Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

A investigação em didática da álgebra linear: uma perspetiva do seu contributo para o ensino por meio da reflexão sobre a prática

Volume I

Tese de Doutoramento em Didática de Ciências e Tecnologia,
Especialidade de Didática de Ciências Matemáticas

Ricardo Jorge Castro Gonçalves

Professora Doutora Maria Cecília Rosas Pereira Peixoto da Costa

Professora Doutora Paula Maria Machado Cruz Catarino



Vila Real, 2018

Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

A investigação em didática da álgebra linear: uma perspetiva do seu contributo para o ensino por meio da reflexão sobre a prática

Volume I

Tese de Doutoramento em Didática de Ciências e Tecnologia,
Especialidade de Didática de Ciências Matemáticas

Ricardo Jorge Castro Gonçalves

Professora Doutora Maria Cecília Rosas Pereira Peixoto da Costa

Professora Doutora Paula Maria Machado Cruz Catarino

Composição do Júri:

Doutor Vítor Manuel de Jesus Filipe, Professor Associado com Agregação da Escola de Ciências e Tecnologia da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Doutora Maria Teresa dos Reis Pedroso de Lima Oliveira, Professora Catedrática da Faculdade de Economia da Universidade de Coimbra

Doutor Joaquim Bernardino de Oliveira Lopes, Professor Associado com Agregação da Escola de Ciências e Tecnologia da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Doutora Paula Maria Machado Cruz Catarino, Professora Associada da Escola de Ciências e Tecnologia da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Doutora Maria Cecília Rosas Pereira Peixoto da Costa, Professora Auxiliar com Agregação da Escola de Ciências e Tecnologia da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro

Doutora Maria Teresa Bixirão Neto, Professora Auxiliar da Universidade de Aveiro

Doutor Fernando Manuel Lourenço Martins, Professor Adjunto da Escola Superior de Educação de Coimbra do Instituto Politécnico de Coimbra

Vila Real, 2018

Este trabalho foi expressamente elaborado como dissertação original para efeito de obtenção do grau de Doutor em Didática de Ciências e Tecnologia, de acordo com o disposto no Decreto-Lei 107/2008, de 25 de Junho, e apresentado na Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD), Vila Real, Portugal.

Índice resumido

VOLUME I

Dedicatória e agradecimentos	ix
Resumo	xiii
Abstract	xv
Índice geral	xvii
Índice de figuras	xxi
Índice de tabelas	xxiii
Lista de siglas e acrónimos	xxv
Capítulo 1: Introdução	1
Capítulo 2: Fundamentação teórica	9
Capítulo 3: Descrição do estudo	41
Capítulo 4: Construção de sentidos do novo texto de álgebra linear: mais um dado da investigação	57
Capítulo 5: Análise da implementação do desenho de ensino	85
Capítulo 6: Reflexão: contributos para o ensino dos conceitos de álgebra linear	173
Capítulo 7: Conclusão	205
Bibliografia	221
Anexo 1	233
Apêndice A	237

VOLUME II

Apêndice B: Texto de álgebra linear

Apêndice C: Narrações multimodais

À Catarina e à Teresa

Agradecimentos

À Professora Doutora Cecília Costa, orientadora do estudo, por toda a ajuda, apoio e disponibilidade no desenvolvimento da tese e, acima de tudo, pela amiga que foi e pelo seu papel marcante no meu percurso académico.

À Professora Doutora Paula Catarino, coorientadora do estudo, pela disponibilidade e ajuda e também pela álgebra linear que me ensinou.

À Professora Doutora Teresa Abreu, com o papel duplo de, como minha mulher, me ter apoiado, compreendido e dado a estabilidade necessária para levar avante este trabalho e, como professora de álgebra linear, pelas sugestões e longas conversas em torno do tema.

À minha família, pela presença e suporte.

Aos professores do curso de doutoramento, em particular o Professor Doutor Bernardino Lopes, e aos arguentes dos seminários, pelas sábias sugestões que permitiram melhorar o rumo da investigação.

À direção da escola e à direção e colegas do departamento, por viabilizarem e apoiarem a implementação do desenho de ensino.

Aos alunos da turma-alvo, pela aceitação da recolha das suas produções e disponibilidade para o trabalho solicitado, bem como por possibilitarem a criação de um ambiente favorável ao desenvolvimento da investigação no terreno.

À editora Sílabo, em particular ao Dr. Manuel Robalo, pela publicação do texto de álgebra linear.

Aos professores, em geral, com os quais me cruzei ao longo do meu percurso académico. A dois professores, em particular: a professora de matemática do ensino secundário, que fez de mim professor; a professora de didática da matemática do curso de licenciatura, que fez de mim investigador.

Resumo

Este estudo procura tornar mais consequentes os resultados de investigação conhecidos na área da didática da álgebra linear, por via da reflexão de um professor de álgebra linear sobre a própria prática.

A investigação assenta no problema "*Que práticas de ensino concorrem com as orientações do movimento internacional em didática da álgebra linear*?" e tem como objetivos principais: alargar o espetro da materialização dos resultados de investigação conhecidos, apresentando uma possível interpretação das sugestões didáticas e a sua concretização, quer num possível texto de álgebra linear, quer no terreno; contribuir para a construção do conhecimento sobre as práticas de ensino e desenvolvimento profissional dos professores de álgebra linear; sensibilizar para a mudança no ensino de álgebra linear.

Segundo o método de investigação-ação, no contexto do desenvolvimento de uma investigação de natureza qualitativa e segundo o paradigma sociocrítico, é percorrido um ciclo com a seguinte sequência: (1) planeamento – elaboração de um texto original de álgebra linear, congregando extensivamente as principais recomendações didáticas, e uma fundamentação daquele texto para antecipar o modo como foram interpretadas e concretizadas; (2) ação – implementação do desenho de ensino, materializado no texto original de álgebra linear, numa turma do professor-investigador do curso de engenharia elétrica de uma instituição pública portuguesa de ensino superior politécnico, acrescida da construção das narrações multimodais de algumas aulas; (3) observação – análise de conteúdo das narrações multimodais, guiada por dimensões retiradas do quadro teórico; (4) reflexão – como um segundo momento da análise, considerando o sistema de categorias resultante da etapa anterior na análise comparativa com o texto original de álgebra linear e a sua fundamentação (dados que antecipam a expectativa quanto ao que é possível concretizar na aula) e o "diálogo" com a literatura.

A investigação visa responder à seguinte questão: "*Como é que um professor de álgebra linear pode desenvolver um desenho de ensino que incorpore extensivamente as recomendações didáticas conhecidas? Que dificuldades e oportunidades estão subjacentes à ação de implementação do desenho de ensino na sala de aula*?".

