numa fase muito inicial da investigação e esta ainda não estava completamente delineada e sistematizada, com este trabalho a professora teve a confirmação de que as representações visuais podiam ter algum impacto no ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos.

No entanto, a professora teria que continuar a sua investigação noutros temas matemáticos e de conhecer melhor as representações matemáticas e as transformações de representações, e a forma como se efetuavam. Como se encontrava a lecionar Matemática ao 6.º ano de escolaridade, decidiu começar por analisar as tarefas do capítulo do livro adotado, em lecionação, no que concernia às representações nos enunciados das tarefas, às representações que se podiam esperar nas respostas dos alunos a essas mesmas tarefas e às representações efetivamente usadas pelos alunos e respetivas transformações. A professora teria que decidir que conjunto de tarefas iria seguir. Para rentabilizar o tempo, decidiu seguir as tarefas do livro, investindo mais no tempo posterior à sua aplicação, uma vez que melhor contribuía para os seus objetivos de investigação. A Parte 1 desta narração descreve este primeiro trabalho, feito com o primeiro grupo de participantes, que se encontrava a frequentar o final do 6.º ano de escolaridade e as restantes partes foram organizadas de forma recorrente da Parte 1. A secção seguinte descreve a estrutura da NM2.

2. Estrutura da NM2

A NM2 é formada por sete partes.

Parte 1:

- **Síntese**: Resultados sobre a análise e reflexão das características das tarefas do capítulo *Figuras planas. Perímetro e área* do livro adotado para o 6.º ano de escolaridade; Estabelecimento das categorias de análise das tarefas utilizadas relativas às representações e transformações de representações consideradas durante a reflexão; Melhor conhecimento dos tipos de representações e transformações de representações consideradas; Identificação das representações presentes no enunciado de tarefas, das representações que esperava encontrar nas respostas dos alunos e nas representações que eles usavam efetivamente.
- **Participantes**: 1.º grupo de participantes (Alunos do 6.º ano que participaram na Fase 1 do estudo - NM1)
- **Localização temporal**: Ano x (final)

Parte 2:

- **Síntese**: Teste para caracterizar as representações visuais usadas pelos alunos do 2.º grupo de participantes do estudo no início do 5.º ano de escolaridade.
- **Participantes**: 2.º grupo de participantes (no início do 5.º ano)
- **Localização temporal**: Ano x+1 (outubro)

Parte 3:

- **Síntese**: Descrição do trabalho realizado durante nove semanas e resultados sobre a sua análise e reflexão sobre o ensino e aprendizagem de *Múltiplos e divisores* (5.º ano) com representações múltiplas com destaque para as representações visuais.
- **Participantes**: 2.º grupo de participantes (enquanto frequentava o 5.º ano)
- **Localização temporal**: Ano x+1 (setembro/outubro/novembro)

Parte 4:

- **Síntese**: Resultados sobre a análise e reflexão sobre um trabalho de grupo em que os alunos resolveram quatro problemas de acordo com as representações que usaram nas suas resoluções.
- **Participantes**: 2.º grupo de participantes (enquanto frequentava o 5.º ano)
- **Localização temporal**: Ano x+1 (19 de novembro)

Parte 5:

- **Síntese**: Resultados sobre a análise e reflexão da resolução de um teste com alguns exercícios e problemas envolvendo as noções de divisores, múltiplos e *mdc* e *mmc*.
- **Participantes**: 2.º grupo de participantes (enquanto frequentava o 5.º ano) e outra turma (de controlo) da mesma escola e ano de escolaridade
- **Localização temporal**: Ano x+1 (23 de novembro e último dia de fevereiro)

Parte 6:

- **Síntese**: Resultados sobre a análise e reflexão de exploração de um exercício rotineiro aplicado para consolidar a classificação de triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos e como o enriquecer do ponto de vista das representações usadas.
- **Participantes**: 2.º grupo de participantes (enquanto frequentava o 5.º ano)
- **Localização temporal**: Ano x+1 (19 e 27 de abril)

Parte 7:

- **Síntese**: Descrição do trabalho realizado no âmbito do ensino do tema Áreas de figuras planas por cada um dos três colegas de trabalho da professora a lecionar Matemática ao 6.º ano de escolaridade).
- **Participantes**: 3 colegas de grupo disciplinar (230 – Matemática e Ciências): Professor A, Professor B e Professor C.
- **Localização temporal**: Ano x+2 (junho?)

---

3. PARTE 1

3.1. Contexto

A professora começou por analisar o capítulo que ia começar a lecionar *Figuras planas. Perímetro e área*, do segundo volume do livro adotado na escola para esse ano de escolaridade. Este capítulo tem um total de 84 tarefas. Destas, 12 tarefas introduzem o conteúdo e as outras são situações com o objetivo de consolidar a aprendizagem. A professora fez uma primeira análise dos enunciados das tarefas relativa às representações usadas e às características de cada uma. Dividiu as representações em três classes: simbólicas, verbais e visuais, por serem os sistemas de representação mais frequentemente usados. Três sistemas de representação permitiriam três tratamentos diferentes, um em cada um dos sistemas, e conversões entre elas, num total de seis. As representações simbólicas são as representações matemáticas mais comuns e neste ciclo de escolaridade são de dois tipos: Numéricas e algébricas, mas principalmente numéricas. A professora decidiu fazer esta subdivisão por se aperceber que para os alunos era mais fácil trabalhar com números e sempre que se introduzia uma variável (com uma letra), os alunos manifestavam confusão e incompreensão, dizendo claramente não compreender a utilização de letras na Matemática. Apesar de serem representações simbólicas, são representações com diferentes níveis de compreensão, daí a professora ter decidido fazer a sua separação em termos de análise. A linguagem matemática (simbólica) está sujeita a regras claras e específicas de escrita e leitura. As representações verbais utilizam a linguagem natural, que se encontra também sujeita a regras claras e específicas. Entre as representações simbólicas e as representações verbais há uma correspondência na Matemática. Por exemplo, $2 + 3 = 5$ lê-se "a soma de dois com três é cinco". No entanto, esta leitura é específica da Matemática, pois não é assim que que se lê esta expressão num contexto menos formal de ensino e aprendizagem. A escrita em linguagem simbólica de expressões em linguagem natural e a leitura em linguagem natural de expressões simbólicas estão previstas no currículo de Matemática em vigor (Ministério da Educação e Ciência, 2013), e os alunos manifestam dificuldades, pois também esta conversão está sujeita a regras claras e específicas e o sentido com que se fazem requer competências diferentes. A acrescentar há diversas palavras a significar o mesmo, por exemplo, para o resultado da subtração há as palavras resto, excesso ou diferença, adaptando-se melhor uma do que as outras a determinada situação. As representações visuais têm também muita expressão nas aulas de Matemática. Esquemas, gráficos, diagramas, figuras geométricas e outras são frequentes. Umas têm correspondência com representações simbólicas e verbais, outras não. Por exemplo, um gráfico pode substituir uma expressão algébrica, mas também aqui, por vezes adapta-se mais o gráfico, outras vezes a expressão algébrica, e outras vezes nenhuma delas. Muitas vezes no mesmo enunciado existe um tipo de representação, dois, ou mesmo os três em simultâneo, cada um com a sua informação. Era preciso conhecer bem esta diversidade de linguagens/sistemas e as características de cada uma. Daí esta primeira análise. Como era possível transformar umas representações nas outras, também houve necessidade de proceder à caracterização destas transformações de representações, e por essa razão construíram-se as categorias

da Tabela 1. Pelo exposto, a professora teve que realizar um trabalho prévio de análise das tarefas tendo-o realizado em dois momentos distintos: Numa primeira fase, analisou cada tarefa para identificar as linguagens usadas no enunciado de cada tarefa e identificou as transformações de representações cuja resposta requeria. Foram formadas duas categorias de análise para cada uma das análises feita. Numa segunda análise identificamos o tipo de transformação de representações que os alunos usaram efetivamente nas suas respostas, selecionando aquelas em que eles usaram representações diferentes das que esperávamos. Este trabalho teve o objetivo de familiarizar a professora com as diferentes representações e transformações e conhecer melhor as características de cada uma delas.

Tabela **1**: Categorias e subcategorias de análise

Categorias		Subcategorias
Linguagens (usadas no enunciado das tarefas)		Verbal Verbal e visual Verbal e simbólica Verbal, simbólica e visual
Transformações de linguagens (na resposta esperada às tarefas e nas respostas dos alunos)	Dentro do mesmo tipo de linguagem	Simbólica Visual Verbal
	Entre linguagens	Visual para simbólica; Verbal para simbólica Visual para verbal Verbal para visual Simbólica para verbal

Depois de formadas estas categorias, fez-se a caracterização das tarefas daquele capítulo. Este trabalho deu um determinado traquejo à professora na identificação rápida das representações e das transformações. Ainda ficou a conhecer as linguagens mais e menos frequentes e as diferentes combinações de linguagens. Para organizar os dados recolhidos, construiu-se uma tabela de frequências, a Tabela 2, que mostra as categorias, subcategorias e respetivas frequências nos enunciados das tarefas.

Tabela **2**: Subcategorias de linguagem encontradas nos enunciados das tarefas

Categorias	Subcategorias	Frequência ($n = 96$)
Linguagens (usadas nos enunciados das tarefas)	Verbal	25
	Verbal e visual	62
	Verbal e simbólica	1
	Verbal, simbólica e visual	8

A Figura 1 mostra um exemplo de tarefa para cada categoria:

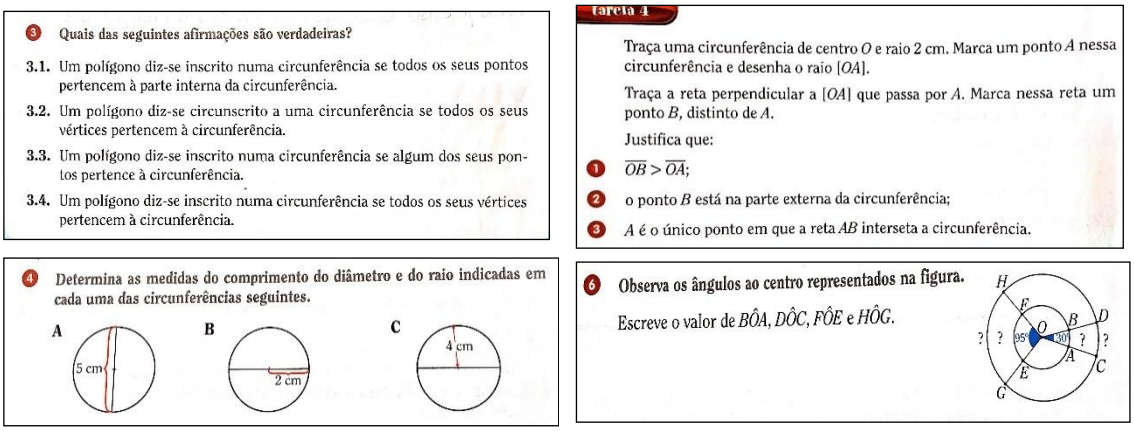


Figura **1**: Enunciado em linguagem natural (em cima, à esquerda); Enunciado em linguagem verbal e simbólica (em cima, à direita); Enunciado em linguagem verbal e visual (em baixo, à esquerda); Enunciado em linguagem verbal, visual e simbólica (em baixo, à direita).

Para as transformações de representações criaram-se duas subcategorias, consoante envolviam uma só linguagem ou entre duas linguagens. As primeiras estavam relacionadas com as transformações que Duval apelidou de tratamentos e as segundas com as que apelidou de conversões. As transformações encontradas envolvem um ou

mais tipos de linguagens. A Tabela 3 mostra a frequência de cada subcategoria de transformações de representações.

Tabela **3**: Transformações encontradas num ou mais de um sistema de linguagem

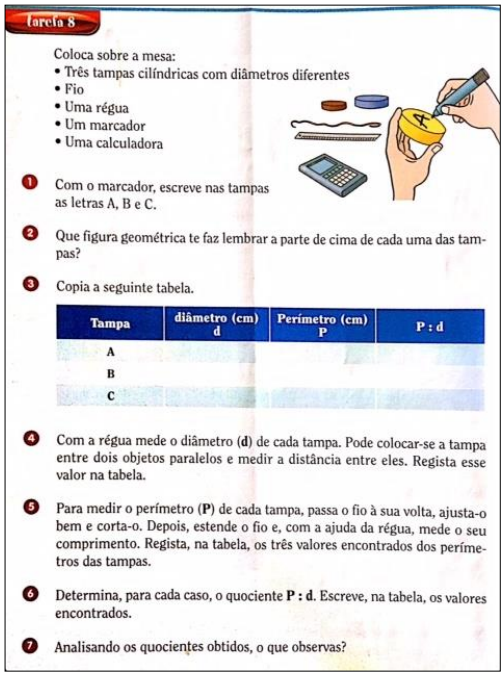
Categorias	Subcategorias	Frequência ($n = 81$)
Transformações de linguagens (que a resposta à tarefa requer)	Simbólica	53
	Visual	22
	Verbal	6
		Frequência ($n = 88$)
	Visual para simbólica	56
	Verbal para simbólica	17
	Visual para verbal	7
	Verbal para visual	7
	Simbólica para verbal	1

Deste trabalho, verificou-se um predomínio de tratamentos simbólicos, decorrentes da resolução de expressões numéricas, e de conversões de linguagem visual para simbólica. A professora teria que realizar ações durante as aulas que contrariassem esta tendência. A partir daqui, tentou organizar a sua prática letiva de forma a tentar variar ao máximo as linguagens usadas.

3.2. Tarefas selecionadas

A professora baseou a sua autorreflexão na análise de três tarefas para se aperceber das representações presentes no enunciado, das representações que esperava encontrar nas respostas dos alunos e nas representações que eles usavam efetivamente. A sua intenção foi, além de conhecer melhor as representações e as transformações, encontrar formas de contrariar a tendência de se sujeitar às representações sugeridas ou induzidas. Decidiu-se por encontrar formas de acrescentar e/ou variar as representações. Todas as tarefas foram resolvidas em grande grupo, com o seu apoio, e ia sugerindo (primeiro ela e depois os alunos) algumas das representações.

A primeira tarefa selecionada é a Tarefa 8 (Figura 2) sobre o perímetro do círculo e espera-se que os alunos deem uma resposta em linguagem simbólica.



Tarefa 8

Coloca sobre a mesa:
- Três tampas cilíndricas com diâmetros diferentes
- Fio
- Uma régua
- Um marcador
- Uma calculadora

1. Com o marcador, escreve nas tampas as letras A, B e C.
2. Que figura geométrica te faz lembrar a parte de cima de cada uma das tampas?
3. Copia a seguinte tabela.

Tampa	diâmetro (cm) d	Perímetro (cm) P	P : d
A			
B			
C			

4. Com a régua mede o diâmetro (**d**) de cada tampa. Pode colocar-se a tampa entre dois objetos paralelos e medir a distância entre eles. Regista esse valor na tabela.
5. Para medir o perímetro (**P**) de cada tampa, passa o fio à sua volta, ajusta-o bem e corta-o. Depois, estende o fio e, com a ajuda da régua, mede o seu comprimento. Regista, na tabela, os três valores encontrados dos perímetros das tampas.
6. Determina, para cada caso, o quociente **P : d**. Escreve, na tabela, os valores encontrados.
7. Analisando os quocientes obtidos, o que observas?

Figura **2**: Tarefa 8 – Perímetro do círculo

O seu enunciado está escrito em linguagem verbal (palavras) e visual (imagens e tabela). Os alunos deviam medir o diâmetro e o perímetro de três tampas circulares e preencher a tabela na questão 3 da tarefa. Depois, deviam comparar o diâmetro com o perímetro nos valores encontrados para as três tampas – o perímetro é aproximadamente o triplo do diâmetro ou o diâmetro é aproximadamente um terço do perímetro.
Espera-se que eles transformem as representações em linguagem visual e verbal do enunciado da tarefa em representações simbólicas e encontrem um valor aproximado para o perímetro de cada uma das três tampas.
Espera-se que os alunos usem uma linguagem simbólica nas questões 3, 4, 5 e 6 e uma linguagem verbal na última questão da tarefa.
Espera-se que os alunos façam transformações em representações em linguagem simbólica.

Depois das aulas, a professora analisava de acordo, com a categorização feita, as respostas dos alunos que mais satisfaziam os seus propósitos de investigação. Uma das regras estabelecidas na sala de aula é que os alunos podem construir as suas respostas usando um tipo de linguagem ou vários. A Figura 3 mostra uma resposta dada a esta

tarefa.

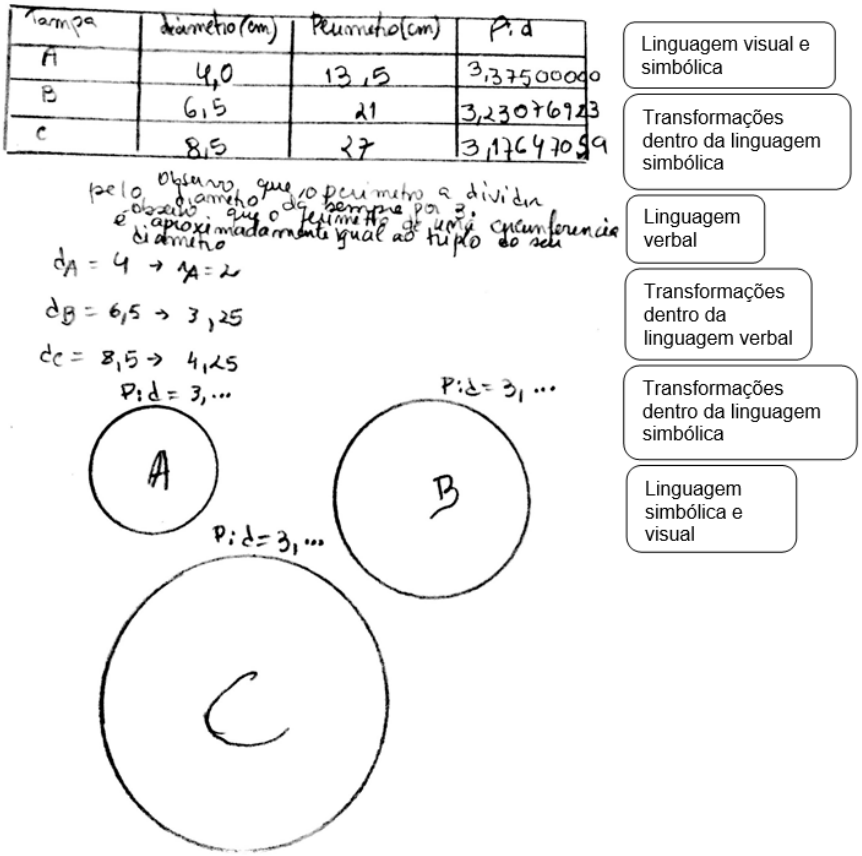


Figura **3**: Linguagens e transformações de linguagens nas respostas dos alunos à Tarefa 8

A segunda tarefa selecionada é a Tarefa 4 (Figura 4) e é um exercício rotineiro que requer uma transformação da linguagem visual para linguagem simbólica.

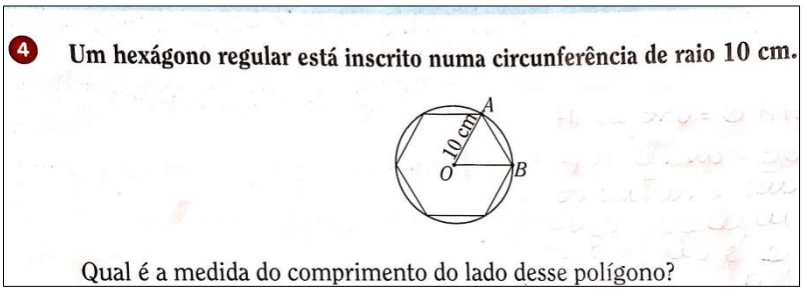


Figura 4: Tarefa 1 – Polígono regular

A Figura 5 mostra uma resposta dos alunos à Tarefa 4.

O seu enunciado está escrito em linguagem verbal (palavras). Os alunos deviam determinar as medidas do comprimento do lado do polígono regular. Esperava-se que

(i) os alunos transformassem as representações em linguagem visual e verbal do enunciado da tarefa em representações simbólicas;

(ii) os alunos usassem linguagem simbólica e/ou verbal;

(iii) os alunos fizessem transformações em representações de linguagem verbal e simbólica.

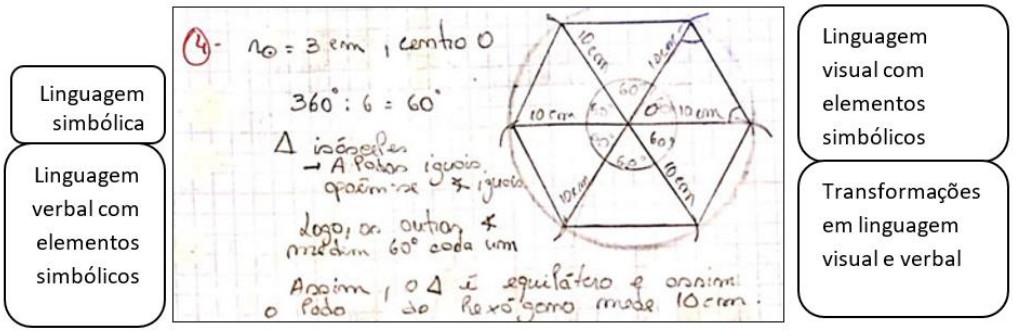


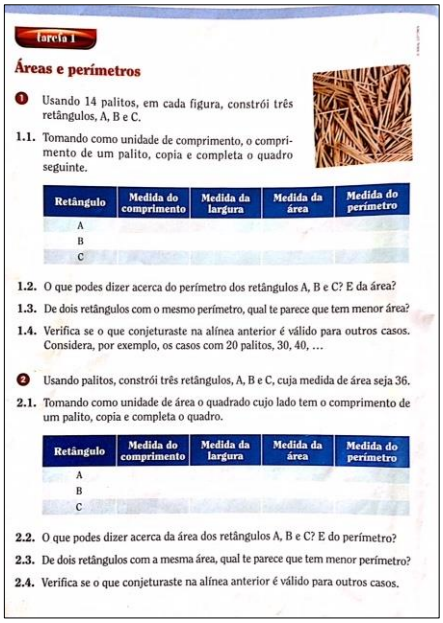
Figura **5**: Linguagens e transformações de linguagens nas respostas dos alunos à Tarefa 4

A Tarefa 1 (Figura 6) é uma tarefa de revisão das noções de área e de perímetro, e esperamos uma resposta em linguagem verbal e simbólica. O seu enunciado está escrito em linguagem natural (palavras) e linguagem visual (imagens e tabela).

Esperava-se que (i) os alunos transformassem as representações em linguagem verbal e visual do enunciado da tarefa em representações simbólicas; (ii) que os alunos usassem linguagem simbólica nas questões 1.1 e 2.1 e que usassem linguagem verbal na outra questão da tarefa; (iii) que os alunos fizessem transformações em linguagem verbal e simbólica.

Os alunos deviam construir 3 retângulos (A, B e C) com 14 palitos e completar a tabela com a medida do comprimento, da largura, a área e o perímetro de cada um dos retângulos construídos (Q1.1). Depois deviam comparar o perímetro e a área dos três retângulos e encontrar uma relação entre os valores encontrados (todos os retângulos têm o mesmo perímetro, mas áreas diferentes; a área é maior quando a diferença entre a comprimento e a largura é menor) (Q1.2; Q1.3; Q1.4)

Na questão 2, os alunos tinham de comparar o perímetro de retângulos com a mesma área (36 unidades quadradas).



Tarefa 1

Áreas e perímetros

1. Usando 14 palitos, em cada figura, constrói três retângulos, A, B e C.

1.1. Tomando como unidade de comprimento, o comprimento de um palito, copia e completa o quadro seguinte.

Retângulo	Medida do comprimento	Medida da largura	Medida da área	Medida do perímetro
A				
B				
C				

1.2. O que podes dizer acerca do perímetro dos retângulos A, B e C? E da área?

1.3. De dois retângulos com o mesmo perímetro, qual te parece que tem menor área?

1.4. Verifica se o que conjeturaste na alínea anterior é válido para outros casos. Considera, por exemplo, os casos com 20 palitos, 30, 40, ...

2. Usando palitos, constrói três retângulos, A, B e C, cuja medida de área seja 36.

2.1. Tomando como unidade de área o quadrado cujo lado tem o comprimento de um palito, copia e completa o quadro.

Retângulo	Medida do comprimento	Medida da largura	Medida da área	Medida do perímetro
A				
B				
C				

2.2. O que podes dizer acerca da área dos retângulos A, B e C? E do perímetro?

2.3. De dois retângulos com a mesma área, qual te parece que tem menor perímetro?

2.4. Verifica se o que conjeturaste na alínea anterior é válido para outros casos.

Figura **6**: Tarefa 1 – Áreas e perímetros

A Figura 7 mostra uma resposta dada pelos alunos com as linguagens e transformações de linguagens que se usou na sua resolução.

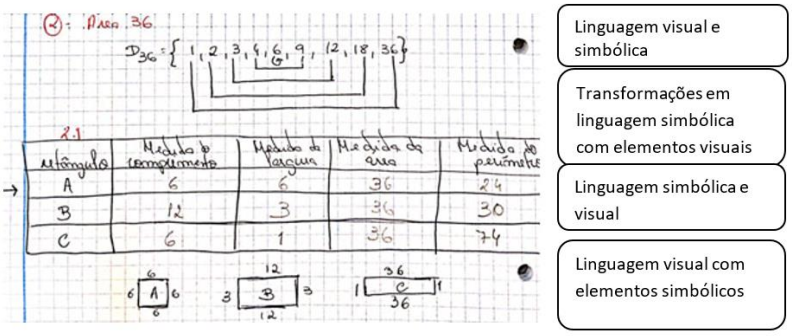


Figura **7**: Linguagens e transformações de linguagens nas respostas dos alunos à Tarefa 1

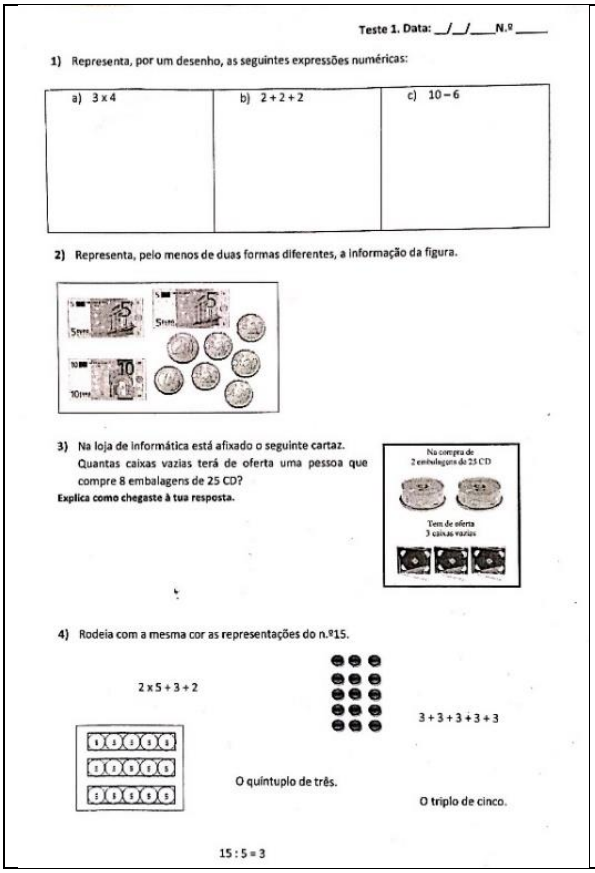
Terminou aqui o trabalho de autorreflexão da professora no que concerne às caraterísticas das tarefas do livro relativas ao domínio das figuras planas – perímetros e áreas. Terminou também o ano letivo (ano x). No ano letivo seguinte (ano x+1), a professora teria outra distribuição de serviço, pois as suas turmas terminaram o Ciclo. Por essa razão, mudou também o grupo de alunos intervenientes no estudo.

Os participantes da Parte 2 e seguintes são o segundo grupo de alunos que se encontrava a iniciar a frequência do 5.º ano de escolaridade e que participaram também na Fase 2 e na Fase 3 deste estudo de investigação.

4. PARTE 2

4.1. Contexto

No início do ano letivo seguinte, a professora precisou de saber quão os seus alunos estavam familiarizados com o uso de representações múltiplas e representações visuais. Resolveu elaborar o teste da figura seguinte. Optou por o aplicar depois de decorrido um mês de aulas para dar tempo aos alunos de se ambientarem à escola (que era nova para eles), e às novas dinâmicas escolares. Teve, no entanto, consciência de que os alunos poderiam usar no teste as representações usadas durante as primeiras aulas. Ponderando os inconvenientes, decidiu dar-lhes esse tempo, porque já se tinha apercebido que os alunos levariam o seu tempo a adaptar-se à utilização de representações diferentes e também porque seria capaz de identificar as representações que usariam por sua influência.


Teste 1. Data: __/__/____ N.º ____

1) Representa, por um desenho, as seguintes expressões numéricas:

a) 3 x 4	b) 2 + 2 + 2	c) 10 − 6

2) Representa, pelo menos de duas formas diferentes, a informação da figura.

3) Na loja de informática está afixado o seguinte cartaz. Quantas caixas vazias terá de oferta uma pessoa que compre 8 embalagens de 25 CD?
Explica como chegaste à tua resposta.

Na compra de 2 embalagens de 25 CD
Tem de oferta 3 caixas vazias

4) Rodeia com a mesma cor as representações do n.º15.

2 x 5 + 3 + 2

3 + 3 + 3 + 3 + 3

O quíntuplo de três.

O triplo de cinco.

15 : 5 = 3

Intenções da professora nas perguntas:

P1: Conhecer a(s) representações que os alunos usavam para representar quantidades e as que usavam para representar operações.

P2: Conhecer o que era para os alunos representar de duas formas diferentes e que formas eram essas.

P3: Conhecer se os alunos tinham tido alguma experiência com representações em esquema.

P4: Conhecer se os alunos tinham consciência da equivalência de representações simbólicas, visuais e verbais.

4.2. Resultados do teste

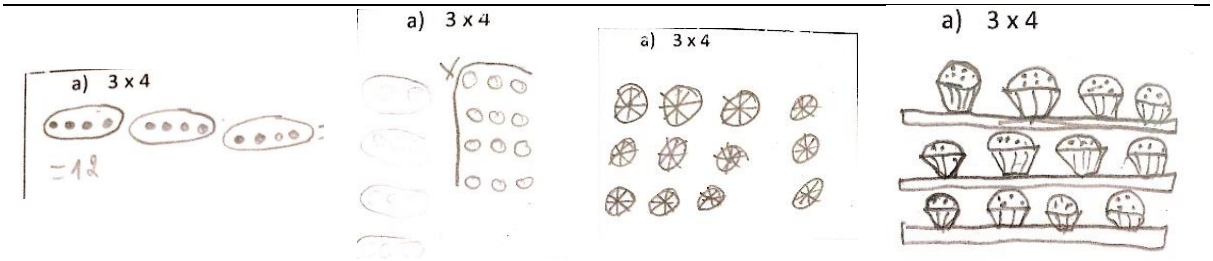
Os alunos tiveram o tempo que precisaram para responder ao teste.

A professora fez uma análise pergunta por pergunta, em cada aluno, descrevendo a resposta de cada um dos alunos, cujo resumo está na tabela seguinte.

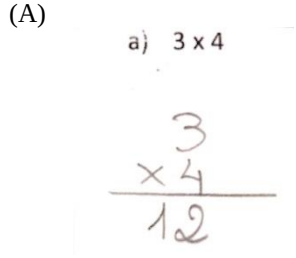
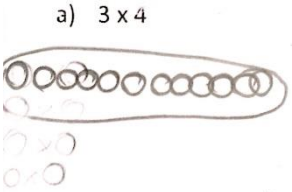
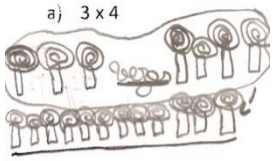
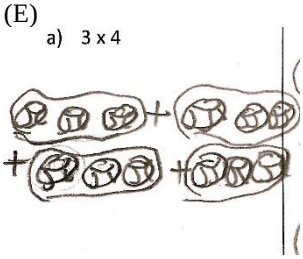
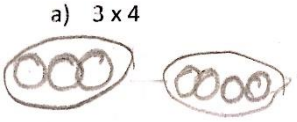
N.º	Representa por um desenho as seguintes expressões numéricas:		
	3 x 4	2 + 2 +2	10 - 6
1	A cada n.º fez corresponder um desenho (desenhou 4 figuras humanas; escreveu a palavra *por* e desenhou 3 rebuçados)	Desenhou duas maçãs, escreveu o sinal + desenhou duas maçãs; escreveu o sinal + desenhou duas maçãs	Desenhou 10 bolas; o sinal menos (-) e desenhou 6 bolas
2	Desenhou 3 conjuntos com 4 pintas cada e igualou a 12	Desenhou 3 conjuntos com 2 pintas cada e igualou a 6	Desenhou 1 conjunto com 10 pintas, desenhou o sinal -, desenhou 1 conjunto com 6 pintas e igualou a 4
3	Desenhou um conjunto com 12 bolas	Desenhou 3 conjuntos com 2 bolas cada	Desenhou 2 conjuntos com 3 bolas cada
4	Desenhou 3 filas com 4 bolas cada	Desenhou: 2 bolas / 4 bolas / 6 bolas	Desenhou 10 bolas, riscou 6 e rodeou 4
5	Desenhou em coluna: 3 bolas, o sinal x 4 bolas, o sinal = 12 bolas em duas filas de 6	Desenhou 2 gelados, o sinal +, 2 gelados, o sinal + 2 gelados, o sinal = desenhou 6 gelados	Fez um desenho semelhante ao desenho feito para a 1.ª expressão com quadrados e com o sinal -
6	Desenhou 4 conjuntos com 3 cubos cada, separados pelo sinal +	Desenhou 3 conjuntos com 2 barcos cada, separados pelo sinal +	Desenhou um conjunto com 10 linhas curvas fechadas e outro com 6, separados pelo sinal -
7	Usou o algoritmo vertical correspondente (RN)	Usou o algoritmo vertical correspondente (RN)	Usou o algoritmo vertical correspondente (RN)
8	Desenhou 12 bolas, organizadas em 3 linhas com 4 bolas cada	Desenhou 6 carros, organizados em 2 linhas com 3 carros cada	Desenhou 10 rebuçados e riscou 6
9	Usou o algoritmo vertical correspondente (RN)	Usou o algoritmo vertical correspondente (RN)	Usou o algoritmo vertical correspondente (RN)
10	Desenhou 3 conjuntos de 4	Desenhou 3 conjuntos de 2	Desenhou 10 círculos e riscou 6
11	Desenhou 4 conjuntos de 3 pintas cada	Desenhou 3 conjuntos de 2 pintas cada	Desenhou 1 conjunto com 10 pintas e outro com 6 separados pelo sinal – e igualou a 4
12	Desenhou 3 conjuntos de 4 pintas cada	Desenhou 3 conjuntos de 2 pintas cada, separados pelo sinal +	Desenhou 1 conjunto com 10 pintas e outro com 6, separados pelo sinal -
13	Desenhou 3 prateleiras com 4 queques cada	Desenhou 3 potes com 2 bolas dentro de cada um	Desenhou 1 conjunto com 10 pintas e rodeou 6 dessas pintas
14	Desenhou 3 chupas, escreveu a palavra *vezes*, desenhou 4 chupas, fez uma seta para baixo e desenhou 12 chupas	Desenhou 2 chupas, escreveu a palavra *mais*, desenhou 2 chupas, escreveu a palavra *mais* desenhou uma seta para baixo e desenhou 6 chupas	Fez um desenho semelhante, mas escreveu a palavra *menos* entre os dois desenhos
15	Desenhou 12 quadriláteros	Desenhou 6 corações	Desenhou 4 bolas
16	Desenhou 4 conjuntos com 3 pintas cada	Desenhou 3 conjuntos com 2 quadriláteros cada	Desenhou 10 bolas e riscou 6
17	Desenhou 1 conjunto com 3 bolas e outro com quatro	Desenhou 6 mãos	Desenhou 10 corações e riscou 6
	6 certos	10 certos	6 certos

4.2.1. O que a professora ficou a saber com as respostas à pergunta 1.a):

- Seis alunos representaram visualmente e com correção um produto. Ex:

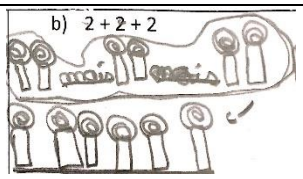
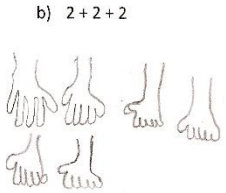
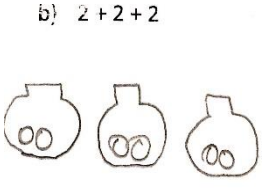
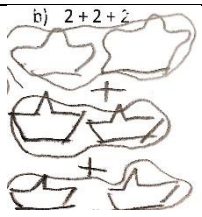
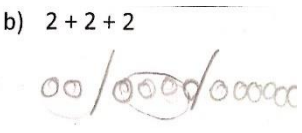


- Dois alunos representaram numericamente, através de um algoritmo vertical (A)
- Dois alunos representaram visualmente 4 x 3 (B)
- Dois alunos representaram visualmente o resultado (C)
- Três alunos fizeram uma representação visual literal da expressão numérica (D)
- Um aluno transformou o produto 3x4 na soma 3+3+3+3 e representou-a visualmente (E)
- Um aluno representou visualmente os números, mas não a operação (F)

(A)	(B)	(C)
		
(D)	**(E)**	**(F)**
		

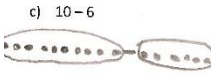
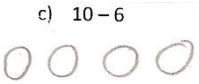
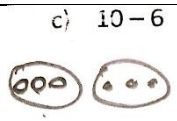
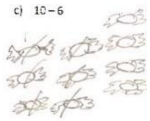
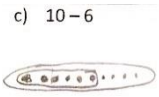
4.2.2. O que a professora ficou a saber com as respostas à pergunta 1.b):

- Dois alunos representaram numericamente, através de um algoritmo vertical (G)
- Três alunos fizeram uma representação visual literal da expressão numérica (H)
- Três alunos representaram visualmente o resultado (I)
- Cinco alunos representaram visualmente os números em 3 conjuntos de 2 elementos, mas não a operação (J)
- Três alunos representaram a soma visualmente com três conjuntos com 2 elementos colocando o sinal + entre os conjuntos (K)
- Um aluno representou visualmente a somo acumulada das três parcelas (L)

(G)	(H)	(I)
Nota: Os mesmos alunos que o tinham feito para o produto	 Nota: Os mesmos alunos que o tinham feito para o produto	 Nota: Um era um dos alunos que o tinha feito para o produto
(J)	**(K)**	**(L)**
 Nota: Três eram dos alunos que o tinham feito para o produto	 Nota: Um era o aluno que tinha transformado o produto numa soma	

4.2.3. O que a professora ficou a saber com as respostas à pergunta 1.c):

- Dois alunos representaram numericamente, através de um algoritmo vertical (M)
- Sete alunos fizeram uma representação visual literal da expressão numérica (N)
- Um aluno representou visualmente o resultado (O)
- Um aluno fez uma representação visual incompreensível da situação (P)
- Seis alunos representaram a subtração visualmente(Q)

(M)	(N)	(O)
Nota: Os mesmos alunos que o tinham feito para o produto e para a soma		
(P)	**(Q)**	
		

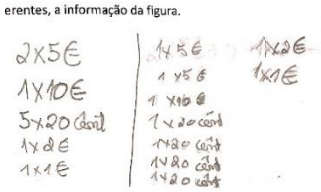
4.2.4. Resultados encontrados à pergunta 2):

N.º	Representações usadas		Notas
1	1. RN Expressões numéricas	-	(Somas parcelares das notas e depois das moedas sempre com números inteiros) RN/X
2	1. RN Somas parcelares	2. RN Somas parcelares	Somas parcelares diferentes RN/RN
3	1.RN Soma com decimais errada	-	RN/X
4	1. RN 1 única soma	2. RN Somas parcelares	RN/RN
5	1. RN uma única soma	-	RN/X
6	1. RN Expressão com somas e produtos	2. RN Expressão só com somas	RN/RN
7	1. RN Somas parcelares (notas + moedas)	-	RN/X
8	1. RN Expressão só com somas	2. RN Expressão com somas e produtos	RN/RN
9	-	-	X/X
10	1. Diagrama de Venn	2. Expressão numérica com somas e produtos	RN+LN
11	1. RN Cálculos parcelares	-	RN/X
12	1. RLN Somas parcelares escritas em linguagem natural e com números	-	RLN/X
13	1. RN Expressão numérica com somas e diferenças dentro de chavetas	2. DV	RN/RV(DV)
14	1. RN Soma com 4 parcelas	2. RN Soma com duas parcelas	RN/RN
15	1. RN Um valor total (23, 80cent)	2. RN Um valor total (80,23cent)	Incompreensível RN/RN
16	1. RV Diagrama de Venn	2. RN Conjunto em extensão	RV(DV)/RN
17	1. RN Representação com produtos pelo n.º de notas ou moedas iguais	2. RN Representação só com produtos pela unidade	RN/RN

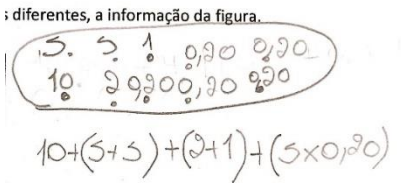
4.2.5. O que a professora ficou a saber com as respostas à pergunta 2):

- Um aluno não representou a situação de nenhuma forma
- Seis alunos representaram de uma só maneira
- Treze alunos usaram uma representação numérica como primeira representação
- Dois alunos usaram o Diagrama de Vem como primeira representação
- Sete alunos consideraram representar de forma diferente, desde que as expressões numéricas fossem diferentes (R)
- Três alunos usaram um diagrama de Venn como uma das representações (S e T) – influência da abordagem feita no 5.º ano
- Dois alunos usaram a representação em extensão com chavetas (T) – influência da abordagem feita no 5.º ano
- Um aluno utilizou pequenos sinais para representar a prioridade das operações na resolução de expressões numéricas – influência da abordagem feita no 5.º ano

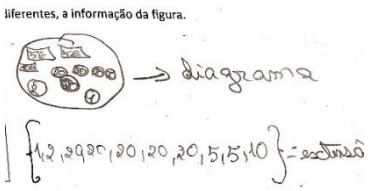
(R)



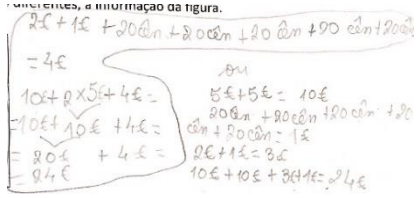
(S)



(T)



(U)



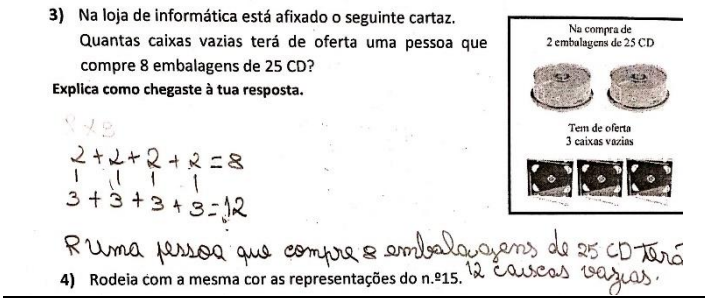
4.2.6. Resultados encontrados à pergunta 3):

N.º	Resposta correta – 1 Resposta incorreta – 0	Representações usadas	Notas
1	1	RN+RE	Este exercício foi retirado de uma prova de aferição. É provável que os alunos já o conhecessem, ou este tipo de exercícios.
2	0	RN	
3	0	RN	
4	1	RN+RE	
5	1	RN	
6	1	RN+RE	
7	1	RN+RE	
8	1	RN+RE	
9	0	RN	
10	1	RN+RE	
11	0	RN	
12	1	LN+RE	
13	1	RN+RE	
14	0	RN	
15	0	RN	
16	1	RN	
17	0	RN	

4.2.6.1. O que a professora ficou a saber com as respostas à pergunta 3):

- Dos dez alunos que apresentaram a resposta correta:
  - Oito utilizaram uma representação numérica combinada com uma representação visual – esquema (V)
  - Dois alunos usaram uma representação numérica
- Os sete alunos que não resolveram bem o exercício utilizaram uma representação numérica

(V)



4.2.7. Resultados encontrados à pergunta 4):

4. Rodeia com a mesma cor as representações do n.º 15.						
2x5+3+2	Bolas brancas	Bolas pretas	O quíntuplo de três	3+3+3+3+3	O triplo de cinco	15:5=3
-	+	+	+	+	+	-
+	-	+	+	+	+	-
+	+	+	-	+	+	-
+	+	+	+	+	+	-
+	+	+	-	+	+	-
+	+	+	+	+	+	-
+	+	+	-	+	-	-
+	-	+	+	+	+	-
+	+	+	-	+	-	+
+	+	+	-	+	+	-
+	+	+	+	+	+	-
+	-	+	+	+	+	+
+	-	+	+	+	+	-
+	-	-	-	-	-	-
+	+	+	-	+	-	-
+	+	+	+	+	+	-
+	+	+	+	+	+	-

4.2.8. O que a professora ficou a saber com as respostas à pergunta 4):

- Três alunos rodearam todas as representações do n.º 15
- Um aluno selecionou 1 das 5 representações do n.º 15
  - Um aluno não selecionou imagem com as bolas pretas
  - Um aluno não selecionou a soma de 5 parcelas iguais a 3
- Três alunos selecionaram 3 das 5 representações do n.º 15
- Quarto alunos selecionara 4 das 5 representações do n.º 15
- Quatro alunos não selecionaram a expressão *O triplo de cinco*
- Sete alunos não selecionaram a expressão *O quíntuplo de três*
- Dois alunos selecionaram 15:5=3 como representação de 15
- Cinco alunos selecionaram a imagem com as bolas brancas como não representando 15
- Doze alunos representaram a imagem com as bolas brancas como representando o n.º 15.

4.2.9. Após a realização deste teste a professora apercebeu-se que...

Reconheci algumas das representações já usadas durante este ano letivo: O diagrama de Venn (usado por dois alunos), a escrita de um conjunto em extensão, com uso de chavetas (usado por dois alunos), a utilização de pequenos sinais para indicar a prioridade das operações durante a resolução de expressões numéricas (usada por um aluno) e os parêntesis para dar prioridade a operações que a não teriam numa situação normal (um aluno). O número baixo destas ocorrências mostra a fraca familiarização com que os alunos estavam com estas representações.
Confirmei que, à data, os alunos ainda não tinham reconhecido a equivalência em representações dos três sistemas de representação (verbal, visual e simbólico).
Os alunos utilizaram as representações visuais atribuindo-lhes as mesmas regras sequenciais características das representações verbais e simbólicas.
Confirmei que a utilização de um esquema promoveu o sucesso na resposta ao problema da pergunta 3.

---

5. PARTE 3

5.1. Contexto

No início do ano letivo seguinte, a professora pretendeu lecionar o primeiro conteúdo com representações múltiplas, com especial destaque para as representações visuais. O trabalho de análise feito anteriormente deu-lhe alguma destreza, no entanto, o domínio matemático em lecionação era agora "Números e operações" de outro tema matemático diferente, onde predominavam as representações simbólicas (numéricas) pela própria natureza do tema. O domínio anterior era do tema Geometria e Medida. Os intervenientes deste segundo grupo de participantes constituem uma turma formada por 17 alunos com idades compreendidas entre os dez e os 13 anos que frequentavam, nesse ano, o 5.º ano de escolaridade. Um dos alunos apresentava retenções anteriores.
A presente narração consta da descrição do trabalho realizado durante nove semanas e teve por base os planos semanais, os cadernos dos alunos, os registos no quadro preto e as notas da professora. Esta recolha decorreu entre o dia 21 de setembro a 18 de novembro de 20XX (ano x+1; 9 semanas) e correspondeu às aulas n.º 1 a 39. O domínio em lecionação foi "Números e operações" e o subdomínio "Números naturais".
Para conseguir conciliar os interesses pedagógicos com os interesses investigativos, a planificação feita foi semanal e as notas referem-se a uma primeira organização e autorreflexão através da análise dos dados recolhidos. De salientar que a professora reservou a liberdade de apenas incluir ou registar aspetos que considerou importantes. Recorda-se que a exploração das representações se baseou na classificação de Duval (1993) para as representações, registos e transformações de representação – tratamentos e conversões.
Da análise preliminar que a professora fez das tarefas, retirou que a utilização dada às representações visuais era praticamente de definição de conceitos (utilização como signo) e um esquema/diagrama/figura de apoio à compreensão da situação. No entanto, a professora usava muitas vezes as representações visuais para resolver alguns problemas, para diversificar as estratégias ou quando queria interpretar a situação em causa. Foram várias as ocasiões em que recorreu a representações visuais para explicar determinado exercício ou problema ou situação, obtendo *feedback* positivo dos alunos. Mas quando lhes sugeria que o fizessem também, encontrava resistência e eles afirmavam mesmo que era mais fácil fazer com números. A professora não percebia porquê: se percebiam e davam feedback positivo, por que razão não eram capazes de as utilizar?
A professora começou por ter algumas dúvidas na classificação das representações, pois pela classificação de Duval (1993) a reta numérica era uma representação simbólica e para ela fazia mais sentido classificá-la como representação visual. Como não me tivesse ainda decidido, resolveu seguir a classificação de Duval. Relativamente às transformações de representações, adotou a classificação de conversões e tratamentos, de acordo com o mesmo autor. Começou por prestar atenção aos tratamentos que envolviam sistemas diferentes de representação, mas esta ideia não estava clara ainda.
Começou por conhecer as tarefas do livro adotado relativamente às representações que usavam no enunciado e nas representações que se esperava que os alunos utilizassem, saber se eram induzidas pela própria tarefa ou não, e categorizá-las. A sua decisão em usar maioritariamente as tarefas do livro deveu-se, além da razão já apresentada, também para rentabilizar o tempo para a sua autorreflexão ao invés, de as escolher e, ao mesmo tempo avaliar o seu conjunto, pois o livro adotado é um instrumento com muito uso.
Relativamente ao conteúdo matemático "Número naturais", a categorização dos exercícios de consolidação presentes no livro adotado fez-se relativamente a cada bloco de exercícios. Quando na resposta esperada aparecem duas representações, é porque há pelo menos uma alínea para cada uma a pedir resposta nesse tipo de representação.