As opções metodológicas consideradas conduziram às seguintes conclusões:

1. O estudo revela uma forma pessoal, particular e possível de serem interpretados os resultados de investigação recolhidos na literatura da área, subentendendo a clareza de alguns e as dificuldades de contornar a subjetividade de outros.
2. O estudo conduziu à possibilidade de serem criados materiais pedagógicos (um texto original de álgebra linear, uma adenda a este texto e cinco narrações multimodais), refletindo o seu significado e contributo para a comunidade profissional.
3. O estudo teve implicação na prática pessoal do professor-investigador no ensino de álgebra linear.
4. O estudo destaca a importância da dualidade de papéis desempenhados pelo mesmo sujeito, ora como professor e com a função de aplicar conhecimento, ora como investigador e com a função de produzir conhecimento.
5. A construção de mapas conceptuais revelou-se uma das estratégias abordadas na literatura que permite melhorar o ensino de álgebra linear, constituindo-se como uma forma preponderante de potenciar a relação entre os conceitos e como um possível mecanismo regulador das aprendizagens.
6. As dificuldades intrínsecas à implementação do uso da tecnologia em sala de aula são ultrapassáveis e não invalidam o aproveitamento e a relevância de muitas das funções que facultam para o ensino e para a aprendizagem da álgebra linear.
7. A resolução de tarefas e a exploração das aplicações que se podem associar a muitos dos conceitos de álgebra linear criam novas oportunidades para o desenvolvimento conceptual, embora coloque também novos desafios ao professor quanto à forma de atuar em sala de aula.
8. Pela relação entre as oportunidades e as dificuldades elencadas, poder-se-á concluir que o desenho de ensino ganha consistência como uma forma a considerar no ensino de álgebra linear, sem, no entanto, se ter conseguido atenuar algumas das dificuldades já apontadas na literatura.

Palavras-chave: Ensino de álgebra linear; resultados de investigação; desenho de ensino; práticas de ensino; desenvolvimento profissional.

Abstract

This study tries to make more consistent the already known results from the literature on the research on teaching and learning of linear algebra, through the reflection of a linear algebra teacher about his own practice.

The research problem is "*Which teaching practices compete with the guidelines of the international movement of research on teaching and learning of linear algebra?*" and its main goals are: to widen the scope of materialization of the known research results, presenting a possible interpretation of the literature recommendations and their concretion, either in a possible linear algebra text or into classroom; to contribute to the construction of knowledge on teaching practices and professional development of linear algebra teachers; to sensitize changes in the teaching of linear algebra.

According to the action research method, in a context of development of a qualitative study and through the paradigm of critical theory, there is a cycle to be followed according to the following sequence: (1) planning – the construction of an original text of linear algebra, extensively bringing together the main literature recommendations, and an explanation of that text in order to anticipate how they were interpreted and put into practice; (2) action - the implementation of the teaching design, materialized in the original text of linear algebra, in a class of the teacher-researcher of a electrical engineering course of a Portuguese public polytechnic institution, with the additional construction of multimodal narratives of some classes; (3) observation – the content analysis of the multimodal narratives, guided by dimensions taken from the theoretical framework; (4) reflection - as a second moment of the analysis, and taking into account the system of categories resulting from the previous stage in the comparative analysis with the original text of linear algebra and its explanation (since they anticipate the expectation as to what can be put into practice in class) and the "dialogue" with the literature.

This research aims to answer the following question: "*How can a linear algebra teacher develop a teaching design that extensively incorporates the known recommendations? What difficulties and opportunities are behind the implementation of the teaching design in the classroom?* "

The considered methodological options led to the following conclusions:

1. This study reveals a personal, particular and possible way of interpreting the research results gathered from the literature of this area, showing the clarity of some and the difficulties of working around the subjectivity of others.
2. This study led to the creation of pedagogical materials (an original text of linear algebra, an addendum to this text and five multimodal narratives), reflecting their meaning and contribution to the professional community.
3. This study had an impact on the practice of the teacher-researcher in the teaching of linear algebra.
4. This study highlights the importance of the duality of roles played by the same person, whether as a teacher and with the role of applying knowledge, or as a researcher and with the role of producing knowledge.
5. The construction of conceptual maps has revealed to be one of the mentioned strategies in the literature that allows to improve the teaching of linear algebra, constituting itself as an important way of increase the relation between the concepts and as a possible mechanism to regulate the process of learning.
6. The inherent difficulties to the implementation of the use of technology in the classroom are surpassable and don't invalidate the use and relevance of many of the functions that they provide for the teaching and learning of linear algebra.
7. The task resolution and the exploration of applications of linear algebra create new opportunities for conceptual development, although it also places the teacher new challenges as to how to act in the classroom.
8. According to the listed opportunities and difficulties, it can be concluded that the teaching design that configures the study gains consistency as a form to be considered in the teaching of linear algebra, without, nevertheless, being able to mitigate some of the difficulties already mentioned in the literature.

Keywords: Teaching of linear algebra; research results; teaching design, teaching practices, professional development.

Índice Geral

Volume I

1 Introdução ... 1
1.1 Problema de investigação ... 1
1.2 Contextualização da investigação com a literatura ... 2
1.3 Estudo empírico ... 4
1.4 Questão de investigação ... 5
1.5 Estrutura da tese ... 6
2 Fundamentação teórica ... 9
2.1 "A natureza da besta" ... 9
2.1.1 A álgebra linear e a evolução curricular ... 10
2.1.2 As dificuldades dos alunos na aprendizagem da álgebra linear ... 13
2.1.2.1 Dificuldades conceptuais ... 14
2.1.2.2 Dificuldades cognitivas ... 21
2.2 Recomendações para o ensino de álgebra linear ... 25
2.2.1 Uso da tecnologia ... 26
2.2.2 Abordagem matricial ... 28
2.2.3 Exploração de tarefas e aplicações da álgebra linear ... 29
2.2.4 Conhecimento dos pré-requisitos ... 30
2.2.5 Interligação dos conceitos de álgebra linear ... 32
2.2.6 Alcance do formalismo ... 35
2.2.7 Atenção nas linguagens e múltiplas representações dos conceitos ... 38
3 Descrição do estudo ... 41
3.1 Problema, questões e objetivos da investigação ... 41
3.2 Paradigma e método de investigação ... 43
3.3 Fases de aplicação do método de investigação-ação ... 45
3.3.1 Planeamento ... 45
3.3.1.1 Cenário inicial ... 45
3.3.1.2 Uma possível materialização dos resultados de investigação ... 46
3.3.2 Ação ... 48
3.3.2.1 Realização da experiência ... 48
3.3.2.2 Instrumentos de recolha de dados ... 49
3.3.2.3 Narrações multimodais ... 49
3.3.3 Observação ... 51

3.3.4 Reflexão ... 52
3.4 Critérios de validade ... 53
4 Construção de sentidos do novo texto de álgebra linear: mais um dado da investigação ... 57
4.1 Na senda de mais um livro de texto de álgebra linear ... 58
4.2 Caraterísticas gerais do novo texto ... 59
4.2.1 Fontes ... 59
4.2.2 Conteúdo ... 60
4.2.3 Elementos físicos ... 63
4.3 Matrizes: capítulo 1 ... 64
4.4 Sistemas de equações lineares: capítulo 2 ... 67
4.5 Determinantes: capítulo 3 ... 74
4.6 Espaços vetoriais: capítulo 4 ... 78
5 Análise da implementação do desenho de ensino ... 85
5.1 Dimensão *Uso da tecnologia* ... 87
5.1.1 Subdimensão R_Recursos tecnológicos convocados ... 88
5.1.2 Subdimensão Fs_Função do *software* ... 91
5.1.3 Subdimensão A_Atitudes face ao uso da tecnologia ... 104
5.2 Dimensão *Abordagem matricial* ... 111
5.2.1 Subdimensão C_Configurações da abordagem matricial ... 112
5.2.2 Subdimensão F_m_Fatores motivados pela abordagem matricial ... 119
5.3 Dimensão *Exploração de tarefas e aplicações da álgebra linear* ... 126
5.3.1 Subdimensão C/T_Contexto e aspetos da teoria subjacente ... 127
5.3.2 Subdimensão E_Exteriorização da exploração de tarefas e aplicações ... 132
5.4 Dimensão *Conhecimento dos pré-requisitos* ... 139
5.5 Dimensão *Interligação dos conceitos de álgebra linear* ... 146
5.6 Dimensão *Alcance do formalismo* ... 157
5.7 Dimensão *Atenção nas linguagens e múltiplas representações dos conceitos* ... 162
6 Reflexão: contributos para o ensino dos conceitos de álgebra linear ... 173
6.1 Operações com matrizes ... 174
6.2 Conceito e resolução de sistemas de equações lineares ... 178
6.3 Determinação da matriz inversa de uma matriz invertível ... 189
6.4 Definição e validação dos axiomas de subespaço vetorial de um espaço vetorial ... 194
6.5 Conceito de combinação linear de vetores ... 199
7 Conclusão ... 205
7.1 Principais conclusões e contribuições do estudo ... 206
7.2 Limitações do estudo ... 218
7.3 Sugestões para trabalho futuro ... 219

Bibliografia..... 221
Anexo 1 233
Apêndice A..... 237

Índice de Figuras

Figura 2.1: Decomposição genética do conceito de dependência e independência linear de vetores....34

Figura 5.1: Excerto do texto de álgebra linear (Apêndice B, pp. 183-187)....94

Figura 5.2: Mapa conceptual sobre a relação entre conceitos e algoritmos/procedimentos (NM4) 125

Figura 5.3: Excerto do enunciado da tarefa "Algoritmo para a multiplicação de matrizes" 145

Figura 6.1: Captação do registo no quadro da proposta do Fernando para a resolução simultânea de dois sistemas de equações lineares 192

Figura 7.1: Procedimentos algorítmicos relacionados e associados a alguns conceitos da teoria dos espaços vetoriais....212

Índice de Tabelas

Tabela 5.1: Narrações multimodais por aula, conteúdo/conceitos e número de episódios 86
Tabela 5.2: Subdimensões e categorias emergentes (*Uso da tecnologia*) e respetiva codificação 87
Tabela 5.3: Categorias emergentes da subdimensão R, codificação e breve descrição 89
Tabela 5.4: Evidências das categorias R-v, R-s e R-c 89
Tabela 5.5: Categorias emergentes da subdimensão Fs, codificação e breve descrição 91
Tabela 5.6: Evidências das categorias Fs-d-nv e Fs-d-nn 93
Tabela 5.7: Evidências das categorias Fs-cl-nv e Fs-cl-nn.....96
Tabela 5.8: Evidências das categorias Fs-cl-nv e Fs-cl-nn (cont.) 98
Tabela 5.9: Evidências das categorias Fs-ca-et, Fs-ca-cc e Fs-ca-vr.....100
Tabela 5.10: Evidências da categoria Fs-a 103
Tabela 5.11: Categorias emergentes da subdimensão A, codificação e breve descrição 105
Tabela 5.12: Evidências das categorias A-i e A-e.....105
Tabela 5.13: Evidências da categoria A-v.....107
Tabela 5.14: Evidências das categorias A-d-dt, A-d-di e A-d-e.....109
Tabela 5.15: Subdimensões e categorias emergentes da dimensão *Abordagem matricial* e respetiva codificação.....112
Tabela 5.16: Categorias emergentes da subdimensão C, codificação e breve descrição 112
Tabela 5.17: Evidências da categoria C-p/s 113
Tabela 5.18: Evidências da categoria C-ac.....115
Tabela 5.19: Evidências da categoria C-ac (cont.).....118
Tabela 5.20: Categorias emergentes da subdimensão F_m, codificação e breve descrição.....120
Tabela 5.21: Evidências das categorias F_m-t/p, F_m-s e F_m-a 120
Tabela 5.22: Evidências das categorias F_m-ap e F_m-fa 122
Tabela 5.23: Subdimensões e categorias emergentes (*Exploração de tarefas e aplicações da álgebra linear*) e respetiva codificação.....127
Tabela 5.24: Categorias emergentes da subdimensão C/T, codificação e breve descrição.....128
Tabela 5.25: Evidências das categorias C/T-s e C/T-cat.....128
Tabela 5.26: Evidências da categoria C/T-dc.....130
Tabela 5.27: Categorias emergentes da subdimensão E, codificação e breve descrição.....133
Tabela 5.28: Evidências das categorias E-m-p; E-m-c e E-m-f 133
Tabela 5.29: Evidências da categoria E-pc.....137
Tabela 5.30: Categorias emergentes da dimensão *Conhecimento dos pré-requisitos*, codificação e breve descrição.....140
Tabela 5.31: Evidências das categorias Pr-l-lg, Pr-l-tc e Pr-l-ga.....140