Assim, num mesmo exercício, podemos esperar uma resposta numérica e uma resposta visual, mas não para a mesma questão, em princípio.

Este trabalho de análise que fez das tarefas encontra-se na Tabela 4 e sumariza as representações dos enunciados das tarefas e as representações que se esperam nas respostas dos alunos a essas tarefas.

Tabela **1**: Categorização das tarefas de consolidação do capítulo "Números naturais" do livro adotado

Representações			$n = 86$
do enunciado		*esperada*	
Linguagem Natural		Numérica e/ou visual	4
Linguagem Natural		Linguagem Natural	1
Linguagem Natural + Numérica	→	Linguagem Natural e/ou Numérica	19
Linguagem Natural + Visual		Linguagem Natural e/ou Numérica	13
Linguagem Natural		Numérica	48
Linguagem Natural + Numérica + Visual		Numérica	1

A professora decidiu começar por focar a sua atenção na utilização das representações visuais. Que frequência e que função tinham? Apercebeu-se que cerca de 16% das tarefas apresentam também um registo visual. A sua função pode variar: exemplo na Figura 8, em que a figura do enunciado à direita faz parte do próprio enunciado e a da esquerda nada acrescenta.

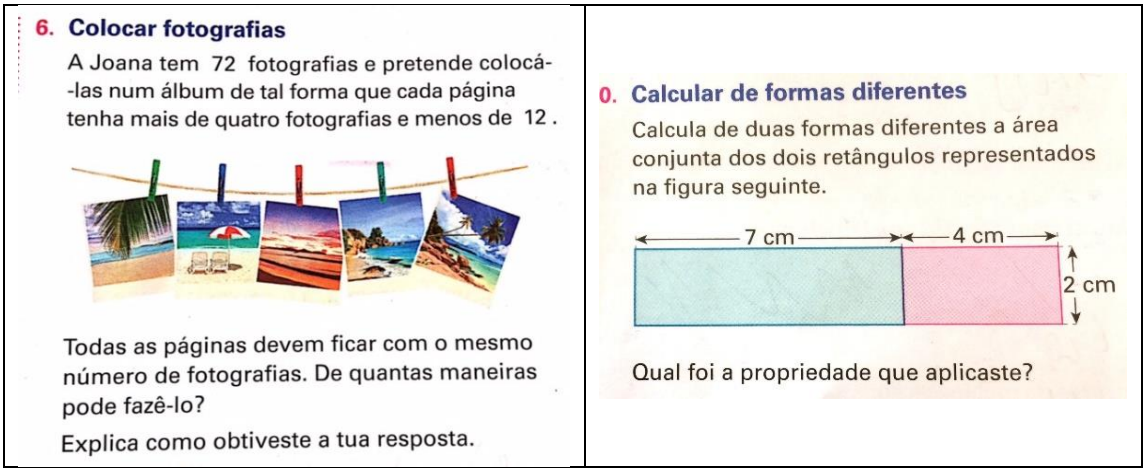


Figura **1**: Dois exemplos de representações visuais em exercícios de consolidação, com funções diferentes

- Menos de 5% dos exercícios solicitam uma resposta num registo visual. – Isso acontece quando se pede expressamente para fazer a representação através de um diagrama ou há a possibilidade de responder através de um esquema ou desenho.
- Apenas 1% das tarefas apresentou um enunciado nos três registos de representação.

A professora verificou que:

- Neste capítulo, as tarefas de consolidação do livro adotado não apresentam uma quantidade equilibrada de representações nos três registos considerados.
- A representação visual está subaproveitada e subvalorizada, embora transpareça que há muitas representações visuais.
- Se quiser utilizar representações múltiplas com frequência, tem de fazer por isso.

5.2. Síntese da série de aulas

Neste conteúdo, a síntese das aulas foi organizada por semanas, num total de nove. Começa-se por apresentar os descritores seguida das notas, após as aulas dessa semana, exemplificando com as representações usadas. Decidiu-se por fazer uma planificação semanal em detrimento de uma planificação diária, em virtude da organização e rentabilização de tempo, e da necessidade de utilizar todo o tempo disponível após cada aula para autorreflexão e escrita das notas.

5.3. Análise e resultados da sequência de ensino

5.3.1. Planificação semanal 1 (aulas n.º 2, 3, 4 e 5)

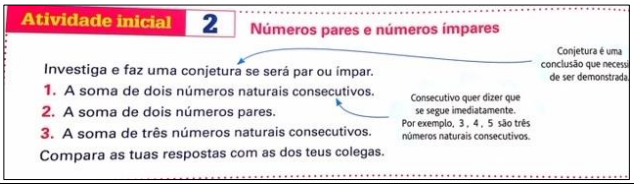
- Identificar o conjunto dos números naturais
- Representar conjuntos de maneiras diferentes;
- Calcular o cardinal de um conjunto;
- Classificar conjuntos;
- Reconhecer e aplicar as propriedades comutativa e associativa da adição de n.º naturais.

Nota 1:

Grafismos de chaveta.
Revisão de diagramas abordados no 1.º ciclo.
Breve resenha histórica sobre a necessidade de criação de números naturais.

Resolução de exercícios de consolidação.

Atividade resolvida em grande grupo: "Números pares e números ímpares", p.12. O seu enunciado está escrito numa representação verbal. Espera-se que os alunos utilizem representações numéricas na resposta.



Na síntese das conjeturas, elaboramos um diagrama de Carroll, para aumentar o leque de variedade das representações, para uma representação visual:

5.3.1.1. Após a realização destas tarefas na semana indicada a professora apercebeu-se que...

A professora tem de fazer uma gestão durante a aula das representações a utilizar e das transformações a fazer. Pode aproveitar sugestões dos alunos relativamente às representações a usar, conhecendo as que usam com mais facilidade.

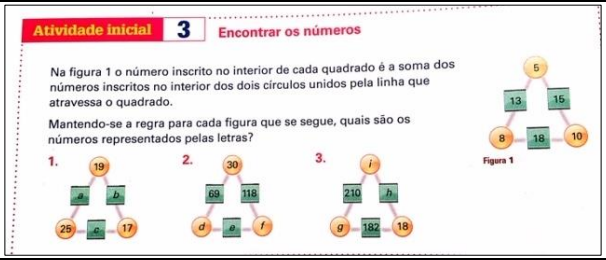
5.4. Planificação semanal 1 (aulas n.º 6, 7, 8 e 9)

- Reconhecer a propriedade associativa e comutativa da adição e da multiplicação e as propriedades distributivas da multiplicação relativamente à adição e à subtração de números racionais não negativos e representá-las algebricamente.
- Identificar o 0 e o 1 como os elementos neutros respetivamente da adição e da multiplicação de números racionais não negativos e o como elemento absorvente da multiplicação.
- Conhecer as prioridades convencionadas das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão e utilizar corretamente os parênteses.

Nota 2:

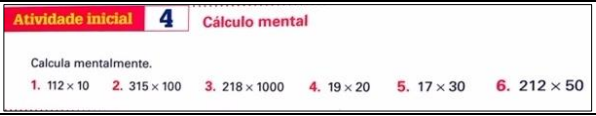
Utilização da LN para escrita das propriedades.
Utilização da RS numérica para resolução de exercícios de consolidação.

Resolução da atividade inicial "Encontrar os números" p.14:



Resolução de exercícios e de problemas simples (com 2 operações): pág. 15.

Resolução da atividade inicial "Cálculo mental" (p.16):



5.4.1. Após a realização destas tarefas na semana indicada a professora apercebeu-se que...

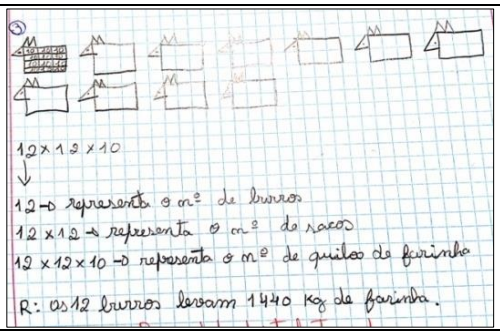
As tarefas de consolidação são as mais difíceis de variar as representações. Representações numéricas requerem representações numéricas, na maioria das vezes.

5.4.1.1. Planificação semanal 2 (aulas n.º 10, 11, 12, 13 e 14)

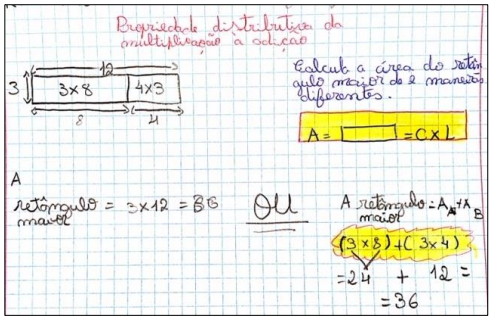
- Reconhecer a propriedade associativa e comutativa da adição e da multiplicação e as propriedades distributivas da multiplicação relativamente à adição e à subtração de números racionais não negativos e representá-las algebricamente.
- Identificar o 0 e o 1 como os elementos neutros respetivamente da adição e da multiplicação de números racionais não negativos e o como elemento absorvente da multiplicação.
- Conhecer as prioridades convencionadas das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão e utilizar corretamente os parênteses.

Nota 3:

Quantos quilos de farinha transportam 12 burros, sabendo que, cada um, carrega com 12 sacos de 10Kg cada saco?

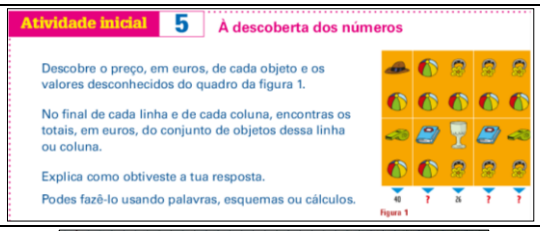


Aplicação da propriedade distributiva no cálculo de áreas. Proporcionar um leque o mais variado possível de representações em diferentes registos. Os alunos usaram representações em 3 registos: discursivo em linguagem natural, discursivo simbólico (numérico) e não discursivo icónico (figura geométrica). Fizeram tratamentos no registo numérico e icónico e conversões entre os 3 registos.

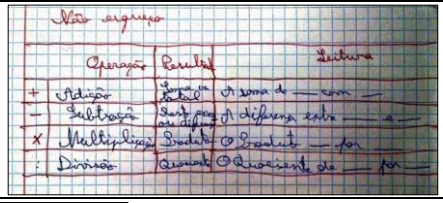


Aplicação desta propriedade no cálculo mental de expressões do género de: 26 × 101 e 26 × 99
Resolução de exercícios e problemas da p.19.

Resolução da atividade inicial (p.20):



Construção de um quadro síntese das 4 operações (RT):



4. **Descobrir o número**

Observa a tabela seguinte.

Dividendo	6210	1520	23	*a*
Divisor	9	12	*b*	30
Quociente	*c*	*d*	2	12
Resto	*e*	*f*	1	5

Qual é o número que cada letra representa?

5.4.1.2. Após a realização destas tarefas na semana indicada a professora apercebeu-se que...

É possível resolver um problema nos três registos de representação. As sínteses propiciam o uso de representações visuais.

5.4.2. Planificação semanal 3 (aulas n.º 15, 16, 17 e 18)

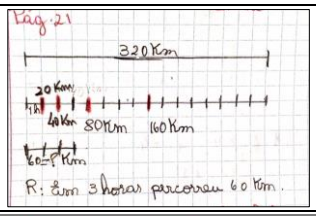
- Conhecer as prioridades convencionadas das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão e utilizar corretamente os parênteses.
- Determinação dos divisores de um número natural;
- Determinação dos múltiplos de um número natural;
- Relacionar múltiplos com divisores, usando expressões: múltiplo, divisor, é divisível por, divide, …

Nota 3:

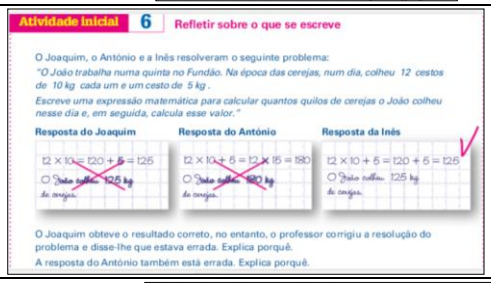
Explicar o que se faz.

9. Para explicar

Admite que um ciclista, a uma velocidade constante, percorreu, em 16 horas, 320 km.
Quantos quilómetros percorreu em três horas?
Explica como obtiveste a tua resposta.



Analisar respostas e justificar/explicar erros:
Atividade inicial p.22:



Resolução das expressões numéricas da p. 23: exercício 4; Resolução de problemas da p. 23: exercícios 1, 2 e 3.

3. Escrever um enunciado

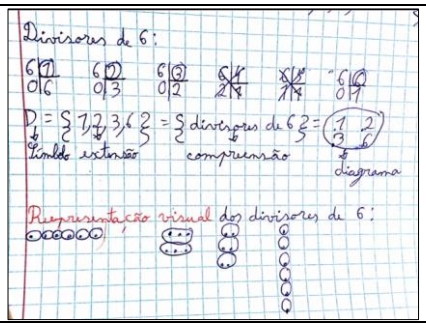
Numa loja estão à venda três guarda-sóis de praia a 15 euros cada um, uma mesa que custa 50 euros e um conjunto de quatro cadeiras iguais que custam 60 euros.

Escreve o enunciado de um problema que conduza a cada uma das expressões seguintes. Em seguida efetua o cálculo.

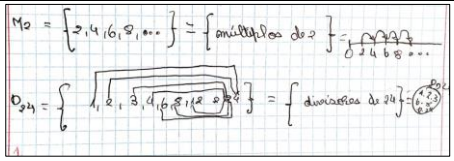
3.1. $3 \times 15 + 60$

3.2. $3 \times 15 - 60 : 4$

3.3. $50 + 3 \times (60 : 4)$



Representar os divisores e os múltiplos de formas diferentes.
Relacionar múltiplos com divisores.



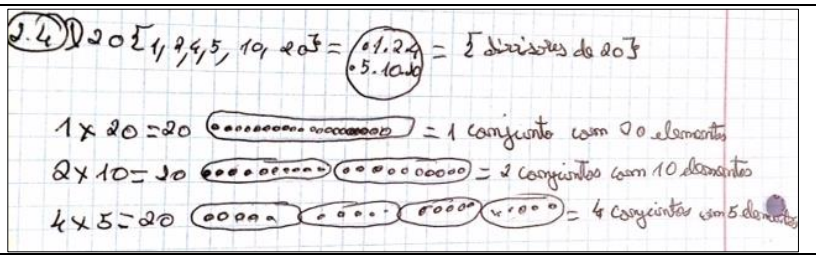
5.4.2.1. Após a realização destas tarefas na semana indicada a professora apercebeu-se que...

Podemos introduzir pequenos sinais para destacar a informação mais relevante. Sempre que possível utilizar sistemas de representação diferentes para representar o mesmo conceito. Utilização da representação visual como signo.

5.4.3. Planificação semanal 4 (aulas n.º 19, 20, 21, 22 e 23)

- Relação entre o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de dois números;
- Traduzir em linguagem simbólica enunciados matemáticos expressos em linguagem natural e vice-versa

Nota 4:

Relacionar múltiplos com divisores.	
Resolução da atividade inicial da p. 26.	
Cálculo de expressões numéricas. Resolução de problemas.	

5.4.3.1. Após a realização destas tarefas na semana indicada a professora apercebeu-se que...

Os alunos precisam de tempo para exercitar diferentes representações. No entanto, há o perigo de mecanizarem, se o trabalho for repetitivo. Torna-se necessário equilibrar a sua utilização.

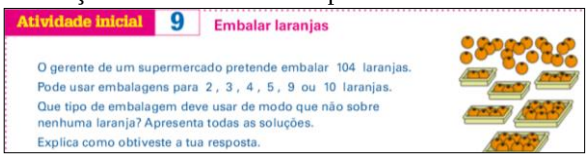
5.4.4. Planificação semanal 5 (aulas 24, 25 e 26)

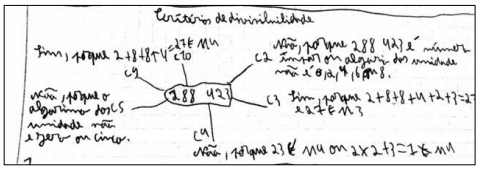
- Critérios de divisibilidade por 3,4 e 9;
- Determinação do máximo divisor comum de dois números naturais por inspeção dos divisores de cada um deles;
- Traduzir em linguagem simbólica enunciados matemáticos expressos em linguagem natural e vice-versa

Nota 5:

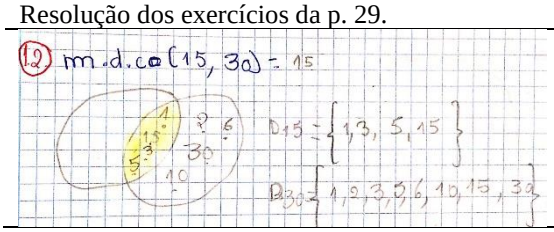
Cálculo de expressões numéricas. Resolução de problemas (Cont.)

Resolução da atividade inicial p.28:





Resolução dos exercícios da p. 29.

	Representação dos divisores em extensão e em diagrama Representação do máximo divisor comum em diagrama

5.4.4.1. Após a realização destas tarefas na semana indicada a professora apercebeu-se que...

A introdução da cor pode ser usada nas representações para destacar informação relevante e melhor estabelecer a correspondência entre representações. Diversificar a forma de apresentar a resolução aumenta o leque de representações.

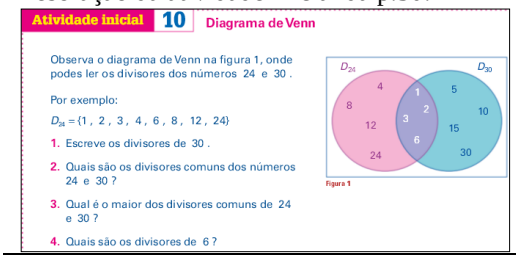
5.4.5. Planificação semanal 6 (Aulas 27, 28, 29 e 30):

- Determinação do máximo divisor comum de dois números naturais por inspeção dos divisores de cada um deles;

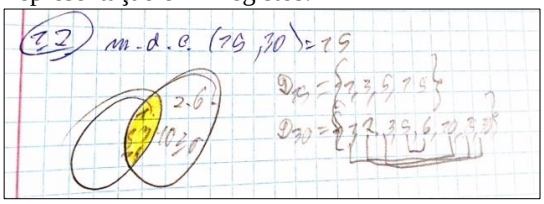
- Números primos entre si; números obtidos por divisão de dois dados números pelo respetivo máximo divisor comum; irredutibilidade das frações de termos primos entre si;
- Determinação do mínimo múltiplo comum de dois números naturais por inspeção dos múltiplos de cada um deles;
- Traduzir em linguagem simbólica enunciados matemáticos expressos em linguagem natural e vice-versa

Nota 6:

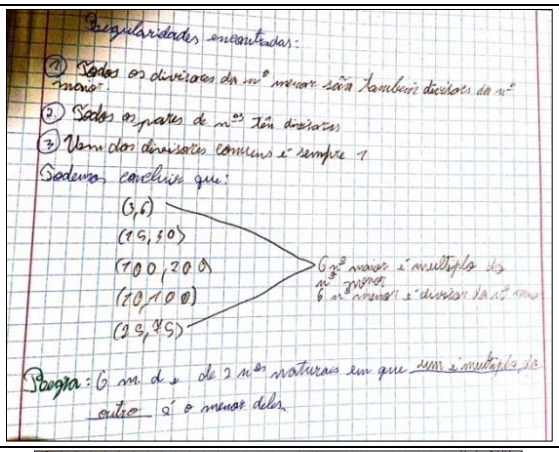
Resolução da atividade inicial da p.30:



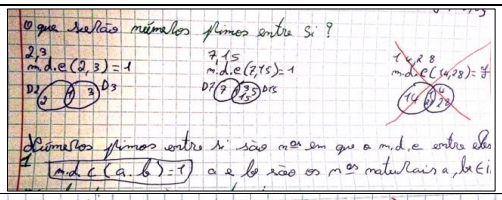
Representação em 2 registos:



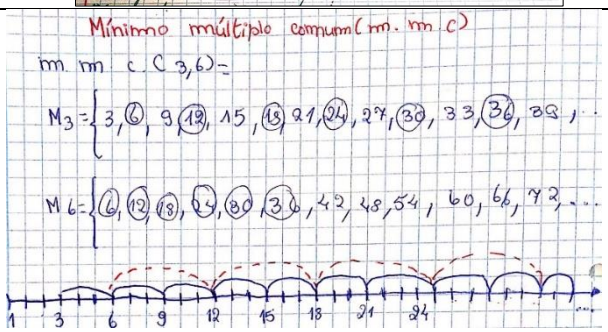
Regularidades encontradas nos divisores e nos múltiplos de um número natural



Utilização da RV para definir números primos entre si.



Representação dos múltiplos de um número natural, dos múltiplos comuns e do mínimo múltiplo comum em linguagem simbólica e linguagem visual



5.4.5.1. Após a realização destas tarefas na semana indicada a professora apercebeu-se que...

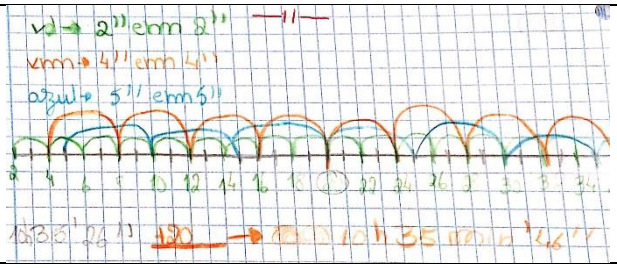
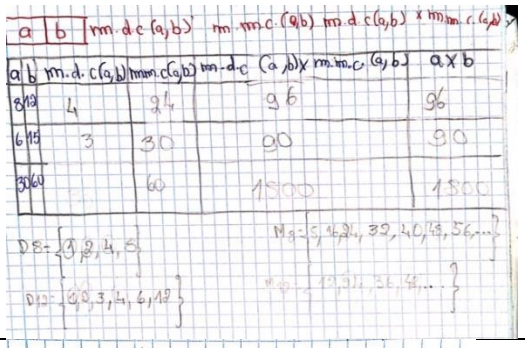
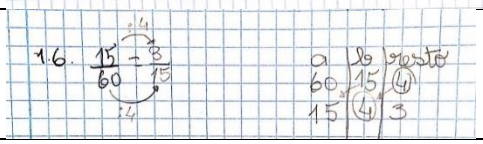
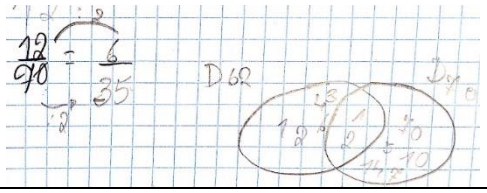
Procurar a representação que melhor se adequa pode ser difícil. Numa fase inicial, cada aluno deve poder escolher a representação com que quer trabalhar. Combinação de sistemas de representação podem facilitar a leitura, escrita e organização da informação. Representações com elementos de outros sistemas de representação podem ser uma mais valia para o professor.

5.4.6. Planificação semanal 7 (aulas n.º 31, 32, 33, 34 e 35)

- Relação entre o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de dois números;

- Problemas envolvendo o cálculo do mínimo múltiplo comum e do máximo divisor comum de dois números.
- Determinação do máximo divisor comum de dois números naturais pelo algoritmo de Euclides;
- Números primos entre si; números obtidos por divisão de dois dados números pelo respetivo máximo divisor comum; irredutibilidade das frações de termos primos entre si;
- Traduzir em linguagem simbólica enunciados matemáticos expressos em linguagem natural e vice-versa

Nota 7:

Utilizar a cor para representar os múltiplos de um número. Utilizar a cor para encontrar o mmc	
Utilizar uma tabela de dupla entrada para encontrar regularidades e propriedades do mdc e mmc de dois números naturais	
Utilizar o algoritmo de Euclides para determinar o mdc de dois números naturais	
Determinar o mdc por inspeção dos divisores de cada número, utilizando um diagrama de Venn	

5.4.6.1. Após a realização destas tarefas na semana indicada a professora apercebeu-se que...

A utilização de representações visuais não é evidente, permite uma grande variedade e a decisão de se escolher a melhor ou a que mais se adequa. Quanto mais se usar mais se usa, pelo menos numa fase inicial de compreensão de algo, que pode ser usada para a definição de um conteúdo (representação visual como signo) ou durante a resolução de um problema (representação visual como artefacto com recurso a tratamentos visuais).

5.4.7. Planificação semanal 8 (aulas n.º 36, 37, 38 e 39)

- Determinação do máximo divisor comum de dois números naturais pelo algoritmo de Euclides;
- Problemas envolvendo o cálculo do mínimo múltiplo comum e do máximo divisor comum de dois números.
- Traduzir em linguagem simbólica enunciados matemáticos expressos em linguagem natural e vice-versa

Nota 8 Os alunos usaram as mesmas representações e fizeram o mesmo tipo de tratamentos.

Por fim, no final do capítulo, a professora planificou uma aula em que os alunos resolveram, em grupo, um conjunto de quatro problemas. A sua intenção foi ver como é que os alunos se tinham apropriado das representações que tinham utilizado durante as nove semanas. Uma parte deste trabalho foi publicado. A Parte 3

descreve esse trabalho.

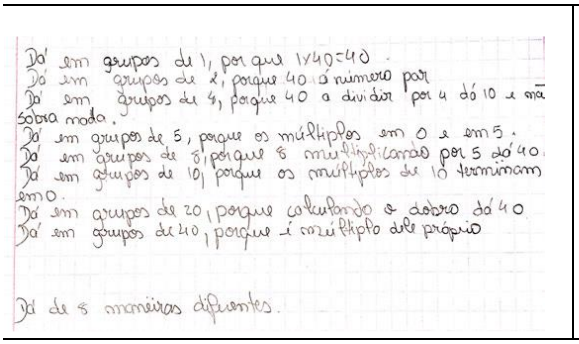
6. PARTE 4

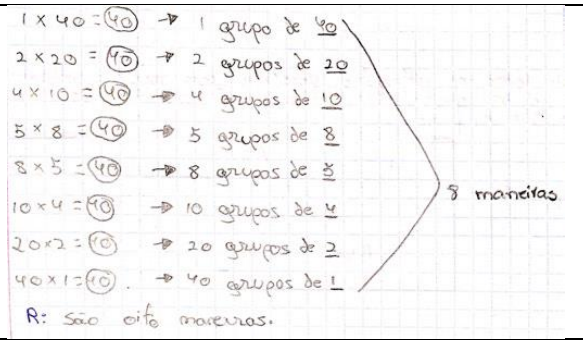
6.1. Contexto

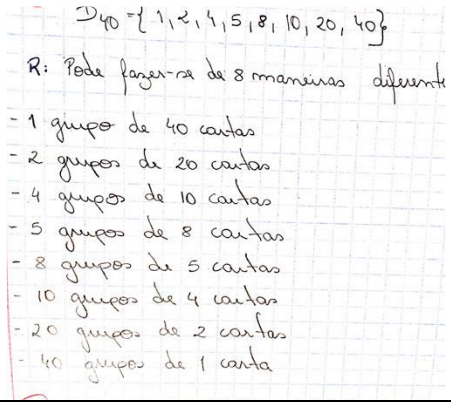
No final da lecionação do conteúdo *Múltiplos e divisores*, a professora organizou um trabalho de grupo para que os alunos resolvessem 4 problemas e selecionou as suas respostas de acordo com as representações que usaram nas suas resoluções.

6.2. Análise e resultados do trabalho de grupo sobre resolução de problemas com mdc e mmc.

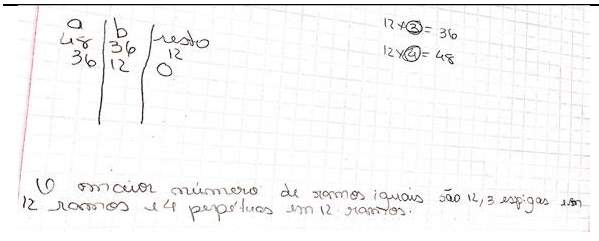
1) Carlos quer distribuir 40 cartas de jogar em montes de igual tamanho sem que sobre nenhuma. De quantos modos diferentes pode ele fazê-lo? Quantas cartas terá cada monte?

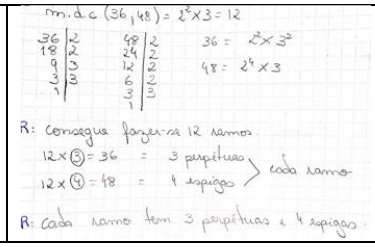


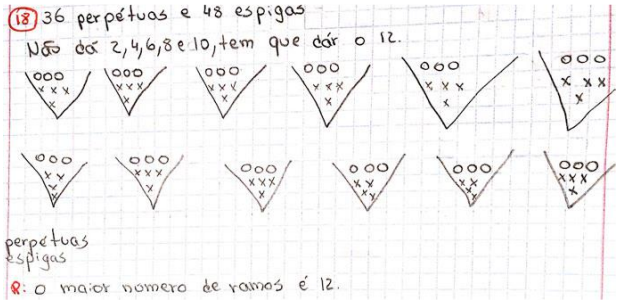




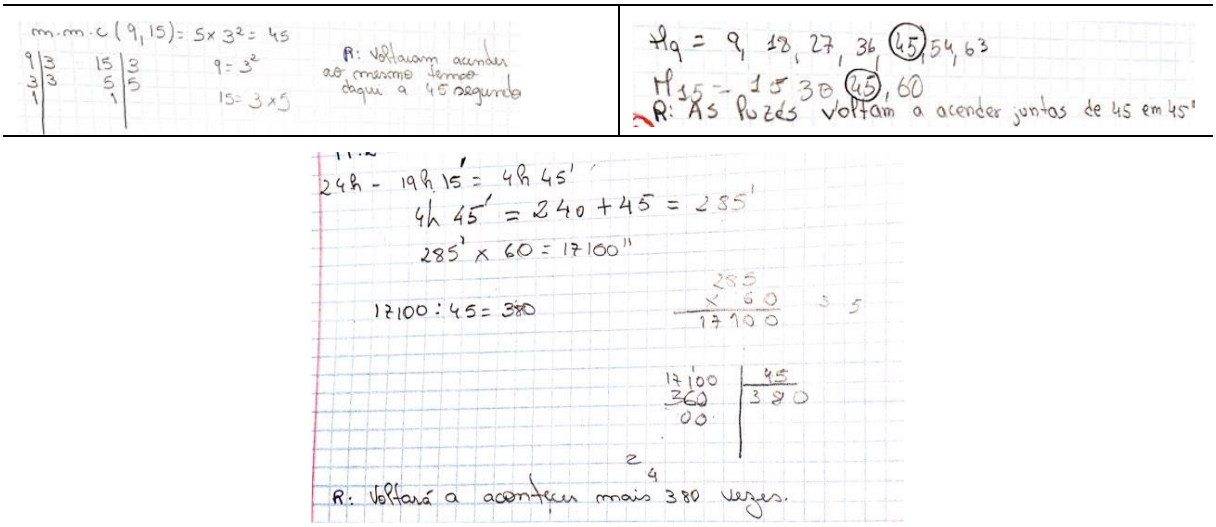
2) A Maria está a fazer ramos de flores secas para oferecer aos convidados da sua festa de aniversário. Ela tem 36 perpétuas e 48 espigas. Qual é o maior número de ramos iguais que a Maria pode fazer usando todas as flores?

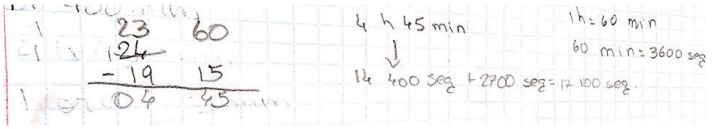




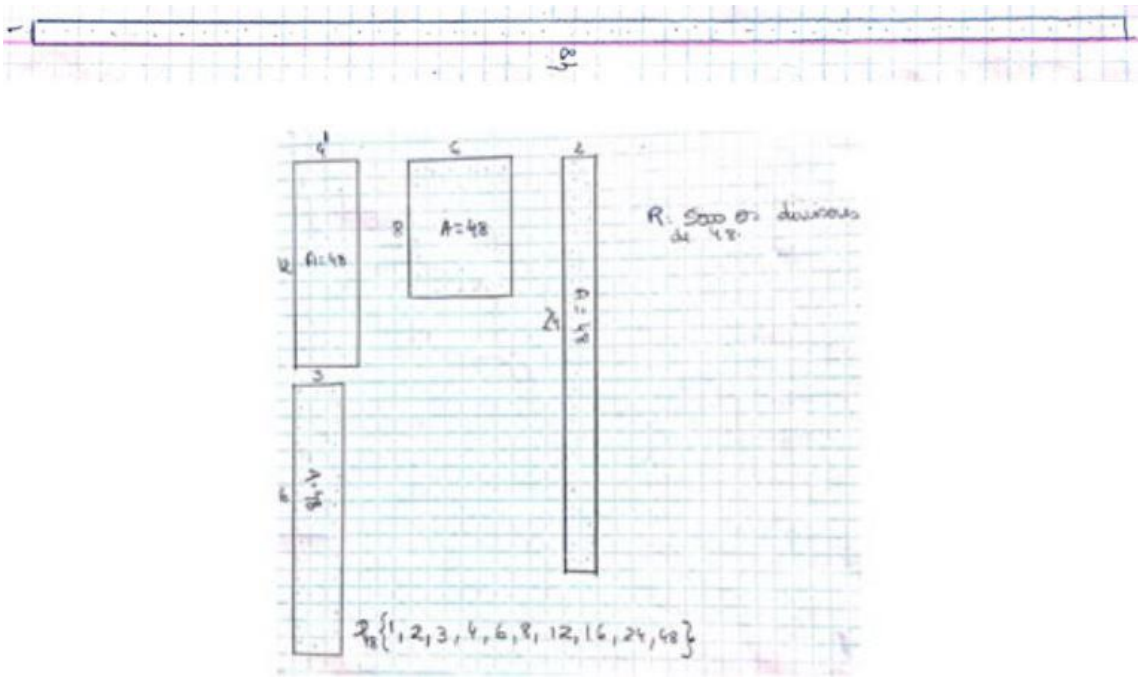


3) A mãe do Tomás comprou duas series de luzes para a árvore de Natal. Numa das series, as lâmpadas acenem a cada 9 segundos e na outra a cada 15 segundos. A mãe do Tomás olhou para o relógio e as duas séries ligaram juntas às 19:15h.
   a) A que horas voltarão as séries a acender-se juntas?
   b) Até à meia noite, quantas vezes acenderão juntas?





4) Desenha todos os retângulos possíveis com medidas inteiras cuja área seja 48 centímetros quadrados. Presta atenção aos números encontrados. Que observas?



Os professores da escola em que a professora trabalha têm o hábito de trocar opiniões sobre a forma como trabalham. Fazem-no formalmente em reuniões de grupo de docência e em momentos informais, como por exemplo nos intervalos. No início deste conteúdo, a professora tinha conversado com uma colega de grupo que lecionava o mesmo ano de escolaridade sobre a prevalência que iria dar às representações visuais. Tiveram

curiosidade de saber em que refletiria essa diferença, por isso aplicaram o mesmo teste nas suas turmas. É este trabalho que a seguir se descreve e consta da Parte 4. Este trabalho foi publicado.

7. PARTE 5

7.1. Contexto

Depois de lecionar o conteúdo dos *Números naturais*, os alunos resolveram um teste com alguns exercícios e problemas envolvendo as noções de divisores, múltiplos e *mdc* e *mmc* (Figura 9).

1) Escreve os divisores de 9.
2) Representa de duas formas diferentes os múltiplos naturais de 5.
3) Calcula os divisores comuns de 16 e 18. Qual o seu máximo divisor comum?
4) Calcula o mínimo múltiplo comum de 4 e 5.
5) Os números 10 e 15 são números primos entre si? Justifica.

"Preparando a festa de aniversário I"

1) O Francisco quer organizar a sua festa de aniversário e pretende oferecer a cada um dos seus convidados um saco com berlindes e miniaturas de bonecos "Mínimos". Todos os sacos deverão ter o mesmo conteúdo. Para o efeito, a sua mãe comprou-lhe 18 bonecos e 24 berlindes que o Francisco terá que usar sem que sobre nenhum objeto.
   a) Qual o número máximo de sacos que o Francisco pode fazer?
   b) Qual o conteúdo de cada saco?
   Explica como chegaste à tua resposta.

"Preparando a festa de aniversário II"

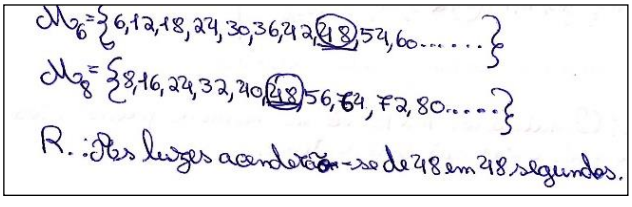
2) Para enfeitar a sala onde vai receber os seus convidados, o Francisco utilizou uma gambiarra com luzes de duas cores: vermelho e azul. Sabendo que as luzes de cor vermelha acendem a cada 6 segundos e as de cor azul acendem a cada 8 segundos, de quanto em quanto tempo acenderão as luzes das duas cores ao mesmo tempo?
   Explica como chegaste à tua resposta.

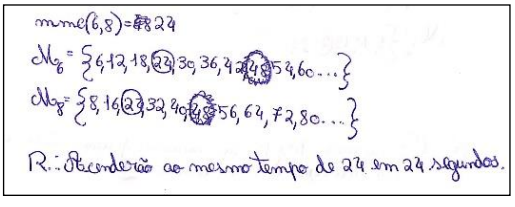
Figura **1**: Teste aplicado na Parte 5 da Fase 2

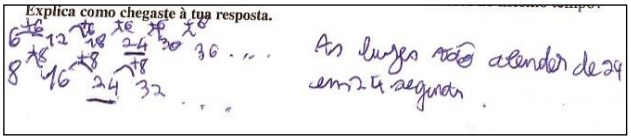
O mesmo teste foi resolvido duas vezes intervaladas por 3 meses, para poder ver o desempenho dos dois grupos de alunos, em que um grupo usou representações visuais com muita frequência (Grupo B) e o outro não (Grupo A).

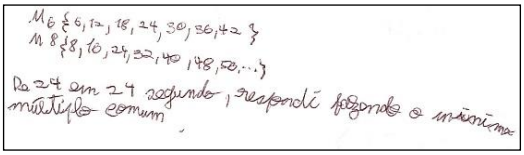
7.2. Análise e resultados do teste aplicado

Representações do grupo A:

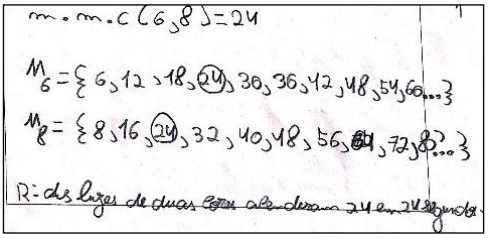


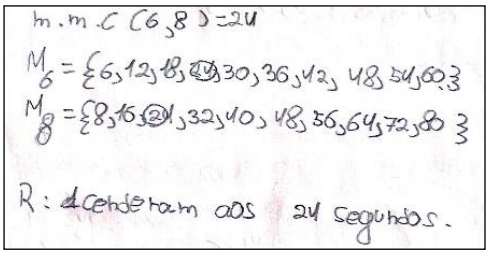


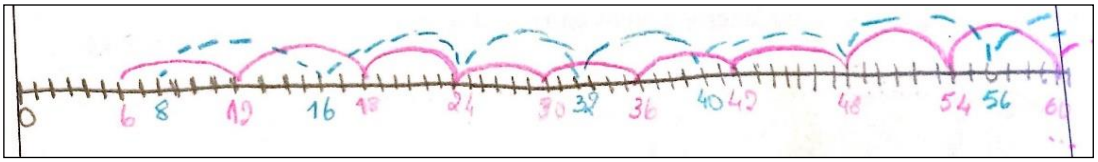


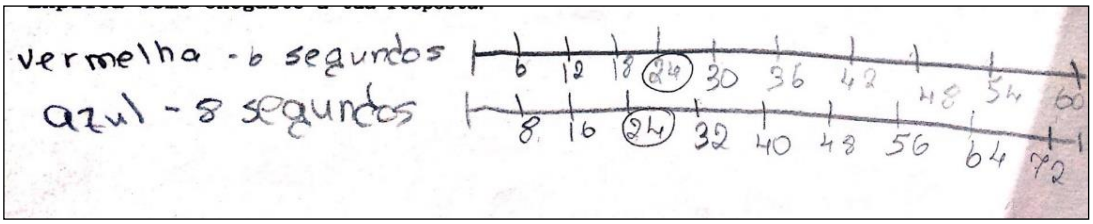


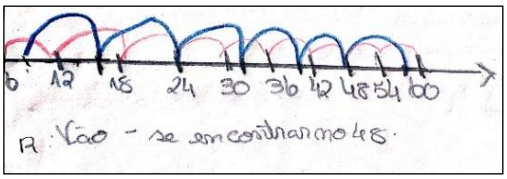
Representações do Grupo B:

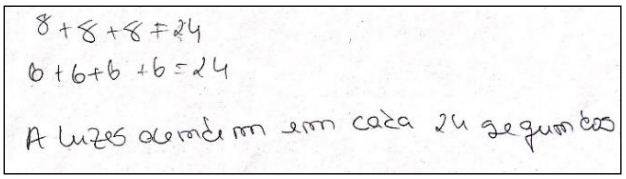


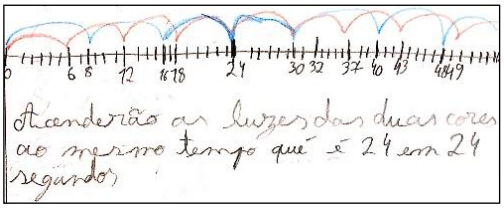


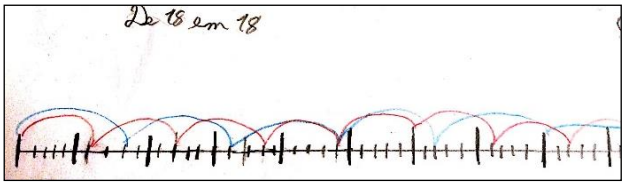


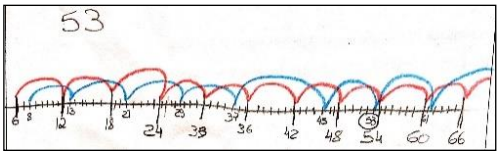


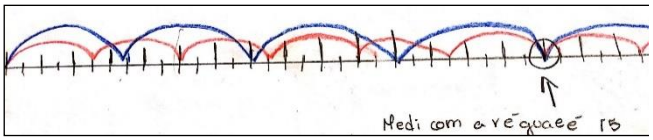


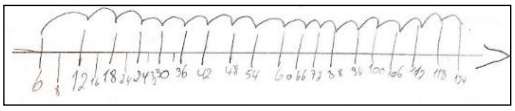


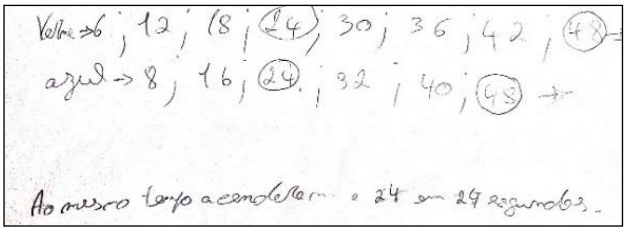












Assim se finalizou este conteúdo. O seguinte seria do tema da Geometria. A professora não sentiu necessidade de fazer um trabalho tão pormenorizado pois já se sentia mais à vontade no conhecimento e identificação das representações. Decidiu focar-se em determinadas tarefas rotineiras, pois tinha visto que eram as de mais difícil utilização de representações múltiplas. Também tinha reparado que a tabela não era usada com a mesma destreza por todos os alunos, por isso queria explorar melhor este conhecimento. A Parte 5 descreve esse trabalho. Este trabalho foi publicado.

8. PARTE 6

8.1. Contexto

Os alunos estavam a iniciar a aprendizagem do conteúdo matemático "Triângulos e paralelogramos". Esta aula tinha o objetivo de consolidar a classificação de triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos. A tarefa requeria que os alunos usassem uma tabela para representar este conceito geométrico. Na aula anterior, os alunos e a professora construíram em conjunto um esquema síntese (Figura 9)

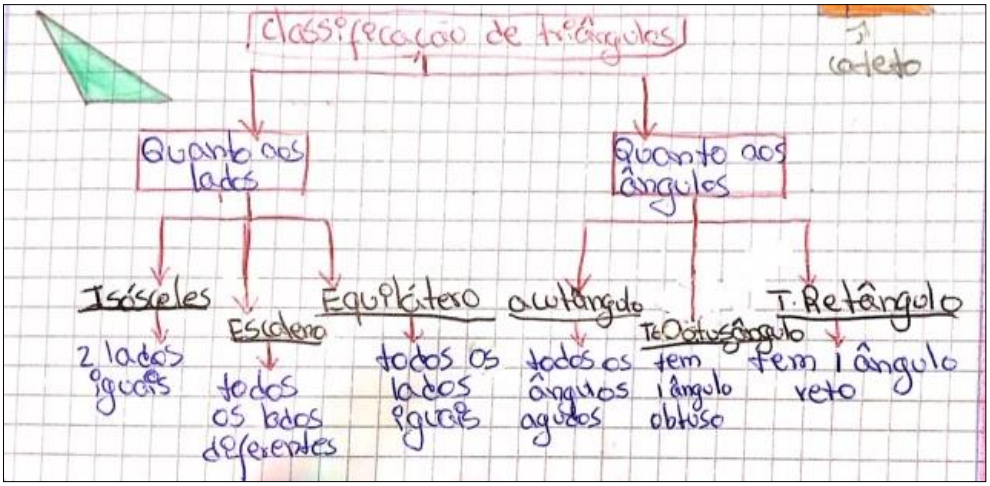


Figura **1**: Esquema elaborado numa das aulas anteriores e disponível para consulta durante a atividade

8.2. Análise e resultados da tarefa explorada

Na aula seguinte, a professora apresentou a tarefa cujo enunciado combina a linguagem natural com uma linguagem visual (figurativa) de triângulos (Figura 2).

Q1: Constrói uma tabela para classificar cada um dos triângulos das figuras seguintes, relativamente aos lados e aos ângulos.