Tabela 5.32: Evidências da categoria Pr-l-cm 144
Tabela 5.33: Evidências da categoria Pr-sel 145
Tabela 5.34: Categorias emergentes da dimensão *Interligação dos conceitos de álgebra linear*, codificação e breve descrição 147
Tabela 5.35: Evidências das categorias Ic_{pr}-p e Ic_{al}-p 148
Tabela 5.36: Evidências das categorias Ic_{pr}-c e Ic_{al}-c 151
Tabela 5.37: Evidências das categorias Ic_{pr}-r e Ic_{al}-r 153
Tabela 5.38: Evidências das categorias Ic_{pr}-dpt e Ic_{al}-dpt 155
Tabela 5.39: Categorias emergentes da dimensão *Alcance do formalismo*, codificação e breve descrição 158
Tabela 5.40: Evidências das categorias F-e-mi e F-e-fc 158
Tabela 5.41: Evidências da categoria F-ofd 161
Tabela 5.42: Categorias emergentes (*Atenção nas linguagens e múltiplas representações dos conceitos*), codificação e breve descrição 163
Tabela 5.43: Evidências da categoria L-m-ga 164
Tabela 5.44: Evidências da categoria L-m-af 166
Tabela 5.45: Evidências da categoria L-m-gaf 167
Tabela 5.46: Evidências da categoria L-m-vr 169
Tabela 5.47: Evidências da categoria L-u 171
Tabela 6.1: Relação entre os dados quanto ao ensino das operações com matrizes 175
Tabela 6.2: Relação entre os dados quanto ao ensino do conceito e resolução de sistemas de equações lineares 179
Tabela 6.3: Relação entre os dados quanto ao ensino de uma forma de determinar a matriz inversa de uma matriz invertível 190
Tabela 6.4: Relação entre os dados quanto ao ensino da definição e formas de validação dos axiomas de subespaço vetorial de um espaço vetorial 195
Tabela 6.5: Relação entre os dados quanto ao ensino do conceito de combinação linear de vetores 199

Lista de siglas e acrónimos

AGD – Ambiente de geometria dinâmica;

APOE (teoria) – Ação-processo-objeto-esquema;

ATLAST – Augment the Teaching of Linear Algebra through the use of Software Tools;

CAS – Computer algebra system;

LACSG – Linear Algebra Curriculum Study Group;

NM – Narração multimodal.

1 Introdução

1.1 Problema de investigação

Que práticas de ensino concorrem com as orientações do movimento internacional em didática da álgebra linear?

Começamos por estabelecer que este estudo parte da motivação pessoal do autor de se deparar com a possibilidade de ensinar álgebra linear pela primeira vez. Até à data, o seu conhecimento era meramente científico, essencialmente sobre os resultados iniciais de investigação na área, resultante da realização de uma tese de mestrado. Julgou assim ter surgido a oportunidade para enveredar por uma abordagem alternativa, alicerçada nos resultados de investigação em didática da álgebra linear, e não seguindo os moldes mais tradicionais vigentes na instituição.

O problema que colocamos a montante da investigação visa a questão do estudo das práticas de ensino de professores do ensino superior, em particular de álgebra linear, em sobreposição com o estudo do aproveitamento e dos possíveis contributos dos resultados de investigação na área para o ensino de álgebra linear.

Como justificação para o problema colocado, alguns investigadores (Ponte & Chapman, 2006; Speer, Smith, & Horvath, 2010) lembram que o interesse sobre o estudo das práticas dos professores de matemática do ensino superior fica ainda muito aquém do já observado relativamente aos professores de níveis de ensino anteriores. Este facto sugere que a partir da reflexão sobre a própria prática dos professores do ensino superior é sobretudo gerado conhecimento considerado apenas experiencial, informal ou tácito (Cochram-Smith & Lytle, 1999) e longe das investigações de cariz académico ou científico.

A ligação a outro facto, relacionado com os resultados de investigação conhecidos sobre os processos de ensino e de aprendizagem da álgebra linear, estabelece-se por via de estar subentendido que as produções dos investigadores, conseguidas ao longo dos últimos trinta anos, ainda são pouco consideradas ou concretizadas no ensino de álgebra linear, nomeadamente em Portugal. Usando como indicador livros recentes de autores portugueses (Cabral, Perdigão, & Saiago, 2009; Lima, 2010; Monteiro, 2011a, 2011b; Santana & Queiró, 2010), constatámos não haver uma obra que elicie extensivamente aqueles resultados, comparativamente com obras de referência da bibliografia internacional. Resultou assim o pressuposto de o ensino de álgebra linear em Portugal ainda seguir significativamente as abordagens consideradas tradicionais.

Como consequência, este estudo tem como objetivos principais: alargar o espetro da materialização dos resultados de investigação conhecidos, apresentando uma possível interpretação das sugestões didáticas e a sua concretização, quer num possível texto de álgebra linear, quer no terreno; contribuir para a construção do conhecimento sobre as práticas de ensino e desenvolvimento profissional dos professores de álgebra linear; sensibilizar para a mudança no ensino de álgebra linear.

1.2 Contextualização da investigação com a literatura

Este estudo insere-se no campo da educação matemática do ensino superior, mais concretamente na didática da álgebra linear. Tal como se pode falar da evolução histórica da álgebra linear enquanto ramo da Matemática e enquanto unidade curricular do ensino superior, também parece que os diferentes momentos da evolução da didática da álgebra linear são relativamente claros.

Desde a tese de doutoramento de Guershon Harel (1985), considerada como o "momento zero" da didática da álgebra linear, as três décadas seguintes foram divididas entre a atenção inicial dos investigadores na identificação das dificuldades que os alunos enfrentavam na aprendizagem da álgebra linear e a posterior tentativa de resposta a essas mesmas dificuldades, com novas propostas para o ensino.

Face ao problema de investigação colocado, todo o estudo assenta no conhecimento dos

resultados de investigação sobre os processos de ensino e de aprendizagem da álgebra linear. Seguindo a sequência da evolução da didática da álgebra linear, olhámos para as dificuldades elencadas pelos investigadores – para podermos antecipar alguns comportamentos dos alunos e também contribuirmos para mitigar essas dificuldades – e para as recomendações didáticas – para termos uma base de interpretação e de orientação no desenvolvimento de um desenho de ensino.

Num artigo de revisão da literatura, Dorier e Sierpinska (2001) distinguem as dificuldades em duas categorias: dificuldades conceptuais, que estão relacionadas com a natureza dos conteúdos de álgebra linear; dificuldades cognitivas, que dizem respeito ao tipo de pensamento que é necessário que os alunos desenvolvam em prol da compreensão da álgebra linear.

Sobre as dificuldades conceptuais, os alunos revelam dificuldades ao nível de:

- conhecimento de pré-requisitos: essencialmente ao nível da lógica, teoria de conjuntos e geometria analítica;
- uso do formalismo: os alunos não vêm preparados para o nível de abstração que a aprendizagem da álgebra linear requer, nem reconhecem a sua importância;
- diversidade da linguagem específica da álgebra linear: os alunos revelam dificuldades de articulação entre a linguagem formal, algébrica e geométrica. Consequentemente, confundem as representações do mesmo conceito, como se de diferentes conceitos se tratasse;
- aprendizagem de alguns conceitos específicos: sobretudo os conceitos de natureza mais formal, nomeadamente os relacionados com a teoria dos espaços vetoriais.

Sobre as dificuldades cognitivas, os alunos revelam dificuldades ao nível de:

- falta de flexibilidade cognitiva: mais propriamente entre ambientes (algébrico ou geométrico), registos de representações semióticas (representação matricial, representação segundo coordenadas ou representação segundo equações) e pontos de vista (cartesiano ou paramétrico);
- tendência para pensar em termos práticos: significando o foco nas ações, desenvolvidas dentro de uma lógica conhecida e pressupondo uma associação empírica, funcional e contextualizada dos conceitos.

As recomendações didáticas têm um traço forte do trabalho inicial do *Linear Algebra Curriculum Study Group* (LACSG) e, segundo a nossa interpretação, podem ser sintetizadas em:

- uso da tecnologia: principalmente a utilização do computador em sala de aula, com recurso a *software* de geometria dinâmica e a *software* de cálculo simbólico;
- abordagem matricial dos conteúdos: exploração dos conceitos a partir das matrizes e com base em exemplos concretos e práticos, em detrimento da exploração axiomática;
- exploração de tarefas e aplicações da álgebra linear: de modo a fazer sobressair o caráter transversal da álgebra linear e ir ao encontro das necessidades da maior parte do público-alvo;
- conhecimento dos pré-requisitos: contribuir para que os alunos enriqueçam o conhecimento sobre alguns conceitos essenciais para a aprendizagem dos novos conceitos, bem como o desenvolvimento das competências matemáticas inerentes;
- interligação dos conceitos: de modo a fazer sobressair as relações entre os conceitos, como condição para o desenvolvimento dos conceitos imagem e como contributo para o processo de construção dos conceitos;
- alcance do formalismo: não evitando o uso do formalismo, mas ligando os conceitos formais ao conhecimento e competências anteriores dos alunos, segundo abordagens mais intuitivas, como forma de conduzir os alunos a compreenderem e a relevarem a sua natureza unificadora e generalizadora;
- atenção nas linguagens e múltiplas representações dos conceitos: opção pela linguagem geométrica como contributo para o desenvolvimento dos conceitos imagem e ênfase nas articulações desta com as linguagens algébrica e formal.

1.3 Estudo empírico

A implementação de um desenho de ensino, guiado pelos resultados de investigação em didática da álgebra linear, foi levada a cabo pelo professor-investigador numa turma do primeiro ano do curso de engenharia elétrica, na instituição pública portuguesa de ensino superior politécnico onde lecionava. Estavam inscritos na unidade curricular trinta e um alunos e o número estabilizou em dezoito relativamente aos que estiveram presentes em quase todas as aulas.

A experiência decorreu ao longo das dezasseis aulas da parte de álgebra linear da unidade curricular (Matemática Discreta e Álgebra Linear), cada uma com uma duração aproximada de

uma hora e quarenta e cinco minutos. Em cada aula, o texto de álgebra linear desenvolvido pelo professor-investigador funcionou como um manual escolar e considerou-se o uso do computador, quer pelo professor, quer pelos alunos. Nos momentos pré e pós-aula, o professor elaborou um plano de aula e recolheu as notas sobre as primeiras sensações quanto ao modo como decorreu a aula, respetivamente.

Estes e outros dados recolhidos (gravações áudio e algumas produções dos alunos) foram congregados num único instrumento – narrações multimodais (Lopes et al., 2010, 2014). Para cinco das dezasseis aulas, o professor apresentou a sua versão (isenta) da "história" sobre todos os acontecimentos decorridos em cada aula.

1.4 Questão de investigação

> *Como é que um professor de álgebra linear pode desenvolver um desenho de ensino que incorpore extensivamente as recomendações didáticas conhecidas? Que dificuldades e oportunidades estão subjacentes à ação de implementação do desenho de ensino na sala de aula?*

A procura de uma resposta para a questão de investigação começou com a revisão exaustiva da literatura. O objetivo passava por ampliar o nosso conhecimento sobre as dificuldades de aprendizagem da álgebra linear identificadas pelos investigadores e recolher o conjunto, o mais alargado possível, das recomendações didáticas para melhorar o ensino.

O trabalho inicial conduziu à formalização de um conjunto de indicadores que passaram a orientar o desenvolvimento de um possível desenho de ensino: uso da tecnologia; abordagem matricial dos conceitos; exploração de tarefas e aplicações da álgebra linear; conhecimento dos pré-requisitos; interligação dos conceitos de álgebra linear; alcance do formalismo; atenção nas linguagens e múltiplas representações dos conceitos.

O desenho de ensino foi materializado num texto original de álgebra linear, com os resultados de investigação como fontes principais e alguns livros de referência e outros trabalhos como fontes secundárias. Para mostrar a nossa interpretação dos resultados de investigação e o modo como os procurámos concretizar, desenvolvemos um segundo texto, fundamentando o primeiro e para funcionar como adenda.

A análise das narrações multimodais, na modalidade de análise de conteúdo (Bardin, 1977/1995), começou por ser guiada por um sistema de dimensões informado pelo referencial teórico, mais concretamente, os indicadores do estudo estabelecidos. Aos processos de codificação e categorização, seguiu-se a análise das respetivas categorias, começando a emergir o conjunto das práticas conseguidas pelo professor.

Por via da reflexão, estes novos dados, em articulação com o texto de álgebra linear e respetiva fundamentação (dados que antecipam a expectativa quanto ao que é possível concretizar na aula) e em "diálogo" com a literatura, forneceram informações sobre as oportunidades e as dificuldades procuradas e encontradas. Por esta via, a possibilidade de o desenho de ensino ser melhorado ganhou novos contornos.

1.5 Estrutura da tese

A tese está dividida em dois volumes, sendo o primeiro o que integra o corpo principal da tese. Depois da introdução (Capítulo 1), o capítulo 2 do primeiro volume apresenta uma visão geral da literatura sobre a didática da álgebra linear. Após uma breve referência à evolução da álgebra linear enquanto unidade curricular do ensino superior, o capítulo divide-se entre a identificação das principais dificuldades de aprendizagem da álgebra linear e a identificação das principais recomendações didáticas apontadas pelos investigadores para o ensino da álgebra linear.

O capítulo 3 aborda as questões metodológicas, definindo o paradigma e o método de investigação nos quais assenta o estudo, a par da relação do trabalho a realizar em cada uma das etapas de um ciclo de investigação-ação.

O capítulo 4 começa por abrir caminho para a construção de um novo texto de álgebra linear. O destaque posterior vai para a fundamentação de todos os passos e opções consideradas na elaboração do texto de álgebra linear.

Os capítulos 5 e 6 são referentes aos dois momentos da análise. No capítulo 5 são identificadas e analisadas as categorias relativas às sete dimensões que correspondem aos indicadores do estudo. No capítulo 6 organiza-se a reflexão em torno dos contributos para o ensino de alguns dos conceitos de álgebra linear, nomeadamente: operações com matrizes;

sistemas de equações lineares; matriz inversa de uma matriz invertível; subespaços vetoriais de um espaço vetorial; combinação linear de vetores.

O capítulo 7, e último, apresenta as principais conclusões e o impacto do estudo, bem como a referência às suas limitações e a possíveis linhas futuras de investigação.