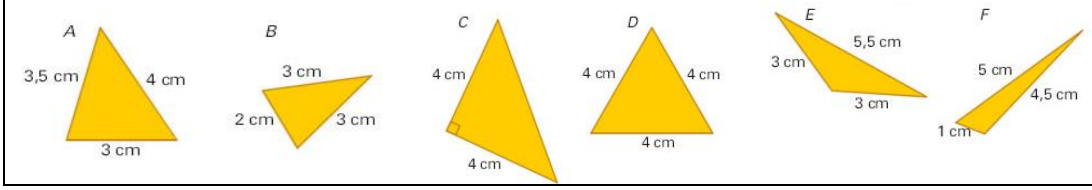
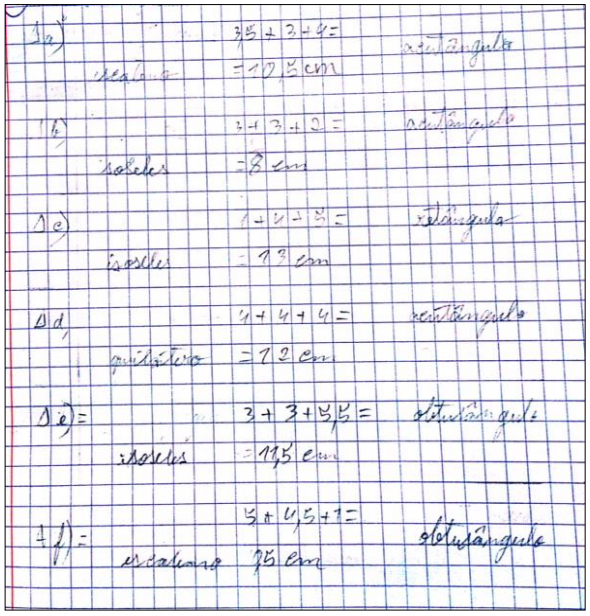


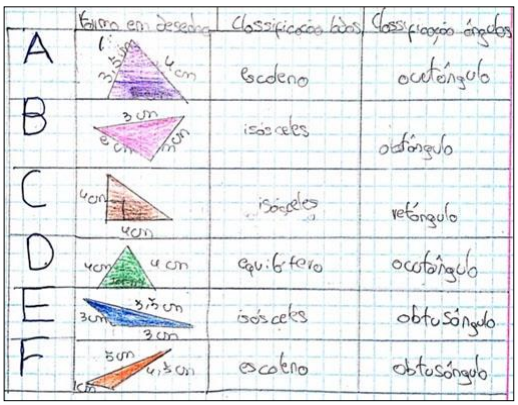
Figura **2**: Esquema elaborado numa das aulas anteriores e disponível para consulta durante a atividade

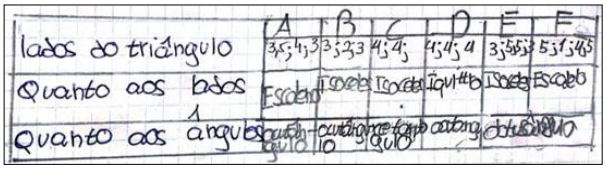
A atividade durou 15 minutos e foi desenvolvida em trabalho individual. Os alunos podiam consultar o livro adotado e o caderno diário.

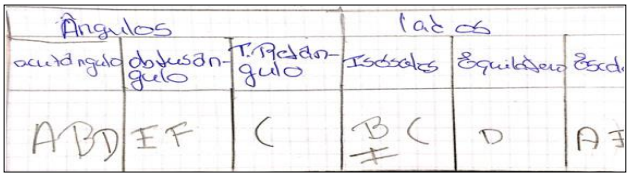
No entanto, manifestaram alguma insegurança que a professora percebeu pelo tempo que estiveram sem escrever nada. Para ultrapassar esta situação, a professora incentivou os alunos mostrando-lhes que estavam na posse de tudo o que precisavam para começar a trabalhar, isto é, certificou-se que os alunos sabiam o que era uma tabela e sabiam classificar os triângulos, e ainda lhes lembrou de que podiam consultar o livro e o caderno, caso tivessem dúvidas.

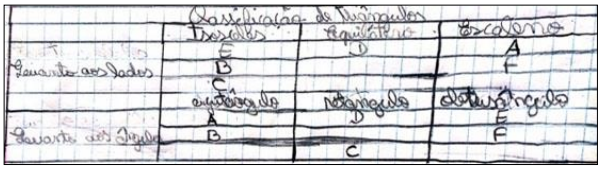
Oito dias depois, a professora organizou uma discussão coletiva sobre as tabelas construídas, depois de as ter organizado por classes.



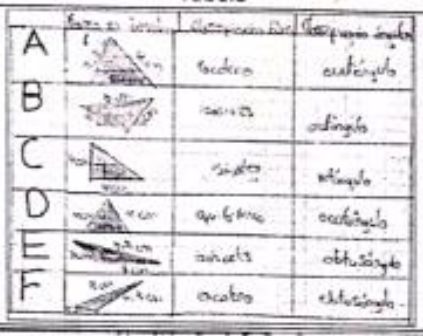
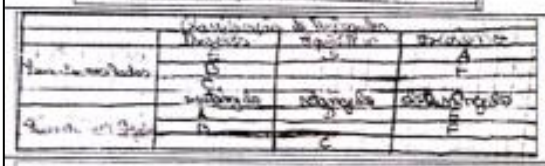
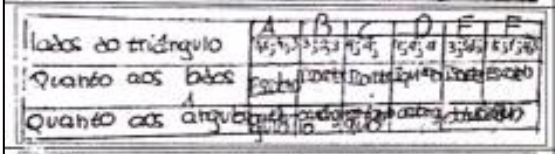
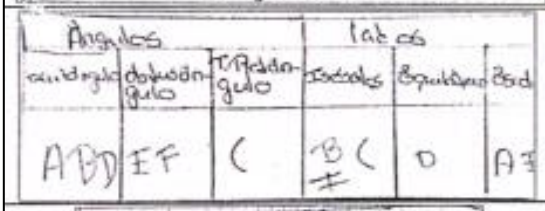
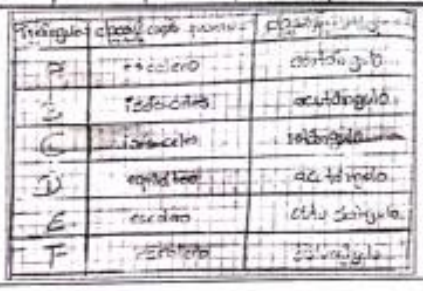
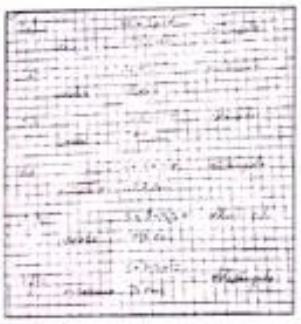








Uma semana depois, a professora planificou uma aula em que mostrou à turma as tabelas construídas para que os seus alunos identificassem pontos fortes e pontos fracos da sua construção. A imagem seguinte sumariza essa crítica.

Tabela	Pontos fortes	Pontos fracos
	Organizada e os desenhos na tabela tornaram a informação mais clara	
	Está bem organizada. Percebe-se a letra	Fazer retângulos maiores Organização diferente.
		Está tudo muito apertadinho. Saiu fora das margens. A letra não está legível.
	Bem organizado. Respeitou as margens. Boa organização espacial	Devia ter mais cuidado com a letra.
	Está bem organizado.	Não tem.
	Incluiu o perímetro. Não tem linhas mas está bem organizado	Faltam as linhas.

A professora fez a análise das tabelas construídas tendo os resultados sido publicados nas atas de uma conferência. Durante o resto do ano, foi adquirindo destreza neste trabalho de utilização de três sistemas de representação nos diferentes temas.

No ano seguinte (ano x+2) e depois de terminado o trabalho de desenvolvimento profissional suficiente para prosseguir pra a fase seguinte da investigação, da escrita de artigos, e sua revisão científica por pares, finalmente organizou a fase final da sua investigação com base na literatura consultada e lida. A equipa de investigação decidiu começar a desenvolver a Fase 3 do estudo a aplicar durante a segundo período de aulas desse ano.

9. PARTE 7

9.1. Contexto

A professora fez uma entrevista semiestruturada aos três colegas do seu grupo disciplinar que, como ela, lecionavam Matemática ao 6.º ano de escolaridade nesse ano (ano x+2) que correspondeu ao ano da recolha dos dados relativos ao conteúdo *Áreas de figuras planas. Polígonos e áreas* (polígono regular e círculo).

A figura seguinte mostra a planificação a médio prazo para a unidade em lecionação.

Esta planificação foi elaborada em grupo disciplinar por uma equipa de dois professores indicados para o efeito. Seria um guia para todos, mas os professores poderiam fazer a abordagem que considerassem mais adequada a cada turma de alunos.

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA E CIÊNCIAS EXPERIMENTAIS – 20XX/20XX

Matemática 6º Ano **Domínio: GEOMETRIA E MEDIDA (GM6)** **Planificação da Unidade 5: FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS. PERÍMETROS E ÁREAS.** **25 aulas**

Circunferências, ângulos e retas. Polígonos inscritos e circunscritos a uma circunferência. Perímetro de um polígono. Perímetro de um círculo. Área de um polígono regular. Área de um círculo.		
OBJ. GERAIS	**DESCRITORES**	**RECURSOS ATIVIDADES**
Figuras geométricas planas.		
Relacionar circunferências com ângulos, retas e polígonos	1. Designar, dada uma circunferência, por «ângulo ao centro» um ângulo de vértice no centro. 2. Designar, dada uma circunferência, por «setor circular» a interseção de um ângulo ao centro com o círculo. 3. Identificar um polígono como «inscrito» numa dada circunferência quando os respetivos vértices são pontos da circunferência. 4. Reconhecer que uma reta que passa por um ponto P de uma circunferência de centro O e é perpendicular ao raio $[OP]$ interseta a circunferência apenas em P e designá-la por «reta tangente à circunferência». 5. Identificar um segmento de reta como tangente a uma dada circunferência se a intersetar e a respetiva reta suporte for tangente à circunferência. 6. Identificar um polígono como «circunscrito» a uma dada circunferência quando os respetivos lados forem tangentes à circunferência. 7. Reconhecer, dado um polígono regular inscrito numa circunferência, que os segmentos que unem o centro da circunferência aos pés das perpendiculares tiradas do centro para os lados do polígono são todos iguais e designá-los por «apótemas». **Notas:** (1) As noções de retas e segmentos de reta tangente a uma circunferência, bem como de apótema de um polígono surgem no 2.º ciclo do ensino básico associadas à área de polígonos regulares inscritos e circunscritos a uma circunferência. Estas, por sua vez, associam-se à obtenção da área do círculo. (2) A abordagem dos conceitos de ângulo ao centro e de setor circular surgem no 2.º ciclo do ensino básico por estarem associadas à construção de diagramas circulares no domínio *Organização e Tratamento de Dados* (OTD). Esta abordagem é complementada no 3.º ciclo do ensino básico.	Manual /e-manual CD-ROM: recursos digitais do professor Caderno de atividades Exploração do Cabri 3D Propor a determinação experimental de um valor aproximado de π. Usar situações experimentais para encontrar a fórmula do perímetro do círculo. Exploração do geoplano.
Medir o perímetro e a área de polígonos regulares e de círculos *Resolver problemas*	1. Saber que o perímetro e a área de um dado círculo podem ser aproximados respetivamente pelos perímetros e áreas de polígonos regulares neles inscritos e a eles circunscritos. 2. Saber que os perímetros e os diâmetros dos círculos são grandezas diretamente proporcionais, realizando experiências que o sugiram, e designar por π a respetiva constante de proporcionalidade, sabendo que o valor de π arredondado às décimas milésimas é igual a 3,1416. 3. Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento, que o perímetro de um círculo é igual ao produto de π pelo diâmetro e ao produto do dobro de π pelo raio e exprimir simbolicamente estas relações. 4. Decompor um polígono regular inscrito numa circunferência em triângulos isósceles com vértice no centro, formar um paralelogramo com esses triângulos, acrescentando um triângulo igual no caso em que são em número ímpar, e utilizar esta construção para reconhecer que a medida da área do polígono, em unidades quadradas, é igual ao produto do semi-perímetro pela medida do comprimento do apótema. 5. Reconhecer, fixada uma unidade de comprimento, que a área de um círculo é igual (em unidades quadradas) ao produto de π pelo quadrado do raio, aproximando o círculo por polígonos regulares inscritos e o raio pelos respetivos apótemas. 1. Resolver problemas envolvendo o cálculo de perímetros e áreas de polígonos e de círculos. **Notas:** (1) No 2.º ciclo do ensino básico, o professor deve propor a determinação experimental de um valor aproximado de π e usar situações para encontrar a fórmula do perímetro do círculo. (2) A fórmula para o perímetro do círculo por aproximação por perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos pode ser abordada usando um programa de geometria dinâmica. (3) A área de polígonos regulares pode ser calculada através da decomposição dos polígonos regulares inscritos numa circunferência em triângulos. Esta fórmula pode ser abordada usando um programa de geometria dinâmica. (4) Esta fórmula é retomada no 9.º ano de escolaridade.	

A professora combinou com cada um deles uma entrevista à qual responderam individualmente. A entrevista foi realizada individualmente numa sala da escola.

9.1.1. Guião da entrevista semiestruturada

Guião de Entrevista Semiestruturada – *Checklist*

Como já te disse quando te convidei para esta conversa/entrevista, preciso de recolher informações para um trabalho de investigação que estou a realizar focado em representações matemáticas. Para complementar o meu trabalho preciso de recolher informações sobre práticas docentes no tópico Figuras planas. Perímetros e Áreas, com especial incidência nas representações durante o ensino deste tópico, nomeadamente nos conteúdos que te disse: círculo e circunferência, polígonos inscritos e circunscritos a uma circunferência, área do pólígono regular e área do círculo. Eu trouxe o livro que poderemos utilizar para apoiar a nossa conversa. Também te podes basear noutros materiais que, como te disse, poderias trazer.

1. Número de anos de serviço docente que tens:	
2. Número de aulas que utilizaste na lecionação do conteúdo "Figuras planas. Perímetros e áreas".	
3. Domínios e conceitos necessários do ano anterior para lecionar este conteúdo. Números e operações. Geometria e medida. Álgebra. Organização e tratamento de dados.	
4. Número de vezes que lecionaste este conteúdo, de acordo com o Programa de Matemática de 2013.	
5. Como costumas ensiná-lo? Mudas alguma coisa de ano para ano? Se sim, o quê?	
• Como trabalharam os alunos?	
• Tipo de trabalho mais frequente? Porquê?	
• Materiais/recursos para expor a matéria	
• Local de seleção das tarefas que decidiste explorar nas aulas sobre este conteúdo curricular.	
• Tipo de materiais manipulativos para apoiar a aprendizagem dos alunos:	
6. Relativamente ao ensino de 6.1 (6.2, …, para um de cada vez), como fizeste para o ensinar? Utilizaste figuras? Tabelas, quadros, esquemas, desenhos, … Em que situações? Detetaste dificuldades nos alunos na utilização de figuras? Encontra-las, às figuras e às dificuldades, noutros tópicos? Que tipo de apoio escrito costumas usar? O quadro, PPT, outros? Do que expões, o que pedes aos alunos para registarem no caderno?	
• Abordagem utilizada para lecionar (…)	
• A Tarefa proposta no livro adotado, tal como é apresentada. A Tarefa proposta no livro adotado, com adaptações. Quais? Indicação da fórmula para o cálculo da área de um círculo, seguida de resolução de exercícios e problemas de aplicação. Outra. Faz uma descrição sucinta. Mostra-me o caderno dos alunos, as fichas que fizeste, o material que usaste, … Como fizeste para ensinar cada um deles? Utilizaste figuras? Em que situações? Detetas dificuldades nos alunos na utilização de figuras? Encontra-las noutros tópicos? Que tipo de apoio escrito usaste? O quadro, PPT, outros? Do que expões o que pediste aos alunos para registarem no caderno?	
• Tipo de representações matemáticas durante a exposição da matéria	
• Tipo de representações matemáticas escritas espera que os seus alunos utilizem	
• Tipo de representações escritas valorizadas no trabalho dos seus alunos?	
• Tipo de representação mais frequente e a menos frequente.	
• Tipo de representação escrita que mais valorizou para a que menos valorizou	
• Identifique dificuldades que os seus alunos evidenciam relativamente às representações matemáticas utilizadas durante a lecionação do conteúdo "Figuras planas. Áreas e perímetros."	

6.1. Perímetro do círculo
6.2. Elementos da circunferência e do círculo
6.3. Polígonos inscritos numa circunferência e polígonos circunscritos a uma circunferência
6.4. Área de um polígono regular
6.5. Área de um círculo

9.2. Professor A

9.2.1. Breve caracterização profissional do Professor A

O Professor A tem 24 anos de serviço docente no 2.º ciclo de escolaridade. Possui licenciatura com estágio integrado para a docência do grupo de recrutamento 230. Participou em formação específica para a Matemática no âmbito do Plano de Ação da Matemática durante dois anos letivos, em que pelo menos duas aulas por ano tiveram a presença da formadora e foram alvo de discussão e reflexão dentro do grupo com a formadora. Esteve envolvido neste projeto nos cinco anos em que foi implementado, tendo tido o apoio de um Professor Acompanhante para o Plano de Ação da Matemática. Durante dois anos letivos, os docentes decidiram não adotar livro, por estar desajustado às orientações do programa em vigor (2007) utilizando os materiais disponibilizados pela DGIDC e construindo outros, nomeadamente instrumentos de avaliação e síntese dos conteúdos, em sede de grupo de docência.

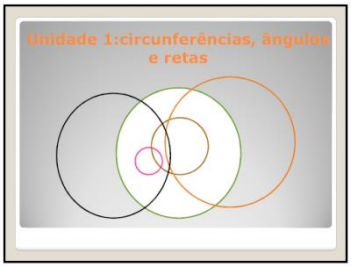
9.2.2. Abordagem pedagógica e materiais usados do Professor A

O Professor A lecionou este conteúdo de 30 janeiro a 23 março (7 semanas). Começou por fazer revisões de Geometria: Noções de raio, diâmetro, círculo, circunferência, perímetro. Foi a segunda vez que lecionou este conteúdo com estas aprendizagens. Da primeira vez que o lecionou para esta vez, que foi a segunda, fez algumas mudanças, nomeadamente a simplificação da explicação do apótema e de algumas demonstrações. Considera alguns exercícios, em particular os exercícios em que é preciso justificar com propriedades geométricas, bastante difíceis de forma que têm que ser feitos com ajuda. O modo de trabalho nas suas aulas é frequentemente o trabalho de pares, raramente o trabalho de grupo. O Professor A começou por descrever sumariamente como tinha organizado as suas aulas para ensinar a fórmula para a área do círculo. Forneceu a cada par de alunos um hexágono regular, eles desenharam o apótema, dividiram o hexágono em seis triângulos iguais, desenharam a altura de um desses triângulos, depois recortaram e, por fim, verificaram que a altura de um desses triângulos era o apótema. Depois de recortarem os triângulos, construíram um paralelogramo e calcularam a área do paralelogramo. O Professor A foi dando as indicações. Os alunos não colaram no caderno porque só havia uma figura para cada par. O professor justificou ter utilizado um hexágono, porque os triângulos eram equiláteros; se usasse outra figura, os triângulos seriam isósceles e eles teriam dificuldade a colar os triângulos para formarem o paralelogramo. O professor A reconheceu que se tivesse usado a cor eles reconheceriam melhor tanto o perímetro como o semiperímetro e, numa próxima oportunidade vai usar outra figura diferente do hexágono. Depois, da fórmula do paralelogramo fizeram a correspondência entre os seus elementos e passaram para a fórmula do círculo. Não fizeram para o retângulo. No ano anterior tinham feito um trabalho semelhante para descobrir a fórmula para a área do paralelogramo a partir de um retângulo.

Habitualmente, o professor A prepara um PPT para toda a unidade seguindo as indicações do Caderno de Apoio ao Programa fazendo, no entanto, uma seleção das demonstrações. Vai intercalando a apresentação do PPT com a resolução de exercícios do livro. Para a primeira parte utilizou os primeiros doze diapositivos. Teve especial cuidado na circunferência e no círculo, porque é natural os alunos não considerarem que os pontos da circunferência são também pontos do círculo. Os alunos foram desenhando nos seus cadernos o desenho dos diapositivos.

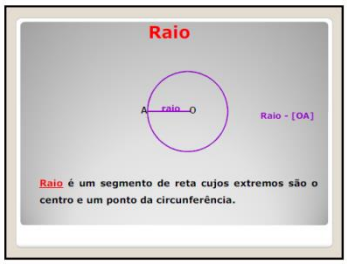
1

2

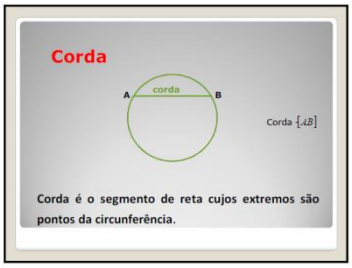


3

4

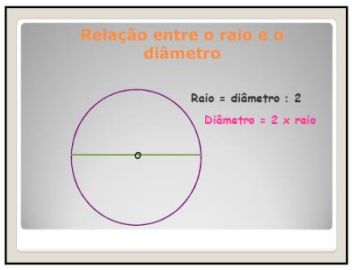


5

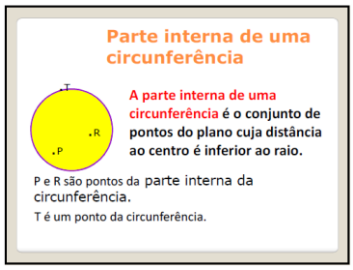


6

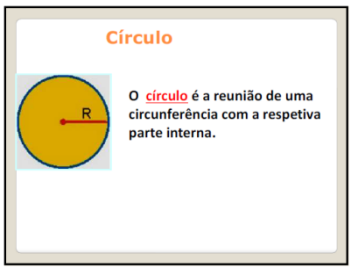
7 8 9



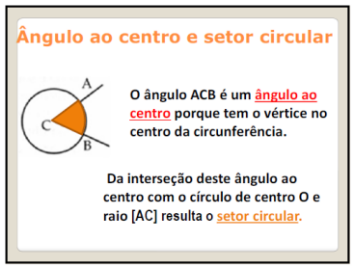
10

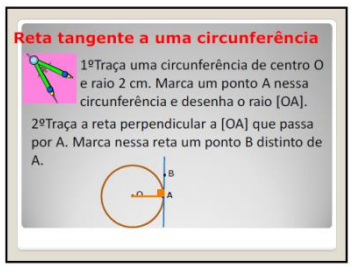


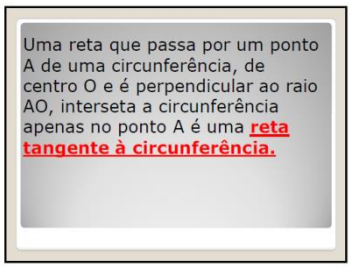
11



12







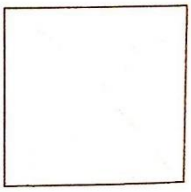
Nos polígonos inscritos e circunscritos pediu-lhes para fazerem o que estava no livro (p. 14, Tarefa 6).

Polígono regular inscrito numa circunferência

tarefa 6

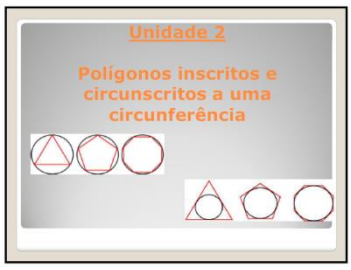
O quadrado da figura tem 3 cm de lado.

1. Desenha o quadrado no teu caderno e traça os dois segmentos de reta que unem vértices opostos do quadrado.
2. Traça uma circunferência com centro no ponto de interseção dos dois segmentos de reta traçados em 1., de tal modo que o quadrado fique inscrito nessa circunferência.



Depois aprenderam o apótema.

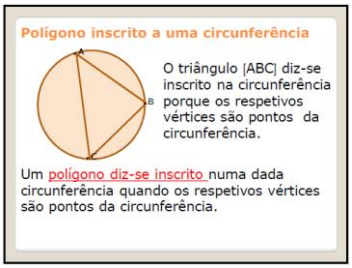
13



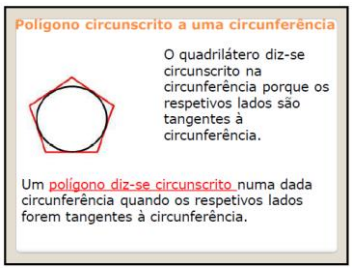
14

15

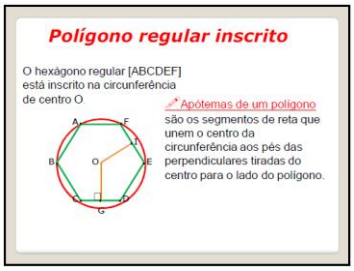
16



17

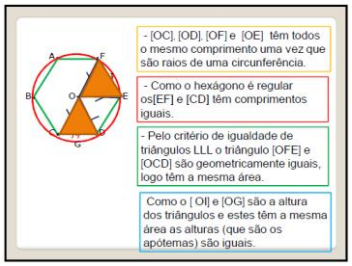


18

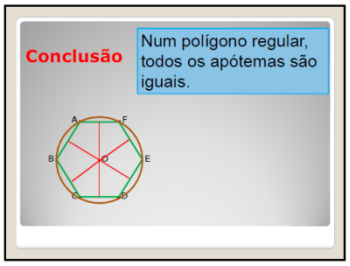


Para ensinar polígonos circunscritos, os alunos observaram, não fizeram qualquer desenho, vendo as diferenças entre polígonos inscritos e polígonos circunscritos. Tudo muito devagarinho, como ressalta!

19

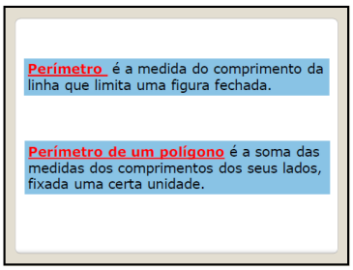


20

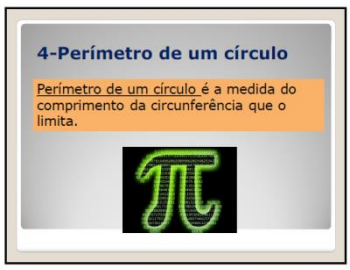


21

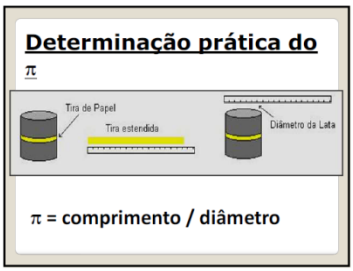
22



23



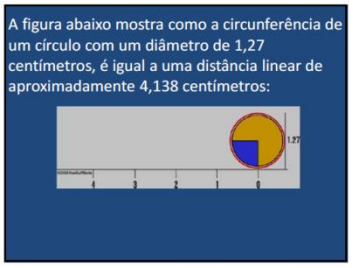
24



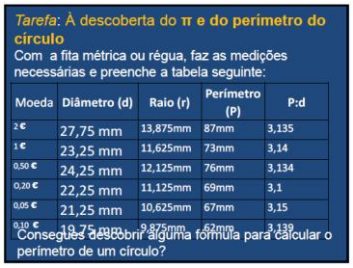
Na determinação prática do π, o Professor A utilizou moedas e os alunos trabalharam em grupos. Antes mostrou-lhes uma animação de uma moeda a girar em que se vê que o perímetro da moeda é aproximadamente três vezes e meia o comprimento do diâmetro (diapositivo 25). Os alunos utilizaram réguas ou fita métrica para fazer as medições, mas a fita métrica não se revelou muito adequada por ser flexível. Ao mesmo tempo, foram preenchendo a tabela (diapositivo 26) que já tinha os valores das moedas e do diâmetro de cada uma. Os alunos tinham de escrever os valores para o raio, para o perímetro e para o quociente do perímetro pelo diâmetro.

O Professor A optou por fornecer os valores do diâmetro para que o desvio do valor exato do π não fosse tão grande, entre os valores encontrados pelos grupos. Disse ainda ter ajudado os alunos a encontrar um valor aproximado para as suas medidas. Depois deduziram a fórmula (diapositivo 27). De seguida, falaram um pouco sobra a história do π (diapositivos 28 e 29) e, finalmente, pela tabela, confirmaram que o perímetro e o diâmetro de um círculo são grandezas diretamente proporcionais (diapositivos 30 e 31).

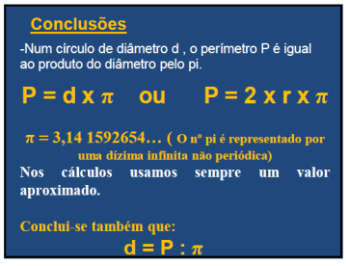
25



26

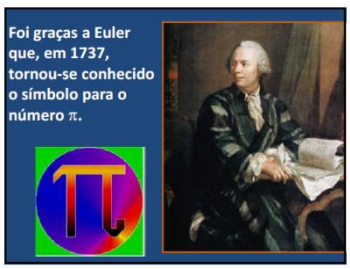


27

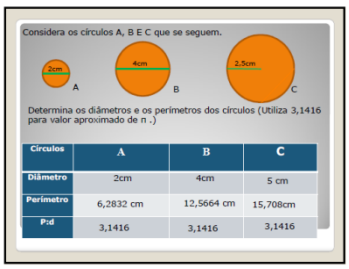


28

29



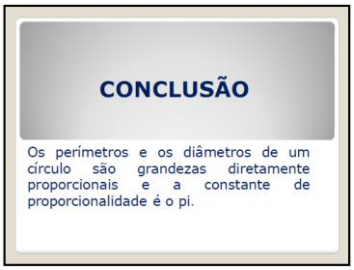
30



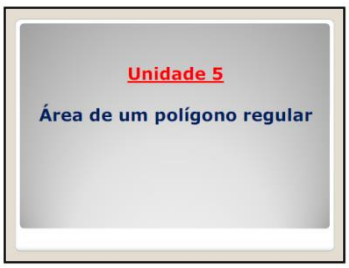
Na área para o polígono regular, fizeram um trabalho de decomposição noutras figuras (diapositivo 33), semelhante ao que tinham feito quando aprenderam o apótema, mas desta vez já usaram a cor para

identificarem o semiperímetro.

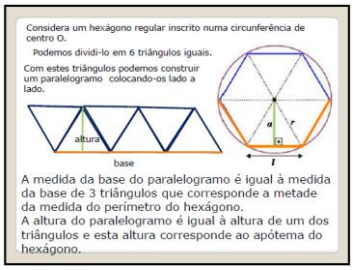
31



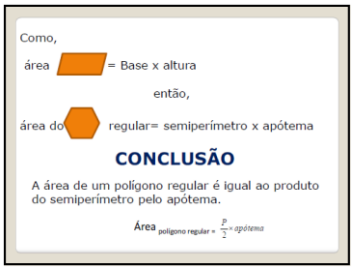
32



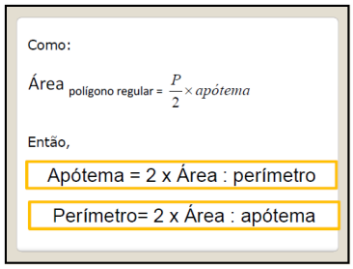
33



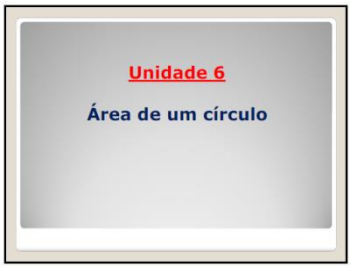
34



35

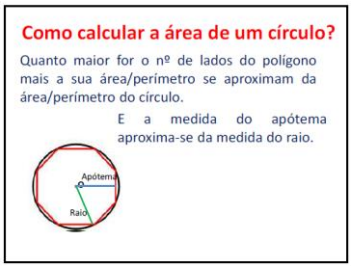


36

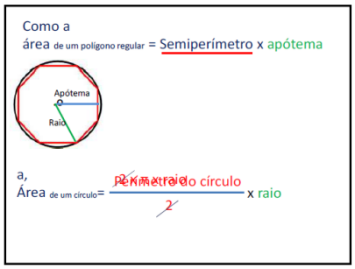


Para aprenderem a área do círculo, os alunos seguiram a informação dos diapositivos 37, 38 e 39. O Professor A considerou que os alunos perceberam bem que um polígono de muitos lados, seja inscrito ou circunscrito se aproxima muito de um círculo (diapositivo 40).

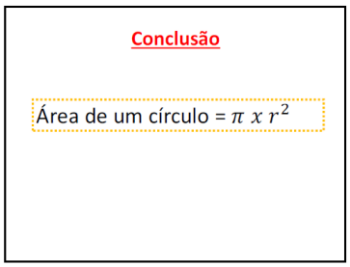
37



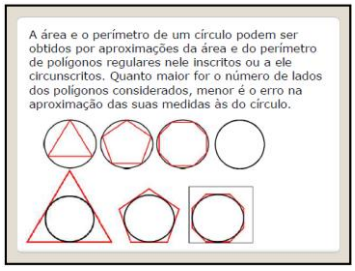
38



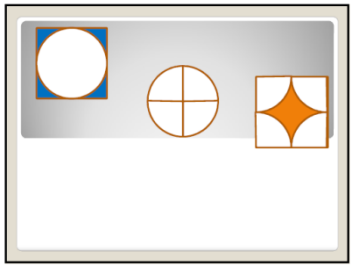
39



40



41



9.3. As representações matemáticas vistas pelo Professor A

O Professor A valoriza mais as representações verbais, porque falamos muito, as visuais e simbólicas. Reconhece que na Geometria são as representações visuais as que mais se destacam, mas quando resolvem as tarefas não as utilizam. Também reconhece que os alunos têm dificuldades em escrever e em desenhar. O Professor A ainda usa, sempre que pode, a linguagem gestual. Dá um exemplo de um exercício que uma colega de Educação Física (que orienta o Estudo Genérico) teve de explicar a um aluno o que precisava de calcular. Só depois de pintar a superfície que precisava de calcular é que o aluno percebeu. Relativamente ao uso de tabelas, os alunos preenchem as tabelas, mas não as constroem. O professor A reconhece que os alunos têm muitas dificuldades em usar esquemas na resolução de problemas, apesar de os professores os usarem. O Professor A pergunta-se por que razão os alunos não escrevem os dados dos problemas nas figuras que têm. Reconhece que ajuda, mas não consegue fazer com que os alunos o façam. Reconhece que muitos dos exercícios são pura aplicação das fórmulas, mas se não reconhecerem os dados não conseguem resolver os exercícios.

9.4. Professor B

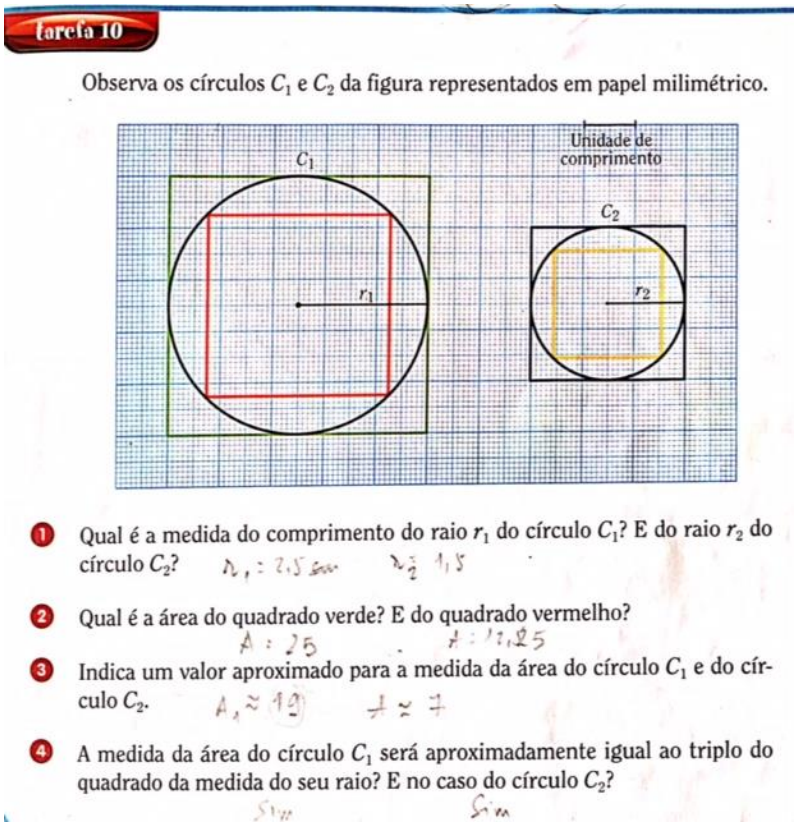
9.4.1. Breve caracterização profissional do Professor B

O Professor B tem 24 anos de serviço docente no 2.º ciclo de escolaridade. Possui licenciatura com estágio integrado para a docência do grupo de recrutamento 230 e um mestrado na mesma área (Matemática e Ciências da Natureza). O Professor B usa muitos desenhos para explicar a matéria.

9.4.2. Abordagem pedagógica e materiais usados do Professor B

O professor B começou a lecionar esta matéria a 31 de janeiro e terminou a 14 de março (pouco mais de seis semanas). Os alunos trabalham a pares, porque arranjar a sala para trabalhar em grupo gasta-se metade da aula. Às vezes viram-se para trás e trabalham com os de trás e o Professor B ignora, deixando-os trabalhar assim. Foi a segunda vez que lecionou esta matéria, e da primeira vez para esta, o Professor B já fez uma seleção. Ele ignora o que é demasiado elaborado, justificando que é desperdiçar tempo, porque aquilo ia-lhes passar ao lado.

O Professor B começou por dizer que a forma como a área do círculo está representada no livro deles de aproximação à área do círculo (enquadrado em dois quadrados, ver a figura seguinte) não é muito simples para eles.



Tarefa 10

Observa os círculos C_1 e C_2 da figura representados em papel milimétrico.

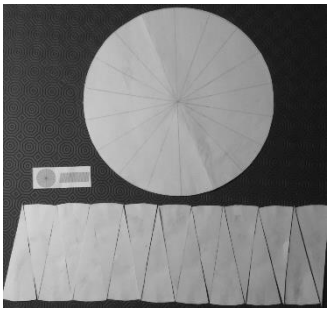
1. Qual é a medida do comprimento do raio r_1 do círculo C_1? E do raio r_2 do círculo C_2?
2. Qual é a área do quadrado verde? E do quadrado vermelho?
3. Indica um valor aproximado para a medida da área do círculo C_1 e do círculo C_2.
4. A medida da área do círculo C_1 será aproximadamente igual ao triplo do quadrado da medida do seu raio? E no caso do círculo C_2?

Eles conseguem construir e compreender mais facilmente com o método que utilizou. O Professor B usou o paralelogramo e eles chegaram lá através da área do paralelogramo.

Professor B: ***Construíram um círculo…***

Professora Investigadora: *Dividiram-no em triângulos…*

Professor B: Mostrei este, claro, não é? ***Explorámos isto para eles identificarem os raios pra depois conseguirem identificá-los também aqui. Depois recortei e montei o paralelogramo com os setores e disse-lhes que quanto menor fosse a amplitude do ângulo ao centro mais próximo da área do paralelogramo nós ficaríamos. Pronto. Então perguntei-lhes como é que se calculava a área deste. Ah, e entretanto (…)*** Entretanto o Professor B levantou-se para ir à porta da sala pegar no caderno de um aluno. Confirmamos os registos no caderno. Tinha oito aulas, não tinha essa parte e combinámos que no dia seguinte me entregaria outro onde tivesse os registos desta parte da matéria, que era a que me interessava. ***Aqui teve que haver uma exploração em primeiro lugar mais sobre o círculo para reconhecerem os setores e tal e depois isto foi construído à frente deles para eles verem e tal e eu perguntei-lhes o que é que havia de semelhante entre esta figura e esta.***



E a primeira coisa que eles disseram foi que elas tinham a mesma área. Conseguiram passar logo para aí. E eu disse, então se têm a mesma área, se descobrirmos a área deste sabemos a área daquele e então perguntei-lhes como se calculava a área de um paralelogramo e eles lá foram dizendo e eu fui escrevendo. Só que chegámos àquela fase em que só temos os valores do paralelogramo, comprimento e largura. Mas o comprimento que medida é? Eles chegaram lá. De onde é que vem este comprimento? Que é que ele é? Que valor é este? E eles disseram, metade da linha que limita o círculo está num lado e a outra metade está no outro. Depois perguntei-lhes como se chamava a linha que limita o círculo. E eles lá disseram que era o perímetro e então se está metade para cada lado eles lá chegaram ao semiperímetro. Depois calculamos e fomos substituindo. E eles chegaram à fórmula do cálculo da área do círculo. Eles chegaram lá. Fizemos a construção e eles passaram. Depois é pena ela não ter aqui (disse o Professor B folheando o caderno que tinham acabado de lhe levar). ***Eles identificaram o comprimento como metade do perímetro do círculo e a altura como sendo o raio uma vez que era a distância que ia desde ponto aqui que era o centro do círculo até à circunferência*** (disse apontando para a figura). ***Claro que quando chegamos àquela fase do corte temos que lembrar a matéria do 5.º ano.***

Aqui, a professora investigadora interrompeu e perguntou-lhe:

Professora Investigadora: *Quando tinha dito que era igual ao semiperímetro vezes o raio, mas depois o semiperímetro é preciso substituir por …*

Professor B: ***Pois, depois eu perguntei como é que se calcula o perímetro do círculo para podermos encontrar o semiperímetro. E eles claro. Então se o perímetro se calcula assim, onde está a letra do perímetro nós podemos escrever o quê? E eles disseram π vezes diâmetro e íamos substituindo até chegarmos à parte do corte, do dois.***

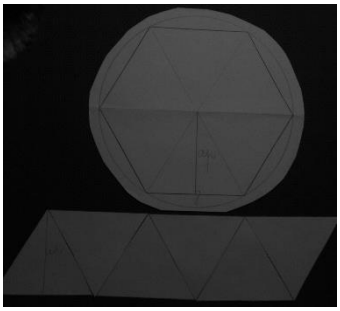
Professora investigadora*: E foi aí que tu achaste que eles tiveram mais dificuldade?*

Professor B: ***Tu sabes que quem fala normalmente são os bons, e os outros nós nunca sabemos muito bem até que ponto é que eles estão a perceber ou não, mas numa turma em fala um e fala outro, eles vão acompanhando. Quando chegámos à parte do diâmetro, eu disse-lhes assim. Então, mas o que é que nós sabemos sobre o diâmetro? Eles disseram que era duas vezes o raio. Então e onde está diâmetro não podemos escrever isso? Podemos. Então vamos escrever isso, para chegarmos à história do raio. Eles foram respondendo às minhas perguntas. De certeza que houve alguns que tiveram muita dificuldade em acompanhar, mas isso nós sabemos. Será que eles conseguiam fazer agora a demonstração? Não é isso que se pretende, para já. Eles conseguiram foi chegar à fórmula da área do círculo. Têm usado bem as fórmulas e têm distinguido. Porque nesta altura há aquela confusão, e agora? é π vezes diâmetro ou π vezes raio ao quadrado? Não sei se eles mecanizaram, mas eu gosto que eles compreendam como se chega lá, mesmo sabendo que eles não vão fixar, mas pelo menos sabem de onde é que aquilo veio.***

Eles colaram isso, ***escreveram por baixo, fizeram a resolução.***

Professora investigadora*: E quando deste a área do … polígono regular?*

Professor B: ***Eles chegaram lá logo. E porque é que chegaram lá logo? Depois eu usei novamente a técnica da área.***



Mas eu disse-lhes foi que a forma como eles pensaram estava bem, mas podíamos pensar de outra forma, também. Eles olharam para esta figura e viram cá seis triângulos. Ah, nós sabemos calcular a área do triângulo, porque a primeira pergunta que eu lhes faço quando eu vejo que eles têm competências para o fazer, eu

pergunto se eu vos pedisse para vocês calcularem a área deste polígono regular, quem é que se desenrascava, mesmo assim, quem é que conseguia fazer alguma coisa? Para ver o que é que eles conseguem dizer. E há sempre dois ou três que dizem Ah, eu sei fazer isso, calculava a área daquele triângulo e multiplicava por seis. Ok, muito bem, estava muito bem pensado, agora vamos ver outra forma de a calcular, descobrindo qual é a fórmula da área de qualquer polígono regular. E fizemos o mesmo, desmontei eles calcularam e descobriram que afinal de contas…

Professora investigadora: *Decompuseste em triângulos e passaste para um paralelogramo*

Professor B*: **Sim, fiz questão de deixar a parte vermelha para eles identificaram o semiperímetro, porque eles ao verem a parte vermelha eles identificam mais facilmente o semiperímetro. Depois temos o apótema, este não podia ficar assim*** (vira a folha para que fique na direção vertical) ***que era para eles verem bem*** (Quando fica ao contrário, eles quase que têm de fazer o pino para verem). ***Área do paralelogramo, então como é que se calcula a área do paralelogramo? Tal e tal. Eles lá escreveram e foi assim. Eu já tinha dado isto há dois anos e vi que resultou. A das aproximações, para nós não é difícil perceber, mas para eles é.***

Professora investigadora: *Hum hum.*

Professor B*: **Eu acho, eu acho que é.***

Professora investigadora: *E passar de uma fórmula para a outra?*

Professor B: Passar de uma fórmula para a outra como?

Professora investigadora: *Passar da fórmula do paralelogramo para a do círculo? Ver que o apótema se vai aproximando e chega ao raio, …*

Professor B: ***Sim…***

Professora investigadora: *…e que o semiperímetro se vai aproximando…*

Professor B: ***Não fiz isso com eles, ou eu não estou a perceber o que tu me estás a dizer.***

Professora investigadora: *A demonstração. Isto que está aqui.*

Professor B: ***Sim…***

Professora investigadora: *Mas só fizeram oralmente.*

Professor B: ***Não, não, registaram.***

(…)

Professora investigadora: *E quando explicaste os polígonos inscritos e circunscritos? Usaste também…*

Professor B: ***Nos polígonos inscritos e circunscritos, eu construí no quadro. Não fiz material.***

Professora investigadora: *Usaste o compasso.*

Professor B: ***Usei o compasso, claro, a régua, …e no caso dos polígonos regulares tive que usar o transferidor para que aquilo ficasse o mais perfeito possível. Com eles usei o hexágono, porque era fácil para eles marcarem os vértices do hexágono.***

Professora investigadora: *Usaste a medida do raio. Foi assim que lhes ensinaste?*

Professor B: ***Mandei-lhes traçar o diâmetro. Depois com o transferidor, o de 180º era só dividir em 3 e fazer a ligação. Para eles ficarem com uma imagem o mais perfeita possível.***

Professora investigadora: Então este tipo de figuras, só usaste na matéria das áreas.

Professor B: ***Este só, acho que sim.***

Professora investigadora: *E aqui usaste a cor. E costumas usar?*

Professor B: ***Depende do que eu preciso. Aqui não consegui. Não consegui marcar com o compasso a vermelho,*** **(risos)** ***nesta era mais fácil, com a régua é mais fácil, mas…***

Professora investigadora: *E outro tipo de representações que apelem à leitura de conjunto, como por exemplo tabelas, esquemas…*

Professor B: ***Tabelas uso as que aparecem no livro. E se for preciso construir uma tabela também faço. Esquemas, não tenho. Assim que me lembre de repente, não*** **tenho usado.**

Professora investigadora: *E eles, tendem para usar esquemas?*

Professor B: ***… Na Matemática … nesta parte da matéria, não.***

Professora investigadora: *Resolver problemas com esquemas.*

Professor B: ***É assim, eu deteto um miúdo, que é muito fraquinho, que usa quase sempre esquemas quando não consegue resolver de outra forma. Ele tenta por esquemas, desenhos, mas praticamente só ele, não tenho muitos que o façam.***

Professora investigadora: E esse tu dás conta quando explicas assim, se adere mais, presta mais atenção?

Professor B: ***Não, ele é muito fraquinho. Tem um défice de atenção (…)***

Professora investigadora: E quando usam as tabelas do livro?

Professor B: ***Reagem bem e há miúdos que são perfeitos, outros fazem tudo torto. A maior parte não, gosta de fazer tudo direitinho.***

(…)

Voltamos a falar na tarefa da p. 29.

Professora investigadora: *E esta tarefa não a fizeste?*

Professor B: Não. ***Eu até costumo usar as tarefas do livro, mas se vejo que os ajudam, uso, se vejo que os vais confundir vou perder tempo. E eu acho que esta forma de demonstrar a área do círculo para eles eu acho que não é a mais adequada. Está entre um valor e outro, mas daí até chegarmos à fórmula do círculo… Eu achei que era mais complicada para eles.***

Professora investigadora: *Então tu não a usaste por causa das perguntas, se calhar são demasiado dirigidas?*

Professor B: ***É assim. O que eu queria fazer aqui era dar a área do círculo. Esta aqui não me permitia chegar lá da forma que eu queria, mais rápido, e não sei até que ponto estas questões aqui, e não a propus, nem para casa, porque acho que para esta idade não ia chegar a nada, posso estar errada.***

(…)

Professora investigadora: *E o que que é que lhes passa ao lado? Principalmente, eu estou mais interessada em representações.*

Professor B: ***O que é que lhes passa ao lado? Aquilo que é demasiado elaborado, que eles não compreendem. Até são capazes de acompanhar um pouco, mas depois desligam e quando os questionamos nas aulas seguintes… eles só orientados é que lá chegam. Quando é algo muito elaborado que exige muito relacionamento…***

Professora investigadora: *E esta não achas?*

Professor B: ***Por isso é que te disse. Se eu lhes pedisse para fazerem a demonstração, eles não iam fazer quase de certeza, digo eu, mas o meu objetivo não era eles aprenderem a fazer a demonstração.***

Professora investigadora: *Mas imagina que não era a demonstração, que era só transformar isto num paralelogramo…*

Professor B: ***Se lhes desse o material? Eu acredito que eles o fizessem, talvez não todos, talvez alguns ficassem às aranhas, mas acredito que alguns o fizessem, transforma isto num paralelogramo… acredito que sim.***

Professora investigadora: *Com os traços. E se não tivesse os traços?*

Professor B: ***Mas se eu não lhes desse isto*** (aponta para o material que usou), ***eu acho que eles não eram capazes de imaginar o círculo dividido de maneira a poderem cortar e depois formar. Quase de certeza que não, quase de certeza que não.***

(...)

Professora investigadora: *E esta parte como a trabalhaste?*

Professor B: ***Com desenhos. Esta parte do ângulo ao centro trabalhei com desenhos.*** *(…)* ***Trabalho muito com desenhos.***

(...)

Professora investigadora: *Tu usas muito desenhos. Mas és tu que os fazes ou são eles?*

Professor B: ***Alguns sou eu, outros são eles.***

Professora investigadora: *Usas desenhos para explicares.*

Professor B: ***Também. Muitos.***

(...)

Professora investigadora: *Deste conta, aqui nesta matéria, de representações que tenhas usado noutros conteúdos?*

Professor B: ***De OTD acho que não, mas das outras sim, na simplificação de fórmulas. Geometria e medida… área do triângulo e do paralelogramo, eu estou sempre a pelar à matéria do ano passado. Lembram-se de termos falado nisto? A cada passo lhes digo isto, mas não me estou a lembrar.***

(…) ***Eu recorro sempre àquilo que eles deram.***

(…)

Professora investigadora: *Eles nisto não mexeram?* (Refiro-me ao material que o Professor B usou).

Professor B: ***Isto fui eu que mexi. Porque eles conseguiam fazer esta, mas depois este, já não conseguiam.***

Professora investigadora: *E porque é que não optaste por lhes dar este e eles recortavam?*

Professor B: ***Eu já estou tão atrasada! Não é por falta de vontade. Tu sabes quanto tempo eles iam demorar a recortar isto? Uma eternidade!***

Professora investigadora: *Há pouco disseste que usas muito desenhos para lhes explicares. E quando são eles a explicar-te a ti? Também usam desenhos?*

Professor B: ***Também. "Ó Professora, posso explicar uma coisa?" Eu digo-lhes: "Vai ao quadro.". E eles usam desenhos ou outra coisa qualquer.***

Professora investigadora: *E têm facilidades?*

Professor B: *Sim.*

Professora investigadora: *Não são renitentes. Não dizem, "Não sei desenhar."*

Professor B: *Às vezes dizem, mas eu digo-lhes "Deixa lá, os meus também não são melhores que os teus.".*

(…)

9.4.3. As representações matemáticas vistas pelo Professor B

O Professor B valoriza mais as representações simbólicas e gráficas. Gosta de trabalhar muito a linguagem simbólica. Diz aos alunos que a Matemática é uma linguagem como o Português, o Inglês e o Francês, só têm que aprender a ler os símbolos. O Professor B trabalha muito a linguagem simbólica traduzindo da linguagem natural para a linguagem simbólica. Quando se usa uma linguagem corrente tem uma tradução simbólica, que costuma fazer, assim como no sentido inverso. Também usa representações visuais principalmente para visualizar e aponta o mau funcionamento do quadro interativo como impeditivo de usar mais a visualização. Também não usa muito giz de cor, porque nem sempre está disponível. Às vezes ultrapassa este problema através de riscos mais ou menos espessos. O Professor B utiliza habitualmente as tarefas do livro. Gosta das tarefas iniciais e dos exercícios de consolidação, tanto dos mais simples como dos mais complexos. Na resolução de problemas, incentiva os alunos a usarem desenhos, a registar os dados e a perguntar o que querem saber. Falou de mal-entendidos que às vezes acontecem com os alunos. Dá como exemplo uma expressão que usa na resolução de problemas "O que é que eu sei?" e teve receio que os alunos entendessem que se estava mesmo a referir ao que ele sabia. Habitualmente cinge-se às representações que os exercícios sugerem. A representação que usa mais vezes é a simbólica, mas depende da situação, apesar de não estar relacionado com ser exercício de consolidação ou tarefa de introdução de matéria. Nunca limita os alunos na resolução, desde que esteja correto. Insiste que ninguém apaga o que tem, transmite aos colegas a estratégia seguida e discutem-na. O Professor B sente que os alunos têm dificuldade em verbalizar o que pensam. Esta dificuldade manifesta-se também na escrita. Quando eles têm uma ideia, há pensamentos que não registam e por vezes o Professor B tem dificuldade em perceber como pensaram. Quando num exercício aparece a tabela com menos linhas do que as necessárias, por vezes eles não as acrescentam. Por vezes os alunos têm dificuldade em desenhar e surpreendem-se quando não o conseguem, mas tentam fazer o melhor possível. Considera algumas representações visuais importantes para que os alunos percebam melhor a informação, mas também reconhece que por vezes limitam o seu desempenho, referindo-se especificamente ao caso do exercício que tinha uma tabela com uma linha e que os alunos não perceberam que podiam acrescentar mais linhas para continuarem a completá-la. Reconhece que muitas vezes os alunos pensam coisas diferentes do que as que ele pensava.

9.5. Professor C

9.5.1. Breve caracterização profissional do Professor C

O Professor C tem 29 anos de serviço docente no 2.º ciclo de escolaridade. Possui licenciatura com estágio integrado para a docência no grupo de recrutamento 230. Participou em formação específica para a Matemática no âmbito do Plano de Ação da Matemática durante dois anos letivos, em que pelo menos duas aulas por ano tiveram a presença da formadora e foram alvo de discussão e reflexão dentro do grupo de formação. Esteve envolvido neste projeto nos cinco anos em que foi implementado, tendo tido o apoio de um Professor Acompanhante para o Plano de Ação da Matemática. Durante dois anos letivos, os docentes de Matemática decidiram não adotar livro, por estar desajustado às orientações do programa em vigor (2007) utilizando os materiais disponibilizados pela DGIDC e construindo outros, nomeadamente instrumentos de avaliação e síntese dos conteúdos, em sede de grupo de docência.

9.5.2. Abordagem pedagógica e materiais usados pelo Professor C

O professor C começou a lecionar esta matéria a 3 de fevereiro e terminou a 17 de março (pouco mais de seis semanas). No âmbito deste tópico, o professor C utilizou as áreas do paralelogramo e do triângulo, utilizam a máquina de calcular para realizar os cálculos, a operação inversa nos exercícios em que é necessário calcular o apótema ou o perímetro, dada a área. Usou também conhecimentos de proporcionalidade direta. É a terceira vez que leciona esta matéria, assim com estas orientações. Habitualmente utiliza tecnologias durante a explicação. De uns anos para os outros mudou o recurso de abordagem. Este ano usou o vídeo, para ser diferente e os quadros interativos não estão a funcionar muito bem. Habitualmente os alunos trabalham em grupo, principalmente na

Geometria. Este ano utilizou muito os materiais da Escola Virtual. Neste tópico não utilizou material manipulativo. Das representações matemáticas, o Professor C utiliza esquemas (feito por ele ou pelos alunos) durante a exposição da matéria com desenhos e escrita. Exige a escrita da fórmula no início da resolução dos exercícios. Espontaneamente, os alunos não fazem desenhos, as tabelas são usadas na organização dos dados sobre raio, perímetro e área de um círculo para verificação, ou não, de proporcionalidade direta.

O Professor C utilizou o vídeo da Escola Virtual, tendo começado pela revisão da área do paralelogramo para os alunos verem a altura. No entanto, por vezes opta por realizar ele próprio as construções com o material do próprio quadro interativo. O Professor C utilizou o vídeo da escola Virtual para ensinar a reta tangente e considerou que é uma noção que os alunos aprendem e retêm com facilidade. Os polígonos inscritos e circunscritos foram abordados ao mesmo tempo e na mesma figura. A área de um polígono regular foi lecionada a partir da decomposição em triângulos, colocando-os lado a lado para construir um paralelogramo. O vídeo da Escola Virtual mostra esta decomposição do polígono regular em triângulos e posterior construção do paralelogramo. Reconhece que os alunos têm dificuldade em identificar a altura do paralelogramo, confundindo-a com um lado do paralelogramo. No ano anterior, fez a construção no quadro interativo. Utilizou os polígonos regulares inscritos com aumento do número de lados e comparação da área de cada polígono com o círculo., pela aproximação das suas áreas. Neste ano, decidiu utilizar o vídeo da Escola Virtual por ser muito claro. Ia parando a apresentação do vídeo para fazer algumas perguntas de consolidação ou para os chamar a atenção para determinado aspeto. Teve o cuidado de substituir o diâmetro por duas vezes o raio, para diminuir dificuldades relativas a essa substituição. Também recordou as propriedades da multiplicação (comutativa e associativa) para chegar à fórmula final. Fez várias paragens ao longo da apresentação do vídeo. Pensa que dois dos seus alunos conseguiriam reproduzir esta explicação, por serem muito trabalhadores e aplicados.

9.5.3. As representações matemáticas vistas pelo Professor C

Quando resolvem os exercícios, os alunos utilizam predominantemente o cálculo algébrico, utilizando por vezes, e apenas se solicitado, a decomposição de figuras. Apesar de o Professor C usar muitos esquemas e figuras na exposição dos assuntos, os alunos não as usam muito. Perguntei se achava que era por ser difícil para eles, mas ele considerou que escolhem a via mais fácil, e numericamente é mais fácil, apesar de apresentarem dificuldades na escrita matemática (ex. comboios de expressões e ocultação de valores na resolução das expressões). A representação que os alunos mais valorizam é a representação simbólica sendo também a que mais utilizam. O professor C reconhece que utilizar as três linguagens (simbólica, verbal e visual) no ensino e na aprendizagem requer preparação. Considera que só compreendemos melhor quando somos capazes de resolver de muitas formas diferentes, e também com linguagens diferentes. Também refere que hoje percebemos coisas que julgávamos que já sabíamos antes, mas efetivamente só agora as compreendemos. Não compreende por que razão os alunos consideram que as representações que se utilizam nas funções (diagrama, tabela, gráfico, expressão algébrica) são diferentes, quando, na realidade, os professores frisam várias vezes que são representações equivalentes.

Apêndice 3 – Narração Multimodal 3 (NM3) – Tarefa 'Polígonos e círculos'

1. Contexto

A turma é constituída por dezassete alunos com idades compreendidas entre os onze e os treze anos que frequentam o 6.º ano de escolaridade. Um dos alunos apresenta retenções anteriores. As aulas de Matemática decorrem numa sala normal de aulas como a sala da Figura 1, com uma frequência de quatro ou cinco aulas semanais, duas das quais são consecutivas.

Data: 22 de fevereiro de 20XX
Aulas n.º 93 (parte), aula de Apoio e n.º 94.
Sumário: Resolução da tarefa *Polígonos e círculos*
Horas de início das aulas: 10:40; 15:30; 8:15
Tempo da gravação: 1h39'29'' (9'29'' + 43'88'' + 46'16'')

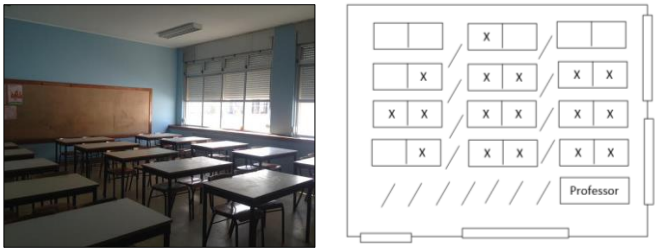


Figura 1: Sala onde decorreu a aula e planta da sala.

O domínio em lecionação foi "Geometria e Medida", o subdomínio "Medida - Área" e os conteúdos os seguintes: (i) Aproximação por perímetros de polígonos regulares inscritos e circunscritos, e (ii) Aproximação por áreas de polígonos regulares inscritos. Já tinham sido revistas as noções de círculo, circunferência, raio, corda e diâmetro, e lecionadas a fórmula para o perímetro do círculo, as noções de ângulo ao centro e de setor circular. Esta aula e esta tarefa, em particular, teve o objetivo didático de lecionar e distinguir polígonos inscritos numa circunferência e polígonos circunscritos a uma circunferência através da exploração do artefacto "representação visual" como preparação para a lecionação da fórmula para a área do círculo, prevista para o dia 7 de março. Antes disso, ainda iam aprender a calcular a área de um polígono regular com recurso à decomposição (tratamento visual) do polígono regular em triângulos geometricamente iguais e com um dos vértices no centro da circunferência e o seu rearranjo numa figura (paralelogramo) cuja fórmula para calcular a área era conhecida desde o ano letivo anterior. O intervalo temporal de aproximadamente 15 dias foi intencional, para identificar os conhecimentos e procedimentos a que os alunos iam recorrer aquando da exploração da fórmula da área do círculo. Pretendia tarefas em que os alunos pudessem explorar a realização de tratamentos visuais em representações visuais e noutros tipos de representações e que se apercebessem da eficácia desse uso na transmissão do seu pensamento e na busca da solução. Para o efeito, elaborei a tarefa "Polígonos e círculos" (Anexo 1), pois servia estes objetivos. Propus-lhes a sua resolução individual, mas coordenada por mim de forma a manter todos os alunos a responder às mesmas perguntas ao mesmo tempo. A resolução desta tarefa ocupou cerca de 10 minutos de uma aula, uma aula de apoio e as duas aulas seguintes. Na aula de apoio aula tive o apoio de um professor do meu grupo disciplinar, o que facilitou a vigilância individual dos trabalhos. Os alunos ocuparam os seus lugares habituais no espaço como se vê na Figura 1, o que me permitiu uma deslocação rápida entre os mesmos. O espaço por onde eu circulei durante a atividade encontra-se a tracejado na figura. Todos os nomes dos alunos são fictícios.

Esta narração é constituída por parte de uma aula e as duas aulas seguintes, sendo a aula do meio uma aula de apoio. Durante a aula de apoio estão presentes todos os alunos da turma. A tarefa começou a ser explorada durante a aula nº 93, continuou a ser explorada na aula de apoio e os alunos terminaram a tarefa na aula n.º 94.

Síntese da série de aulas

Os primeiros minutos da aula n.º 93 foram usados na entrada da sala de aula com o respetivo posicionamento habitual de cada um de nós, e na breve revisão da aula anterior com escrita do respetivo sumário. Liguei o gravador durante este tempo de revisão e escrita do sumário. Do diálogo decorrente durante a escrita do sumário, senti necessidade de consolidar noções várias como setor circular, ângulo ao centro, e reta tangente a uma circunferência. De seguida caracterizamos um polígono circunscrito a uma circunferência desenhando alguns exemplos. Seguiu-se a indicação do trabalho a realizar, distribuindo por cada um dos alunos o enunciado da tarefa policopiado, pedindo-lhes que o colassem no caderno. Elaborei a tarefa de forma a que os alunos adquirissem as noções de polígono inscrito numa circunferência e de polígono circunscrito a uma circunferência, e comparassem os perímetros e as áreas de todas as figuras (incluindo o círculo) por aproximação. Para que o fizessem induzi a realização de tratamentos visuais. O trabalho foi decorrendo e os alunos resolveram a tarefa sem grandes dificuldades, a não ser na correção da comunicação matemática de definições dos conceitos envolvidos e de destreza manual.

2. Descrição do Episódio

Aula n.º 93 + Aula de apoio **Duração: 9'29''+ 43'88''**

(Início: 32'17") A Teresa leu a primeira questão da tarefa (Anexo 1) (*Destaca as figuras que representam polígonos circunscritos a uma circunferência e cola-as no caderno*.). De seguida, entreguei uma folha com as figuras a cada um dos alunos (Figura 2).

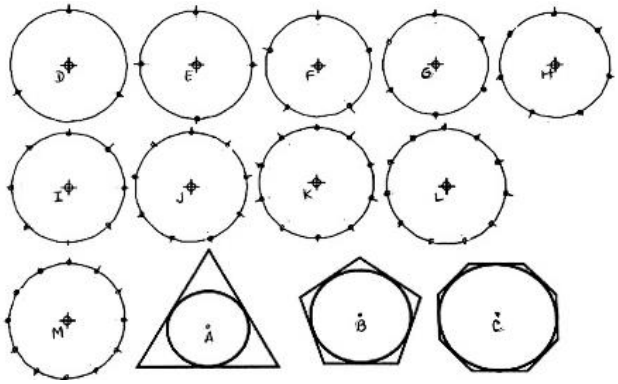


Figura 2: Figuras da tarefa

Solicitei à Teresa que me dissesse novamente o que precisávamos de fazer. Como foi capaz de reproduzir com exatidão, pedi-lhe para ler as alíneas da Q1. Ela leu-as. Enquanto acabei de distribuir as figuras pelos alunos, a Teresa identificou as figuras em causa (A, B e C), recortaram-nas e colaram-nas no caderno (Figura 3).

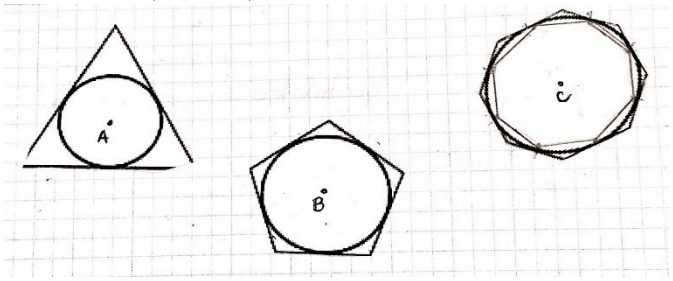


Figura 3: Colagem das figuras com polígonos circunscritos numa circunferência no caderno diário

Os alunos identificaram os polígonos (triângulo, pentágono e octógono) e justificaram que eram regulares (Figura 4, à esquerda). Começaram por justificar erradamente, mas o Fausto lembrou-se da justificação correta. Tocou para a saída (41'46'') e interrompemos.

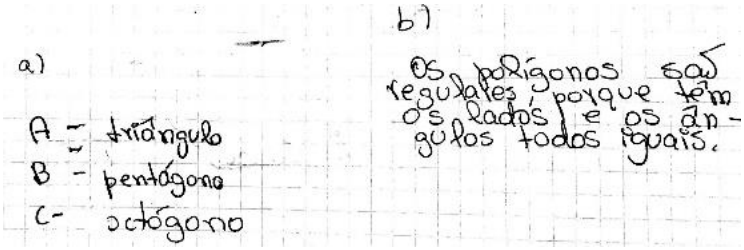


Figura 4: Respostas às questões 1.a) e 1.b)

Na aula seguinte continuamos no ponto em que tínhamos ficado. Durante esta aula, tivemos o apoio de outro professor. O Rui leu a segunda questão (*Compara o perímetro do polígono A com o perímetro do círculo do seu interior. Que observas? Compara o perímetro do polígono C com o perímetro do círculo do seu interior. Observas o mesmo?).* Antes que respondessem, certifiquei-me que sabiam o que queria dizer comparar (Comparar é dizer se é igual ou diferente, e se for diferente se é maior ou menor) e escreveram a resposta à questão no quadro negro e nos cadernos diários. De seguida,o Fausto leu a Q3, fizeram a comparação entre as figuras e o mesmo aluno elaborou a resposta. Nesta altura (50'10'') apercebemo-nos que não tínhamos respondido à alínea a) da Q2, de forma que lhe respondemos antes de escrever a resposta à Q3 (Figura 4).

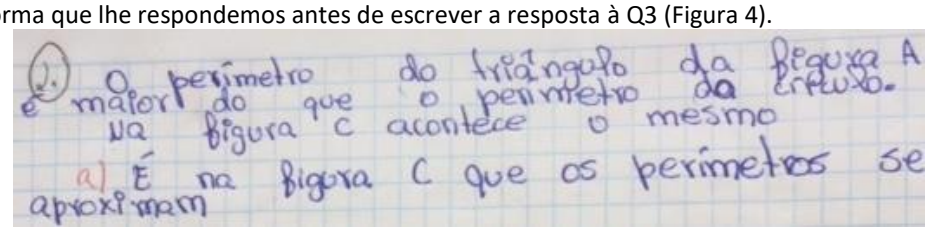


Figura 5: Resposta às questões 2. e 2.a)

Fui fazendo algumas questões supondo a mesma situação para polígonos com maior número de lados, chegando a concretizar com um polígono de 20 lados. O Jorge leu a alínea a) da Q3 e respondeu (Figura 5). Disse-lhe para elaborar a resposta, o que fez.

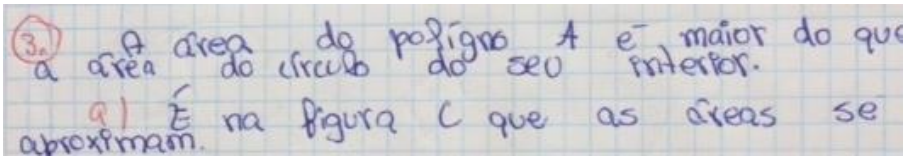


Figura 6: Resposta às questões 3. e 3.a)

Seguimos para a Q4 que a Anaísa leu. (53'20''). Ressaltei o facto de falarmos agora em polígonos inscritos. Revimos novamente a definição de polígono circunscrito a uma circunferência, relativamente à tangência dos lados e o seu significado (lado e círculo tocam-se num ponto) antes de definirmos polígono inscrito numa circunferência. Peguei no geoplano circular para concretizar a figura em causa, um polígono circunscrito. Depois desloquei o elástico que representava o polígono circunscrito e inscrevi-o na circunferência. Chamei a atenção dos alunos para os vértices do polígono e identificaram rapidamente que os vértices do polígono são pontos da circunferência, e definimos polígono inscrito na circunferência. De seguida, com a ajuda do geoplano, distinguimos polígono circunscrito a uma circunferência de polígono inscrito numa circunferência. Alterei o polígono inscrito para um triângulo (escaleno) e perguntei-lhes se continuava a ser um polígono inscrito. Depois alterei para um polígono com sete lados. Como quisessem saber o seu nome, identificámo-lo. Resolveram a Q4. Apesar de considerar importante que os alunos dividissem as circunferências em partes iguais, decidi não o fazer nesta altura para facilitar a tarefa e economizar tempo. Assim, marquei os vértices de todos os polígonos (de três a 12 lados) na circunferência respetiva. Durante este trabalho, o professor de apoio e eu, circulamos pela sala apoiando os alunos na realização do trabalho (exemplo na Figura 6) e fazendo algumas perguntas de consolidação. Durante este diálogo, os alunos definiram polígono inscrito como estando no interior da circunferência, o que não é condição suficiente para que seja inscrito. Exemplifiquei no quadro negro com um contraexemplo (Figura 7).

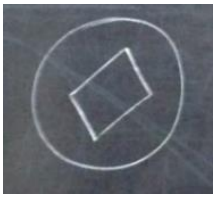


Figura **7**: Contraexemplo desenhado no quadro para consciencialização da imprecisão de linguagem na definição do conceito de polígono inscrito numa circunferência.

Os alunos mantiveram-se nesta atividade de construção, pintura, recorte, colagem (por ordem crescente de número de lados do polígono) e respetiva nomenclatura, até ao final da aula (exemplo na Figura 8).

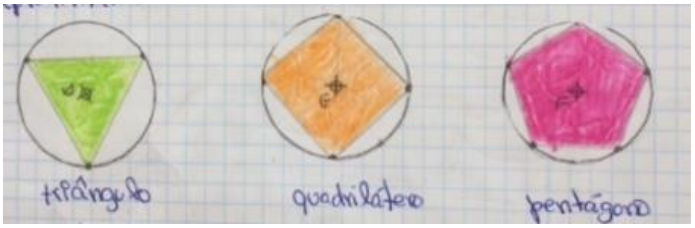


Figura **8**: Parte da resposta à questão 4.

Demoraram cerca de meia hora nesta atividade. Tenho notado que cada vez mais os alunos não têm destreza neste tipo de trabalho manual. Queixam-se do trabalho. Enquanto foram fazendo este trabalho, e porque vão perguntando, damos a nomenclatura aos polígonos de 10, 9, 11, n e 20 lados. Também vamos identificando características comuns aos polígonos, pois eu queria que me dissessem novamente que eram regulares e o que isso significava, consolidando essa noção. O professor de apoio e eu fomos circulando pelas carteiras, incentivando-os a realizar um trabalho rápido e perfeito. Apesar de muito agitados por ser a última aula do dia, certificamo-nos que todos os alunos colavam as figuras no caderno para que não comprometessem o trabalho na aula seguinte. Foram também evidentes as dificuldades de organização durante a colagem das figuras no caderno. Certifiquei-me, alertando-os várias vezes, de que os colavam por ordem crescente de número de lados. A minha intenção nesta insistência era que ficasse claro que quanto mais lados considerássemos no polígono, mais este se aproximava do círculo em que estava inscrito. Esta atividade pretendeu dotar os alunos da realização de um tratamento visual a uma representação visual com potencialidades para ser acionada numa nova atividade. Tinha esperança que o fizessem proximamente. Embora o tivesse feito propositadamente, tive o cuidado de não valorizar esta atividade mais do que qualquer outra para não os condicionar e não comprometer a espontaneidade da atividade seguinte, aquando da determinação da área de um círculo.

Aula n.º 94 **Duração: 46'16''**

Os primeiros sete minutos da aula foram usados na escrita do sumário da aula anterior e da preparação para a continuação da resolução da tarefa. Aguardamos um pouco pelos mais atrasados para que recomeçássemos juntos. A Celeste leu a Q5 que solicitava a comparação entre os perímetros dos polígonos I, D e M com o perímetro do círculo. O polígono I é um octógono, o da Figura D é um triângulo e o da Figura M é um dodecágono.

Duarte: ***O perímetro do I é menor do que o do M.***

Prof.: ***E é só no I? E no D?***

Duarte: ***Também*.**

Prof.: ***Também, e no M?***

Duarte: ***Também. Todas as figuras atrás do M são menores do que o círculo.***

Prof. O perímetro do círculo é sempre maior.

Belmira: ***Mas o M é o que está mais aproximado do perímetro do círculo.***

Peguei na participação da Belmira e do Duarte e generalizei para todas as figuras uma vez que os círculos são todos iguais. Dei razão ao Duarte e também à Belmira pedindo-lhe que elaborasse e escrevesse a resposta à questão 5 e 5.a) no quadro negro e depois no caderno diário (Figura 9).

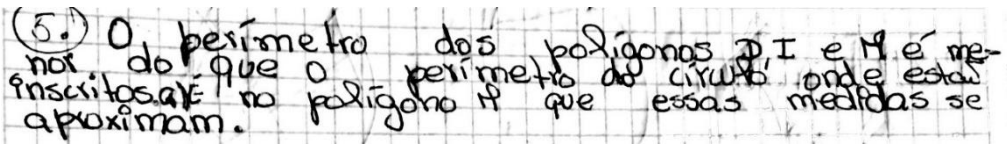


Figura **9**: Resposta às questões 5 e 5.a).

(14'35''). Na questão 6 teriam que fazer um raciocínio análogo para a área. Aproveitei estas duas questões para, mais uma vez, levar os alunos a distinguirem estas duas grandezas (perímetro e área), definindo ambas. Fizeram um raciocínio análogo e elaboraram a resposta que escreveram no quadro preto e nos cadernos. Resolvi pedir-lhes que não a apagassem na totalidade, mas substituíssem os termos necessários na frase que já estava escrita no quadro para o perímetro, adaptando-a à área. Elaboraram a resposta em conjunto e fizeram as substituições necessárias na resposta anterior.

Por fim, definiram polígono inscrito e polígono circunscrito a uma circunferência (Questão 7). Mais uma vez cometeram o mesmo erro de definir polígono inscrito numa circunferência como um polígono no interior da circunferência. Desenhei-lhes um contraexemplo (Figura 8) para que se apercebessem das imprecisões de linguagem, também relativa à inexatidão dos pontos, devendo dizer vértices.

As definições que escreveram para polígono inscrito numa circunferência e polígono circunscrito a uma circunferência encontram-se na Figura 10.

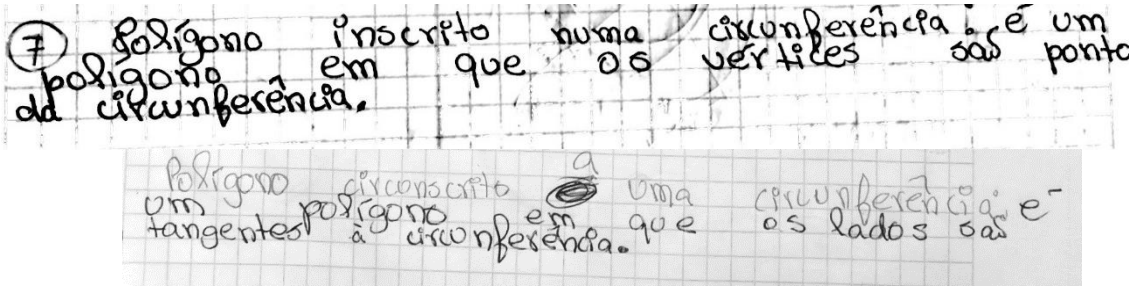


Figura **10**: Resposta à questão 7 da tarefa.

Para consolidar, ainda desenhei sete figuras no quadro para que identificassem as que representavam, ou não, polígonos inscritos (Figura 11 e Figura 12).

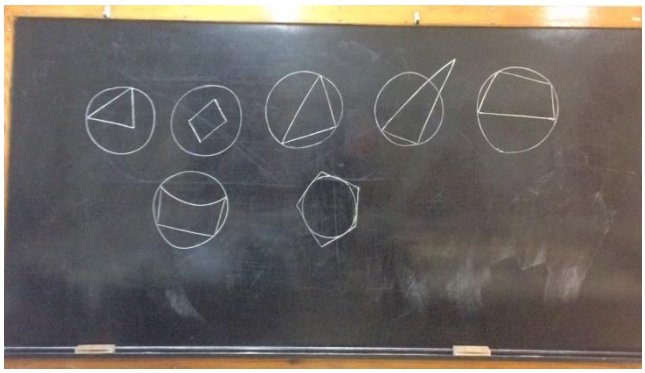


Figura 11: Figuras desenhadas no quadro preto para identificarem as que representavam, ou não, polígonos inscritos.

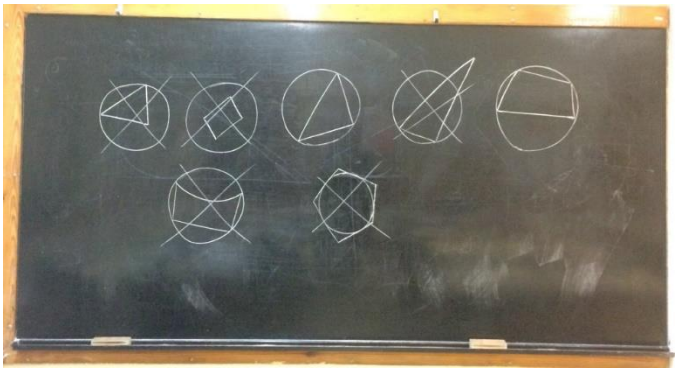


Figura **12**: Identificação das figuras que os alunos consideraram como inscritas num círculo.

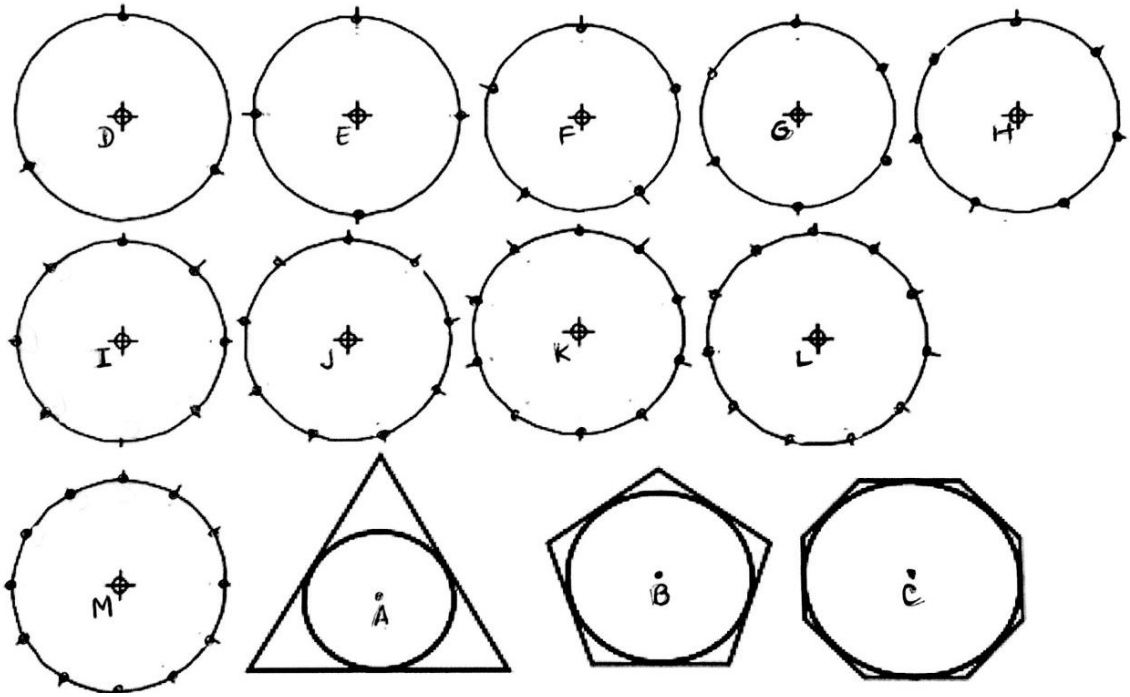
Nesta atividade foi notória a dificuldade de alguns alunos no desenho das figuras geométricas, mesmo em modo

esboço. Seguimos para a última questão: desenhar um octógono inscrito na figura C e comparar, entre eles, os perímetros e as áreas dos dois octógonos e do círculo. Fui circulando por todos os lugares para me assegurar que todos construíam o octógono corretamente. Muitos alunos tiveram dificuldade em desenhar o octógono. Enquanto faziam esse trabalho, íamos revendo algumas noções. Entretanto tocou para a saída e não houve tempo para responder à pergunta. Resolvi não o fazer na aula seguinte, por me parecer desnecessário depois deste trabalho.

ANEXO 1

Tarefa "Polígonos e círculos"

1) Destaca as figuras que representam **polígonos circunscritos a uma circunferência** e cola-as no caderno.
   a) **Identifica** cada um desses polígonos.
   b) Esses polígonos são **regulares**? Porquê?
2) **Compara** o ***perímetro do polígono*** A com o ***perímetro do círculo*** do seu interior. Que observas? Compara o perímetro do polígono C com o perímetro do círculo do seu interior. Observas o mesmo?
   a) Em qual deles se aproximarão a medida de perímetro do círculo e a medida de perímetro do polígono?
3) **Compara** a ***área do polígono*** A com a ***área do círculo*** do seu interior. Que observas? Compara a área do polígono C com a área do círculo do seu interior. Observas o mesmo?
   a) Em qual deles se aproximarão a medida de área do círculo e a medida de área do polígono?
4) Nas figuras restantes, desenha o **polígono inscrito numa circunferência**, recorta-as, cola-as no caderno e identifica-os.
5) Compara o perímetro dos polígonos D, I e M com o perímetro do círculo. Que observas?
   a) Em qual deles se aproximarão a medida do perímetro do círculo e a medida do perímetro do polígono?
6) Compara a área dos polígonos D, I e M com a área do círculo. Que observas?
7) Define **polígono inscrito numa circunferência** e **polígono circunscrito a uma circunferência**.
8) Na figura C, desenha um octógono inscrito na circunferência. Que podes dizer do perímetro e área dos dois octógonos e do círculo, em conjunto?



Apêndice 4 – Narração Multimodal 4 (NM4) – Área de um polígono regular

1. Contexto

A turma é constituída por dezassete alunos com idades compreendidas entre os onze e os treze anos. Um dos alunos apresenta retenções anteriores. As aulas de Matemática decorrem habitualmente numa sala normal de aulas como a sala da Figura 1, com uma frequência de quatro ou cinco aulas semanais, duas das quais são consecutivas.

Data: 7 e 8 de março de 20XX
Aula n.º 100 e 101
Sumário: Área de um polígono regular
Hora: 09:15 e 08:30
Tempo da gravação: 1h26'01'' (47'58'' + 38' 03'')

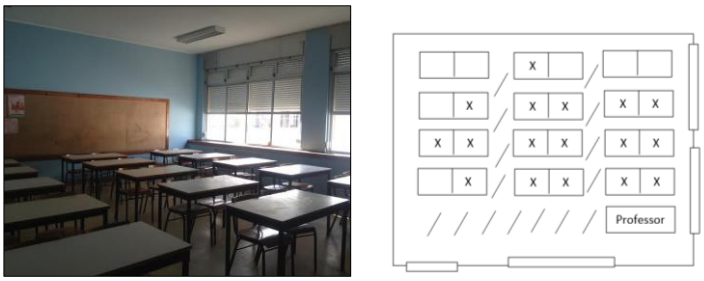


Figura **1**: Sala X onde decorreu a aula e planta da sala.

O domínio em lecionação foi "Geometria e Medida", o subdomínio "Área", e o conteúdo a Fórmula para a área de um polígono regular. Já tinha sido lecionado o apótema de um polígono regular inscrito numa circunferência. Pretendia uma tarefa em que os alunos pudessem aprender a área de um polígono regular através da realização de tratamentos visuais em representações visuais e outro tipo de representações. Para o efeito, revimos as fórmulas da área dos polígonos já aprendidos: retângulo (e o caso particular do quadrado), triângulo e paralelogramo, escrevendo-as no quadro preto. Ao mesmo tempo, revimos a forma como descobrimos as duas últimas recorrendo à decomposição ou rearranjo dessas figuras em retângulos. Pedi-lhes para desenharem no caderno diário um círculo com $raio = 4cm$. Forneci-lhes um octógono que pudessem inscrever no círculo. Propus-lhes a sua resolução individual, mas coordenada por mim, de forma a manter todos os alunos a fazer o mesmo trabalho. A resolução desta tarefa ocupou uma aula e parte da seguinte. Os alunos entraram na sala, manifestaram as suas queixas do momento e foram ocupando os seus lugares habituais no espaço como se vê na Figura 1. Lá se foram acalmando. O espaço por onde eu circulei durante a atividade, e que me permitia uma deslocação rápida entre os mesmos, encontra-se a tracejado na figura. Todos os nomes dos alunos são fictícios.

Esta narração é constituída por duas aulas consecutivas, as aulas n.º 100 e n.º 101. A tarefa começou a ser explorada durante a aula nº 100 e foi terminada na aula n.º 101.

2. Síntese da aula

Os primeiros oito minutos da aula foram usados na entrada da sala de aula e respetivo posicionamento habitual de cada um de nós, na minha tentativa para os acalmar, pois chegaram muito agitados, cansados e a queixar-se das aulas de Matemática serem sempre seguidas à aula de Educação Física, na breve revisão da aula anterior com escrita do respetivo sumário, e na indicação do trabalho que iriam desenvolver. Fizemos os tratamentos

visuais que pretendia que fizessem e que constaram da decomposição de um octógono em triângulos geometricamente iguais, e no rearranjo destes num paralelogramo. Mais tarde, o rearranjo deste num retângulo. Durante estas transformações de representações visuais, utilizamos a linguagem natural para comunicar uns com os outros e a linguagem simbólica para registar o que íamos fazendo e descobrindo. Terminámos com a descoberta da fórmula para calcular a área de um polígono regular, partindo de um paralelogramo e depois de um retângulo, escrevendo-a em linguagem simbólica e em linguagem natural.

3. Descrição do Episódio

Duração: 47'58''

(Início: 08'26"). Comecei por lhes perguntar o procedimento ou fórmula para calcular a área de um retângulo ($c \times l$), de seguida a área do quadrado, como um produto ($l \times l$) e como uma potência (l^2). Seguiu-se a fórmula da área do triângulo ($\frac{b \times h}{2}$), que foi aprendida através da área de metade de um retângulo e, por fim, a área de um paralelogramo ($b \times h$). Disse-lhes que lhes faltava aprender as fórmulas para a área de um polígono regular e para um círculo. Hoje vão aprender a área de um polígono regular. Continuava a ser difícil acalmá-los. Fi-los recordar a forma como rearranjamos o triângulo e o paralelogramo em retângulos (Figura 2).

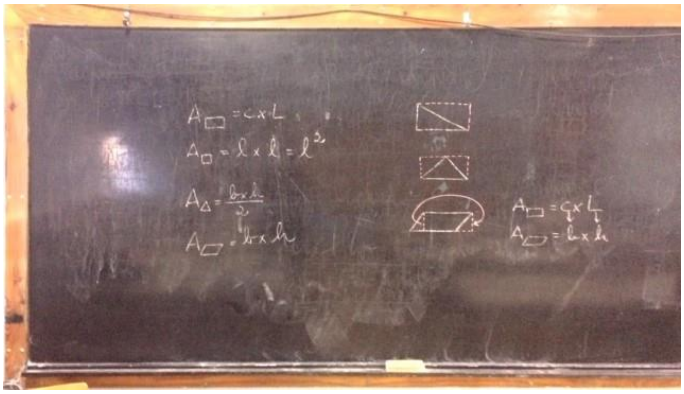


Figura **2**: Fotografia dos registos no quadro preto que fui fazendo durante esta introdução.

Daí passamos para o nosso assunto: Área de um polígono regular. **(11'31'').** Escrevemos o título no quadro e nos cadernos. Solicitei que me dissessem a definição de polígono regular, e de polígono. Entretanto, tive necessidade de esclarecer algumas dúvidas de organização a alguns alunos e de acalmar outros. Forneci-lhes um polígono regular (octógono) inscrito numa circunferência, e solicitei-lhes que o recortassem, pela fronteira do polígono. Levaram algum tempo a fazê-lo. De seguida, pedi-lhes que o colassem no caderno e o inscrevessem num círculo. O Duarte utilizou logo a nomenclatura correta:

(19'50'') Duarte: Professora, isto aqui é um polígono inscrito.

Tiveram dificuldade em fazê-lo, uns porque os respetivos compassos não estavam nas devidas condições, outros porque a destreza não era suficiente. Depois, pedi-lhes que dividissem o octógono em triângulos geometricamente iguais. Perguntei-lhes quantos seriam, respondendo que seriam oito. Aos poucos, lá foram terminando. Pedi-lhes para traçarem os apótemas do octógono, pedindo-lhes para o fazer com perfeição. A Belmira disse como o fazer e sugeriu fazê-los a tracejado.

Belmira: Professora, já está.

Ouvem-se vários alunos a dizer: É assim, não é? E outros: Ó professora, como é que se faz isto?

Prof.: Quem tem mais área, o polígono que colaram ou todos os triângulos?

Prof.: Agora, ides traçar os apótemas desse octógono. Tem que ficar direitinho.

Belmira: Isso é fácil. Aqui no triângulo, a meio.

A Letícia teve dúvidas e esclareci-a relativamente ao apótema. Orientei-a no trabalho e pareceu que tinha percebido. Dirigi-me a outro aluno, verificando que o trabalho não estava correto e responsabilizando-o por este facto. Tive que separar dois alunos para que não se distraíssem um com o outro. Aos poucos, foram terminando (Figura 3) e criticando o trabalho que iam fazendo, uns mais perfeitos, outros menos.

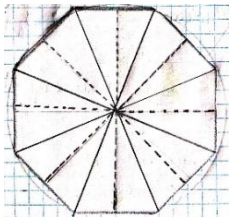


Figura **3**: Octógono dividido em oito triângulos geometricamente iguais com marcação dos apótemas, a tracejado.

(30'50''). De seguida, dei-lhes uma nova figura igual à primeira, pedi-lhes que recortassem o octógono, desenhassem todos os triângulos e os recortassem, separando-os uns dos outros. Perguntei-lhes novamente:

(35'01'') Prof.: Quem tem mais área, o polígono que vocês colaram ou aqueles triângulos todos?

Responderam que teriam a mesma área e relembramos o nome de figuras com a mesma área (figuras equivalentes). Perguntaram o que faziam com os triângulos. De seguida, pedi-lhes que arranjassem uma maneira de fazer um retângulo com os triângulos. Ainda disse que podia ser também um paralelogramo. Não conseguiram fazer um retângulo, fizeram um paralelogramo. Estava preparada para a possibilidade de um aluno fazer outra figura diferente (como aconteceu em que um aluno fez um triângulo e teve de ser chamado à atenção) ou perder algum das peças.

Tinha esperança que se lembrassem de recortar um dos triângulos pela sua altura e o deslocassem para o outro extremo de forma a fazer um retângulo. Foram descobrindo que teriam de colar os triângulos um para baixo e outro para cima. A Belmira disse ter feito um paralelogramo. Tiveram dificuldades em ajustar os triângulos de forma a fazer o paralelogramo direito. Certifiquei-me que todos tinham colado os triângulos, de forma a não comprometer o trabalho seguinte (Figura 4).

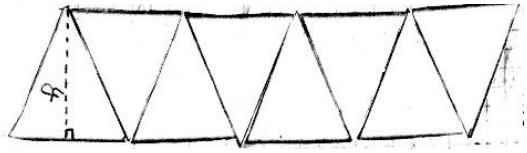


Figura **4**: Triângulos provenientes da decomposição do octógono e rearranjo num paralelogramo.

Aula seguinte

Duração: 38'03''

Iniciamos a aula revendo o trabalho realizado na aula anterior.

(2':31'') Fausto: ***Estivemos a dividir o octógono em triângulos***...

Belmira: ***…e a descobrir os apótemas.***

Prof.: ***Marcamos os apótemas, e depois?***

Teresa: ***Depois a Sra Professora deu-nos outro, fizemos na mesma os triângulos, a recortar e depois com esses triângulos fazer um retângulo ou um paralelogramo…***

Belmira: ***…e ver se a área seria a mesma.***

Prof.: ***Exatamente, ficamos mesmo aí. (…)***

Belarmina: ***Ó Stôra, dá para fazer um retângulo?***

Uns alunos responderam que sim, outros que não e eu disse-lhe que íamos tentar.

Escrevi no quadro preto: *O que podemos dizer do octógono e do paralelogramo*?

Prof.: ***Então, digam lá. O que podem dizer do octógono e do paralelogramo que têm à frente?***

Duarte: ***São perpendiculares, são iguais.***

Resolvi ignorar a palavra perpendiculares, porque este aluno utiliza mal as palavras com frequência, procedendo à sua correção (outras vezes sou eu que o faço).

Prof.: ***São iguais, porque é que é igual?***

Duarte: ***São iguais, porquê?***

Duarte: ***Porque se nós dividirmos o…***

Mais uma vez este aluno não se lembrou do termo correto, e eu lembrei-lho.

Prof.: ***o octógono***

Duarte: ***o octógono em (o aluno conta as partes) oito partes…***

Prof.: ***Oito triângulos, oito partes…***

Prof: ***Vamos fazer um paralelogramo. Nós pegamos nessas mesmas partes para fazer um paralelogramo. Por isso chegamos à conclusão que as duas figuras têm a mesma…***
Duarte: área
Prof.: ***…pronto, ocupam o mesmo espaço. E é verdade.***
Prof.: ***Então o que podemos dizer do octógono e do paralelogramo?***
Prof.: ***São figuras quê? Como é que se chamam as figuras que têm a mesma área?***
Belmira: ***São iguais… São equivalentes.***
Duarte: ***Pois é… Eu pensava que equivalentes era para as frações.***
Prof.: ***Também. Têm o mesmo valor e aqui as figuras têm a mesma área.***
Duarte: ***Pois é!!!***

Completamos a resposta no quadro preto e nos cadernos diários.

Prof.: ***E vocês já sabem determinar a área de um paralelogramo, não sabem? Como é?***

Demoraram algum tempo a escolher os termos adequados – base e altura. Como não se lembrassem da fórmula, pedi-lhes que transformassem o paralelogramo num retângulo.

Prof.: ***Como é que fazemos?***

Lembraram-se de como tínhamos feito no ano anterior e fizemos o seguinte esquema, à medida que iam dizendo como fazer:

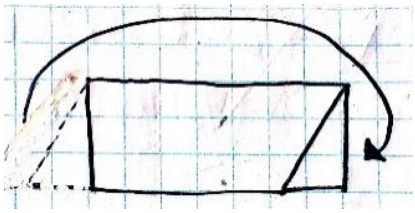


Figura **5**: Rearranjo do paralelogramo num retângulo

Identificamos os elementos do retângulo (comprimento e largura) e os elementos do paralelogramo (base e altura), e estabelecemos a relação entre elas (o comprimento do retângulo é igual à base do paralelogramo; a largura do retângulo é igual à altura do paralelogramo).

De seguida, pedi-lhes para fazerem um paralelo entre os elementos do paralelogramo e os do octógono, para deduzirmos a fórmula.

Duarte: ***E nós, não podemos meter no paralelogramo, como é igual, não podemos meter comprimento vezes largura?*** Disse-lhe que sim, mas teria que ter muito cuidado a escolher a "largura" pois esta teria que ser perpendicular à base. A meio da explicação já dizia "Já percebi".

Disse-lhes para arranjarmos uma maneira de passarmos de uma das fórmulas (da área do retângulo ou do paralelogramo) para a fórmula da área do octógono regular. E que escolhessem partir da figura cuja fórmula fosse mais simples para eles.