O segundo volume da tese integra, como apêndices, o texto de álgebra linear desenvolvido, com a mesma formatação da sua publicação (Gonçalves, 2015), e as cinco narrações multimodais completas.

2 Fundamentação teórica

Many among those who teach such a course [linear algebra] have resigned themselves to the fact that this is simply 'the nature of the beast' and that not much can be done to change things.

(Hillel, 2000, p. 191)

2.1 "A natureza da besta"

A álgebra linear como ramo da matemática, a álgebra linear como unidade curricular do ensino universitário e a didática da álgebra linear têm uma história curta. Sobre a álgebra linear como unidade curricular do ensino universitário, o desafio tem passado por adaptar o seu ensino aos interesses dos alunos (de modo a que melhore a eficácia da aprendizagem) e às necessidades cada vez mais atuais (por exemplo, em concordância com os avanços tecnológicos). Sobre a didática da álgebra linear, a primeira preocupação dos investigadores foi identificar os obstáculos de aprendizagem que estavam na origem do insucesso dos alunos e da frustração dos professores de álgebra linear.

As dificuldades de aprendizagem identificadas na literatura são classificadas como conceptuais e cognitivas. Como dificuldades conceptuais, a literatura reconhece:

- o conhecimento de pré-requisitos: essencialmente ao nível da lógica, teoria de conjuntos e geometria analítica;
- o uso do formalismo: os alunos não vêm preparados para o nível de abstração que a aprendizagem da álgebra linear requer, nem reconhecem a sua importância;
- a diversidade da linguagem específica da álgebra linear: os alunos revelam dificuldades de articulação entre a linguagem formal, algébrica e geométrica.

Consequentemente, confundem as representações do mesmo conceito, como se de diferentes conceitos se tratassem;

- a aprendizagem de alguns conceitos específicos: essencialmente os conceitos de natureza mais formal, nomeadamente os relacionados com a teoria dos espaços vetoriais.

Como dificuldades cognitivas, a literatura reconhece:

- a falta de flexibilidade cognitiva: mais propriamente entre ambientes (algébrico ou geométrico), registos de representações semióticas (representação matricial, representação segundo coordenadas ou representação segundo equações) e pontos de vista (cartesiano ou paramétrico);
- a tendência para pensar em termos práticos: significando o foco nas ações, desenvolvidas dentro de uma lógica conhecida e pressupondo uma associação empírica, funcional e contextualizada dos conceitos.

2.1.1 A álgebra linear e a evolução curricular

A álgebra linear é um ramo da matemática relativamente recente, comparativamente com outros ramos mais consagrados como o cálculo e a geometria. Localizando temporalmente, Dorier (2000) documenta que a expressão "álgebra linear" apenas surge no início do século passado.

A sua história começa nas últimas décadas do século dezanove, mas com um hiato de sensivelmente cento e cinquenta anos desde o aparecimento dos determinantes (Kleiner, 2007; Uhlig, 2003) e a montante do desenvolvimento do método de eliminação de Gauss, no início do século XIX, e da introdução do conceito de matriz por J. J. Sylvester, em 1850 (Kleiner, 2007). Por volta de 1880, muitos dos principais conceitos básicos da álgebra linear estavam já estabelecidos, embora sem uma teoria geral a englobá-los (Kleiner, 2007). O período que se seguiu, entre 1880 e 1930, coincidiu com o desenvolvimento da teoria dos espaços vetoriais e a consequente axiomatização da álgebra linear, ou seja, "a reconstrução teórica dos métodos de resolução de problemas lineares, usando os conceitos e ferramentas de uma nova teoria axiomática central" (Dorier & Sierpinska, 2001, p. 257).

O passo seguinte consistiu na divulgação dos assuntos intrínsecos à álgebra linear, mormente a teoria dos espaços vetoriais, e a sua transposição para o ensino. Neste campo,

segundo Dorier (2000), os livros de texto *Survey of Modern Algebra*, de Garrett Birkhoff e Sauders MacLane, em 1941, e *Finite-dimensional Vector Spaces*, de Paul R. Halmos, em 1942, influenciaram decisivamente o ensino universitário nos Estados Unidos da América e em outros países, tal como o livro de texto *Algèbre et Analyse Linéaires*, de André Lichnérovicz, em 1947, foi essencial para a difusão da teoria axiomática dos espaços vetoriais em França.

A álgebra linear alcançou o estatuto próprio no currículo de matemática no ensino superior a partir dos anos sessenta (Tucker, 1993; Uhlig, 2003). De acordo com Tucker (1993), os seus fundamentos teóricos estavam tão bem estruturados e completos, que a tornavam como a primeira unidade curricular de nível superior verdadeiramente de matemática e um modelo para qualquer teoria matemática. Ou a primeira teoria matemática de pleno direito que os alunos encontram na universidade, como afirma Hillel (2000). Cimentando o seu reconhecimento, a álgebra linear passou a ter importância central dentro e fora da matemática: por um lado, pelo seu poder unificador (Dorier, 1995), congregando métodos e objetos de áreas como a geometria, álgebra e análise (Tucker, 1993); por outro, pelas suas aplicações e por ser um importante pré-requisito para áreas como as ciências e engenharias (Maracci, 2008), tornando-a talvez mais necessária para a maioria dos alunos, em geral, do que o próprio cálculo (Strang, 1988).

Com a reforma das matemáticas modernas, incluiu-se também a álgebra linear no currículo do ensino não superior. Acreditava-se que a teoria dos espaços vetoriais acompanhava um dos principais desafios desta reforma, que passava por tornar a matemática mais diretamente acessível, e funcionaria como "modelo de simplicidade" (Dorier, 2000). Olhando-se, como exemplos, para o que ocorreu nos Estados Unidos da América e em França, aquela expectativa gorou-se. A partir do início dos anos oitenta, o estudo dos espaços vetoriais desapareceu do currículo (Dorier, 2000), embora se continuasse a estudar nas escolas secundárias alguns temas intrínsecos à álgebra linear, como sistemas de equações lineares, geometria analítica e o espaço euclidiano (Harel, 1997).

Enfatizando o papel da álgebra linear, Harel (1997, 2000) não concorda que esta não seja parte integrante do currículo do ensino não superior. Esta hipotética realidade contrabalançaria o facto de os alunos verem o cálculo no ensino superior como a continuidade natural da matemática que aprenderam anteriormente com o facto de verem a álgebra linear como um assunto "completamente" novo. Isto porque até os assuntos acima referidos são explorados no ensino secundário de uma forma que têm muito pouco em comum com a linguagem da álgebra linear.

A importância crescente da álgebra linear é "simbiótica" com a era digital e os avanços no desenvolvimento dos computadores, observada desde os meados do século passado. Isto porque, tal como afirma Tucker (1993), "a álgebra linear é a matemática do nosso mundo tecnológico moderno dos sistemas multivariáveis complexos e dos computadores" (p. 3) e, ao mesmo tempo, novos *hardwares* e *softwares* fomentaram o poder da álgebra linear ao possibilitarem a resolução de problemas que a via analítica, até então, não satisfazia (Carlson et al., 1993).