Pedi-lhes para começarem pelo paralelogramo. Selecionamos a altura do paralelogramo. Mediram-na, mas deu valores algo distintos. Verificamos que alguns estavam a medir o lado do paralelogramo e não a base. Acertámos a medida (3,5 cm). Pedi-lhes para a tracejarem. Os alunos traçaram-na em diferentes locais no paralelogramo, mas em todos eles perpendicular à base. Foquei-os num dos triângulos do polígono e identificaram a mesma medida no apótema.

Estabelecemos já que a altura do paralelogramo correspondia ao apótema do polígono regular. Durante esta discussão, dois alunos disseram ainda não saber o que era o apótema. Logo outros se disponibilizaram para explicar, e outros disseram saber o que é, mas não ser capaz de explicar. Esclareci eu a situação. Distinguimos o apótema do lado do triângulo que corresponde ao raio do círculo onde o polígono está inscrito. Depois destes esclarecimentos, sintetizamos, escrevendo no quadro o seguinte esquema (Figura 6).

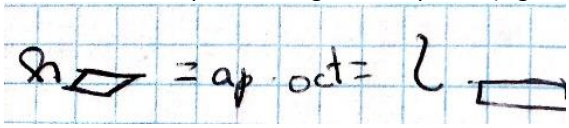


Figura **6**: Esquema para relacionar as medidas (altura, apótema e largura) respetivamente entre as três figuras (paralelogramo, octógono e retângulo).

Durante este trabalho, houve necessidade de consolidar e esclarecer algumas dúvidas que alguns alunos apresentaram. Depois de tudo esclarecido, pedi para encontrarem no octógono uma medida que fosse igual ao comprimento do retângulo que já sabíamos ser igual à base do paralelogramo. Disseram algumas medidas, mas

não estavam a chegar à resposta correta. Incentivei-os a estar atentos porque já estavam perto da resposta. Revimos novamente o que tínhamos feito e o que tínhamos descoberto. Confirmaram que essas medidas eram iguais a metade do perímetro do octógono.

Prof.: ***Então como podemos escrever metade do perímetro?***

Duarte: ***Perímetro a dividir por dois (23'26'')***

Prof.: ***Não escrevam já. Vamos com calma. Área do paralelogramo. Como se calcula a área do paralelogramo?***

Vários alunos: ***Base x altura.***

Prof.*: E nós sabemos que a área do paralelogramo é igual à área do polígono regular.* Escrevo o seguinte esquema no quadro preto (Figura 7).

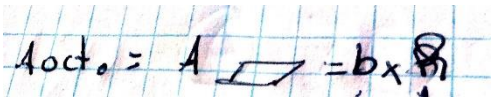


Figura **7**: Relação de igualdade entre as áreas do octógono e do paralelogramo construído (Fig. 4).

Prof.: ***Nós sabemos que a altura é igual a…***

Duarte: largura.

Prof.: Não.

Vários alunos: ***… apótema.***

Prof.: ***e estivemos a ver que a base***

Belmira: ***…é igual a metade do perímetro da figura.***

Duarte: ***Isso já sabíamos***

Prof.: ***Então, agora olhem para aqui. Nós aqui tínhamos a fórmula do paralelogramo, que era base x altura. Substituímos a altura pelo apótema, a base pelo semiperímetro. É outra maneira de dizer metade do perímetro, e ficamos a saber como determinar a área do octógono. Já aqui têm a fórmula***. (Acompanho com a escrita do esquema da Figura 8).

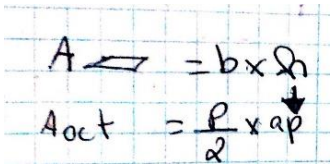


Figura **8** : Paralelo entra as fórmulas do paralelogramo e do octógono, visto serem figuras equivalentes.

Fausto*: Aaaaahhhh*

Prof.: Estão a ver como a descobriram?

Isaura: É essa a fórmula?! **(25'50'')**

Em coro, alguns alunos revêm a fórmula e querem passar para o caderno. Digo-lhes que vou apagar para repetir. Repetimos novamente e depois fizemos um trabalho semelhante com a fórmula do retângulo (Figura 9).

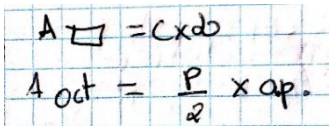


Figura **9**: Paralelo entra as fórmulas do retângulo e do octógono, visto serem figuras equivalentes.

Por fim, escrevemos em linguagem materna (Figura 10).

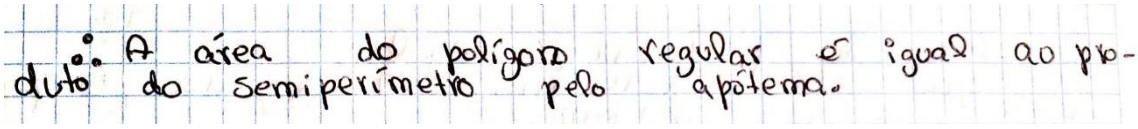


Figura **10:** Escrita da fórmula da área de um polígono regular em linguagem natural.

Utilizamos os últimos minutos da aula com exercícios de aplicação sobre a área de polígonos regulares.

Apêndice 5 – Narração Multimodal 5 (NM5) – Área do círculo

10. Contexto

A turma é constituída por dezassete alunos com idades compreendidas entre os onze e os treze anos. Um dos alunos apresenta retenções anteriores e, com outro colega, apresenta uma assiduidade irregular. As aulas de Matemática decorrem habitualmente numa sala normal de aulas como a sala da Figura 1, com uma frequência de quatro ou cinco aulas semanais, duas das quais são consecutivas.

Data: 10 de março de 20XX
Aula n.º 104+105+106+107
Sumário: Resolução de um problema para calcular a área de um círculo.
Hora de início das aulas: 9:15h; 10:40h; 15:30; 8:15h)
Tempo da gravação: 2h10'03''
(26'09''+28'11''+40'11''+36'00'')

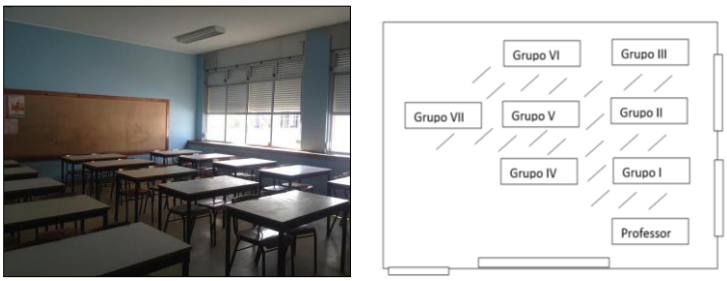


Figura **1**: Sala X onde decorreu uma das aulas e planta da sala.

O domínio em lecionação foi "Geometria e Medida", o subdomínio "Área" e o conteúdo, a fórmula para a área do círculo. Era o último sub-conteúdo deste conteúdo a ser lecionado.
Pretendia uma tarefa em que os alunos pudessem, se assim o entendessem, explorar a realização de tratamentos visuais em representações visuais e outro tipo de representações. Para o efeito, elaborei o seguinte problema (Figura 2), pois servia estes objetivos.

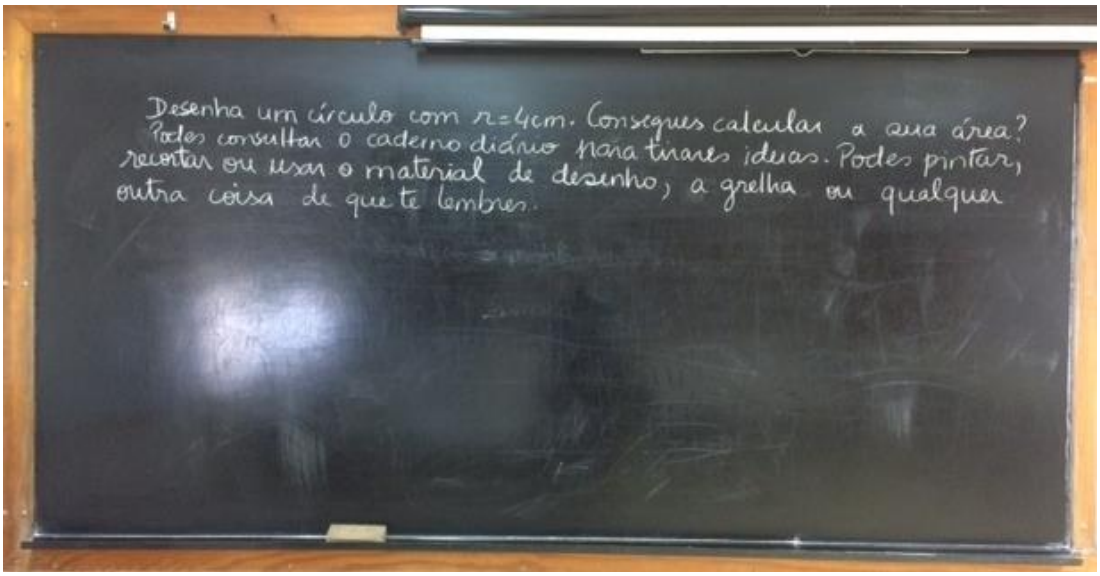


Figura **2**: Problema a resolver.

Propus-lhes a sua resolução individual, o que não foi do seu agrado. Preferiram resolver a tarefa em grupo. Concordamos que a realizassem em pares. Como faltaram dois alunos na primeira aula, formaram-se sete

grupos: seis com dois elementos cada, e um com três. Os alunos não tiveram de fazer grandes deslocações para se agruparem pois, como as mesas são duplas, trabalharam com o seu parceiro de carteira. Os grupos foram distribuídos pelo espaço como se vê na planta da Figura 1, o que me permite uma deslocação rápida entre os mesmos. O espaço por onde eu circulei durante a atividade encontra-se a tracejado na mesma planta. Todos os nomes dos alunos são fictícios.

Esta narração multimodal é constituída por uma série de quatro aulas que a turma precisou para resolver o problema da Figura 2. A tarefa começou a ser explorada durante a aula nº 104 e ocupou as três aulas seguintes. Foi na aula n.º 107 que os grupos começaram a terminar a tarefa. Nada mais foi feito nestas aulas além desta tarefa. A gravação não englobou a organização relativa à formação dos grupos, porque inadvertidamente apaguei essa parte. Inicia-se assim com a indicação do trabalho que iriam desenvolver. A diferença entre a duração da aula e o tempo de gravação deve-se ao tempo necessário para fotografar os trabalhos de cada grupo com os alunos. Como fotografar o trabalho dos sete grupos demorou algum tempo em todas as aulas e os alunos não podiam alterar nada nos materiais antes da fotografia, a atividade utilizou efetivamente cerca de duas aulas.

11. Síntese da série de aulas

Decidi fornecer a medida do raio para poder verificar rapidamente se os valores encontrados pelos alunos eram, ou não, aceitáveis e para podermos comparar os valores encontrados por cada grupo no final da atividade, aquando da discussão coletiva. Era uma tarefa que, apesar de aparentemente fechada, lhes dava liberdade tanto de exploração como de resposta uma vez que desconheciam o procedimento para calcular a área do círculo, permitindo por isso diferentes formas de atingir o resultado ou a solução. Os alunos teriam que mobilizar os conhecimentos adquiridos anteriormente para lhe responder. O leque de resolução era relativamente aberto, mas eu tinha esperança que utilizassem os tratamentos visuais que tínhamos explorados em aulas anteriores (ver NM2 e NM3). Houve leitura discente do problema e distribuí as folhas quadriculadas, lisas, as grelhas e disponibilizei os geoplanos para quem quisesse. A minha intenção ao utilizar os geoplanos foi libertá-los da tarefa de desenhar, o que podia ser difícil de conseguir e, ao mesmo tempo, proporcionar material manipulativo de suporte ao seu raciocínio e visualização. O trabalho foi decorrendo e eu, ora visitava um grupo ora visitava outro, inteirando-me do ponto de situação em que se encontravam e verificando a correção das respostas, nos registos individuais ou solicitando-o verbalmente. A Tabela 1 indica a constituição dos grupos.

Tabela **1**: Constituição dos grupos

Grupo	Constituição
I	Anaísa e Letícia
II	Dinis e Duarte
III	Belmira e Bela
IV	Fábio, Jorge e Filipe
V	Isaura e Fausto
VI	Teresa, Rui e Jerónimo
VII	Madalena, Daniel e Celeste

Os alunos com uma assiduidade irregular (Fábio e Jerónimo) faltaram na primeira aula e, para recuperarem o que tinham perdido, resolvi integrá-los nos seus grupos habituais na esperança de que o trabalho realizado pelos colegas os motivasse. O que se verificou foi que o trabalho produtivo diminuiu (Ver trabalho dos Grupos IV e VI). Pouco depois da leitura da tarefa, já todos os grupos tinham decidido como iam pegar no problema. Classifiquei as estratégias em dois grupos: (i) Decomposição e rearranjo de figuras - um grupo decidiu inscrever um polígono de muito lados no círculo para o dividir em triângulos, recortar e rearranjá-lo num paralelogramo, podendo assim calcular a sua área; (ii) Aproximação de áreas do círculo por áreas de polígonos inscritos, circunscrito ou ambos - os restantes seis grupos decidiram inscrever ou circunscrever o círculo num polígono, figura cujo procedimento para calcular a área era também já conhecido. Embora pareça que estes grupos tivessem utilizado a mesma estratégia, em determinada altura do seu trabalho, progrediram para caminhos diferentes. Em determinadas alturas do seu trabalho, os grupos perderam-se a ponto de não saberem o que fazer de seguida e, noutras alturas,

sabiam exatamente o que fazer, mas não sabiam como. Na última aula, os alunos escreveram um relatório indicando a estratégia seguida para calcular a área do círculo e os resultados a que chegaram. A escrita desse relatório serviu de apoio à sua apresentação na aula de discussão dos resultados (ver NM5), mas também deu tempo aos grupos IV e VI de terminar o seu trabalho. Para facilitar essa apresentação, elaborei um documento em PowerPoint para poder projetar os trabalhos de cada grupo e melhor serem vistos pelos colegas. Nesse documento de apresentação, faltaram os registos finais de dois grupos (grupos IV e VI), porque os tinham terminado nesse dia. No entanto, disseram a que resultados tinham chegado. Embora já o tivesse feito em cada grupo, terminamos a série de aulas com a comparação dos valores encontrados por todos os grupos, seguida da dedução da fórmula para a área do círculo partindo do polígono regular, a sua aplicação nesse círculo e a apreciação da estimativa feita por cada par ou grupo de alunos.

Esta narração multimodal narra três episódios. O primeiro refere-se a todo o trabalho feito pelos pares/grupos acompanhados ocasionalmente pela professora na obtenção de um valor aproximado para a área do círculo – Aulas n.º 104 e 105. O segundo refere-se ao trabalho posterior a este para a descoberta da fórmula para calcular a área do círculo – Aula 106 e 107. O terceiro narra o término dos trabalhos dos Grupos IV e VI e escrita dos relatórios de todos os grupos. A gravação desta última parte (cerca de 20 minutos) está na maioria inaudível.

12. Descrição de episódios

12.1. Episódio 1 – Constituído por duas aulas (n.º 104 e 105) e descreve as estratégias seguidas por cada par/grupo de alunos na determinação de um valor aproximado para a área do círculo de raio 4 cm.

Aula n.º 104

Duração da gravação: 26'09"

(Início: 00'00") A Belmira lê o problema (Figura 2) em voz alta. Certifiquei-me que percebiam o que tinham de fazer. Disseram ter de desenhar um círculo e calcular a sua área. A gravação desta primeira parte da aula (13'54'') é confusa. Não transportei o gravador, porque tive de sair da sala para ir buscar mais geoplanos. Regressei aos 6' de gravação e, como me fizeram perguntas mal entrei na sala, esqueci-me de transportar o gravador. Os alunos do Grupo III chamaram-me para confirmar o que tinham feito, dizendo que não sabiam o que fazer de seguida. Confirmei o objetivo: arranjar uma maneira de descobrir a área do círculo que forneci. Vários grupos queriam confirmar comigo a sua estratégia (Grupos II, III e V), chamando todos ao mesmo tempo. O Grupo VII aborrece-se porque o compasso não funciona bem. Entretanto uma aluna encontra um parafuso no chão, o que serve de distração durante uns momentos. Confirmo o que têm de fazer e a liberdade para o fazer da maneira que achassem melhor. Entretanto, já alguns grupos estavam a calcular a área do quadrado que tinham circunscrito ao círculo. Alunos do mesmo grupo tinham encontrado valores diferentes para a área do quadrado circunscrito, o que levou a desentendimentos, por exemplo no Grupo VI. Uma das alunas do Grupo III confirma comigo o desenho do quadrado que circunscreveu. Um aluno do Grupo II pergunta se o pode dividir em triângulos. Nesta altura apercebi-me de que não transportava o gravador e fui buscá-lo. **(13'50'').** Até esta altura, já todos os grupos tinham decidido como iam pegar no problema: um grupo decidiu inscrever um polígono de muito lados no círculo para o dividir em triângulos, todos com um dos vértices no centro do círculo, recortar e rearranjá-lo num paralelogramo, podendo assim calcular a sua área; os restantes grupos decidiram inscrever ou circunscrever o círculo num polígono, figura cujo procedimento para calcular a área era já conhecido (Ver NM3).

(13'50'') Prof.: ***E que vão fazer mais?*** Pergunto para o Grupo V.

Duarte: ***Professora, Professora, eu posso dividir em triângulos, não posso?*** Perguntam de outro grupo.

Como demorassem a responder à minha pergunta, lembro-lhes o objetivo que pretendem atingir.

Isaura***: Temos que primeiro saber a área do quadrado.***

Francisco***: Dá 64.***

Prof.***: Podem já escrever aqui. Área do quadrado igual a 64.*** Aguardo que escrevam. ***E agora?***

Como não respondessem, pergunto:

Prof.***: E o círculo? Tem maior ou menor área que 64?***

Isaura***: Menor.***

Prof. Então já podem escrever isso: Área do círculo é menor que 64. *Escrevem.* ***E agora?*** (Silêncio). ***Vejam lá se descobrem outra maneira. Sabemos que é menor do que 64, mas pode***

ser 63, 62, 61, 60, 50, 20… vejam lá se arranjam uma maneira de ver… o contrário. Ela é mais pequenina do que esta, mas é maior do que outra. Vejam lá se descobrem outra. Têm aqui um quadrado.

Isaura: Sim.

Prof.: Vamos continuar a usar quadrados.

Isaura*: Sim. Temos que fazer aqui um círculo, ou inscrever aqui outro.*

Prof.*: Experimentem. Tentem fazer isso muito direitinho, está bem? Como é que vão fazer? Tem que ser um quadrado. Tem que ter os lados todos iguais. Experimenta. Procurai o sítio certo.*

Isaura*: Sim.*

[Nota: Os alunos já tinham desenhado o círculo e um quadrado circunscrito a esse círculo. Como não soubessem o que fazer de seguida, procurei que descobrissem a área do círculo por enquadramento. Para isso teriam de desenhar outro quadrado inscrito no círculo. Os dois quadrados, um circunscrito e outro inscrito podem ver-se na Figura 3.] Deixo-os a trabalhar e aproximo-me do Grupo VI.

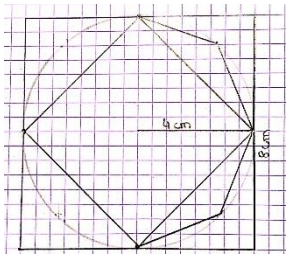


Figura **3**: Quadrado inscrito numa circunferência e quadrado circunscrito a uma circunferência (Grupo V)

(15'51'') Prof.*: Rui e Teresa, qual é a vossa dúvida?*

Teresa*: Vá, diz tu, que chamaste a professora.*

Rui*: Eu ia pedir à Professora para me ajudar a fazer isto. Ela fez tudo torto.*

Teresa*: O meu compasso não dá.*

Prof.*: Diz o quê? Qual é a vossa ideia?*

Rui*: Como assim?*

Teresa*: Como isto mede tudo 4 cm, podemos fazer 4 x 4…*

Prof.*: 4 x 4, mas dá-vos a área do quê?*

Rui*: para que é que é…*

Teresa*: Do quadrado.*

Prof.*: Do quadrado, e vocês querem a área do círculo. Como é que vão descobrir a área do círculo?*

Rui*: Está tudo torto! Valha-me Deus!*

Prof.*: Anda lá.*

Teresa*: Então, 4 + 4 dá 8; e aqui 4 + 4 também dá 8* (Ver Figura 4)***.***

Prof.*: Sim.*

Teresa*: 8 x 8…*

Prof.*: 64. Dá a área do quadrado. Escreve lá em cima. Área do quadrado igual a 64.*

Prof*: Quê?* (Referindo-me às unidades de medida). **Pronto, e agora? Mas tu não queres a área do quadrado, tu queres a área do círculo. Como é que vais descobrir? Falta aqui um 2. Vejam lá se arranjam uma maneira. Olha, Rui! Ora vê lá. Pensai os dois.**

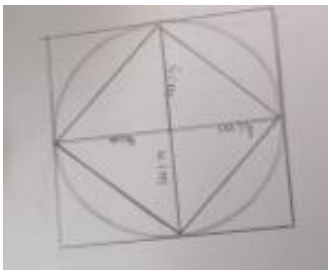


Figura **4**: Trabalho do Grupo VI

Deixo-os a pensar e aproximo-me do Grupo II. Inteiro-me sobre o que estão a fazer. Na passagem pelo Grupo IV, o Jorge diz-me que não sabem o que vão fazer agora. Como o seu parceiro se mostrou muito indignado, segui para o Grupo II.

Duarte: Mostrando o seu desenho (Figura 5). ***Sobra um bocadinho.***

Prof.: ***Não interessa. Mas faz de conta que está tudo direitinho. Como é que vais fazer?***

Resolvemos um problema de indisciplina entre três alunos. (…)

Prof.: ***Continua. E depois como é que vais fazer?***

Duarte: ***Dividir em triângulos.***

Prof.: ***Então vá. Anda lá. E tu acabaste por fazer como ele, foi?*** (pergunto ao par, o David).

David: ***Só que eu vou fazer mais pequeno.***

Duarte: ***Ele vai fazer por apótemas.***

(17'40') David: *Eu quero fazer… Eu quero ver se dá para fazer com apótemas.*

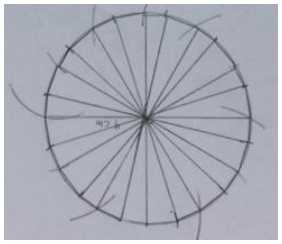


Figura **5**: Trabalho do Grupo II

Prof.: ***Então vá. Experimenta.***

Dirijo-me ao Grupo II.

Bela: ***Stôra, vamos fazer…***

Belmira: ***Acabamos por fazer 8 x 8 que é igual a 64. Agora temos de descobrir a medida do círculo.***

Prof.: ***Escreve o mesmo que ela, está bem?*** (Dirijo-me à parceira, a Bela e vejo o seu trabalho – Figura 6.)

Bela: ***Escrevo área também?***

Prof.: ***Sim. Área de quem?***

Bela e Belarmina: ***Do quadrado.***

Prof.: Então escrevam. ***E como é que vão fazer isso?***

Belmira: ***Olha, por acaso, não sei.***

Prof.: ***Vejam lá se descobrem uma maneira.***

Bela: ***Temos que fazer… 64…***

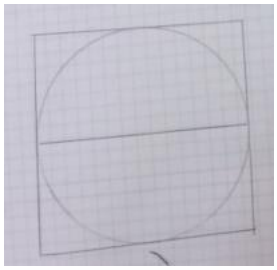


Figura **6**: Trabalho do Grupo II

Belmira: ***Nós temos o perímetro... Espera, espera… Nós temos a área.... Espere aí. Isto tem que ver com aquelas coisas que a Professora está a dizer. O P a dividir por 2… A área…***

Prof.: ***Vão ver ao caderno como fizeram de outras vezes… ver se têm ideias…***

Abandono-as e aproximo-me do Grupo I.

Prof.: ***Letícia, digam.***

Letícia: ***Perímetro a dividir por 2…***

Prof.: ***Deixa-me ver. Deixa-me ver…***

Prof.: ***A dividir, porquê? Mas porquê? Porquê a dividir?***

(Silêncio.)

Prof.: ***Isto que vocês têm aqui é a área, mas não é de um círculo, é a área de quê?***

Letícia: ***Área do polígono regular.***

Prof.: ***Escreve aqui Área de um polígono regular. P sobre 2 vezes apótema. Isto é assim. Onde costumam estar os polígonos regulares?***

Anaísa: ***Dentro do círculo.***

Prof.: ***É a área do polígono regular que desenhaste dentro do círculo.***

Anaísa: ***O raio é 4, o diâmetro é 8…***

Prof.: ***Comecem lá a desenhar um polígono regular aqui dentro. Podem usar… Que polígono querem desenhar?***

Anaísa: ***Um quadrado.***

Prof.: ***Um quadrado? Não é pequenino?***

Anaísa: ***Pode ser um hexágono.***

Letícia: ***E o raio? É para fazer o raio.***

Anaísa: ***Não é preciso. Gosto mais do hexágono. Não é um quadrado, é um hexágono.***

Letícia: ***Espera aí.***

Figura 7: Trabalho do Grupo I

Deixo-as a decidirem e afasto-me. A Teresa chama-me. Aproximo-me do Grupo VI.

Teresa*: Pronto, isto tudo é o que nós temos aqui. Isto tudo o que estamos a fazer é tudo o que mede 4 cm. Só que nós ainda não conseguimos descobrir como é que vamos fazer a área do círculo.*

Prof.*: Mas… já para lá vão. Olha. Deixa-me… fazer aqui uma coisa.*

Teresa*: E se fizéssemos com estes pontos que fizemos, um polígono?*

Rui*: Polígono? Não existe!*

Prof.*: Depois têm que tirar fotografias a isso. Está bem? Têm com quê? Tens o teu telemóvel?*

Teresa*: Não.*

Prof.*: E o Rui, tens o teu?*

Rui*: Não.*

Prof.*: Mas depois não desmanchem isso que eu tiro uma fotografia no fim, está bem?*

Teresa*: Fazemos um quadrilátero.*

Rui*: Ui, que bonito.*

Prof.*: Mas não é para mostrar a eles. Vira-te para a frente.*

Prof.*: Eles estão a fazer o trabalho deles, e vós estais a fazer o vosso.*

Teresa*: Mas fui eu que raciocinei. Tu não estás a fazer nada.*

Prof.*: E agora? Que é que vais fazer agora?*

Teresa*: Agora, como é um quadrado, é* $C \times L$*. Cá está.*

Rui*: Está bonito!*

Prof.*: E agora? Área deste é 64. Agora vais tentar desenhar este, está bem?*

Teresa*: Sim, fazemos na mesma como fizemos este.*

Deixo-os a trabalhar e passo ao Grupo V.

Isaura*: Professora, e agora?*

Prof.*: E agora? Pronto, e agora?*

Isaura*: É o círculo…*

(Ajudo-os a pensar) **Prof.***: Sabem a área deste. A área do círculo é mais pequena que a deste. E agora?*

Isaura*: Agora o círculo é maior.*

Prof.*: Agora, a área do círculo é maior. Então vão calcular a área…*

Isaura: deste *(diz apontando para o quadrado inscrito)*

Prof.: (Confirmando) ***…deste pequenino, e depois dizer que a área do círculo é maior que essa.***

Imediatamente começam a medir e eu apercebo-me de que sabem exatamente o que estão a fazer.

Isaura*: 5 ponto 7.*

Fausto*: 5 ponto 7.*

Deixo-os a trabalhar e dirijo-me ao Grupo IV.

Prof. *: Aqui, meninos, o que estão a fazer?*

Filipe*: Ainda não descobrimos.* (Ajudo-os a pensar, vendo o que já tinham feito.)

Prof.*: Ora, vocês traçaram as diagonais, não foi? E agora, o que podem fazer?*

Prof.*: Ele teve boa ideia, porque agora podem unir aqui. O grupo da Isaura teve alguma dificuldade em fazer isto e vocês descobriram uma maneira de fazer. Depois quando mostrarem à turma como é que fizeram vão explicar isso. E agora têm um quadrado circunscrito e um quadrado inscrito. E agora?*

(23'17'') Filipe*: Vês Jorge, a ideia era boa.*

Prof.*: E agora, vejam se descobrem.* Afasto-me a regresso ao Grupo V, para ver se já determinaram a área do quadrado inscrito.

Isaura*: Deu 32 e ...*

Prof.*: Pronto, vamos arredondar.*

Isaura*: Deu 32,5.*

Prof.*: 32 e meio. E agora, olha. Sabemos que a área do círculo … está entre que valores?*

Fausto*: Menos de 64.*

Prof.*: E?*

Isaura*: Maior que 32,5.*

Prof.: *Escrevam.* Aguardo**.** ***Pronto. E agora conseguem arranjar… dar um só valor à área do círculo? Porque pode ser 35, 36, 37, 38, 39, até 63, não? Ainda há um grande…***

Isaura: ***Distância.***

Prof.: **U***ma grande distância, um grande intervalo. Vejam lá se conseguem diminuir essa diferença.*

Fausto: ***Hã?***

Prof.: ***Como é que podem diminuir essa diferença? Vejam lá. Portanto, a diferença está aqui, não é? Nestes pedacinhos. Conseguem descobrir a medida desses pedacinhos? Vejam lá se arranjam uma maneira de descobrir.***

Isaura: ***Acho que sim.***

Prof.: ***Como? Diz como.***

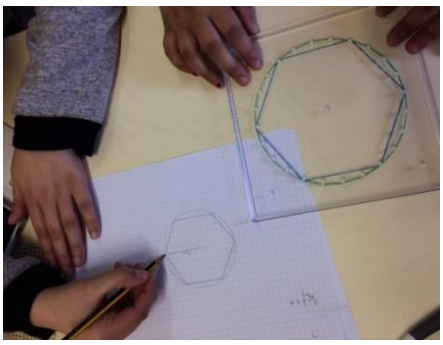
Isaura: ***Temos que fazer mais os lados.***
Prof.: ***Diz como?***
Isaura: ***Assim e assim.***
Prof.: ***Triângulos, pode ser. Pronto, experimentem.***

Entretanto tocou para a saída. Recolhi todos os materiais construídos pelos alunos, fotografei-os e guardei-os até à próxima aula.

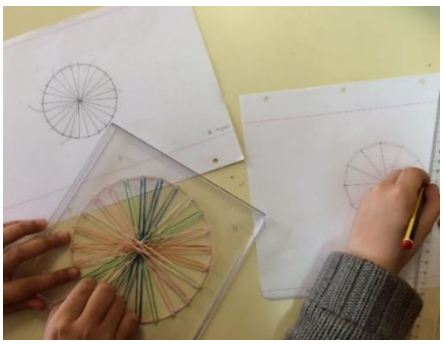
Aula n.º 105

Duração da gravação: 28'11"

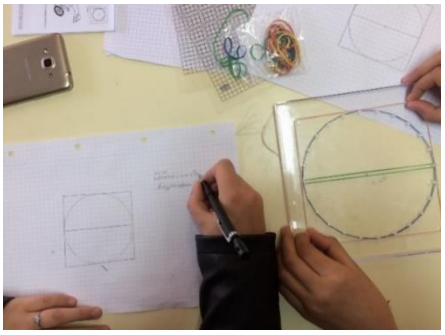
Na aula seguinte, entreguei os trabalhos a cada grupo e fotografei-os novamente. Pedi-lhes que não escrevessem nada antes de os fotografar (Figura 3). Comecei a gravar depois de fotografar todos os trabalhos.



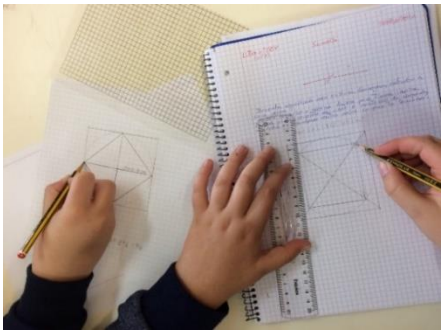
Grupo I



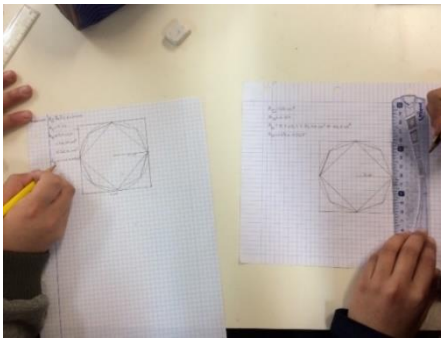
Grupo II



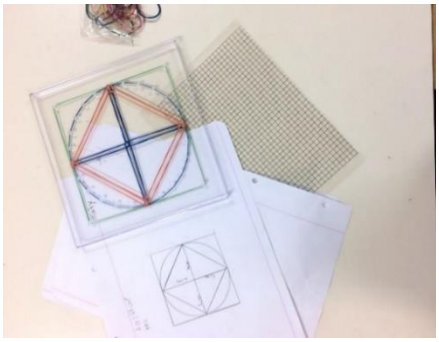
Grupo III



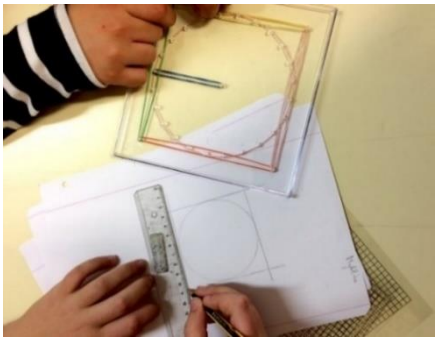
Grupo IV



Grupo V



Grupo VI



Grupo VII

Figura 8: Fotografias dos trabalhos dos alunos ao fim da primeira aula, tiradas no início da segunda aula.

Quando acabei de tirar as fotografias, comecei pelo Grupo VII, que não tinha visitado na aula anterior.

Prof.: ***Andem lá. Expliquem lá o que estão a fazer.***

Celeste: ***Nós estamos a pensar...***

Daniel: A pensar ou a Madalena?

Madalena: Os dois…

Celeste: ***Nós todos estávamos a pensar…***

Prof.: ***Todos.***

Celeste: ***Nós todos estávamos a pensar. Como a área do polígono é perímetro a dividir por dois, que é o semiperímetro, vezes o apótema, a área do círculo podia ser….***

Madalena: ***Porque no círculo, com um número que não tem apótema, mas o mais parecido é o raio.***

Celeste: ***Sim.***

Prof.: ***Exatamente.***

Celeste: ***A dividir por dois vezes o raio.***

Prof.: ***Certo. Agora têm que descobrir o que é que…***

Madalena: ***É em cima…***

Prof.: ***…no círculo o que é que vai corresponder ao perímetro. Está certo? Estão a trabalhar bem. Pronto. Se precisarem de fazer figuras, façam.***

Celeste: ***Obrigado. Obrigado.***

Abandono este grupo e dirijo-me ao Grupo IV.

Prof.: ***Aqui.*** (Pausa)**.** ***O que é que estão a fazer? Como é que vão fazer?***

Jorge: ***Não sabemos.***

Filipe: ***Ó Professora, já temos vários triângulos. Já temos…***

Prof.: ***Têm vários triângulos, têm dois quadrados, mas o vosso objetivo é determinar a área do círculo. Como que vão fazer para conseguir determinar a área do círculo?***

Jorge: ***raio 4 cm.***

(Pausa)

Prof.: ***Sabem a área deste, … maior, … não é?***

(Pausa)

Filipe: ***Hum… Oito triângulos…***

Prof.: ***Um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito. Mas a área destes oito triângulos é igual à área do quadrado pequenino.*** (Ver Figura 9)

Filipe: ***Sim…***

Jorge: ***Então temos que fazer…***

Prof.: ***Podem calcular o quê, Jorge?***

Jorge: ***O perímetro.***

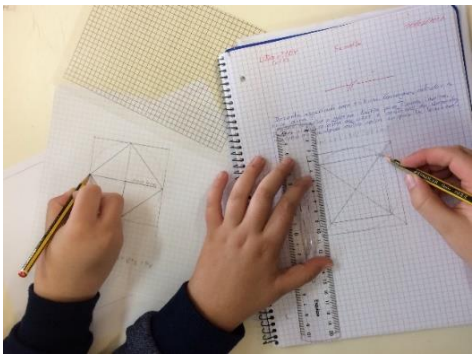
Prof.: ***O perímetro?! Então nós queremos saber a área e tu queres calcular o perímetro?***

(Pausa)

Jorge: ***O lado do quadrado.***

Prof.: ***Pra quê?***

Filipe: ***Vês como é dois?***



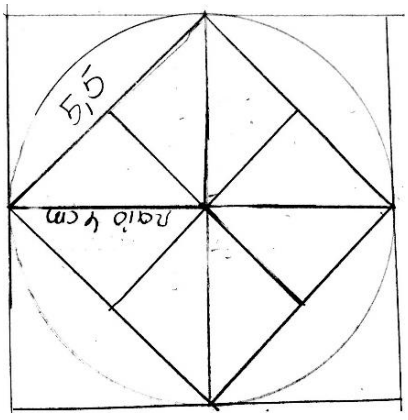


Figura **9**: Fotografia dos oito triângulos que os alunos estavam a falar

Prof.: ***Pra quê? O lado do quadrado deste? Pra quê? Pra quê, Jorge?***

Jorge: Para sabermos quanto é metade.

Jorge: ***Isto é metade. Se medirmos…*** **Prof.:** ***Sim, então? O que é que vais fazer com esta metade?*** (Pausa) ***Pensem…***

Jorge: ***Contamos os triângulos…***

Prof.: ***Para que queres contar os triângulos? Ainda não percebi o que tu queres fazer. Os triângulos são um, dois, três, quatro, cinco, seis, sete, oito. Certo. Oito triângulos são iguais a este quadrado.***
(Pausa)
Prof.: ***Queres saber a área de um triângulo?***
Filipe: ***Não, ó Professora. Mas oito triângulos também podem ser deste círculo, olhe, o que vai até ao fim.***
Prof.: ***Mas vai aqui, não vai ali.***
Jorge: ***Ou a área de um triângulo, depois sabemos quanto é que é todos os triângulos.***
Prof.: ***Também é verdade. Descobrindo a área de um triângulo, depois multiplicas por oito e sabes. Mas repara, os oito triângulos não são iguais ao quadrado?***
Filipe: ***Sim.***
Prof.: ***Então não é mais fácil calculares logo o quadrado?***
Filipe: ***Sim.***
Prof.: ***As áreas não são equivalentes?***
Jorge: ***São.***
Prof.: ***Como é que se calcula a área de um quadrado?***
Jorge: ***Lado vezes lado.***
Prof.: ***Lado vezes lado. Quanto é que mede isto?***
Filipe: ***Isso? Mede 5, acho eu.***
Prof.: ***Então como é que calculas a área deste quadrado?***
Jorge: ***5 x 4… 5 x 5.***
Filipe: ***5,5 x 5,5***
Prof.: ***Pronto. Já sabes a área deste quadrado aqui por dentro. E depois, o que queres fazer?***
Deixo-os a pensar no que vão fazer de seguida e passo ao Grupo V.
Prof.: ***Aqui, Isaura.***
Isaura: ***Diga, Stôra.***
Prof.: ***Vamos. Vamos. Já fizeram isto, e agora?*** *(Pausa).* ***Portanto, calcularam a área do quadrado. Expliquem-me vocês. Expliquem-me do princípio.***
Isaura: ***Primeiro, calculamos a área do quadrado.***
Prof.: ***Deste?*** (Aponto para o quadrado circunscrito - Ver Figura 10.)
Isaura: ***Sim.***
Prof.: ***O grande. E depois?***
Isaura: ***Depois, descobrimos que a área do círculo era menor que 64 cm.***
Prof.: ***Exato e 64 cm² era a área deste grande. E depois, o que é que fizeram?***
Isaura e Fausto (ao mesmo tempo)**:** ***Depois calculamos a área do quadrado pequenino.***
Isaura: …que deu 32,5 cm².
Prof.: ***Pronto. E depois?***
Isaura: ***Depois descobrimos que a área do círculo tem que ser menor que 64 e maior do que 32,5.***

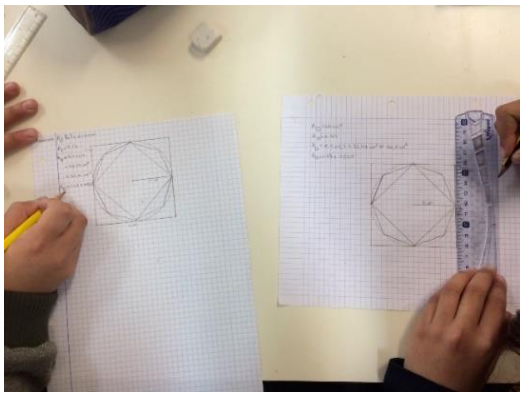


Figura 10: Fotografia dos trabalhos do Grupo V.

Prof.: ***Pronto, só que de 32,5 para 64 ainda é um intervalo muito grande, não é? E então, o que é que vocês fizeram? Foram diminuir… esse intervalo.***
Isaura: ***Sim.***
Prof.: ***Construindo esses triângulos. Conseguiram construir quatro triângulos.***
Isaura: ***Sim.***
Nota: Apercebo-me que até aqui, perceberam tudo o que estiveram a fazer, mas não sabem ainda como aproveitar os triângulos. Ajudo-os a pensar.
Prof.: ***E agora conseguem determinar a área destes triângulos?***
Fausto: ***Sim.***
Prof.: ***Como se calcula a área de um triângulo?***

Isaura: ***De um triângulo?***
Fausto: ***Área do triângulo? Base vezes altura a dividir por dois.***
Prof.: ***Então escrevam.*** (Pausa). ***Agora calculem a área de um triângulo.***
Isaura: ***Deste Stôra?***
Prof.: ***Ponham as medidas aí no desenho.***
Fausto: ***Dá 2… vírgula… 2.***
Prof.: ***Olha onde estás a medir, Fausto.***
Isaura: ***5,6.***
Prof.: ***Põe lá 5,6. E agora a altura. Qual é altura? Põe as unidades. Qual é altura?***
Isaura: ***É esta.***
Prof.: ***Altura. Isto é um lado de um triângulo. Desenha a altura a tracejado e põe a medida dela. Depois calculas a área. Eu já cá venho.***

Deixo-os a trabalhar com esperança de que, da próxima vez me digam a razão do cálculo da área dos triângulos. Afasto-me e aproximo-me do Grupo VI, que já me chama há algum tempo.

Teresa: ***Senhora Professora, para nós descobrirmos esta área, podemos medir… os lados?***
Prof.: ***Explica outra vez.***
Teresa: ***Está a ver este… quadrado aqui dentro?***
Prof.: Quadrado aqui dentro? Sim.
Tersa: ***Tem estes lados, não é? E se nós os medirmos?***
Prof.: ***Mede***. (Pausa). ***Pronto. E depois? Escreve aqui quanto deu.***
Teresa: 5,6.
Prof.: ***Põe unidade*****.**
Teresa: ***Se este mede, os outros também medem.***
Prof.: ***Exatamente.***
Teresa: ***E agora vamos ter que fazer… 4 x… 5, …não…***
Prof.: ***Como é que se calcula a área de um quadrado?***
Teresa: ***Comprimento vezes Largura.***
Prof.: ***E é isso que tu estás a fazer? Comprimento vezes Largura.***
Tersa: ***Hã?***
Prof.: ***Comprimento vezes a Largura.***
Rui: ***Vês, tu não sabes fazer.***
Teresa: ***5,6 … vezes … 4 cm.***
Prof.: ***Quanto é que mede este aqui?***
Teresa: ***Ai este? Espere aí… 5 e meio.***
Prof.: ***Então escreve aqui. Então agora?***
Teresa: ***Vamos ter que fazer 5,6 vezes 5,5.***
Prof.: ***Pronto. Rui, então, Rui vê lá agora se ajudas a Teresa. Jerónimo, não te esqueças de trabalhar, está bem?***

Aproximo-me dos Grupos III e II, que solicitam a minha ajuda. Vou primeiro ao Grupo II.

(…) **Duarte:** ***Não percebo como é que é para fazer.***
Prof.: ***Pronto, e agora? O que é que vocês fizeram? Na aula passada, disseram-me exatamente o que tinham que fazer, já se esqueceram?*** (Ver Figura 11.)
Duarte: Já.
Prof.: ***O que é que tinham que fazer?***
Duarte: ***Não sei.***
(7'57'') Prof.: ***Portanto, vocês pensaram assim. Têm que calcular a área do círculo, não foi? E depois?*** (Pausa). ***Pega no teu caderno diário.*** (Pausa). Abri-lhe o caderno diário na lição n.º 100 (ver NM3) para lhe mostrar no que se tinha inspirado. ***Tu, inspiraste-te nisto.***

Duarte: ***Sim.***
Prof.: ***Como é que nós aprendemos a calcular esta área?***
Dinis: ***Apótema!***
Duarte: ***Lado vezes lado vezes lado.***
Dinis: ***Lado??? Isso é um triângulo!!!***
Duarte: ***Pois é.***
Dinis: ***Então não é lado vezes lado!***
Duarte: ***Ah! Porque é um pentágono regular.***
Prof.: ***esta área…***
Prof.: ***Sim… Como é que fizemos?***
Duarte: ***Então, … cortamos.***

Figura **11**: Fotografia dos trabalhos dos alunos do Grupo II.

Prof.: ***Transformamos em triângulos, cortamos e depois fizemos um…***
Duarte: ***Pentágono… ai! Eu não sei como é que se chama isso.***
Prof.: ***Como é que se chama isso? Um paralelogramo.***
Duarte: ***Sim, um paralelogramo. E vocês disseram assim: Bem, aqui, podemos fazer o mesmo. Quantos mais triângulos nós fizermos, mais próximo fica do círculo. Por isso é que vocês fizeram isto.***
Duarte: ***Pois e aqui está um pentágono.***
Prof.: ***Então e agora o que é que vão fazer?***
Duarte: ***Vamos cortar.***
Prof.: ***Pronto, e mais? E depois, cortam e depois?***
Duarte: ***Fazemos uma figura.***
Prof.: ***E que figura é que tens que fazer?***
Duarte: ***Fazemos um… ai! Fogo! Um pent…, um paralelogramo.***
Prof.: ***E tu, queres fazer o mesmo?***
Dinis: ***Não, o apótema.***
Prof.: ***É este o apótema? E agora, o que vais fazer com o apótema?*** (Não responde).

Deixo-o pensar melhor e dirijo-me ao Grupo III.

Prof.: ***Então e aqui?***
Belmira: ***Nós já fizemos isto e sabemos… a área do quadrado.***
Prof.: ***Já sabem a área deste quadrado. Mais? Mas eu quero é que vocês descubram a área do círculo.***
Bela: ***Temos que fazer 64… e … 64 com o diâmetro.***
Prof.: ***Área do círculo é isto. 64 é isto tudo.*** Aponto para a área do quadrado.
Belmira: ***Ó Stôra, eu estou a pensar numa coisa.***
Prof.: ***64 é isto tudo.***
Bela: ***Sim.***
Prof.: ***O que é que o que estás a pensar?***
Belmira: ***Se calhar, se fizéssemos, imagine, isto em triângulos e depois descobríamos a medida do apótema.***
Prof.: ***Pode ser. A medida do apótema deste quadrado?***
Belmira: ***Não, Stôra, daqui, olhe. Fazíamos como a Stôra diz, os triângulos.***

Como este grupo ouviu a conversa que tive com o Grupo II, assumiu que teriam também que usar triângulos e apótemas. Apercebo-me que estão a pegar na ideia do Grupo II e a abandonar a deles. Se não incentivar, pode ser que regressem à sua ideia inicial.

Belmira: ***E depois descobríamos o apótema.***
Prof.: ***Eu não disse nada, vós fazeis como entendeis*****.** Faço com que regressem à sua ideia original. ***Vocês começaram por desenhar aqui este quadrado e calcularam a área do quadrado. 64 cm quadrados.*** Pausa. ***Área do círculo é maior ou menor que esta área?***
Belmira: ***Área do círculo? É menor do que a do quadrado.***
Prof.: ***É menor do que a do quadrado. Então não arranjam maneira de ficar só com esta área aqui?***
Bela: ***Sim.***

Prof.: ***Como?***
Bela: ***Com… como é que hei-de dizer?***
Belmira: ***Temos que usar o 64.***
Prof.: ***Olhem lá para a figura.***
Belmira: ***Stôra, o quadrado tem 4 lados.***
Prof.: ***Sim.***
Bela: ***São todos iguais.***
Prof.: ***Sim.***
Bela: ***Então, podemos dividir 64 por 4.***
Prof.: **Para quê?**
Bela: ***Para saber… a área do círculo.***
Prof.: ***E porque é que 64 a dividir por 4 vos vai dar a área do círculo?***
Bela: ***Porque, supostamente, o quadrado tem os 4 lados iguais e por isso é 4.***
Prof.: ***Supostamente, não. O quadrado tem 4 lados iguais.***
Bela: ***Tem 4 lados iguais… e é 4. E 64 como é a área do quadrado temos que fazer 4 a dividir por 64.***
Prof.: ***Agora já é 4 a dividir por 64?***
Bela e Belmira: ***64 a dividir por 4.***
Prof.: ***Concordas com o que ela está a dizer? Faz sentido?***
Belmira: ***Acho que não, Stôra.***

Apercebo-me que estão a usar os dados sem segurança. Tento fazer com que as alunas regressem à sua ideia inicial, levando-os a ver e a organizar os dados que têm.

Prof.: ***Vocês sabem esta área, do quadrado.***
Bela: ***Sim.***
Prof.: ***Querem saber a área do circulo.***
Bela: ***Sim.***
Prof.: ***Sabem que a área do quadrado é 64 cm². Sabem que a área do círculo é menos que 64 cm². O que é que está a mais?***
Belmira: ***O que está a mais??***
Prof.: ***Sim. Do que a área do círculo? O que é que o quadrado tem a mais que a área do círculo? O que é que a área do quadrado tem a mais do que a área do círculo? Qual é a diferença entre a área do quadrado e a área do círculo?***
Bela*: Então…*
(12'44'') Belmira: ***Estes espacinhos aqui.***
Prof.: ***E estes espacinhos aqui têm mais ou menos que forma?***
Belmira e Bela: ***De um triângulo.***
Prof.: ***Consegues desenhar aí um triângulo?***
Belmira e Bela: ***Sim.***
Prof.: ***Desenha lá.***
Belmira: ***Bela, pega na tua régua.***
Prof.: ***Pensem lá bem. Quanto menos triângulos, melhor.***

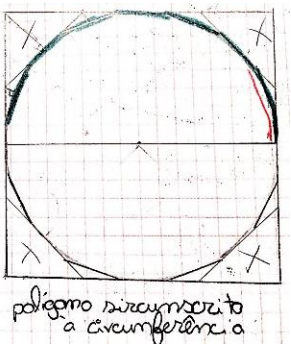


Figura **12**: Foto do trabalho do Grupo II, com sinalização dos triângulos considerados.

Desenham os triângulos que na Figura 12, estão sinalizados com uma cruz.

Belmira: ***Bela, é assim que se faz. Pode ser também assim.***
Bela: ***Prontos.***
Belmira: ***Fazes outro aqui, outro aqui e outro aqui.***
Bela: ***Pode ser também assim.***
Prof.: ***Direitinhos, direitinhos.***
Bela: ***Assim?***
Prof.: ***Vocês não disseram que eram iguais?***
Bela: ***Eram*.**
Prof.: ***Então ponham-nos mais ou menos direitinhos. E agora? Como é que podem fazer?***
Bela: ***Prontos, já estão todos…***

Prof.: ***Portanto isto aqui está a mais, não é?***
Bela: ***Sim.***
Prof.: ***Então e agora? Como é que vocês conseguem descobrir um valor aproximado para a área do círculo?***
Belmira: ***Ó Bela, dá-me aí o teu caderno de Matemática. Que temos que usar a fórmula de calcular os triângulos.***

Pareceu-me que continuavam presos à ideia de triângulos dos colegas do Grupo II. Tento afastá-los dessa ideia.

Prof.: ***Não têm que usar nada. Para já vocês podem fazer de maneira diferente. Não têm que fazer daquilo. Para já não pensem em fórmulas, está bem? Para já não pensem em fórmulas. Deixem ficar aqui o caderno, mas para já não pensem em fórmulas. Tentem descobrir, vocês conhecem esta área, querem saber esta e tentem descobrir uma maneira de saber só esta. Portanto, vocês já disseram que a diferença desta área para esta, eram estes…***
Bela: ***Triângulos.***
Prof.: ***Quatro triângulos. E então? Sabem que a área do círculo era menos que 64 cm². Não conseguem arranjar um valor mais próximo para a área do círculo? É que menos de 64, pode ser 63, 62, 61, 60, 50, uma série deles. Digam lá. Conseguem calcular a área dos triângulos? Como é que se calcula a área de um triângulo?***
(Pausa)
Prof.: ***Base…***
Bela e Belmira: ***Base vezes altura.***
Prof.: ***a dividir…***
Bela e Belmira: ***a dividir por dois.***
Prof.: ***Conseguem calcular a área deste triângulo?***
Bela: ***Sim.***
Prof.: ***Qual é a base?***
Bela: ***A base é esta.***
Prof.: ***E a altura?***
Bela: ***Esta. Não, não… é esta.***
Prof.: ***Porque é que tem de ser esta?***
Bela e Belmira: ***Tem que ser perpendicular.***
Prof.: ***E agora? Calculem a área do triângulo. Aqui ao lado. Qual era a fórmula?***
Bela e Belmira: ***Base vezes altura a dividir por dois.***
Bela: ***Assim, que vai dar 3,5… x … 1,6.***
Prof.: ***…a dividir por 2. Façam lá a conta na máquina. Façam no telemóvel.*** Procuram o telemóvel. Enquanto espero pergunto ao Grupo II se já está feito. Fazem os cálculos e dizem:

Belmira: ***2 ponto 8.***
Bela: ***Já está.***
Prof.: ***Quanto deu?***
Bela: ***2 ponto 8.***
Prof.: ***Unidades?***
Bela: ***Unidades!?***
Belmira: ***Cm.***
Prof.: ***Cm quê?***
Bela e Belmira: ***Quadrados.***
Prof.: ***Então esta é a área de quê?***
Bela: ***Do triângulo.***
Prof.: ***E este?***
Bela: ***Também. Do triângulo, do triângulo e do triângulo.***
Prof.: Quantos são os triângulos?

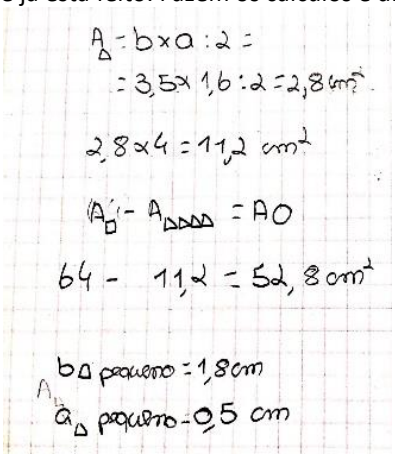


Figura **13**: Foto do trabalho do Grupo II.

Bela: ***Quatro. Temos que fazer 2,8 x 4.***
Belmira: 2,8 x 4.
Prof.: E agora?
Belmira e Bela: ***2,8 x 4 igual a 11,2.***
Prof.: ***Unidades.***

Belmira: ***Cm quadrados.***

Prof.: ***Então agora recapitulamos. O que é que vocês sabem?***

Belmira: ***A área do quadrado é 64 cm quadrados e agora podemos a 64 cm quadrados subtrair 11,2.***

Prof.: Então agora o que ides fazer? ***Escrevam o que querem fazer. Área do quadrado menos área dos triângulos. Quantos são os triângulos?***

Bela: ***Quatro.***

Prof.: ***Desenhem os 4 triângulos, e vai-vos dar o quê, aproximadamente?***

Belmira: ***A área da circunferência.***

Belmira: Ok. Então vamos lá.

Depois incentivo-os a pegarem no caderno para verem uma forma de descobrir a fórmula para calcular a área do círculo. Tinha esperança que consultassem a forma como deduzimos a área do polígono regular, substituindo, não todas, mas pelo menos alguns elementos das figuras, relacionando-os. Deixei-as a trabalhar e aproximei-me do Grupo II.

Duarte: ***Professora, não dá, os triângulos são muito pequenos.***

Sugeri-lhe que os fossem colando na folha, para que não se perdessem. Entretanto, o Dinis continuou preso à sua ideia do apótema, mas não conseguia descortinar uma forma de o usar. Disse-lhes que se os tinha posto a trabalhar em pares, era para trabalharem juntos na mesma ideia. Deixei-os a colar e dirigi-me ao Grupo V.

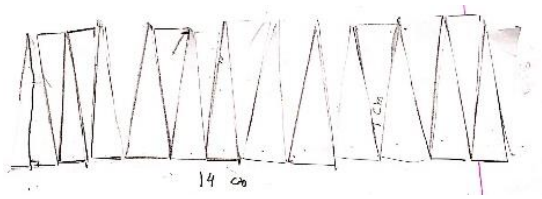


Figura **14**: Decomposição do polígono em triângulos e rearranjo dos mesmos num paralelogramo (Grupo II).

Bela e ***Belmira: Professora, dá 32,8.***

Prof.: ***Agora continuem.***

Entretanto, passo pelo Grupo II e dou-lhes indicações de como colarem os triângulos para que não "fujam". Incentivo-os a continuar.

No Grupo V, já tinham calculado a área de cada um dos triângulos e confirmaram que todos eram equivalentes. Vou fazendo perguntas para me inteirar do percurso percorrido. De seguida, disseram que podiam ainda desenhar mais triângulos para reduzir ainda mais a diferença para o círculo. Incentivei-os a fazê-lo, dizendo-lhes que estavam quase a chegar ao resultado e a trabalhar muito bem.

Deixei-os a trabalhar e dirigi-me ao Grupo IV, que estavam sem saber o que fazer. Pouco depois percebi que tinha sido por terem encontrado valores diferentes, por terem enquadrado os quadrados de maneira diferente (Ver Figura 4, em cima):

Jorge Filipe

Lembrei-lhes o objetivo. E recordamos o que tinham feito, entretanto. Tinham parado porque tinham encontrado valores diferentes: 6 e 5,5 para o lado do quadrado inscrito. Resolvemos arredondar para 6, mas para descobrir o erro resolvi rever o que tinham feito e comparar o trabalho dos dois. Reparei que tinham desenhado o quadrado inscrito de forma diferente, por isso encontraram valores diferentes, mas estavam a usar a mesma estratégia.

Prof.: ***Como é que haveis de descobrir a área do círculo com o que tendes? Estais a fazer bem, agora tendes que continuar.*** (Silêncio). ***E até podem ir comparando os vossos resultados. Deu-lhe 30,25 e a ti, quanto é que te vai dar?***

Filipe: ***Ora 6 x 6… 36.***

Prof.: ***A ti dá 36 e a ele deu 30. Que podeis dizer sobre a área do círculo, já? Comparando com a área dos quadrados?***

Filipe*: É maior.*

Prof.*: É maior do que quê?*

Filipe: ***Do que a área do quadrado.***

Prof.*: Dos dois?*

Filipe*: Não, é maior do que o quadrado inscrito.*

Prof.*: E menor do que…*

Filipe*: …o quadrado circunscrito.*

Prof.*: Então já têm um intervalo.*

Filipe*: Sim.*

Prof.*: Está entre 30,25 e 64 no caso do Jorge. E no teu?*
Filipe*: 36 e 64.*
Prof.*: Está entre 36 e 64. Em que caso a diferença é menor? Neste ou neste?*
Filipe*: Neste.*
Prof.*: É neste, então com qual é que ides continuar a trabalhar? Com estes valores ou com estes?*
Filipe*: Com estes.*
Prof.*: Estes. Percebeste por quê, Jorge? Porquê? Porque a diferença é menor. E agora? Já sabem que a área do círculo está entre 36 e 64, mas conseguem arranjar um valor mais próximo, mais aproximado da área do círculo? É que pode ser 36, 37, 38, … até 63. São muitos valores. Vejam lá se conseguem arranjar uma maneira de diminuir os dois valores.*
Filipe*: Fazer outro quadrado.*

Não me percebi muito bem a ideia deles, nem me pareceu que os levasse a alguma coisa. No entanto, Incentivei-os a fazê-lo e a medir a área. Entretanto tocou para a saída e a aula terminou.
Pedi-lhes para deixarem todo o material em cima da mesa para o fotografar e arrumar para continuarem a trabalhar na aula seguinte. De seguida, ainda pedi ao Grupo VII que me dissesse o que tinham feito.

Prof: ***Expliquem-me o que descobriram. Pegaste na área do polígono regular, que é o semiperímetro vezes o apótema. E depois?***

Madalena: ***O apótema, no círculo corresponde ao raio.***
Prof.: ***Vai corresponder ao raio. E depois? Tinham que descobrir…***
Madalena: ***O perímetro.***
Prof.: ***…o perímetro, e puseram aqui…***
Prof.: ***C… O que é este C?***
Madalena: ***Círculo.***

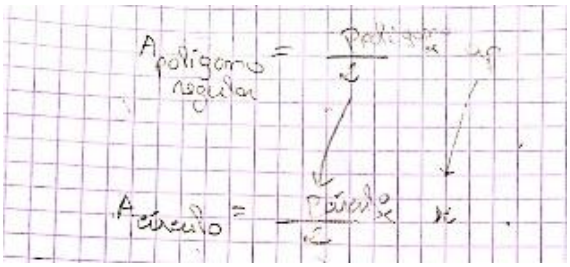
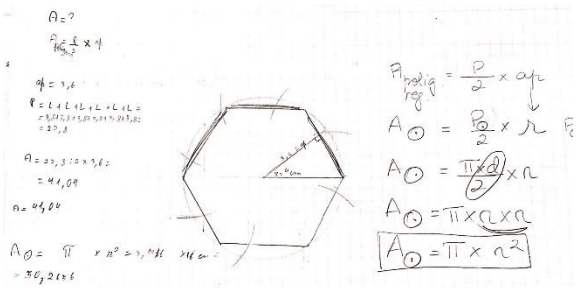


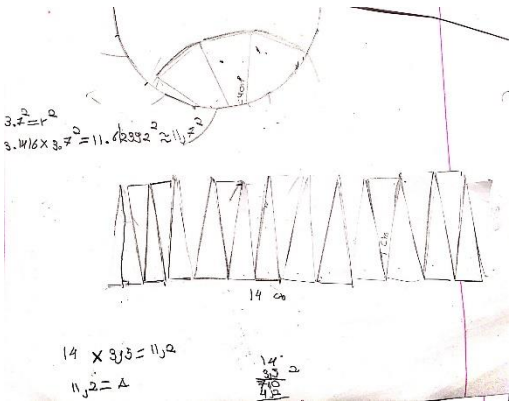
Figura **15**: Foto do trabalho do Grupo VII.

Prof.: ***Metade do círculo? Mas o quê? O que mediram no círculo? O perímetro do círculo?***
Madalena: ***Não, estávamos a pensar que poderia ser metade do círculo, não o perímetro.***
Prof.: ***Mas metade do círculo. Que valores é que iam usar para metade do círculo? A área, o perímetro, o diâmetro. Quereis pensar melhor nisto?***

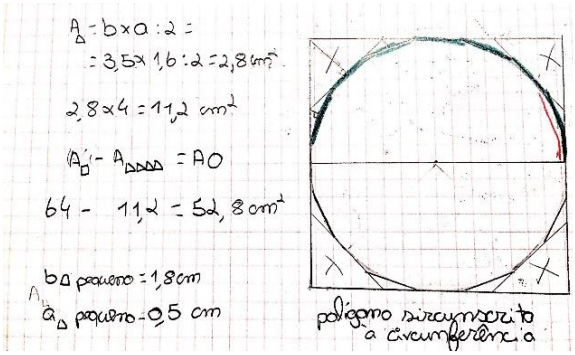
Resolvi deixá-los sair pois já lhes tinha tirado parte do intervalo. Eles tinham relacionado o polígono com o círculo e identificado já a metade do círculo, mas não tinham identificado ainda a medida que teriam de usar, e que seria o perímetro. Só depois poderiam substituir por $\pi \times d$ e continuar a dedução da fórmula. Foi nesta parte que manifestaram dificuldade em relacionar as medidas.



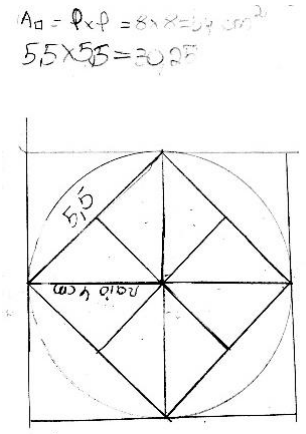
Grupo I



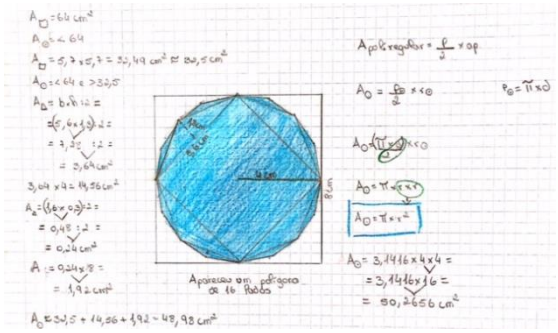
Grupo II



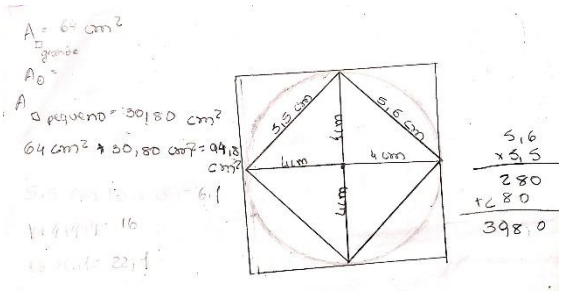
Grupo III



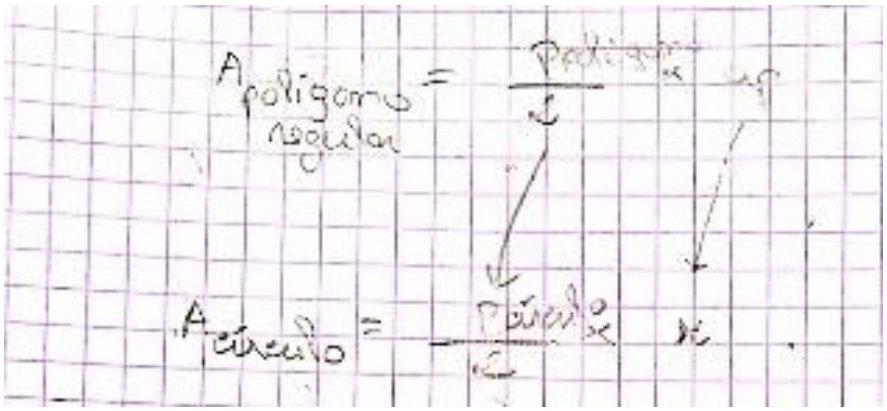
Grupo IV (muito incompleto)



Grupo V



Grupo VI (muito incompleto)



Grupo VII

Figura **16**: Fotografias dos trabalhos dos alunos ao fim da segunda aula.

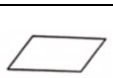
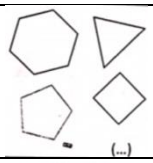
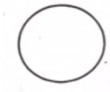
12.2. Episódio 2 – Constituído pela aula em que estabelecemos a relação entre a fórmula da área do polígono regular (ou do paralelogramo, no caso do Grupo II) com a fórmula da área do círculo, à exceção dos Grupos IV e VI, que só o fizeram na aula seguinte.

Aula n.º 106

Duração: 40'11"

Na terceira aula comecei por distribuir o material respetivo pelos diferentes grupos, pedindo-lhes novamente que não alterassem o trabalho enquanto não tirasse as fotografias. Fotografei os trabalhos logo no início da aula (Figura 16) e entreguei-lhes uma tabela (Tabela 2) para que preenchessem de forma a sistematizar as fórmulas de áreas e perímetros de figuras planas que já conheciam. Ficou por preencher a última célula relativa à área do círculo, o que iria ser feito logo que a descobrissem.

Tabela **2**: Tabela-resumo das fórmulas para áreas e perímetros de figuras planas

Fórmulas – Áreas e perímetros de figuras planas			
Figura plana		**Perímetro (exemplo)**	**Área (exemplo)**
Representação visual	**Linguagem natural**		
			
			
			

Prof.: ***Chegaram aqui a um polígono regular, não foi? …com 16 lados. Já é muito próximo da área do círculo. Vocês não sabem a área do círculo, é aquilo que querem saber, mas sabem a área do polígono regular. Como é que se calcula a área do polígono regular? Ora põe lá, área do polígono regular. Qual é a fórmula?***

Isaura: ***É o semiperímetro vezes apótema.***

Prof.: ***E nós sabemos que esta área é igual à área do círculo. Quase, não é? Nós vamos desprezar estes bocadinhos, vamos fazer de conta que são iguais. Então agora tens aqui a área do polígono regular e a área do círculo.*** (Silêncio). ***Agora vais tentar substituir aqui as medidas do polígono regular, porque isto*** (digo apontando a figura) ***é do polígono e este apótema também é do polígono, por medidas do círculo. O perímetro do polígono regular, o que é? Mostra-me na figura.*** A Isaura mostra. ***E o do círculo?*** A Isaura mostra. ***E como é que se chama isto no círculo?***

Isaura: ***Circunferência.***

Prof.: ***Circunferência. E a medida da circunferência, como é que nós chamamos?***

Isaura: ***Perímetro.***

Prof.: ***Então,*** (pausa) ***perímetro da circunferência. Escreve lá P circunferência.***

Isaura: ***Aqui?***

Prof.: ***Sim, sobre dois. E o apótema? Mostra-me onde é o apótema, aí. Vai ser igual a quê, no círculo?***

Isaura: ***Ao raio.***

Prof.: ***Ao raio.***

Isaura: ***Escrevo raio?***

Prof.: ***Estamos a pegar nas medidas do polígono para as medidas do círculo. E agora, o perímetro do círculo é igual a quê?***

Fausto: ***semiperímetro…***

Prof.: ***Não, do círculo. Como é que é?***

O Fausto confunde com a fórmula do polígono regular.

Prof.: ***Não, do círculo. Como é que é?***

Isaura: ***Ah, perímetro é igual a*** π **vezes** d**.**

Prof.: ***Escreve. E agora, o que é que tu podes fazer?***

Isaura: ***Calcular primeiro o diâmetro.***

Prof.: ***Não. Sem números. Vamos pegar aqui, vamos a esta fórmula. Onde está perímetro do círculo, podemos escrever por isto*** (aponto para $\pi \times d$).

Isaura: ***Aqui, Stôra?***

Prof.: ***Não, onde está perímetro do círculo. Vamos substituir perímetro do círculo por isto. Experimenta lá em baixo. Área do círculo igual…***

A Isaura completa, mas não se ouve bem na gravação. Mas eu confirmo que está bem.

Prof.: ***sobre 2, não é? E agora? Consegues simplificar aqui alguma coisa? Não precisas de substituir nada por números. Consegues simplificar aqui alguma coisa? O π é o π , o d…***

Isaura: ***É o diâmetro.***

Prof.: ***É o diâmetro. Nós podemos relacioná-lo com quem?***

Isaura: ***Com o raio.***

Prof.: ***Com o raio. Como é que relacionamos o diâmetro com o raio?***

Isaura: ***É metade do raio.***

Prof.: ***É metade do raio. E tu não tens aqui metade do diâmetro? É metade do raio, não. É metade do diâmetro.***

Isaura: ***Sim.***

Prof.: ***E tu não tens aqui metade do diâmetro? Não tem aqui d a dividir por dois? Então isto aqui pode-se substituir por quê?***

Isaura: ***Raio.***

Prof.: ***Podes tirar o d sobre 2 e pôr r. Então põe lá. Área do círculo igual a quê?***

Isaura: ***π vezes raio ... vezes raio.***

Prof.: ***Consegues outra maneira de escrever isto*****?** (Aponto para $r \times r$.).

Isaura: 2 vezes r.

Prof.: ***Isso é raio mais raio.***

Isaura: ***Ajuda-me.*** Diz ao colega.

Prof.: ***Pensem lá.***

Entretanto, dou uma olhada ao Grupo IV, que está ao lado. Incentivo-os a experimentarem. Vou ao grupo VII que está com o mesmo problema que o grupo V.

Prof.: ***raio vezes raio é igual a quê?***

Celeste: ***raio ao quadrado.***

Prof. ***Então põe lá. O que é que acabaram de descobrir?***

Entretanto volto ao Grupo V para ver se já descobriram. Ainda não o tinham feito, de forma que lhes digo.

Prof.: ***Então não é raio ao quadrado?***

Isaura e Fausto: ***Ah!!!***

Prof.: ***Escrevam. Área igual a π vezes raio ao quadrado. O que é isto? É a fórmula para calcular a área do círculo.***

Os Grupos V e VII já tinham terminado o trabalho. **(7'15'')**. Dei-lhes indicações para escreverem o relatório da atividade. Tiro uma dúvida ao Grupo III, mas é inaudível na gravação. Dirijo-me ao Grupo II.

Prof.: ***Ora, vamos ver. Digam-me lá o que estiveram aqui a fazer.***

Dinis: ***Então, ó Professora, o meu tem 1, 2, 3, …***

Duarte (ao mesmo tempo que o Dinis): ***Estivemos a medir com a régua. 3 cm vezes 3,5. Depois 14 vezes 3,5 deu 11,5.*** (O cálculo está errado, é corrigido mais tarde)

Prof.: ***Mas tu fizeste com quantos triângulos?*** Conto os triângulos um a um (24). ***Mas tu não fizeste 24. Mas tu não tens aqui 24.*** Comparo com o trabalho do par.

Dinis: ***Tenho 12, é metade.***

Prof.: ***Então é só dividir para ficarem iguais. Então agora, diz-me lá uma coisa, ó Duarte. Quantas bases de triângulo é que ele tem aqui?***

Dinis: ***E assim, professora?***

Prof.: ***Só nos interessa aqui. Olha, que figura geométrica é esta?***

Dinis: ***Paralelo…***

Prof.: ***Paralelogramo. Como é que se calcula a área do paralelogramo? Escreve aqui. Área do paralelogramo.***

Dinis: ***Base vezes altura.***

Duarte (ao mesmo tempo): ***Altura vezes base.***

Prof.: ***Base vezes altura. Escreve lá. Escreve aqui em cima. Área do paralelogramo igual a base vezes altura.***

Entretanto, a Bela diz que já fizeram. Pergunto-lhes se obtiveram um polígono. Não se percebe bem a resposta delas. Aproximo-me para ver o polígono que obtiveram. A Bela diz que é um octógono. Conto os lados e verifico que não. Digo que não interessa e combinamos chamar-lhe um polígono. Combinamos que depois contam os lados para o classificarem.

Prof.: ***Este polígono está inscrito ou está circunscrito?***

Bela e Belmira: ***Inscrito na circunferência.*** Confundem.

Bela: ***Circunscrito.***

Prof.: ***Está inscrito numa circunferência? Os vértices são pontos da circunferência?***

Bela: ***Não.***

Prof.: ***Não. Os lados… são tangentes à circunferência. Então o polígono está circunscrito à circunferência. Então escrevam aqui: Polígono circunscrito à circunferência.***

Enquanto escrevem, viro-me para o Grupo II.

Prof.: ***Base vezes altura. O que é a base?***

Duarte: (inaudível)

Prof.: ***E nós estivemos a ver que eram 12. No círculo, quantos são? O que é no círculo?*** Conto-os dois a dois. ***O que é do círculo?***

Duarte: ***É metade.***

Prof.: ***Metade do círculo. Metade do perímetro, não é? E agora esta medida aqui? A altura do paralelogramo. Marca aqui esta medida.***

Duarte: ***Altura!?***

Silêncio.

Prof.: ***Altura do paralelogramo. Marca a altura do paralelogramo. Onde está?***

O Duarte aponta para o lado do paralelogramo.

Prof.: ***Esse é o lado do paralelogramo.*** De seguida aponta corretamente.

Prof.: ***Então vá. Desenha. Corresponde a quê?***

Dinis: ***Ao apótema.***

Prof.: ***Ao apótema. E quando tem muitos lados, o apótema é quase igual a quem?***

Duarte: ***À circunferência. A metade da circunferência. A metade do triângulo.***

Prof.: ***Não estamos a falar do triângulo.***

Duarte: ***É igual ao raio.***

Como estivessem todos a fazer muito barulho, tive que parar com este grupo para chamar a atenção da turma, lembrando-lhes que deveriam segredar. Regresso ao Grupo II.

Prof.: ***Explica-me lá. A base…***

Faço silêncio enquanto observo a turma para lhes recordar as regras.

Prof.: ***Vamos olhar para aqui. Base no paralelogramo é isto. O que é no círculo?***

Duarte: ***É o raio. Não. É metade do círculo.***

Duarte: ***Já sei como vou fazer, Professora. Então vamos calcular o raio, depois temos que ver quanto é que é a apótema… já sei.***

A minha intenção era que eles deduzissem a fórmula da área do círculo a partir da fórmula da área do paralelogramo. No entanto, talvez por o Dinis estar muito apegado à utilização do apótema, os alunos levaram-me para a sua dedução a partir da fórmula da área do polígono regular, depois de verificarem que todas as áreas eram equivalentes.

Deixei ir, ficava isto para explorar durante a discussão.

Prof.: ***Como é que escrevemos metade do círculo?***

Dinis: ***P barra… tracinho de fração e 2.***

Prof.: ***Vezes apótema que no círculo vai corresponder a quem?***

Duarte: ***Ao raio.***

Dinis: ***O raio é 4 cm.***

Prof.: ***Raio.***

Duarte: ***Vezes raio, Professora?***

Prof.: ***Tu não disseste que o apótema correspondia ao raio?***

Duarte: ***É igual ao apótema.***

Prof.: ***Pronto.***

Duarte: ***Mas o raio não é igual ao apótema.***

Prof.: ***Hã?***

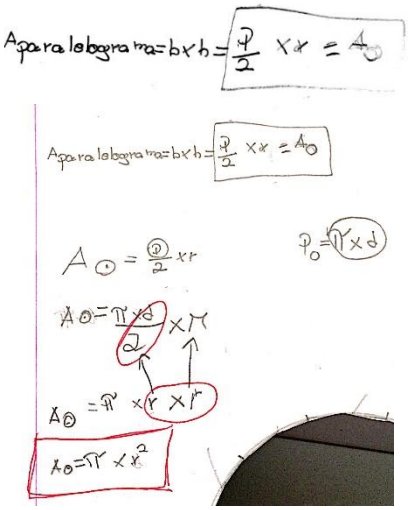


Figura 17: Registo do Grupo II, relativo à equivalência das áreas das três figuras (em cima).

Duarte: ***Mas o raio não igual ao apótema.***

Prof.*: Mas neste caso vai ser. Quando o polígono regular inscrito tem muitos, muitos lados, quase que é … igual ao apótema. O raio é quase igual ao apótema. Estás a perceber? Por isso, vamos desprezar essa diferença e vamos pô-los iguais. Por isso é que vocês fizeram com muito triângulos. Dividiram o polígono em muitos triângulos. Estão a perceber? Sim ou não?*
Duarte*: Sim.*
Prof.*: Portanto, aqui no paralelogramo que vocês fizeram, esta parte debaixo corresponde a quê? A metade…*
Duarte*: do círculo.*
Prof.*: A metade do perímetro do círculo. E a altura do paralelogramo corresponde a quê do círculo?*
Duarte e Dinis*: Ao raio.*
Prof.*: Se for do polígono regular é que é ao apótema. Vamos fazer de conta que o apótema é igual ao raio, certo? E sabemos que… comparem esta área com esta.*
Duarte*: Esta com esta? Então é igual.*
Dinis*: É igual.*
Prof.*: Porquê?*
Duarte: ***Porque aqui os triângulos são maiores, mas se dividirmos…***
Dinis (ao mesmo tempo): ***Porque aqui os triângulos são maiores, mas se cortarmos fica igual.***
Prof.*: Então a área é igual à área do círculo.*

O raciocínio que fizemos de seguida foi análogo ao já feito anteriormente com o Grupo V, por isso não se repetiu aqui. Durante este trabalho confundem a fórmula da área do perímetro do círculo com outras fórmulas. Peço a um colega de outro grupo para a dizer. De seguida, fazemos as substituições adequadas nessa fórmula para encontrar a fórmula da área do círculo. Manifestam muitas dificuldades na substituição. Procedemos depois à simplificação da expressão obtida. Manifestam também muitas dificuldades. Depois de várias vezes a repetir, lá percebeu. Cometem um erro relacionado com a equivalência de potências com produtos.

Faço o mesmo trabalho com o Grupo III. Entretanto, o Duarte pergunta se podem calcular a área com a fórmula. Digo que podem. No Grupo III também confundem as medidas, apótema com raio, diâmetro com raio. Entretanto, o Duarte encontra um valor para a área e surpreende-se por ter encontrado um valor diferente. O Dinis repara que o trabalho que estamos a fazer no Grupo III é semelhante ao feito com eles. Desanimo com tanta asneira e dirijo-me a outro grupo. Deixo o gravador na mesa do Grupo III para saber como se desenvencilharam. Preocupadas, perguntam ao Grupo II. Regresso e pergunto se já sabem. Continuamos o trabalho de relação entre as fórmulas. **(28'14'').** Toca para a saída. Digo para a turma que ninguém sai. Entretanto termino este trabalho com o Grupo III. Pela mesma razão, também não se reproduz aqui. Entretanto o Grupo II diz o resultado a que chegou com a fórmula. Faço este trabalho com os outros grupos. Dirigi-me ao Grupo IV para me inteirar do que tinham feito. Não tinham feito mais nada, entretanto. Dirigi-me ao Grupo VII e eles disseram-me que valor tinham encontrado para a área do círculo. Perguntam-me se podem sair. Digo que não. Zango-me com alguns grupos, ou porque não se envolveram convenientemente ou porque não realizaram trabalho produtivo. Digo-lhes a ordem com que vão apresentar os trabalhos no dia seguinte, e manifesto a minha esperança de que corra melhor no dia seguinte e eles mostrem mais interesse. Recolho as folhas de trabalho e os geoplanos.

12.3. Episódio 3 – Constituído pela aula de término dos trabalhos pelos Grupos IV e VI e escrita dos relatórios de todos os grupos.

Aula n.º 107

Duração: 36'00"

Os primeiros minutos da aula foram utilizados na escrita do sumário da aula anterior e na fotografia dos trabalhos. Esqueci-me de transportar o gravador, de forma que não se percebem bem os diálogos que fomos tendo. Ouvem-se bem as minhas intervenções e mal as intervenções dos alunos. A partir dos 13' de gravação já nem as minhas se ouvem distintamente. Eles hoje estavam muito mais calmos e interessados no trabalho. Fui fazendo o ponto de situação em cada grupo: cinco grupos já tinham encontrado um valor aproximado para a área do círculo, mas os grupos IV e VI ainda estavam longe disso. Disse-lhes que não teriam nada de jeito para mostrar à turma aquando da apresentação dos trabalhos. Perguntaram se podiam completar o trabalho durante a aula. Como tínhamos duas aulas seguidas, permiti que o fizessem, solicitando-lhes ainda, e aos outros grupos, que escrevessem o relatório para facilitar a

apresentação. Estes dois grupos, trabalharam nesta aula o que não fizeram na anterior. Todos os grupos conseguiram realizar o trabalho na íntegra.

Aproximei-me do Grupo VI e revimos as conclusões a que já tinham chegado: A área do quadrado circunscrito era 65 cm^2 e a área do quadrado inscrito era 30,8 cm^2, mas o nosso objetivo era calcular a área do círculo. Perguntei-lhes se estas medidas eram as mais exatas que podiam encontrar para a área do círculo. Passado alguns minutos chamaram-me novamente a disseram que já sabiam como fazer. Quando explicaram, pareceu-me que seguiam o raciocínio de outros pares/grupos. Mas quando me estava a certificar da sua estratégia, apercebi-me que tinha percebido mal. Os alunos queriam calcular a diferença entre as áreas dos dois quadrados e tinham dúvidas se a poderiam dividir por dois, para, de seguida, somar metade à área do quadrado inscrito estimando, assim, a área do círculo. Concordei que nada nos dizia com certeza que era metade, mas aparentemente parecia assim ser e como procurávamos um valor aproximado, podiam partir desse princípio.

Assim fizeram (ver Figura 18, a vermelho).

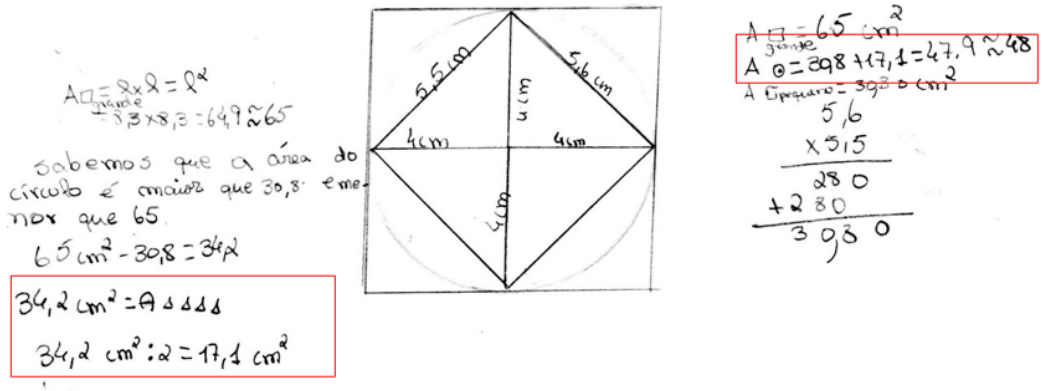


Figura **18**: Trabalho do Grupo VI ao fim da terceira aula, encontrando para a área do círculo o valor de 48 cm^2.

Apesar de não ser audível na gravação o trabalho que o Grupo VI fez, ouve-se o seguinte diálogo entre mim e um dos elementos:

> **(29'49'') Rui: (…)** ***e é metade de cada um.***
> **Prof.***: Depois que é que vocês fizeram?*
> **Rui***: Somamos a área do quadrado pequeno com metade da área do triângulo e deu-nos a área do círculo.*
> **Prof***: Portanto o quadrado pequeno é o quadrado inscrito.*

Pensava que já tínhamos esgotado todas as possibilidades. Fiquei surpreendida por ainda encontrarem mais uma nova forma de calcular um valor aproximado para a área do círculo. Portanto, todos os grupos foram traçando o seu caminho, de tal forma que no final, todos tinham algo diferente para contar e para acrescentar. E chegaram por vias diferentes ao resultado.

Percebi o que tinham feito e dirigi-me para outro grupo.

Durante esta aula, fui tirando algumas dúvidas dos outros grupos na escrita dos relatórios, quando tinham dificuldade em encontrar as palavras/frases adequadas, o que aconteceu poucas vezes.

O Grupo IV valeu-se das posições em que cada elemento tinha colocado os quadrados inscritos, sobrepondo-os num desenho e aperceberam-se que podiam encher o círculo com um polígono regular. Marcaram os pontos vértices do polígono na circunferência e desenharam-no. De seguida, calcularam a sua área e apresentaram este valor como a área aproximada do círculo: 48 cm^2. O trabalho subsequente deste grupo encontra-se na Figura 19. Do lado esquerdo o relatório.

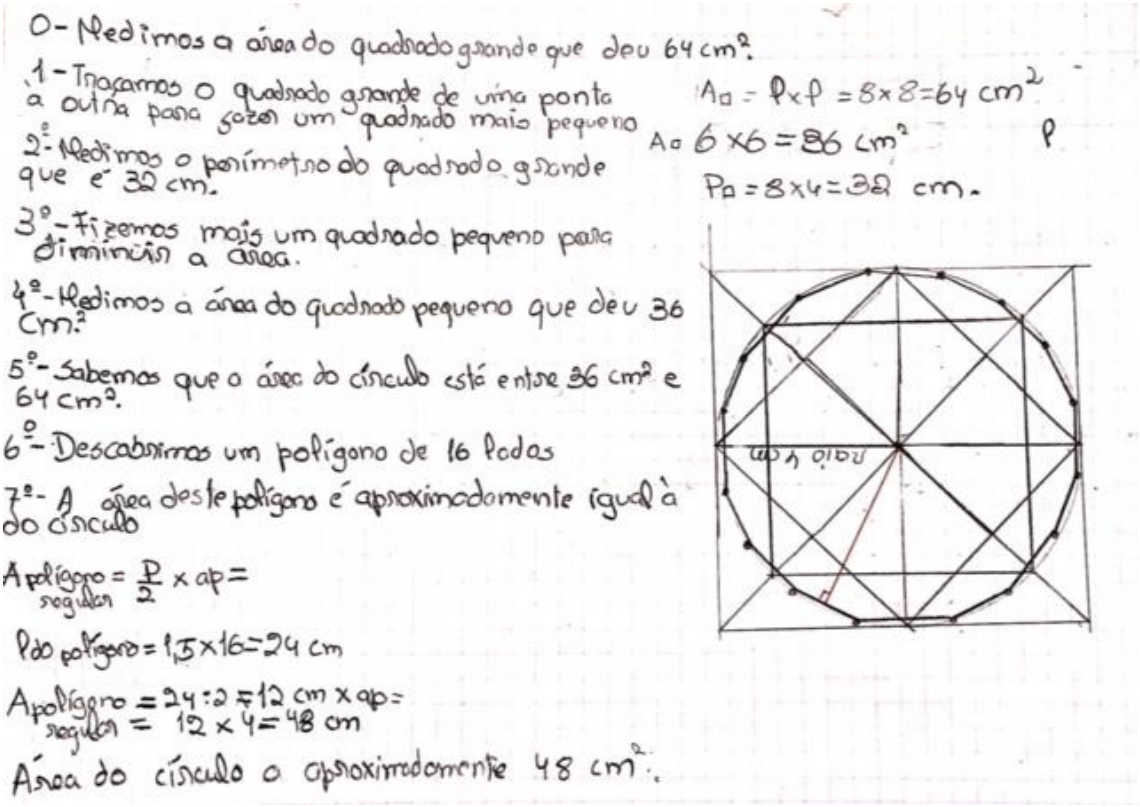


Figura **19**: Trabalho do Grupo IV ao fim da terceira aula.

À medida que os grupos iam encontrando um valor aproximado para a área do círculo, eu ia deduzindo a fórmula da área do círculo a partir da fórmula da área de um polígono regular tendo conseguido fazê-lo nos Grupos I, III, V e VII (exemplo na Figura 20, no registo do trabalho do Grupo I).

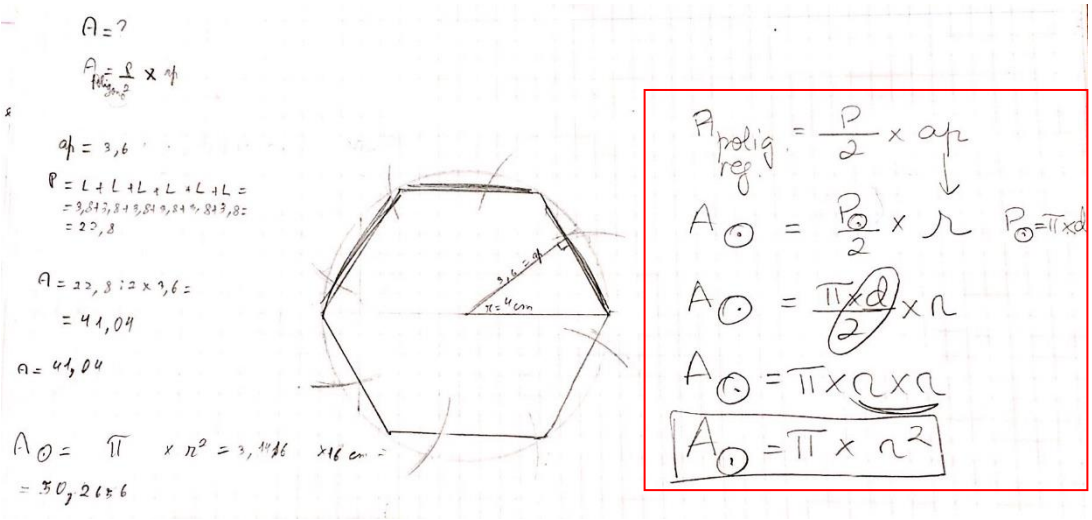


Figura **20**: Dedução da fórmula da área do círculo a partir da fórmula da área do polígono regular.

A Figura 21 mostra os valores aproximados para a área do círculo de raio igual a 4 cm a que chegaram os diferentes grupos e o valor encontrado pela utilização da fórmula, com $\pi \approx 3,1416$.

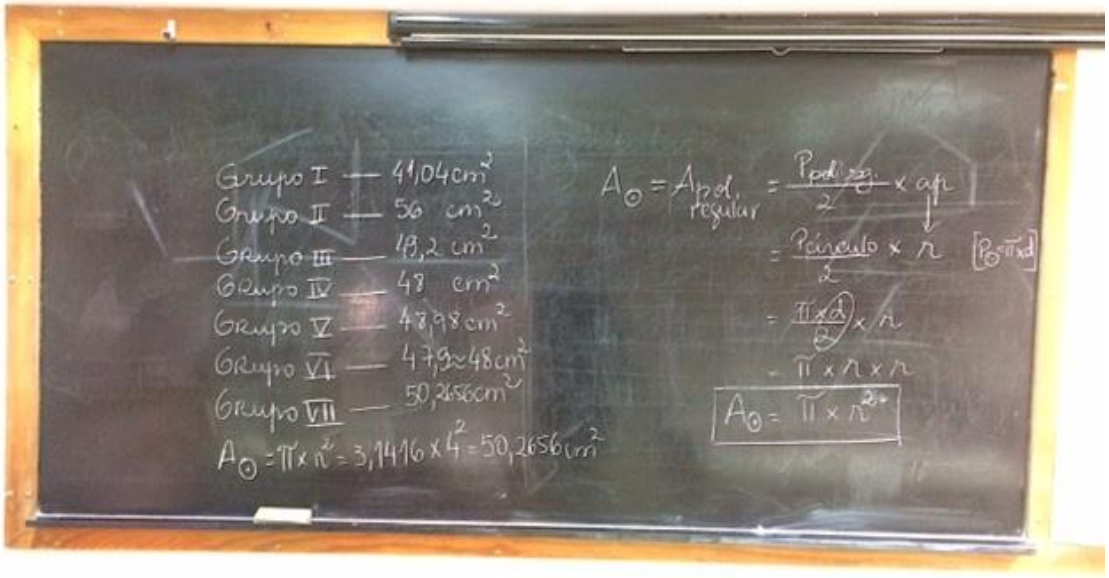


Figura **21**: Foto do quadro preto com os diferentes valores para as áreas encontradas pelos grupos para a área do círculo de raio 4 cm e o seu valor encontrado com a fórmula.

A Figura 22 mostra a tabela-resumo das fórmulas das áreas totalmente preenchida.