Os avanços na tecnologia tiveram também grande impacto na reorganização curricular da álgebra linear: marcaram fortemente a reforma levada a cabo nos Estados Unidos da América, a partir dos anos noventa (Carlson et al., 1993); conduziram a que se questionasse o ensino de álgebra linear com enfoque na abordagem axiomática, em prol da abordagem matricial (Chang, 2011); implicaram a inclusão da álgebra linear no currículo de um número cada vez maior de cursos (Tucker, 1993).

Carlson et al. (1993), segundo uma das recomendações do grupo norte-americano *Linear Algebra Curriculum Study Group* (LACSG), aclaram as ligações da álgebra linear a diversas áreas do conhecimento, sugerindo que um primeiro curso de álgebra linear deve responder às necessidades de áreas como engenharias, ciências da computação, economia ou estatística. Tal necessidade é objetivada por Chang (1997), afirmando que a álgebra linear é a linguagem da computação gráfica. Por sua vez, Day (1997) pormenoriza que os "cursos clientes" da álgebra linear procuram apropriar-se de conhecimentos ao nível do significado geométrico de alguns conceitos de álgebra linear mais abstratos, de propriedades das matrizes, de alguma experiência com aplicações da álgebra linear, da teoria dos espaços vetoriais e transformações lineares, entre outros.

Segundo Chang (2011), a reforma curricular do cálculo realizada nos Estados Unidos da América induziu a necessidade de se olhar também para o currículo de outras áreas da matemática lecionadas no ensino superior, nomeadamente a álgebra linear, em sintonia com as preocupações crescentes em torno dos processos de ensino e de aprendizagem. De acordo com Dorier (2000), também em França começava a ser evidente e recorrente a frustração dos professores de álgebra linear, face às dificuldades observadas nos alunos perante assuntos que aqueles entendiam ser simples. No campo oposto, os alunos sentiam-se aterrar num novo planeta e completamente à deriva (Dorier, 1998). Pintando um quadro mais negro, o ensino de álgebra linear vigente parecia estar desfasado com a realidade e não respondia às necessidades

cada vez mais atuais. Concretizando, segundo Carlson et al. (1993), a influência do computador e as aplicações da álgebra linear nos diversos campos conhecidos ainda andavam longe da sala de aula. Do ponto de vista dos alunos, o currículo de álgebra linear, por exemplo nos Estados Unidos da América, tinha lacunas face ao que estes estavam efetivamente a aprender (Dubinski, 1997).

A partir do início dos anos noventa, entrou na agenda de muitos países a reforma curricular da álgebra linear. Porventura, a mais sonante foi a realizada nos Estados Unidos da América, sob a alçada do LACSG. Carlson et al. (1993) são a voz dessa reforma, dando a conhecer que o principal objetivo era "iniciar o interesse nacional, substancial e sustentado, na melhoria do currículo de álgebra linear no ensino superior" (p. 41). Nesta altura, assistia-se ao interesse crescente dos investigadores pela didática da álgebra linear, cujo foco inicial incidiu na identificação das dificuldades dos alunos na aprendizagem dos principais assuntos da álgebra linear, as quais procuraremos dar a conhecer em detalhe na secção seguinte.

2.1.2 As dificuldades dos alunos na aprendizagem da álgebra linear

De acordo com Dorier e Sierpinska (2001), mesmo com toda a atenção que se possa ter com o currículo ou com o ensino, a álgebra linear é e será (espera-se cada vez menos!) vista pela maioria dos alunos como um assunto difícil e um enorme desafio. A metáfora do nevoeiro que paira sobre os alunos nas aulas de álgebra linear usada por Carlson (1993) é sobejamente conhecida e referida pelos investigadores para retratarem aquele facto. Neste enquadramento e na perspetiva dos professores, o ensino de álgebra linear no ensino superior pode tornar-se recorrentemente uma experiência frustrante (Hillel, 2000).

A tese de doutoramento de Guershon Harel de 1985 – *Teaching linear algebra in high school* – é considerada como o ponto de partida para a investigação em didática da álgebra linear (Hillel, 2000). No histórico de trinta anos de investigação na área, os diferentes trabalhos conhecidos são quase uma resposta ao desafio lançado por Dubinski (1997): faltava literatura que fundamentasse a necessidade de mudar o currículo da álgebra linear ou que apontasse as suas insuficiências; era necessário analisar epistemologicamente os conceitos subjacentes às dificuldades detetadas nos alunos, antes de se delinear qualquer estratégia pedagógica.

Essencialmente na década de noventa, muitos trabalhos de investigação reportaram os obstáculos enfrentados pelos alunos na aprendizagem dos conceitos e conteúdos da álgebra

linear. Para Britton e Henderson (2009), as razões para que os alunos não consigam "ver através do nevoeiro" estão agora cabalmente documentadas.

Numa revisão de literatura, Dorier e Sierpinska (2001) sugerem a distinção das dificuldades observadas nos alunos de álgebra linear em duas categorias. Por um lado, as dificuldades conceptuais, que estão relacionadas com a própria natureza dos conteúdos da álgebra linear. Por outro, as dificuldades cognitivas, que dizem respeito ao tipo de pensamento que é necessário que os alunos desenvolvam em prol da compreensão da álgebra linear.

Nas subseções seguintes, procuraremos destacar da literatura as dificuldades identificadas na aprendizagem da álgebra linear e organizá-las segundo dificuldades conceptuais e dificuldades cognitivas.

2.1.2.1 Dificuldades conceptuais

Nesta subsecção, as dificuldades conceptuais de aprendizagem da álgebra linear que a literatura reconhece serão organizadas em quatro categorias, segundo a nossa interpretação: dificuldades sobre o conhecimento anterior dos alunos; dificuldades sobre o caráter abstrato dos conceitos; dificuldades sobre as diferentes linguagens e representações dos conceitos; dificuldades específicas associadas à aprendizagem de alguns conceitos.

Dificuldades sobre o conhecimento anterior dos alunos. Citando o estudo de Robert e Robinet, Dorier et al. (2000a) afirmam que "a principal crítica dos alunos de álgebra linear diz respeito ao uso do formalismo, à avassaladora quantidade de novas definições e à falta de conexão com o que já aprenderam em matemática" (p. 86). Harel (1997) comprova este último ponto, afirmando que a capacidade dos alunos para relacionar os novos conhecimentos de álgebra linear com o que aprenderam antes fica muito aquém ou é mesmo nula. Por sua vez, Carlson (1993) prefere enfatizar a forma como os conceitos de álgebra linear são ensinados, sem ligações evidentes ao que os alunos já sabem. Mas à luz do conhecimento anterior dos alunos, a literatura tem estabelecido como questão principal o que efetivamente estes "não aprenderam", isto é, as lacunas ao nível dos pré-requisitos considerados para a aprendizagem dos conteúdos da álgebra linear.