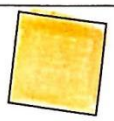
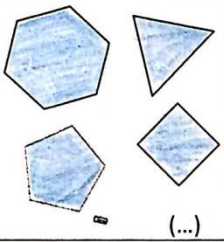
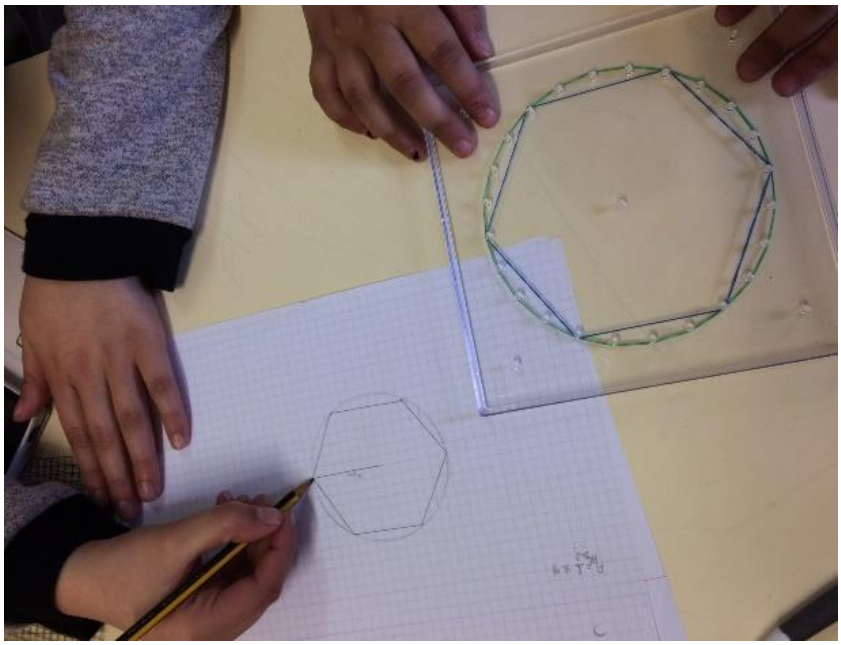
Fórmulas - Áreas e perímetros de figuras planas			
Figura plana		Perímetro (exemplo)	Área (exemplo)
Representação visual	Linguagem natural		
	Triângulo	$P_\triangle = l + l + l$	$A_\triangle = \frac{b \times h}{2}$
	Quadrado	$P_\square = l + l + l + l$ $P_\square = 4 \times l$	$A_\square = l \times l$ $A_\square = l^2$
	Retângulo	$P_\square = l + l + c + c$ $P_\square = 2 \times l + 2 \times c$ $P_\square = (c \times l) \times 2$	$A_\square = c \times l$
	Paralelogramo	$P_\square = l + l + l + l$ $P_\square = 2 \times b + 2 \times l$ $P_\square = (b \times l) \times 2$	$A_\square = b \times h$
 (...)	Polígonos Regulares	Somar todos os lados ou multiplicar a medida do lado pelo número de lados	$A_{polígono\ regular} = \frac{P}{2} \times ap$
	Círculo	$P_\odot = \pi \times d$ $P_\odot = \pi \times r \times 2$	$A_\odot = \pi \times r^2$

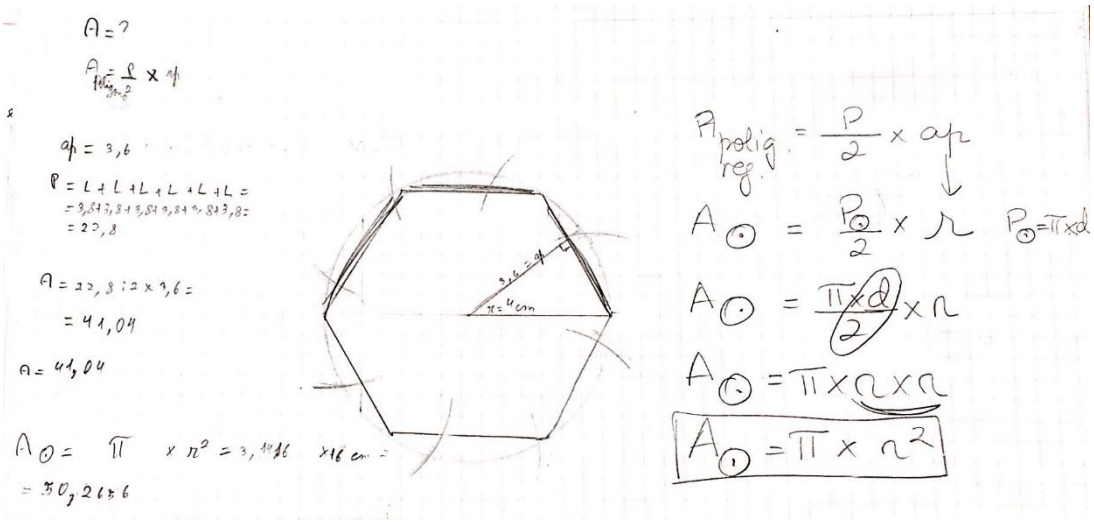
Figura **22**: Tabela-resumo das fórmulas das áreas e perímetros de figuras planas totalmente preenchida

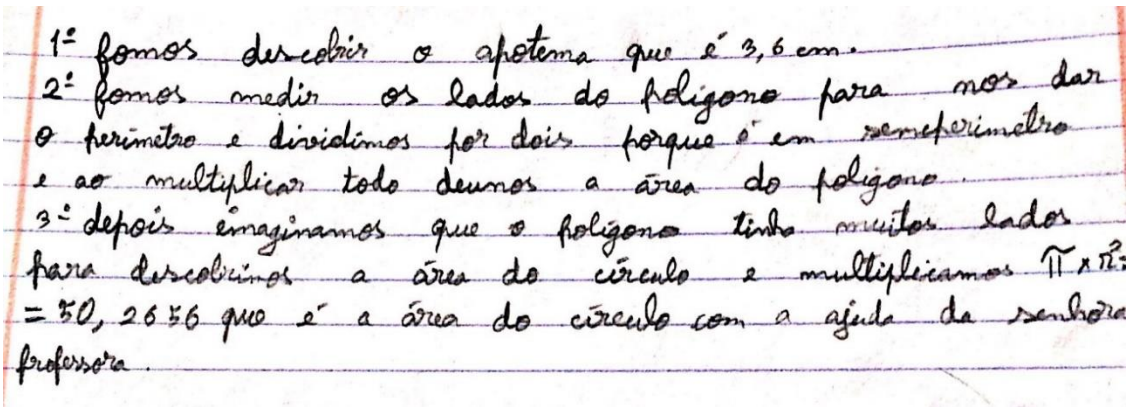
ANEXO A

Trabalhos dos diferentes grupos em duas fases da resolução do problema e relatório respetivo.

Desempenho do Grupo I

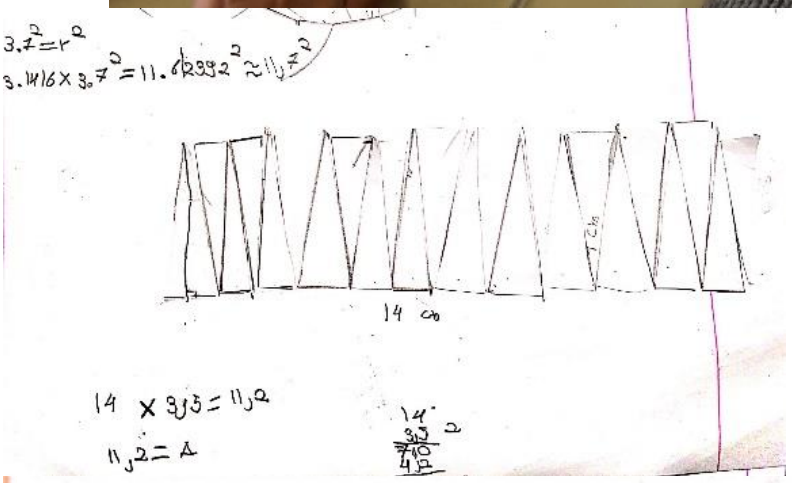






1º fomos descobrir o apotema que é 3,6 cm.
2º fomos medir os lados do poligono para nos dar o perimetro e dividimos por dois porque é em semiperimetro e ao multiplicar todo deumos a área do poligono.
3º depois imaginamos que o poligono tinha muitos lados para descobrimos a área do círculo e multiplicamos π × r² = 50,2656 que é a área do círculo com a ajuda da senhora professora.

Desempenho do Grupo II

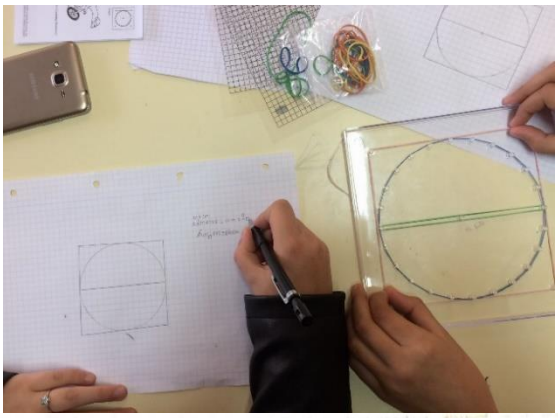


Nota:

Neste trabalho, os alunos utilizaram um valor incorreto para o raio e efetuaram mal os cálculos. Estes foram corrigidos na aula seguinte, depois de dado o feedback. O relatório contém a correção feita.

Em primeiro lugar fiz um poligono regular com 24 lados inscrito a figura.
Depois dividi o poligono regular em 24 triângulos.
De seguida recortei esses 24 triângulos e fiz uma figura que se chama paralelogramo.
Depois medi a base do paralelogramo que me deu 14 cm e seguida medi a altura que me deu 4 cm.
Depois com as medidas do paralelogramo multiplicamos 14 cm por 4 cm e deu-nos 56 cm.
Então o 56 cm é a Área.

Desempenho do Grupo III



$A_{\triangle} = b \times a : 2 =$

$= 3{,}5 \times 1{,}6 : 2 = 2{,}8\,cm^2$

$2{,}8 \times 4 = 11{,}2\,cm^2$

$A_{\square} - A_{\triangle\triangle\triangle\triangle} = AO$

$64 - 11{,}2 = 52{,}8\,cm^2$

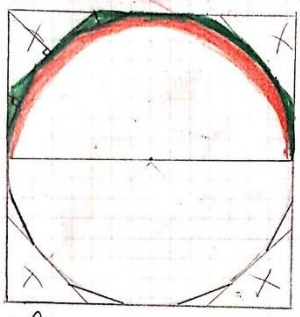
$AO = 52{,}8 - 3{,}6 = 49{,}2\,cm^2$

$b_{\triangle\ pequeno} = 1{,}8cm$

$a_{\triangle\ pequeno} = 0{,}5\,cm$

$a_{\triangle} = 1{,}8 \times 0{,}5 : 2 = 0{,}45$

$0{,}45 \times 8 = 3{,}6\,cm^2$



polígono circunscrito à circunferência

① $r = 4cm$

$d = 8cm = l_{\square}$

$A_{\square} = 8 \times 8 = 64\,cm^2$

Apolígono regular $= \frac{p}{2} \times ap$

$A_O = \frac{p}{2} \times r \qquad P_O = \pi \times d$

$A_O = \frac{\pi \times d}{2} \times r$

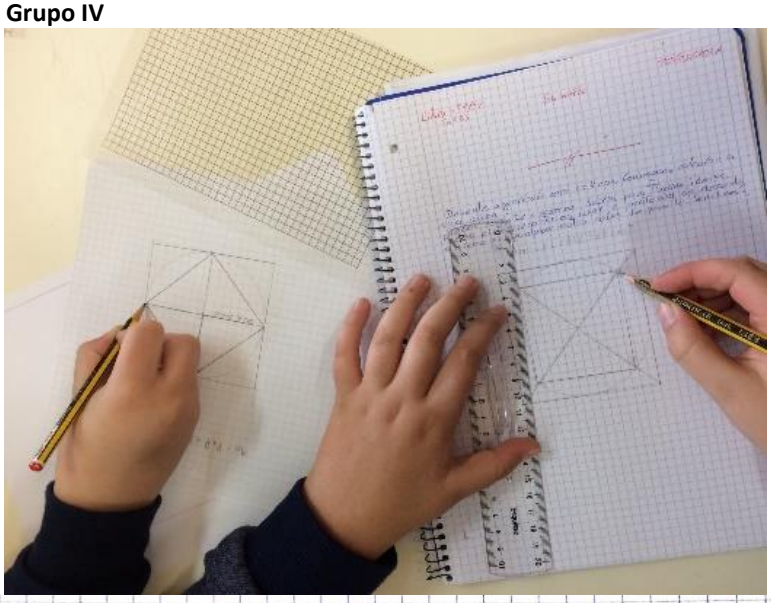
$A_O = \pi \times r \times r$

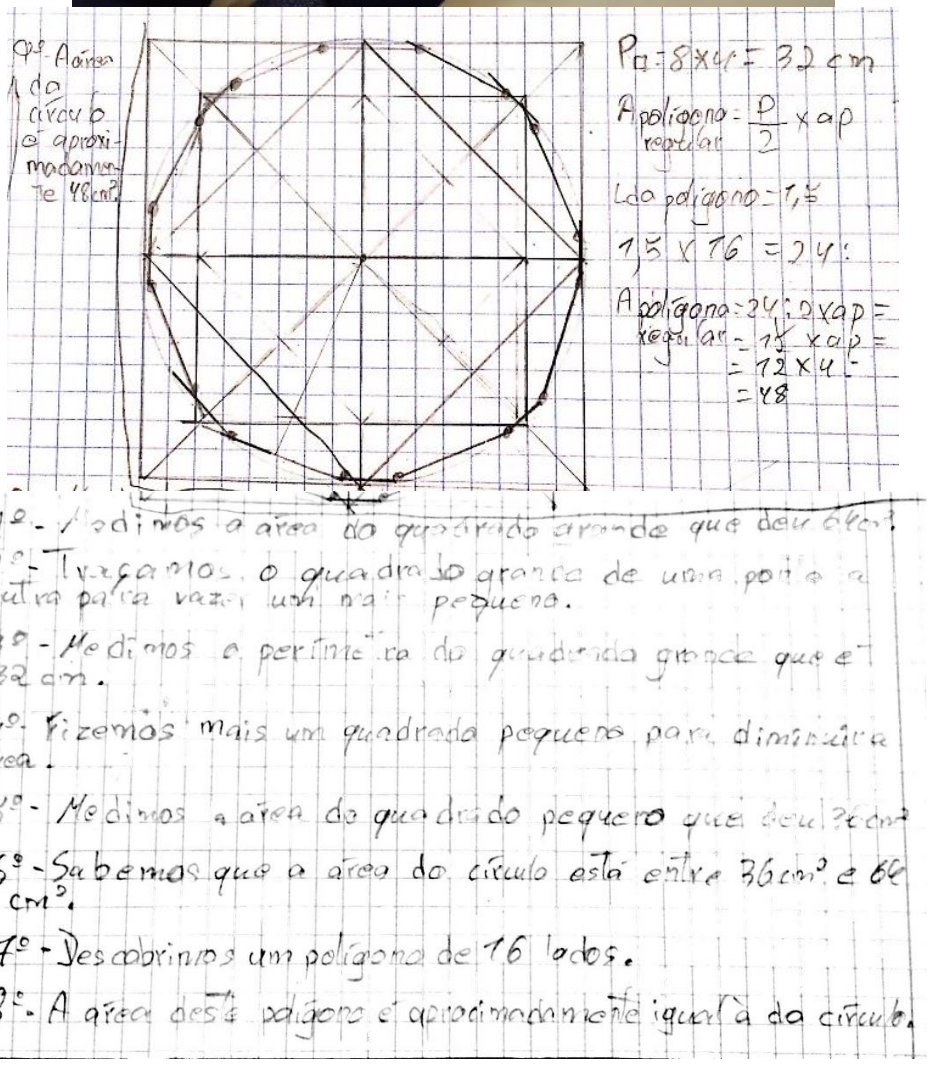
$\boxed{A_O = \pi \times r^2}$ $AO = 3{,}1416 \times 16 =$

$= 50{,}2656cm$

(1.) Para começar, fizemos o círculo com 4cm de raio.
Depois, de muito pensarmos decidimos fazer o círculo inscrito num polígono regular. E o polígono regular que escolhemos foi o quadrado.
Depois descobrimos que a medida do diâmetro é 8cm, pois é o dobro do raio. E de seguida, verificamos que o diâmetro era a medida igual ao lado do quadrado.
Como o quadrado tem os lados iguais, então se um mede 8cm, os outros todos também medem. Então saber a área do quadrado é 8x8 = 64 cm².
Depois na figura haviam uns triângulos. E decidimos calcular. Então, para se multiplicar a área de um triângulo temos de multiplicar a base x a altura : 2. A base media 3,5 e a altura media 1,6. Multiplicamos essas medidas e depois dividimos por 2. E deu 2,8 cm². Como eram 4 triângulos, multiplicamos 2,8 por 4. E como resultado deu-nos 11,2 cm².
Depois, fomos à área do quadrado e subtraímos pela área dos triângulos que vai dar a área do círculo. Então 64 cm² - 11,2 cm² = 52,8 cm².
Nós depois, reparamos que ainda haviam triângulos pequenos e fizemos o mesmo. E deu-nos 49,2 cm².
Subtraímos à área do quadrado as áreas dos 12 triângulos e deu-nos 49,2 cm².
Através da fórmula, que a professora nos ensinou confirmamos o nosso resultado.

Desempenho do Grupo IV





1º - Medimos a área do quadrado grande que deu 64cm².

2º - Traçamos o quadrado grande de uma ponta a outra para virar um mais pequeno.

3º - Medimos o perímetro do quadrado grande que é 32 cm.

4º - Fizemos mais um quadrado pequeno para diminuir a área.

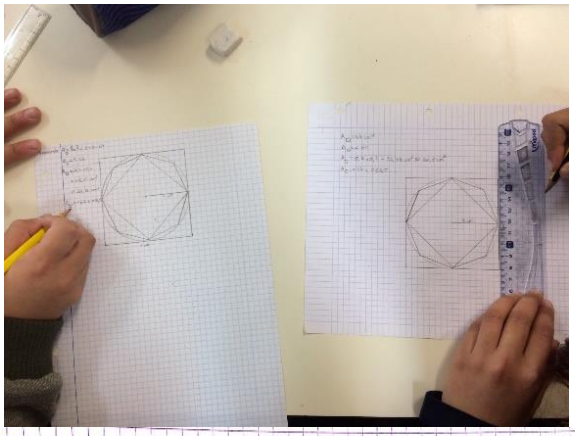
5º - Medimos a área do quadrado pequeno que deu 32cm²

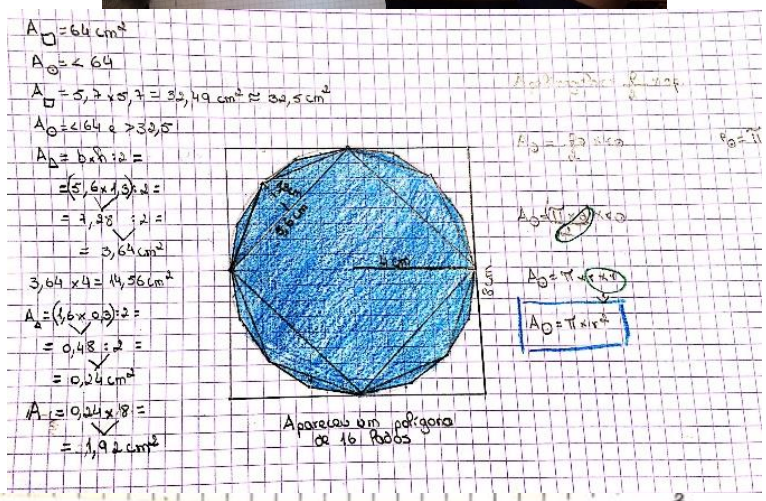
6º - Sabemos que a área do círculo está entre 36cm² e 64 cm².

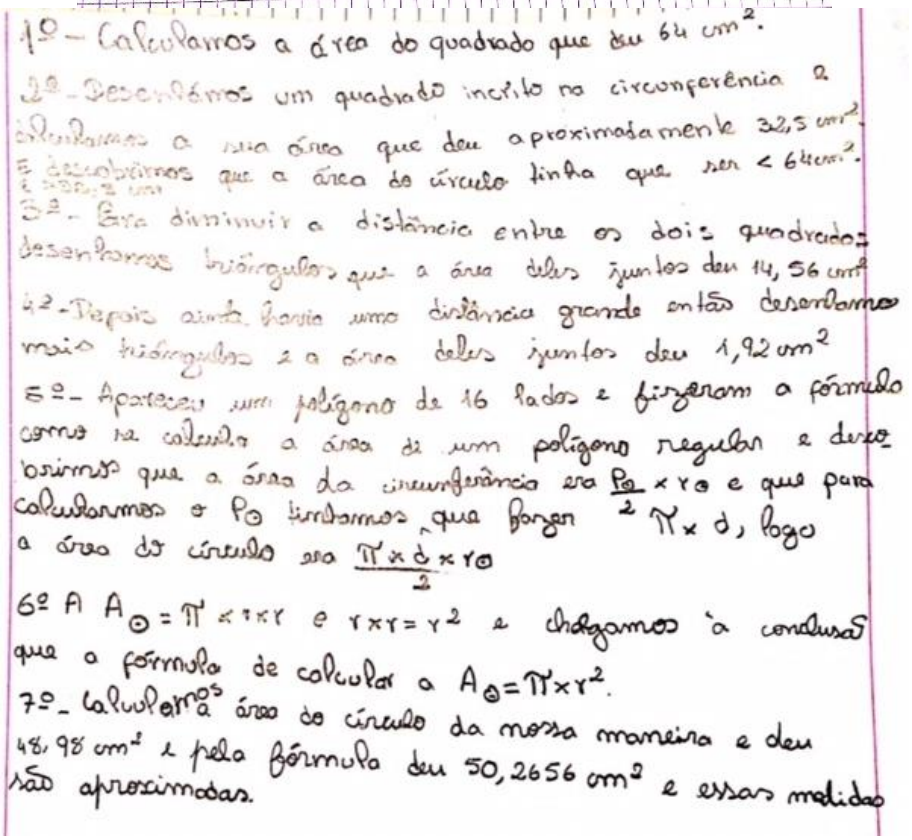
7º - Descobrimos um polígono de 16 lados.

8º - A área deste polígono é aproximadamente igual à do círculo.

Desempenho do Grupo V







1º - Calcularmos a área do quadrado que deu 64 cm^2.

2º - Desenhamos um quadrado inscrito na circunferência e calculamos a sua área que deu aproximadamente 32,5 cm^2. E descobrimos que a área do círculo tinha que ser < 64 cm^2.

3º - Era diminuir a distância entre os dois quadrados desenhamos triângulos que a área deles juntos deu 14,56 cm^2

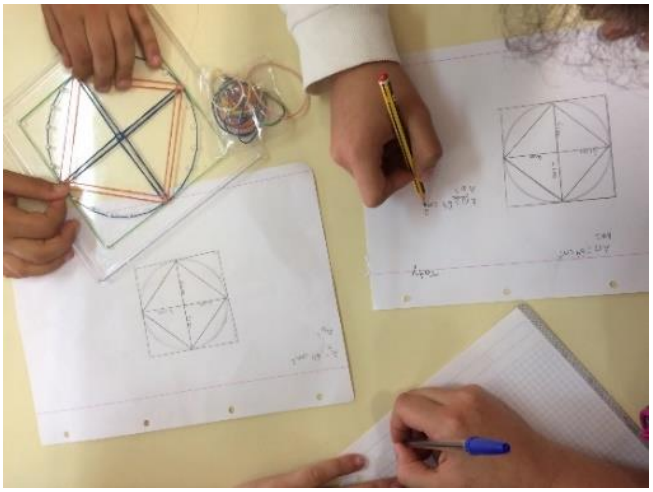
4º - Depois ainda havia uma distância grande então desenhamos mais triângulos e a área deles juntos deu 1,92 cm^2

5º - Apareceu um polígono de 16 lados e fizeram a fórmula correta para calcular a área de um polígono regular e descobrimos que a área da circunferência era $\frac{P_{\odot} \times r_{\odot}}{2}$ e que para calcularmos o $P_{\odot}$ tínhamos que fazer $\pi \times d$, logo a área do círculo era $\frac{\pi \times d \times r_{\odot}}{2}$

6º A $A_{\odot} = \pi \times r \times r$ e $r \times r = r^2$ e chegamos à conclusão que a fórmula de calcular a $A_{\odot} = \pi \times r^2$.

7º - Calculamos a área do círculo da nossa maneira e deu 48,98 cm^2 e pela fórmula deu 50,2656 cm^2 e essas medidas são aproximadas.

Desempenho do Grupo VI



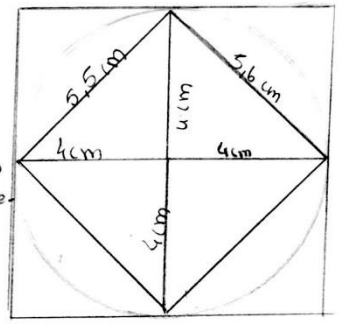
$A_{\square\,grande} = l \times l = l^2$
$= 8{,}3 \times 8{,}3 = 64{,}9 \approx 65$

sabemos que a área do círculo é maior que 30,8 e menor que 65

$65\ cm^2 - 30{,}8 = 34{,}2$

$34{,}2\ cm^2 = A\ \Delta\Delta\Delta\Delta$

$34{,}2\ cm^2 : 2 = 17{,}1\ cm^2$



$A_{\square\,grande} = 65\ cm^2$
$A_{\odot} = 30{,}8 + 17{,}1 = 47{,}9 \approx 48$
$A_{\square\,pequeno} = 30{,}80\ cm^2$

$$\begin{array}{r} 5{,}6 \\ \times\ 5{,}5 \\ \hline 280 \\ +\ 280 \\ \hline 30{,}80 \end{array}$$

1º - calculamos a área do quadrado circunscrito à circunferência.

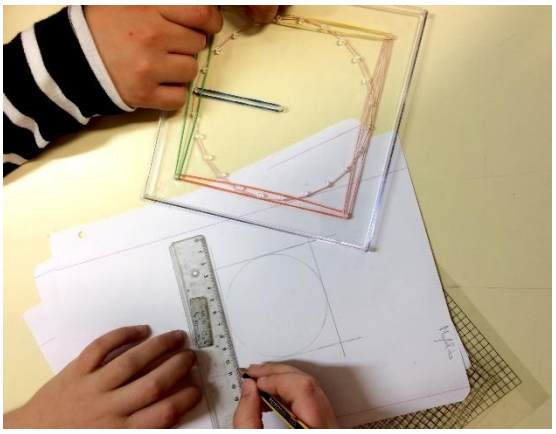
2º - calculamos a área do quadrado inscrito à circunferência.

3º - A área circunscrito subtraímos a área do inscrito e deu-nos a medida dos quatro triângulos.

4º - A medida dos 4 triângulos dividimos por 2, que é a metade de cada um

5º - A área do quadrado inscrito somamos a metade de cada triângulo que nos deu a área do círculo.

Desempenho do Grupo VII



$A_{polígono\ regular} = \frac{Perímetro \times ap}{2}$

$A_{círculo} = \frac{Perímetro \times r}{2}$

$A_{círculo} = \frac{\pi \times d}{2} \times r$

$C = \pi \times d$

$\frac{d}{2} = r$

$\therefore A_{círculo} = \pi \times r \times r$

$r \times r = r^2$

$A_{círculo} = \pi \times r^2$

$AO = 3,1416 \times 4^2$

$= 50,2656\ cm^2$

* a área do quadrado era maior e não com pequimos excluir a diferença dos espaços em branco.

$AO = 3,1416 \times 4^2$

$= 50,2656\ cm^2$

Começamos por desenhar um quadrado circunscrito na circunferência mas abandonamos a ideia porque queríamos tentar saber a área do quadrado e com isso descobrimos a área do círculo mais *.

Depois pequimos pela área do polígono regular que é semi círculo vimos o apótema. O apótema no círculo corresponde ao raio ou seja a área do círculo é perímetro sobre 2 vezes o raio. O perímetro do círculo é $\pi \times d$ por isso o P de perímetro é substituído pela fórmula $\pi \times d$. Neste caso a Ao fica $\frac{\pi \times d}{2} \times r$. O diâmetro sobre 2 é igual ao raio então a área do círculo é = a $\pi \times r \times r$. Raio x raio é igual a r^2 então a fórmula para calcular a Ao é $\pi \times r^2$.

Dificuldades: Descobrir o $\frac{P_o}{2}$ e descobrir o diâmetro sobre 2.

Apêndice 6 – Narração Multimodal 6 (NM6) – Apresentação dos trabalhos

1. Contexto

A turma é constituída por dezassete alunos com idades compreendidas entre os onze e os treze anos. Um dos alunos apresenta retenções anteriores. As aulas de Matemática decorrem habitualmente numa sala normal de aulas como a sala da Figura 1, com uma frequência de quatro ou cinco aulas semanais, duas das quais são consecutivas.

Data: 16 de março de 20XX
Aula n.º 108
Sumário: Apresentação dos trabalhos.
Hora de início das aulas: 9:15h
Tempo da gravação: 43'33''

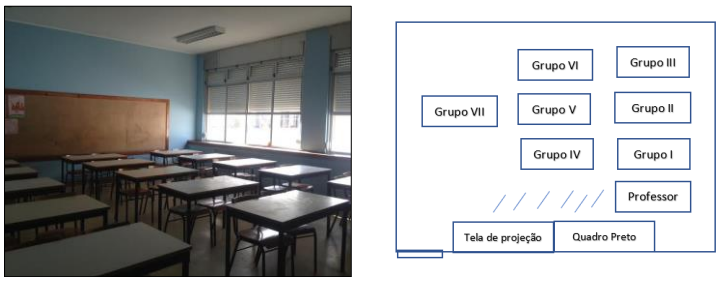


Figura 1: Sala X onde decorreu a aula e planta da sala

O domínio em lecionação foi "Geometria e Medida", o subdomínio "Área" e o conteúdo, a fórmula para a área do círculo. Era o último subconteúdo deste conteúdo a ser lecionado. Os grupos ocuparam os mesmos lugares que tinham ocupado durante a realização da tarefa sendo distribuídos pelo espaço como se vê na Figura 1. O espaço por onde eu circulei durante a atividade encontra-se a tracejado na figura. Todos os nomes dos alunos são fictícios.

2. Síntese da aula

Esta aula foi dedicada à apresentação dos trabalhos realizados nas aulas anteriores (ver NM4) com o último objetivo de lecionar a fórmula para a área de um círculo.

3. Descrição do Episódio – Narra a apresentação dos resultados a que chegou cada par/grupo de alunos, que ocorreu na aula n.º 108 e a discussão que foi acontecendo ao longo da apresentação.

Duração: 43'33''

(Início: 37'43" de 1h21'16'')

Depois do intervalo, os alunos vão entrando na sala. Ao início, a gravação está um pouco confusa, porque o gravador ficou em cima da secretária, de forma que as conversas entre os grupos se confundem. Tivemos a presença de uma professora do mesmo grupo disciplinar, por isso os primeiros momentos foram para a inteirar do trabalho efetuado e preparar a sala para a projeção, pois é preciso escurecer a sala para aumentar o contraste na imagem projetada e obter-se alguma nitidez. Comecei por pedir aos alunos para dizerem o problema que eu lhes tinha proposto na primeira aula. Como vários alunos quisessem responder, optei por dar a palavra a uma.

Belmira: ***Posso dizer, Senhora Professora?***

Prof.: ***Diz lá, Belmira.***

Belmira: ***A Stôra mandou-nos desenhar um círculo com um raio de 4 cm e tínhamos que descobrir a área.***

Prof.: ***Não tinham aprendido a fórmula ainda e podiam fazer o que quisessem.***

Fiz uma breve revisão de como tínhamos organizado os pares/grupos e a forma como depois integramos os alunos que estiveram ausentes na primeira aula. Tendo por base um PowerPoint que tinha construído especificamente para esta aula (Anexo A), comecei então por me referir ao trabalho dos Grupos I e VII. Ambos começaram por inscrever um polígono no círculo. Embora a estratégia dos Grupos I e VII tivesse seguido caminhos diferentes, resolvi agrupar a sua apresentação (Figura 2) uma vez que tinham um começo semelhante e o seu desenvolvimento complementava-se. O trabalho do Grupo I era muito baseado na concretização e o trabalho do Grupo VII na abstração. Assim, logo de início dávamos aos presentes uma perspetiva do filme todo, digamos assim. Com a apresentação dos outros grupos, veríamos semelhanças, mas também diferenças durante a resolução.

Mal comecei a apresentação, pareceu-me que tinha agrupado mal estes dois grupos, pois fixei-me na proposta inicial do Grupo VII em circunscrever um quadrado ao círculo, mas o Grupo abandonou esta estratégia. Para a apresentação dos trabalhos resolvi ignorar este passo e fixar-me na estratégia efetivamente escolhida pelos grupos. No entanto, esqueci-me disso momentaneamente, daí esta confusão inicial.

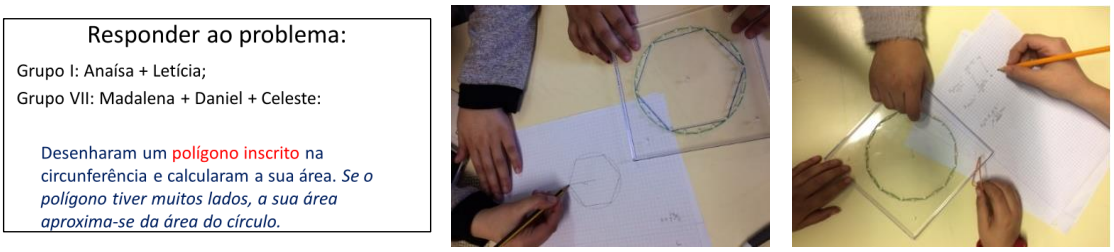


Figura 2: Estratégia iniciada pelos Grupos I (ao centro) e VII (à direita)

Resolvi, falar apenas do Grupo I. Dei-lhes a palavra e os alunos desse grupo explicaram o que tinham feito, mas muito resumido, pois leram o relatório (Figura 3) e faltava-lhes a parte inicial.

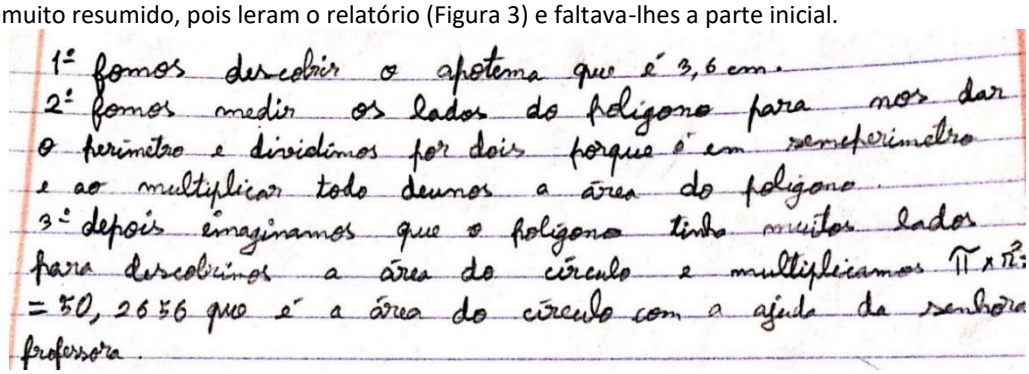

1º fomos descobrir o apotema que é 3,6 cm.
2º fomos medir os lados do poligono para nos dar o perimetro e dividimos por dois porque é em semiperimetro e ao multiplicar todo deunos a área do poligono.
3º depois imaginamos que o poligono tinha muitos lados para descobrimos a área do círculo e multiplicamos $\pi \times \pi^2$ = 50, 2656 que é a área do círculo com a ajuda da senhora professora.

Figura 3: Relatório elaborado pelo Grupo I que lhes serviu de base à apresentação.

Começaram por dizer que primeiro foram descobrir o apótema. Interrompi-as.

Prof.: ***Antes disso. Têm que contar o que fizeram desde o início.***

Prof. de Apoio: ***É que eu não estive cá. Não vi. Não sei o que aconteceu.***

Prof.: ***Usaram o geoplano e desenharam o quê?***

Grupo I: ***Um polígono.***

Anaísa: ***Desenhámos um polígono inscrito na circunferência*** (Figura 2, ao centro) ***e depois fizemos o semiperímetro, o apótema e o raio.***

Prof.: ***Porque pensaram: Bem, a área do polígono regular vai ser parecida com a área do círculo.***

Anaísa: ***Deu-nos 41,4, a área do polígono e depois fomos deduzindo para chegar à área do círculo e deu-nos*** $\pi \times r^2$.

Prof.: ***Como é que chegaram a*** $\pi \times r^2$***?***

(Silêncio)

Prof.: ***Fui eu que vos ajudei a descobrir essa fórmula.***

Anaísa: ***Sim. Depois calculamos e deu-nos 50, 2656.***

Prof.: ***E… compararam os dois valores. Portanto, a diferença ainda é de …***

(Silêncio)

Prof.: ***Uma deu 50 e a primeira tinha dado 41. Ainda é uma diferença de 9. Ainda é uma diferença muito grande. Por quê esta diferença tão grande? Qual foi o polígono que vocês fizeram?***

Anaísa: ***Um hexágono.***

Prof.: ***Um hexágono, estão a ver? Elas fizeram as contas com um hexágono. Por isso essa diferença é para estes espacinhos aqui, estão a ver?*** (Aponto, no geoplano, para os espaços que se veem entre a fronteira do hexágono e a circunferência). ***Se elas tivessem feito com outro, por exemplo dividido cada um dos lados em 2, ficava um polígono com 12 lados e a diferença já era menor. Perceberam todos?***

Alguns: ***Sim.***

Projetei o trabalho deste grupo para mostrar todo o processo e os cálculos que tinham feito (Figura 4). Durante a apresentação, tive necessidade de ir clarificando algumas coisas. Eu lembrava-me melhor que elas do percurso que tinham feito, o que também se verificou com outros grupos.

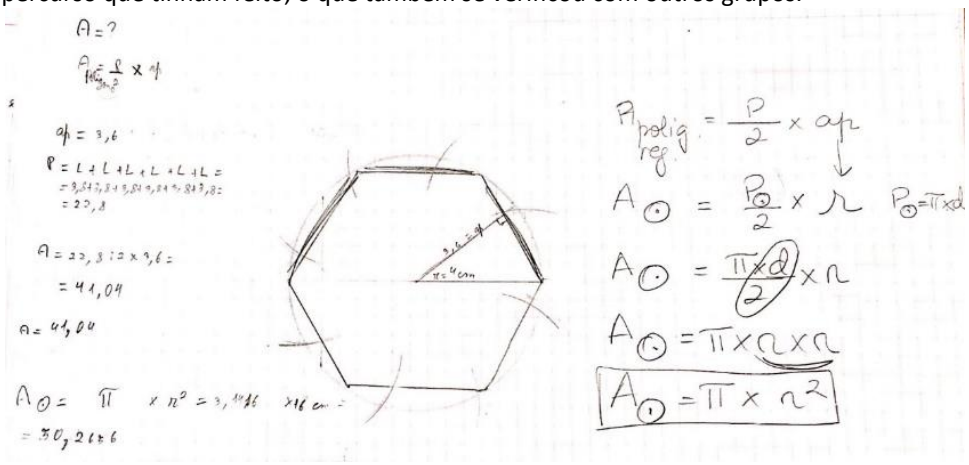


*Figura **4***: Trabalho do Grupo I.

Quando passei ao trabalho do Grupo VII, apercebi-me que realmente o que tinha posto no PowerPoint não estava errado, como tinha suposto inicialmente: O Grupo VII tinha começado com um quadrado circunscrito, mas abandonara esta ideia (Figura 5) por não saberem calcular os espaços nos vértices do quadrado.

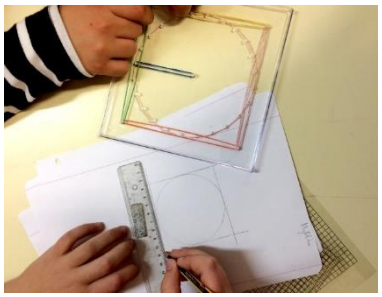
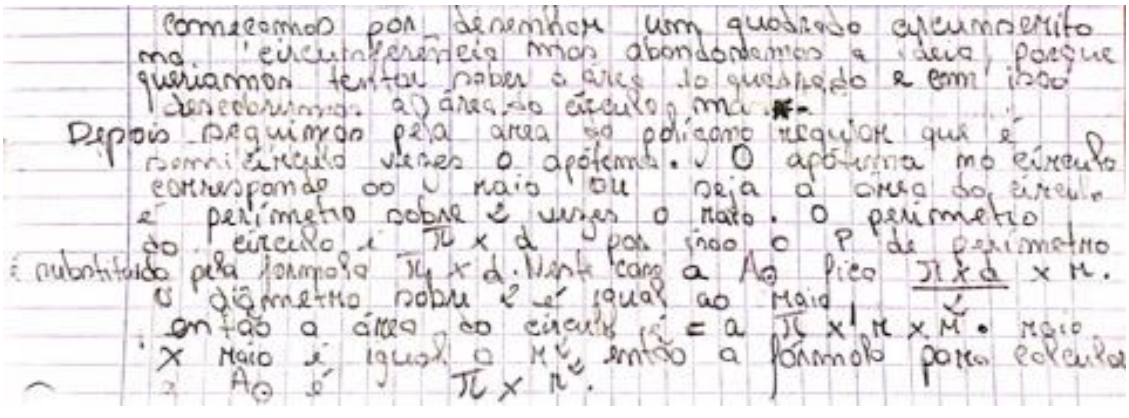


*Figura **5***: Primeira estratégia seguida pelo Grupo VII, mas que abandonaram.

Dei-lhes a palavra. A Madalena leu o relatório (Figura 6) que tinham elaborado e eu acompanhei mostrando o que tinham feito no geoplano e escrevendo no quadro preto.



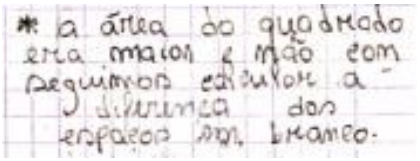


Figura 6: Relatório elaborado pelos alunos do Grupo IV.

Depois de uma aluna ter lido a primeira frase do relatório, incluindo o pedaço assinalado com um asterisco, eu expliquei o mesmo mostrando no geoplano, para que todos entendessem. De seguida, ela leu a segunda frase e eu interrompi-a.

Prof.: ***E esse polígono regular era inscrito, era circunscrito, quantos lados tinha, como era?***

Como não soubessem responder, perguntei-lhes se tinham usado o geoplano nessa altura. Disseram que não.

Celeste: ***Circunscrito.***

Prof.: ***Os lados eram tangentes? Estavam por fora?***

Prof.: ***Vocês na altura disseram que precisavam de um polígono com muitos lados pois assim a sua área era parecida com a área do círculo.***

Verificámos que não tinham pegado num polígono em especial, pensando num em geral. Para isso utilizaram a fórmula para calcular a sua área. Avancei e continuaram a explicar como tinham deduzido a fórmula, ao mesmo tempo que eu ia registando no quadro preto essa dedução, porque não tinha sido feito durante a explicação do Grupo I (Figura 7).

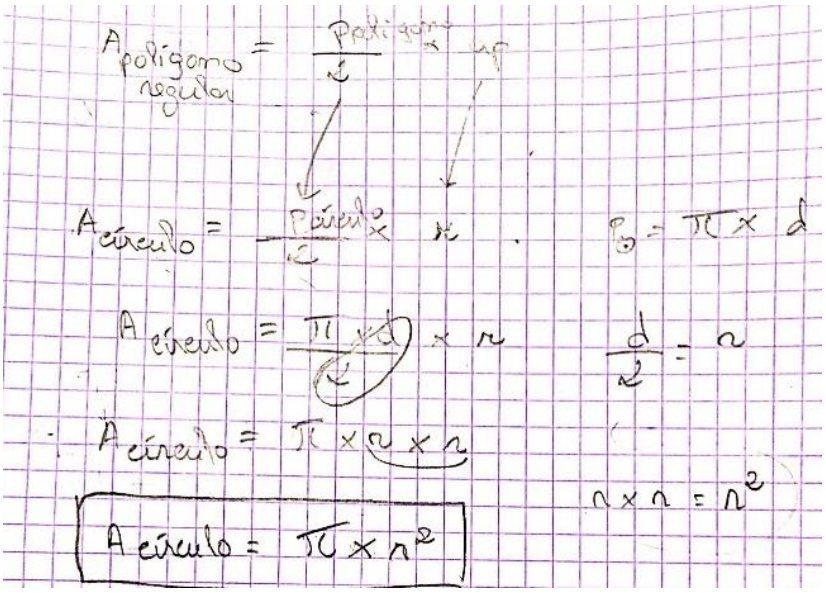


Figura 7: Trabalho de dedução feito pelos elementos do Grupo VII, em conjunto comigo.

Prof.: ***Pegaram na fórmula do polígono regular e começaram a trabalhar a área. Área do polígono regular como é que se calcula?***

Isaura***: Semiperímetro vezes apótema.*** (Escrevo a fórmula no quadro preto.)

Prof.: ***E elas pensaram assim: Se eu desenhar um polígono regular com muitos lados, aproxima-se da área do círculo. Vamos a esta fórmula transformar elementos do círculo. O apótema elas descobriram logo que era o raio. E aqui, este era o perímetro do polígono regular, que aqui corresponde ao perímetro do círculo. Só que eles aqui tiveram muita dificuldade. Custou-lhes a perceber que este era igual a este, não foi?***

Madalena: ***Foi.***

Prof***.: Depois?***

Madalena: ***Depois, o perímetro do círculo é π vezes diâmetro.***

Prof***.: Como não sabiam o perímetro do círculo, foram aplicar a fórmula. Perímetro do círculo é igual a quê? $\pi \times d$*** (Escrevo no quadro preto.) Tinham o raio que era 4. E o diâmetro era

Rui: ***4. O diâmetro é 8.***

Prof.: ***Tinham o diâmetro era só multiplicar por π. E depois?***

Madalena: ***Depois o perímetro é substituído pela fórmula $\pi \times d$.***

Eu acompanho este raciocínio escrevendo no quadro preto.

Prof.: $\pi \times d$. ***Onde está*** P ***escreveram isto. Depois?***

Madalena: ***Neste caso*** **a área do círculo fica** $\frac{\pi \times d}{2} \times r$**. O diâmetro sobre dois é igual ao raio.**

Continuo a acompanhar este raciocínio no quadro preto.

Isaura***: Também tínhamos que explicar isso?***

Madalena: ***Mas raio vezes raio é igual a raio ao quadrado.***

Prof.: ***Por isso, a fórmula do círculo é esta:*** $\pi \times r^2$***. E depois com este valor já conseguiram calcular a área do círculo*** (Ver Figura 8). ***Quanto deu?***

Celeste: 50, 2656.

Prof.: ***E àquele grupo tinha dado 41,04.***

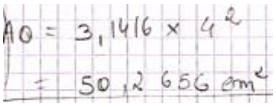
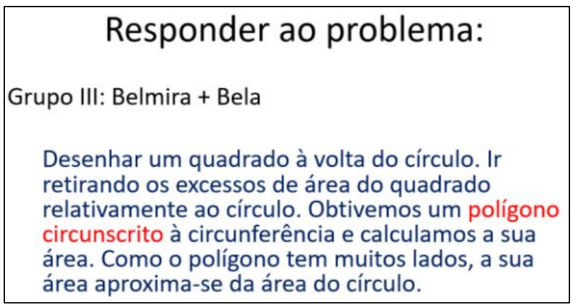


Figura 8

Indicaram o valor encontrado e eu acrescentei esse valor ao que já estava escrito no quadro. Escrevo os dois valores no quadro e dou a palavra ao Grupo III, que adotou a estratégia escrita na Figura 9.



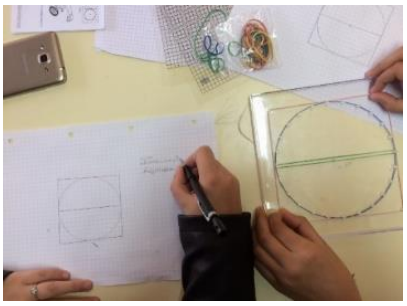


Figura 9: Trabalho realizado pelo Grupo III – Quadrado circunscrito.

Um dos elementos do Grupo III começou por ir lendo o relatório, e ao mesmo tempo, eu ia apontado para a projeção para que fosse mais simples os colegas perceberem o trajeto efetuado.

Bela: ***Para começar fizemos o círculo com 4 cm de raio. Depois de muito pensarmos decidimos fazer o círculo inscrito num polígono regular. E o polígono regular que escolhemos foi o quadrado. Depois descobrimos que a medida do diâmetro é 8 cm pois é o dobro do raio.***

Interrompi-a e certifico-me de que os colegas estão a acompanhar o raciocínio de que o diâmetro do círculo é igual ao lado do quadrado.

Bela: ***E de seguida verificamos que o diâmetro era a medida igual ao lado do quadrado. Como o quadrado tem os lados iguais, então se um mede 8 cm, os outros todos também medem. Então, saber a área do quadrado é*** $8 \times 8 = 64cm^2$***.***

(Pausa)

Bela: ***Depois na figura, havia uns triângulos.***

Faço uma interrupção para chamar à atenção do grupo VII de como elas resolveram o problema que eles sentiram e que os levou ao abandono da estratégia.

Prof.***: Olha, Celeste, como eles resolveram o problema que vocês tiveram.***

Faço sinal à Bela para continuar.

Bela: ***Decidimos calcular a área de um triângulo. Então para se multiplicar temos que multiplicar a base vezes a altura a dividir por 2. A base media 3,5 e a altura media 1,6. Multiplicamos essas medidas e depois dividimos por dois. E deu 2,8 cm². Como eram 4 triângulos multiplicamos 2,8 por 4. E como resultado deu-nos 11,2 cm². Depois fomos à área do quadrado e subtraímos pela área dos triângulos, que vai dar a área do círculo.***

Interrompo para fazer o ponto de situação e para me certificar de que estão a acompanhar o seu raciocínio.

Bela: ***Então 64 cm² – 11,2 cm² = 52,8 cm². Nós, depois reparamos que ainda havia triângulos pequenos e fizemos o mesmo. E deu 49,2 cm². Subtraímos à área do quadrado a área dos 12 triângulos…***

Interrompo novamente e faço-os olharem para o geoplano. Reforço os quatro triângulos iniciais e os oito mais pequenos. Calcularam a área de um e multiplicaram por oito e depois foram subtrair. Depois perguntei-lhes para que fizeram isso.

Prof.: ***Para quê?***

Bela (ao mesmo tempo)**:** ***P´ra quê?***

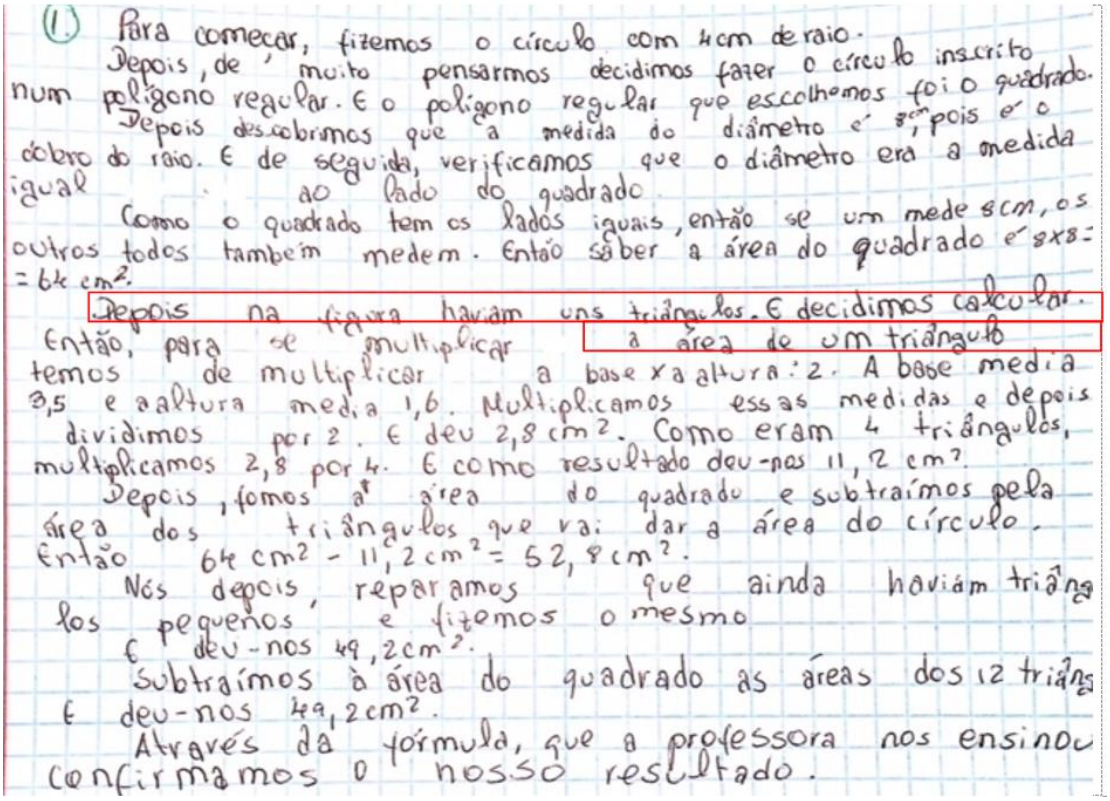
Prof.: ***Para quê? Para que estiveram a tirar a área destes triângulos todos?***

Bela: ***Porque nós dividimos… é a diferença da área do quadrado para a área do círculo.***

Prof.: ***E quanto é que vos deu a área do círculo?***

Bela: ***…e deu-nos 49,2 cm². Através da fórmula que a Professora nos ensinou confirmámos o resultado.***

Comparamos os dois valores e avaliamos a estimativa feita, sendo próxima. A apresentação do Grupo III teve por base o seu relatório (Figura 10):


(1.) Para começar, fizemos o círculo com 4cm de raio. Depois, de muito pensarmos decidimos fazer o círculo inscrito num polígono regular. E o polígono regular que escolhemos foi o quadrado. Depois descobrimos que a medida do diâmetro é 8cm, pois é o dobro do raio. E de seguida, verificamos que o diâmetro era a medida igual ao lado do quadrado.

Como o quadrado tem os lados iguais, então se um mede 8cm, os outros todos também medem. Então saber a área do quadrado é 8x8= = 64 cm².

Depois na figura haviam uns triângulos. E decidimos calcular a área de um triângulo. Então, para se multiplicar temos de multiplicar a base x a altura : 2. A base media 3,5 e a altura media 1,6. Multiplicamos essas medidas e depois dividimos por 2. E deu 2,8 cm². Como eram 4 triângulos, multiplicamos 2,8 por 4. E como resultado deu-nos 11,2 cm².

Depois, fomos à área do quadrado e subtraímos pela área dos triângulos que vai dar a área do círculo. Então 64 cm² - 11,2 cm² = 52,8 cm².

Nós depois, reparamos que ainda haviam triângulos pequenos e fizemos o mesmo e deu-nos 49,2cm².

Subtraímos à área do quadrado as áreas dos 12 triângulos e deu-nos 49,2cm².

Através da fórmula, que a professora nos ensinou confirmamos o nosso resultado.

*Figura **10***: Relatório do Grupo III que serviu de base à sua apresentação.

Mostrei o diapositivo com o trabalho desse grupo e os desenhos que tinham feito (Figura 11). Nesta altura, referiram a existência de erros ortográficos, que eu também ignorei por não querer influenciar, seja de que maneira fosse, o trabalho dos alunos, mantendo-o o mais original possível.

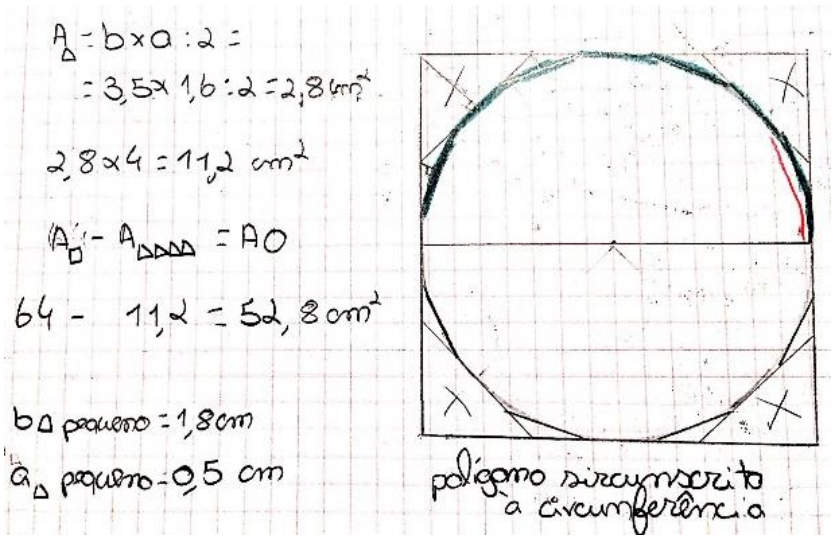
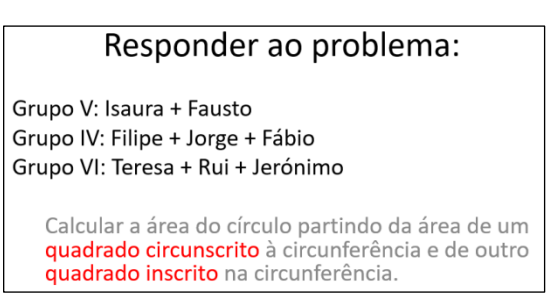
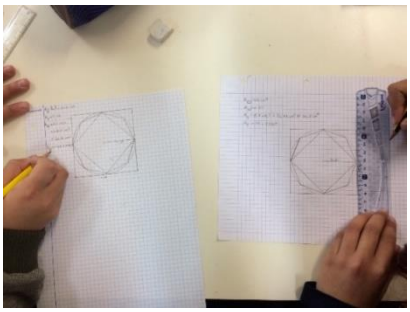


*Figura **11***: Trabalho do Grupo III - Sinalização com uma cruz dos triângulos para marcar a área sobrante do polígono em relação ao círculo (4 triângulos grandes e 8 triângulos pequenos).

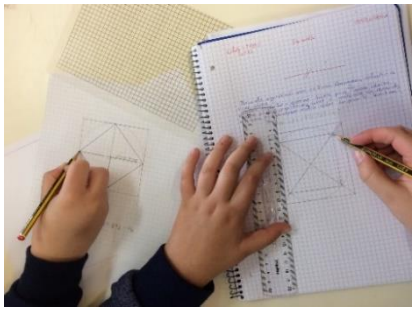
De seguida, passamos à apresentação dos trabalhos dos Grupos V, IV e VI. Disse que todos começaram da mesma forma (Figura 12), mas ao longo do trabalho foram divergindo.

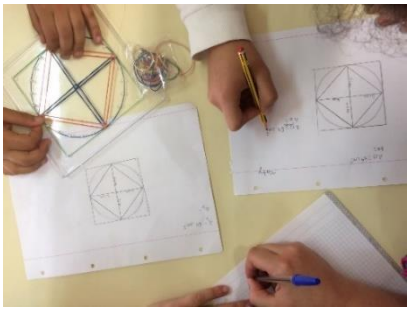




Grupo V

Grupo IV





Grupo VI

*Figura **12**:* Trabalho inicial - Estratégia seguida pelos Grupos V, IV e VI.

O Grupo IV começou por apresentar o seu trabalho, para o qual eu não tinha o suporte em PowerPoint, pois eles tinham terminado o trabalho na aula anterior, mas nesse dia, pois as aulas foram consecutivas. Comentámos o porquê do seu atraso e, de seguida, um dos elementos passou a apresentá-lo. No entanto, fui acompanhando por um desenho no quadro, reproduzindo o que foram realizando.

Fábio: ***Primeiro calculamos a área do quadrado grande e deu 64cm².***

Prof.: ***Em vez de dizeres quadrado grande diz quadrado circunscrito.***

Reforcei que foi o que muitos fizeram: o cálculo da área do quadrado circunscrito.

Fábio: ***Circunscrito ao círculo e deu 64cm².***

Prof. ***Primeiro calcularam esta área. E depois?***

Fábio: ***Depois começamos o trabalho pelo quadrado circunscrito de uma ponta à outra para fazer um quadrado inscrito.***

Chamei à atenção para uma dificuldade que os grupos IV e V tiveram em desenhar um quadrado inscrito na circunferência e que este grupo resolveu desenhando as diagonais do quadrado circunscrito para achar os pontos de interseção com a circunferência. Esses pontos de interseção foram os vértices do quadrado inscrito. O Grupo V tinha desenhado o quadrado inscrito por tentativas, o que lhes dificultou a tarefa. O Grupo IV calculou as áreas dos dois quadrados.

Prof.: ***Isaura, vocês andaram às voltas para traçar um quadrado inscrito. Agora já sabes como fazer. Traçar as diagonais.***

Prof.: Calcularam a área do quadrado circunscrito e do quadrado inscrito. E depois?

Fábio: ***Medimos o perímetro…***

Prof.: ***E ficaram por aqui na aula passada. Gastaram três aulas a fazer isto.***

Fui chamando a atenção do Grupo IV para a necessidade de gerir melhor o tempo de aprendizagem, pois tinham demorado muito tempo a realizar este trabalho.

Prof.: ***E depois? Nesta aula é que se lembraram de trabalhar. E depois?***

Fábio: ***Medimos o perímetro do quadrado circunscrito e deu 32 cm…***

Prof.: ***Para que queriam o perímetro desse quadrado? Usaram essa medida?***

Fábio: ***Acho que sim… Depois deu… deu igual à área do…***

Prof.: Mas isso se calhar foi uma coincidência.

Fábio: ***Sim.***

Prof.: ***E depois o que é que fizeram?***

Fábio: ***Medimos a área do quadrado inscrito… deu 36 cm².***

Prof.: ***Sim, já disseste, e mais?***

Fábio: ***…e chegamos à conclusão que a área do círculo era entre 36 cm² e 64 cm². Descobrimos um polígono de 16 lados.***

Prof.: ***Como a diferença era muito grande, esta era 36 e esta 64, o que é que resolveram fazer?***

Fábio*: Tentamos arranjar um polígono com mais lados para ocupar quase toda a área do círculo.*

Prof.*: Exatamente. Então imaginaram um polígono com 16 lados. Fizeram no geoplano, não fizeram? Certo, um polígono com 16 lados. E depois?*

Fábio*: Depois…*

Prof.*: Que fizeram?*

Fábio*: Calculamos a área desse polígono.*

Prof.*: Quanto é que vos deu a área desse polígono?*

Fábio: ***Deu-nos 48 cm².***

Prof.: ***Que é mais ou menos…a área do círculo.***

O trabalho efetuado por este grupo encontra-se na Figura 13. Como este grupo tinha realizado grande parte do trabalho nesta aula, senti que eles estavam mais à-vontade na apresentação, sem terem que recorrer ao relatório (Figura 14).

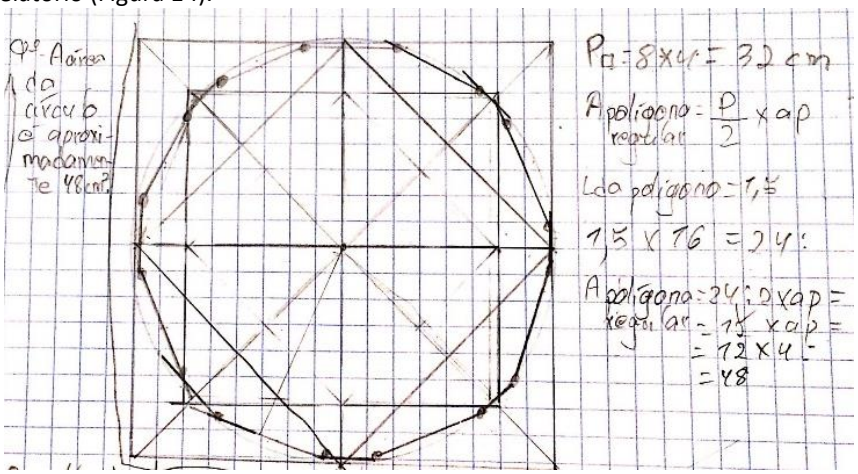


*Figura **13**:* Trabalho efetuado pelo Grupo IV.

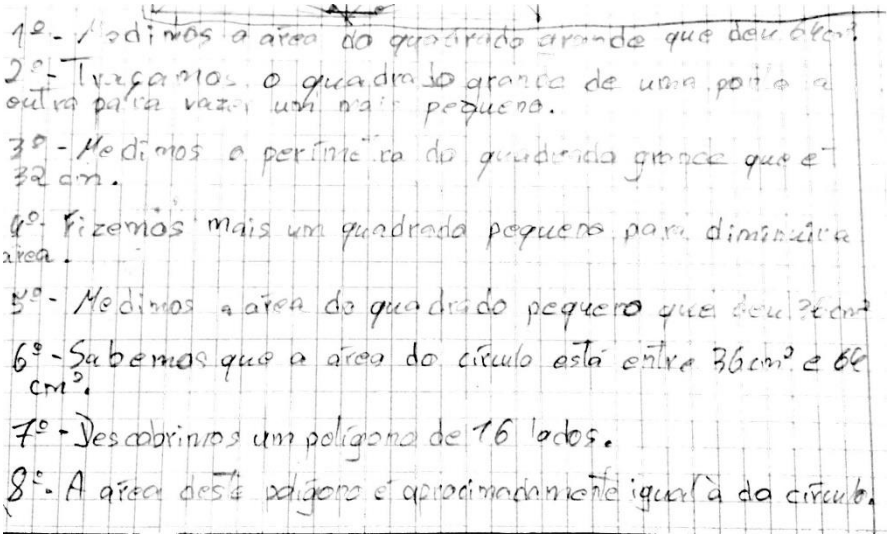


*Figura **14**:* Relatório do Grupo IV.

Passamos para a apresentação do trabalho do Grupo VI, que também não tinha gerido bem o tempo, nem trabalhado convenientemente em determinada altura. Salientamos a necessidade de não se deixarem influenciar por elementos que possam prejudicar a sua aprendizagem. Também neste caso eu não tinha o suporte em PowerPoint, de forma que recorri ao geoplano, reproduzindo as figuras que eles fizeram no papel. Chamei à atenção dos triângulos que eles consideraram, que foram diferentes dos outros. Durante a realização da tarefa eu também não me tinha apercebido desta possibilidade. Os colegas também manifestaram a sua surpresa com um *Aaaahhhh*! por esta forma diferente de ver. O trabalho do Grupo VI encontra-se na Figura 15.

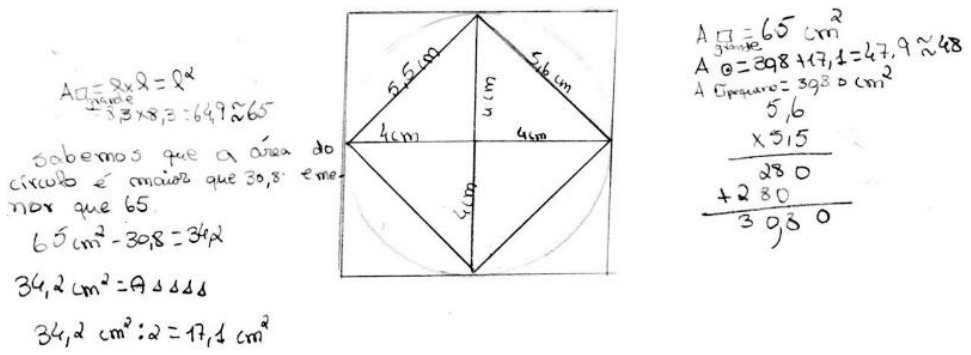


*Figura **15**:* Trabalho do Grupo VI.

Prof.: ***Digam lá como fizeram.***

Rui: ***Primeiro calculamos a área do quadrado cirunscrito à circunferência.***

Prof.: ***E quanto deu?***

Rui: ***64,9 cm² e arredondamos para 65.***

Prof.: ***Pronto. E depois?***

Rui: ***Depois calculamos a área do quadrado circunscrito à circunferência.***

Prof.: ***Até aqui fizeram com fez o Fábio e o Jorge, não foi?***

Rui: ***Sim, que nos deu 30,8 cm².***

Prof.: ***E depois?***

Rui: ***Depois, à área do quadrado circunscrito subtraímos a área do quadrado inscrito, o que nos deu a área dos quatro triângulos.***

Prof.: ***Olhem, olhem agora que isto já é diferente.***

Repito o que este grupo fez, para ter a certeza que se apercebem da diferença. Quando se apercebem, ouve-se um burburinho de espanto e de compreensão.

Alguns alunos: ***Aaaahhhhh!***

Prof.: ***E depois?***

Rui: ***Depois, à área dos quatro triângulos fomos dividir por dois.***

Prof.: ***E porque é que foram dividir por dois? Olhem, estão a ver o triângulo assim? Estão a ver onde passa o circulo?***

Alguns alunos: ***Aaaahhhhh! Sim.***

Prof.: ***E eles pensaram, é mais ou menos metade, dividimos pelos dois. Quanto é que vos deu cada metade?***

Rui: ***17,1.***

Prof.: ***Mas todas, todas juntas. Portanto 17 está aqui dentro do círculo e 17 estão por fora. E depois?***

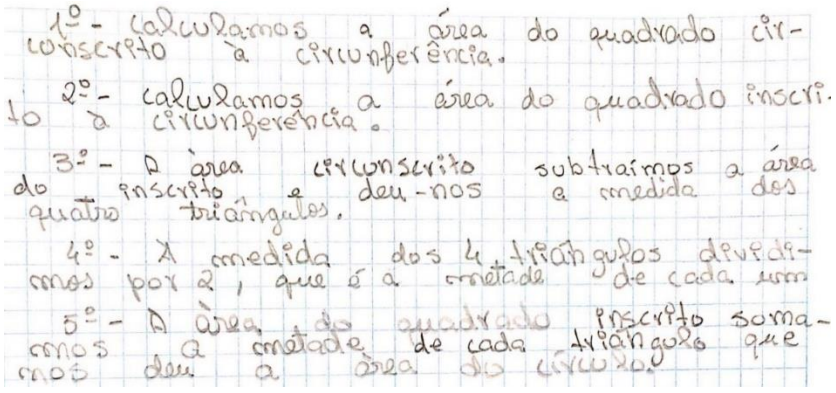
Rui: E depois à área do quadrado inscrito somamos a metade de cada triângulo e deu-nos 47,9.

Prof.: ***Espera aí um bocadinho. E quanto é que deu?***

Rui: ***47,9 e arredondamos para 48.***

Prof.: ***Pronto. Um dois, três, quatro, cinco grupos. Ainda nos faltam dois.***

A Figura 16 mostra o relatório escrito por este grupo.


1º - Calculamos a área do quadrado circunscrito à circunferência.

2º - Calculamos a área do quadrado inscrito à circunferência.

3º - A área circunscrito subtraímos a área do inscrito e deu-nos a medida dos quatro triângulos.

4º - A medida dos 4 triângulos dividimos por 2, que é a metade de cada um

5º - A área do quadrado inscrito somamos a metade de cada triângulo que nos deu a área do círculo.

Figura 16: Relatório do Grupo VI.

De seguida, o Grupo V apresentou o seu trabalho. Este grupo não recorreu ao geoplano. Alternadamente, foram dizendo as frases que tinham escrito no relatório. Mais uma vez, apoiei-me no quadro preto e no PowerPoint. Chamei à atenção que parecia haver semelhanças com o trabalho do grupo II, mas havia uma ligeira nuance, pois o grupo II tinha trabalhado com a área sobrante do polígono circunscrito e o círculo, e o Grupo V tinha trabalhado com a área sobrante do polígono inscrito e o círculo. À medida que iam lendo eu ia reforçando com um desenho no quadro, pois eles não tinham utilizado o geoplano. Não tenho a certeza que se tenham apercebido da diferença. Apesar de terem referido o trabalho efetuado na dedução da fórmula para a área do círculo, ressaltei que o tinham feito comigo. Disseram o valor que tinham encontrado (48,98cm^2) e eu perguntei-lhes como tinham chegado a esse valor, ao que eles responderam que tinham adicionado os valores encontrados.

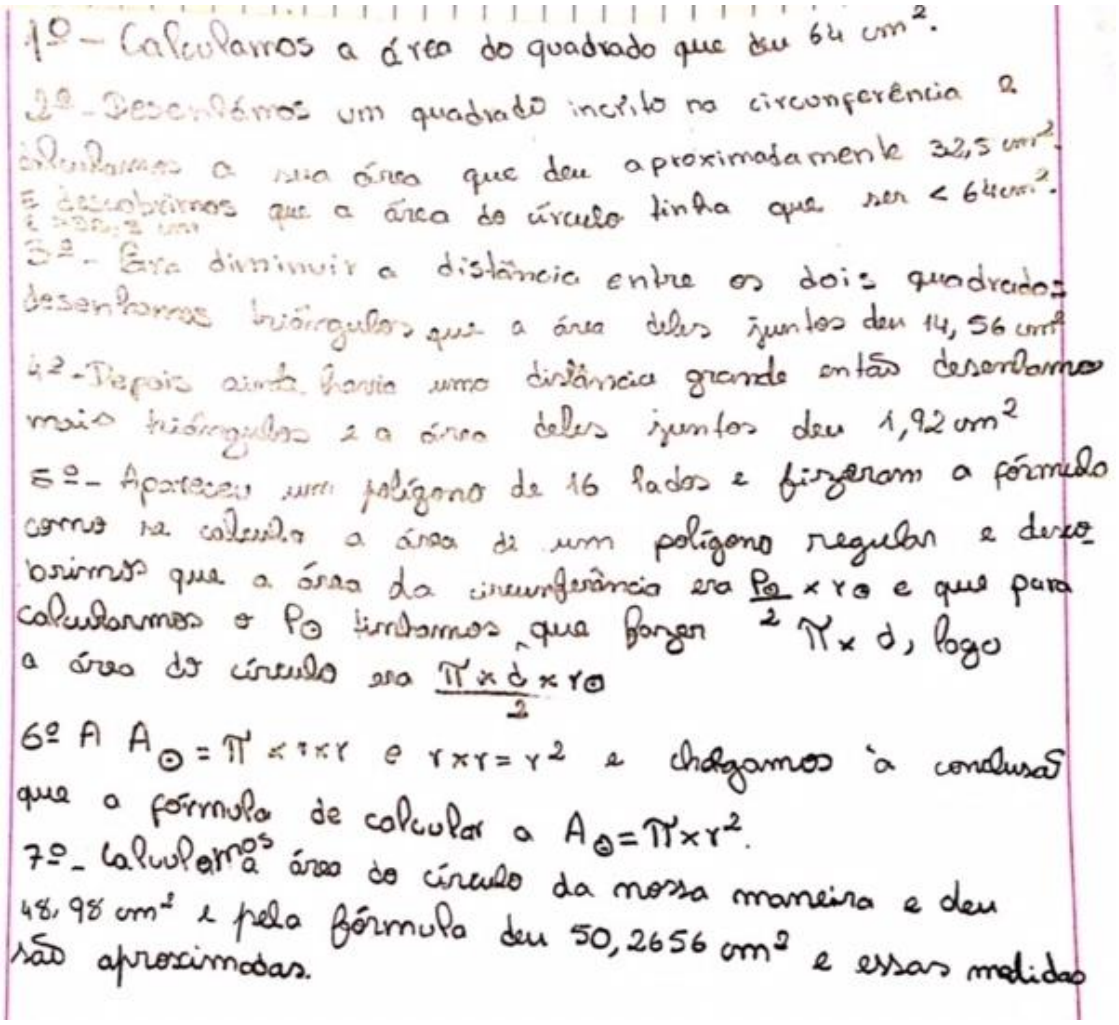

1º - Calculamos a área do quadrado que deu 64 cm².
2º - Desenhámos um quadrado inscrito na circunferência e calculamos a sua área que deu aproximadamente 32,5 cm². E descobrimos que a área do círculo tinha que ser < 64cm².
3º - Para diminuir a distância entre os dois quadrados desenhamos triângulos que a área deles juntos deu 14,56 cm²
4º - Depois ainda havia uma distância grande então desenhamos mais triângulos e a área deles juntos deu 1,92 cm²
5º - Apareceu um polígono de 16 lados e fizeram a fórmula como se calcula a área de um polígono regular e descobrimos que a área da circunferência era $\frac{Pe}{2} \times r$ e que para calcularmos o Pe tínhamos que fazer $\pi \times d$, logo a área do círculo era $\frac{\pi \times d}{2} \times r$
6º A $A_{\odot} = \pi \times r \times r$ e $r \times r = r^2$ e chegamos à conclusão que a fórmula de calcular a $A_{\odot} = \pi \times r^2$.
7º - Calculamos a área do círculo da nossa maneira e deu 48,98 cm² e pela fórmula deu 50,2656 cm² e essas medidas são aproximadas.

*Figura **17**:* Relatório do Grupo V.

No final da apresentação, perguntei-lhes como tinham encontrado o valor de 48,98 cm^2 para a área do círculo.

Isaura*: Fizemos 32,5 + 14,56 + 1,92.*

Prof.: *Somaram as áreas do quadrado com as áreas dos triângulos.*

O trabalho desenvolvido por este grupo pode ver-se na Figura 17. Este foi o único grupo que utilizou a cor, e ia pintando à medida que expandia o polígono inscrito (acrescentando-lhe triângulos, o que teve como efeito o aumento do número de lados do polígono regular inscrito) para o aproximar do círculo (Figura 18).

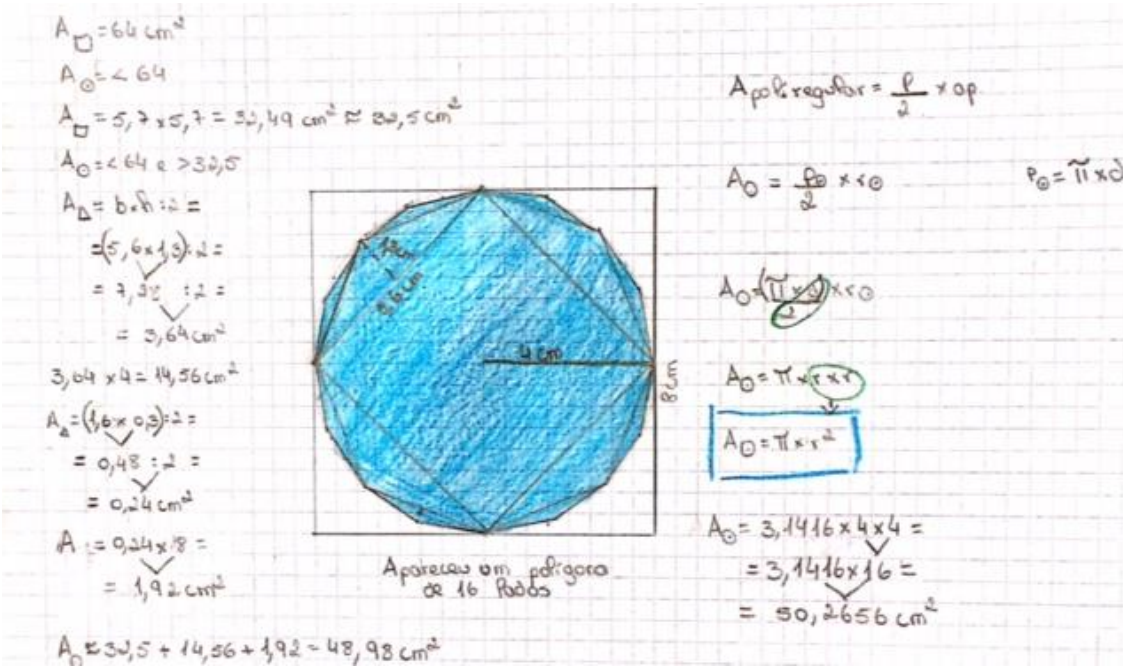


*Figura **18**:* Trabalho do Grupo V

Por fim, o Grupo II apresentou o trabalho. A Figura 19 mostra do lado esquerdo o diapositivo com a estratégia seguida e, do lado direito, o seu trabalho inicial.

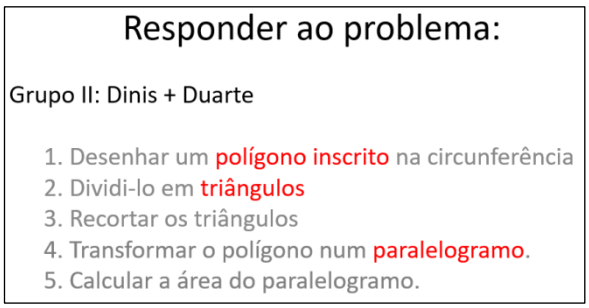


*Figura **19**:* Estratégia seguida pelo Grupo II e trabalho inicial.

Como tinham começado por desenhar figuras diferentes, optaram por trabalhar com a que lhes pareceu mais fácil de trabalhar. Este grupo, desenhou um polígono de muitos lados inscrito no círculo e dividiu-o em triângulos iguais com um vértice comum no centro do círculo. Recortaram e rearranjaram os triângulos num paralelogramo. Ao apresentarem os restantes resultados, tiveram dificuldade em estabelecer a relação entre as medidas do paralelogramo e as medidas do polígono regular e eu ajudei-os fazendo a sua equivalência no quadro preto.

Dinis: ***Em primeiro lugar fizemos uma circunferência com um polígono inscrito de 12 lados, o raio da circunferência era 4 de cm. Dividi a circunferência em 12 triângulos.***

Prof.: Fizeram isto. O Dinis dividiu em 12 e o Duarte dividiu em…

Duarte: …24.

Prof.: Cada um deles fez a sua figura.

Dinis: Depois fiz o apótema num dos triângulos. Reparei que a figura do meu colega era o dobro da minha, então o meu colega recortou os triângulos e formou um paralelogramo. E mediu-lhe a base, que lhe deu 14 cm, depois a altura que deu 4 cm.

Prof.*: Calma.*

Expliquei novamente e perguntei qual era a diferença entre as áreas das duas figuras.

Isaura: ***São iguais.***

Confirmei que sim, tinham a mesma área. Só que numa tinha a forma de um polígono regular e, noutra a de….

Isaura: ***Polígono regular.***

Prof.: ***E depois, que fizeram?***

Dinis: ***Depois multipliquei o π pelo raio ao quad…***

Prof.: ***Calma! Vocês isso ainda não sabiam. Que é que fizeram primeiro?***

Duarte: (Inaudível)

Prof.: ***Então diz.***

Duarte: ***Depois medi a base do paralelogramo que mediu 14 cm e de seguida medi a altura que me deu 4cm. De seguida com as medidas do paralelogramo multiplicamos 14 cm por 4 cm e deu-nos 56 cm. Então o 56 é a área.***

Prof.: ***É a área do círculo. Só que depois, diz?***

Duarte: ***O Dinis vai ler.***

Prof.: ***Ó lê lá.***

Dinis: ***Depois multipliquei o π pelo raio ao quadrado…***

Prof.: ***Olha porque é que vocês fizeram o π vezes o raio ao quadrado? Porquê? Isso fui eu que fiz ou foram vocês?***

Duarte: ***Foi a Professora.***

Prof.: ***Ah. Fui eu que ajudei depois este grupo a descobrir a fórmula, como ajudei a todos, a descobrir a fórmula para calcular a área do círculo. Explica lá.***

Dinis: ***Área do círculo igual … a π vezes diâmetro a dividir por dois vezes raio… área do círculo igual a…***

Prof.: ***Começaste a meio. Começaste a meio. Tens de começar antes.***

Duarte: ***Área do paralelogramo é igual a base vezes altura.***

Prof.: ***Vocês começaram pela área do paralelogramo. Área do paralelogramo é igual a base vezes altura. E depois?***

Dinis: ***Área do círculo igual a π vezes diâmetro a dividir por dois vezes raio.***

Prof.: ***Mas como é que vocês chegaram daí aqui?***

Duarte: ***Hã? Porque era π vezes diâmetro…***

Prof.: ***A altura do paralelogramo corresponde a quê no polígono?***

Duarte: ***Ao apótema.***

Prof.: ***Ao apótema no polígono. E no círculo?***

Duarte: ***Ao raio.***

Prof.: ***Isto aqui passa a ser o raio. E esta medida aqui? E a base? Esta medida aqui?***

Duarte: ***É metade do perímetro do círculo.***

Bia: ***Semicírculo? Ah!***

Prof.: ***Sim, é o semiperímetro. Eles fizeram quantos triângulos? 24? Então é doze aqui e doze ali. Estão a perceber? Portanto, é semiperímetro.***

Alguns: ***Ah!***

Prof.: ***E agora o percurso é igual. Pegamos aqui no perímetro e vamos substituir por π vezes d. d sobre 2 dá r. R vezes r, r ao quadrado. Estão a perceber? Queres continuar a ler, Dinis?***

Dinis: ***Sim. Depois multipliquei π por 4^2 e deu-me 50,2656 arredondado deu 50,27.***

Explicamos que a diferença encontrada se devia à colagem dos triângulos.

Prof.: ***Estão a ver tantas maneiras diferentes de calcular a área de um círculo? Qual é a fórmula da área do círculo?***

Alguns: **$\pi \times r^2$.**

Prof.: ***Vamos ver se não se esquecem.***

O trabalho do Grupo II encontra-se na Figura 20.

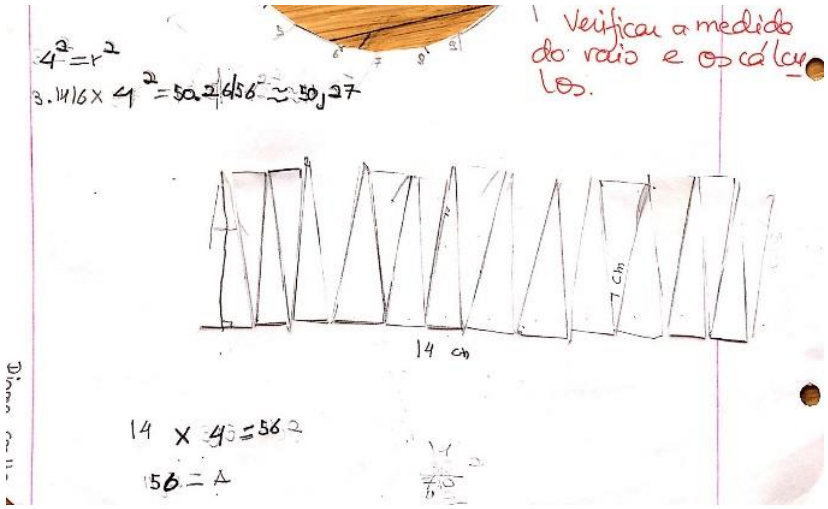


*Figura **20**:* Trabalho realizado pelos alunos do Grupo II.

A Figura 21 refere-se ao relatório elaborado pelos elementos deste grupo.

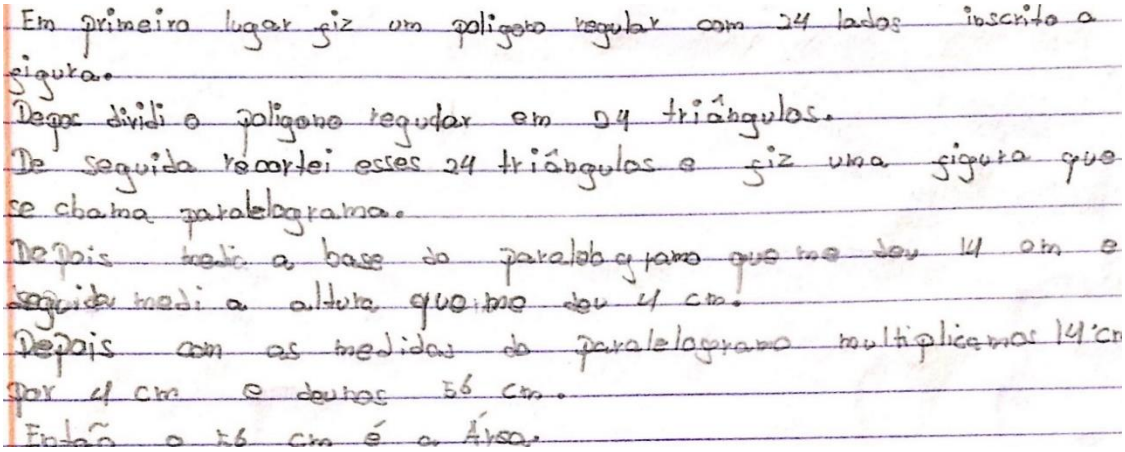

Em primeiro lugar fiz um poligono regular com 24 lados inscrito a figura.
Depois dividi o poligono regular em 24 triângulos.
De seguida recortei esses 24 triângulos e fiz uma figura que se chama paralelogramo.
Depois medi a base do paralelogramo que me deu 14 cm e seguida medi a altura que me deu 4 cm.
Depois com as medidas do paralelogramo multiplicamos 14 cm por 4 cm e deu-nos 56 cm.
Então o 56 cm é a Área.

*Figura **21**:* Relatório elaborado pelo Grupo II.

Professora de Apoio: ***Muito bem, fartaram-se de pensar.***
Prof.: ***Pois foi.***
Professora de Apoio: ***Uns com mais muletas e outros com menos. Fartaram-se de pensar. Estão de parabéns.***
Prof.: ***Foi pena eles não se terem envolvido mais.***
Professora de Apoio: ***Porque isto bem pensado até é muito giro. Descobrir cada um a sua maneira de chegar à mesma coisa e há muitos caminhos para lá chegar.***
Prof: ***Mas ontem foi uma coisa horrível. Ontem perguntava a fórmula do perímetro do círculo e não sabiam. "Como é que se chama esta figura?"***
Vários: ***Paralelogramo.***
Professora de Apoio: ***Tinham uma branca.***
Prof.: ***"Eu não sei como é que se chama isso".***
Prof.: ***O que eu ouvi ontem!***
Professora de Apoio: ***Ontem foi o dia da asneira.***
Belmira: ***Ai, foi?***
Prof.: ***Belmira, e tu foste uma delas. Quanto te fazia perguntas tu respondias coisas disparatadas que não tinham nada a ver.***
Professora de Apoio: ***Tinham a cabeça noutro sítio.***

Prof.: ***Tinham preferido que eu tivesse chegado aqui e dito "Olhem meninos, a área do círculo é assim."***
Alguns: ***Assim não tinha piada nenhuma.***
Prof.: ***"Agora vamos fazer exercícios."***
Alguns: ***Assim não tinha piada nenhuma.***
Prof.: ***Então se não tinha piada nenhuma, e se estas atividades têm mais piada, porque é que não se envolvem e não têm um comportamento como deve ser?***

Salientei a fórmula para a área do círculo. À medida que cada grupo ia dizendo os valores que encontrava para a área do círculo eu ia-os escrevendo no quadro preto. No final tínhamos todos os valores, incluindo o que encontramos utilizando a fórmula para a área do círculo, o valor encontrado com a fórmula e a dedução da fórmula para a área do círculo partindo da área do polígono regular (Figura 22).

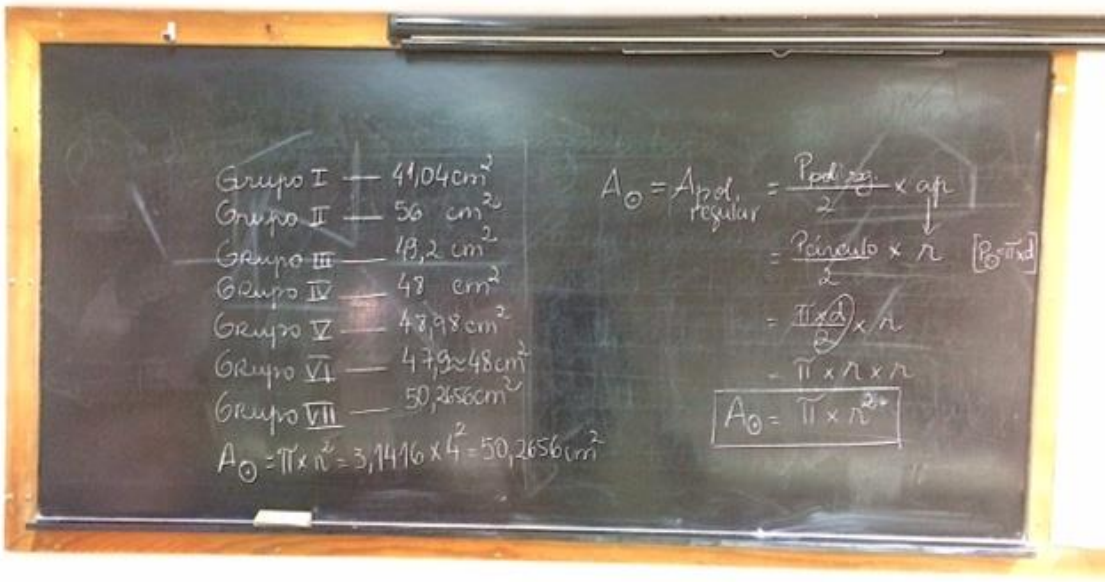


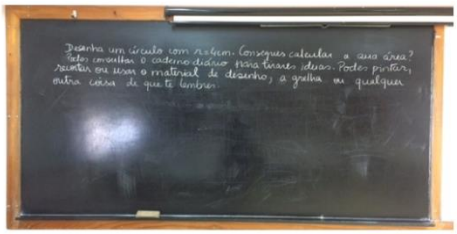
Figura **22**: Valores encontrados pelos 7 grupos para a área aproximada do círculo de raio 4 cm.

No PowerPoint ainda havia no final diapositivos que mostravam a dedução da fórmula para a área do círculo a partir da fórmula para a área de um polígono regular. No entanto, não passei estes diapositivos pois esse trabalho já tinha sido feito durante a apresentação dos grupos.

ANEXO A

Diapositivos do PowerPoint utilizado durante a aula de discussão coletiva.

Problema:



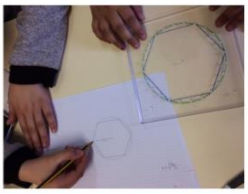
Responder ao problema:

Grupo I: Anaísa + Letícia;

Grupo VII: Madalena + Daniel + Celeste:

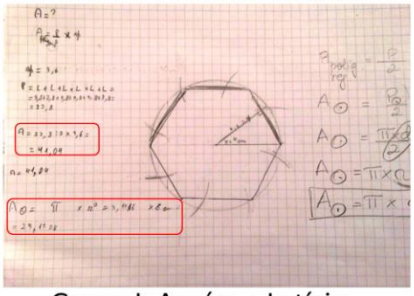
Desenharam um polígono inscrito na circunferência e calcularam a sua área. *Se o polígono tiver muitos lados, a sua área aproxima-se da área do círculo.*

Calcular a área do círculo partindo da área de um polígono regular inscrito na circunferência



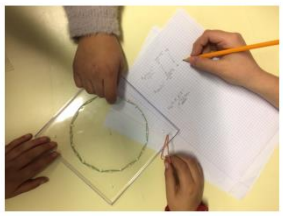
Grupo I: Anaísa + Letícia

Cálculo da área do círculo:



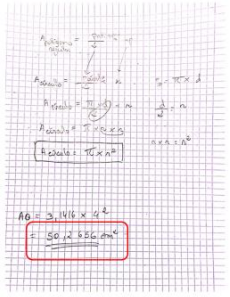
Grupo I: Anaísa + Letícia

Calcular a área do círculo partindo da área de um polígono regular inscrito na circunferência



Grupo VII: Madalena + Daniel + Celeste

Cálculo da área do círculo:



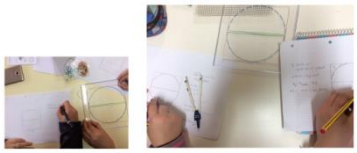
Grupo VII: Madalena + Daniel + Celeste

Responder ao problema:

Grupo III: Belmira + Bela

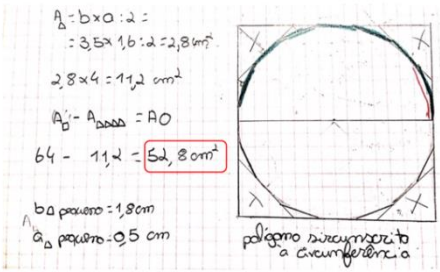
Desenhar um quadrado à volta do círculo. Ir retirando os excessos de área do quadrado relativamente ao círculo. Obtivemos um polígono circunscrito à circunferência e calculamos a sua área. Como o polígono tem muitos lados, a sua área aproxima-se da área do círculo.

Calcular a área do círculo partindo da área de um polígono regular circunscrito à circunferência



Grupo III: Belmira + Bela

Cálculo da área do círculo:



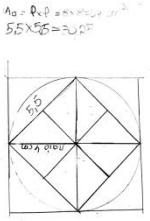
Grupo III: Belmira + Bela

Responder ao problema:

Grupo V: Isaura + Fausto
Grupo IV: Filipe + Jorge + Fábio
Grupo VI: Teresa + Rui + Jerónimo

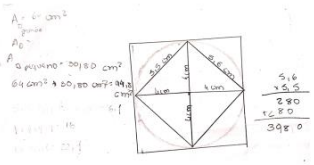
Calcular a área do círculo partindo da área de um quadrado circunscrito à circunferência e de outro quadrado inscrito na circunferência.

Diminuímos a diferença entre as áreas do círculo e dos quadrados desenhando triângulos e acrescentado essa área à área do quadrado inscrito. Pintando, obtivemos um polígono regular inscrito na circunferência.



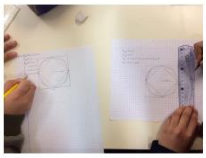
Grupo IV: Filipe + Jorge + Fábio

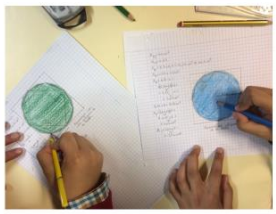
Diminuímos a diferença entre as áreas do círculo e dos quadrados desenhando triângulos e acrescentado essa área à área do quadrado inscrito. Pintando, obtivemos um polígono regular inscrito na circunferência.



Grupo VI: Teresa + Rui + Jerónimo

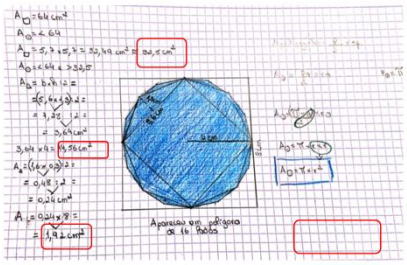
Diminuímos a diferença entre as áreas do círculo e dos quadrados desenhando triângulos e acrescentado essa área à área do quadrado inscrito. Pintando, obtivemos um polígono regular inscrito na circunferência.





Grupo V: Isaura + Fausto

Cálculo da área do círculo:



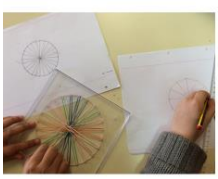
Grupo V: Isaura + Fausto

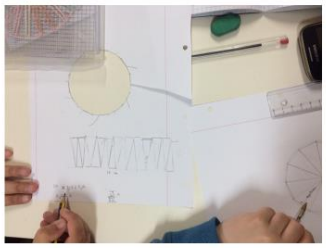
Responder ao problema:

Grupo II: Dinis + Duarte

1. Desenhar um polígono inscrito na circunferência
2. Dividi-lo em triângulos
3. Recortar os triângulos
4. Transformar o polígono num paralelogramo.
5. Calcular a área do paralelogramo.

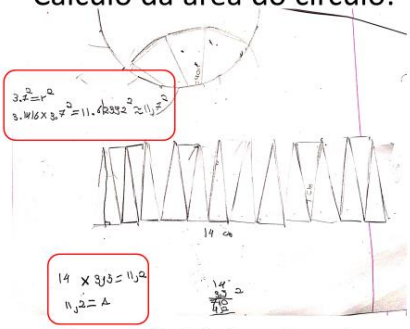
Transformar o polígono regular num paralelogramo e calcular esta área





Grupo II: Dinis + Duarte

Cálculo da área do círculo:



Grupo II: Dinis + Duarte

$$A_{círculo} = A_{Polígono\ regular}$$

$$A_{polígono\ regular} = \frac{P_{polígono\ regular}}{2} \times apótema$$

$$A_{círculo} = \frac{P_{círculo}}{2} \times raio$$

Grupos I, III, V e VII

$$A_{círculo} = \frac{P_{círculo}}{2} \times raio$$

Mas $P_{círculo} = \pi \times d$

Então $A_{círculo} = \frac{\pi \times d}{2} \times raio$

Grupos I, III, V e VII

$$A_{círculo} = \frac{\pi \times d}{2} \times raio$$

Mas $\frac{d}{2} = raio$

Então $A_{círculo} = \pi \times raio \times raio$

$$A_{círculo} = \pi \times r^2$$

Grupos I, III, V e VII