Nesta linha, o conhecimento adquirido pelos alunos no ensino secundário não aponta aos objetos, linguagens, ideias ou raciocínios que são únicos na álgebra linear (Harel, 1997). A exceção é a resolução de sistemas até três equações e três incógnitas, mas sem tal implicar a

utilização dos objetos e ferramentas que mais tarde os alunos aprenderão no âmbito da álgebra linear.

Dorier et al. (2000b) acrescentam as insuficiências que os alunos revelam sobre noções básicas de lógica e de teoria de conjuntos, temas estes que consideram essenciais para a aprendizagem da teoria dos espaços vetoriais. Referindo-se a aspetos mais particulares, Dubinsky (1997) dá nota da escassa aptidão dos alunos para lidar com quantificadores e Dorier et al. (2000a) observaram as dificuldades ao nível de noções como inclusão, implicação e equação algébrica de um objeto geométrico.

Dogan-Dunlap (2006) associa a teoria de conjuntos à aprendizagem dos conceitos de subespaço vetorial e de subespaço vetorial gerado e documenta três categorias de erros que derivam do conhecimento insuficiente dos alunos nesta área: reconhecimento das várias representações do mesmo conjunto; reconhecimento do critério que define os elementos de um conjunto; distinção entre conjunto e elementos de um conjunto.

Por último, Dorier (1998) destaca que os alunos não costumam ter as competências necessárias ao nível da geometria analítica. Consequentemente, a intuição geométrica fortemente associada a muitos dos conceitos de álgebra linear, e que aparece recorrentemente nas estratégias de ensino, ficará definitivamente comprometida. Sierpinska et al. (1999a) referem ainda que os alunos também revelam falhas com o sentido do conceito de função, quanto ao qual Dubinski (1997) realça a sua importância para compreensão das aplicações lineares.

Dificuldades sobre o caráter abstrato dos conceitos. As dificuldades relacionadas com o conhecimento de pré-requisitos estão na génese de um outro tipo de dificuldades, em coerência com a queixa dos alunos supracitada em relação ao "uso do formalismo" (Dorier et al., 2000a). Na literatura esta dificuldade passou a ser conhecida por obstáculo do formalismo, visto como as limitações e conceções erradas derivadas das competências insuficientes dos alunos ao nível de lógica e de teoria de conjuntos, a par das dificuldades com a manipulação de expressões algébricas (Dorier et al., 2000a). Na perspetiva de Sierpinska (2000), o obstáculo do formalismo tem um sentido diferente, embora relacionado: os alunos veem as diferentes representações formais de um conceito como representações de conceitos diferentes, induzindo erradamente que têm de lidar com uma lista interminável de objetos na aprendizagem da álgebra linear.

A dificuldade de lidar com a parte mais formal da matemática é uma contingência associada ao percurso escolar dos alunos. Os alunos chegam à universidade muito pouco

familiarizados com os assuntos da matemática de natureza mais formal e a inversão desta tendência ganha corpo com a aprendizagem da álgebra linear, dada a natureza dos assuntos subjacentes (Dorier et al., 2000a). Os alunos estão mal preparados para os níveis de abstração que a aprendizagem da álgebra linear requer, de tal modo que qualquer conceito, mesmo os mais simples, se torna difícil de aprender (Dogan-Dunlap, 2010).

Os alunos olham para a álgebra linear como um catálogo de conceitos muito abstratos, os quais "estão submersos sob uma avalanche de novas palavras, novos símbolos, novas definições e novos teoremas" (Dorier et al., 2000a, p. 95). Acresce que o receio para com a parte mais abstrata da álgebra linear é sentido, quer pelos alunos, quer pelos professores. Recorrentemente, os professores ficam surpreendidos e desarmados face à incompreensão manifestada pelos alunos na aprendizagem daquele tipo de conceitos, pois têm em mente que os raciocínios subjacentes são demasiado óbvios e sobre os quais não há muito a dizer.

A questão que se segue tem a ver com uma espécie de perspetiva antagónica sobre a necessidade do formalismo, ora sob o ponto de vista da própria álgebra linear, ora sob o ponto de vista dos alunos. Sobre o primeiro caso, Dorier e Sierpinska (2001) lembram o momento da axiomatização da álgebra linear, entendida como:

> "a reconstrução teórica dos métodos para a resolução de problemas lineares, usando os conceitos e ferramentas de uma nova teoria axiomática central, […] [fornecendo] uma abordagem e linguagem mais universal para ser usada numa variedade de contextos […] e tornando-se num modo universal de pensamento e organização da álgebra linear (p. 257)".

Resulta que a álgebra linear é uma teoria unificadora e generalizadora (Dorier, 1995, 1998, 2000; Dorier et al., 2000a, 2000b), sobretudo expressa na teoria dos espaços vetoriais, e como consequência é uma teoria formal. No entanto, esta "visão" da álgebra linear não é partilhada pelos alunos. É difícil os alunos reconhecerem as vantagens de aprender muitos dos conceitos formais, os quais têm o custo de virem acompanhados com mais definições e mais teoremas, quando parece que tudo na álgebra linear se resume a procedimentos algorítmicos que envolvem a resolução de sistemas de equações lineares (Dorier et al., 2000b; Hillel, 2000).

A partir de um estudo, Dorier et al. (2000a) concluíram que o problema do formalismo tem uma dimensão local, restringido à aprendizagem dos assuntos mais formais da álgebra linear, como os da teoria dos espaços vetoriais. A dificuldade dos alunos diz essencialmente respeito à compreensão do próprio uso do formalismo e à interpretação dos conceitos formais

quando relacionados com contextos mais intuitivos, como a geometria e os sistemas de equações lineares.

Ainda relacionado com a questão do formalismo e a natureza abstrata da álgebra linear, a literatura identificou a dificuldade dos alunos no desenvolvimento de provas ou demonstrações (Dorier et al., 2000a; Harel, 1997, 1999; Hillel, 2000; Uhlig, 2002). Comprovando este pressuposto, face à pergunta sobre as principais dificuldades de aprendizagem da álgebra linear, Dorier et al. (2000a) ouviram dos alunos que parte resultavam das "abstrações", entre outras, associadas a problemas que envolviam a prova, à demonstração de teoremas e ao rigor exigido.

Para Uhlig (2002), aludindo ao caso norte-americano, a génese da dificuldade dos alunos com o desenvolvimento do raciocínio dedutivo na álgebra linear está também ligada ao passado escolar dos alunos. Até à frequência da álgebra linear, os alunos quase não tiveram qualquer contacto com demonstrações e tão pouco sabem o que significa ou o trabalho que acarreta. Com caráter transversal dentro da matemática, as fontes de tal dificuldade identificadas na literatura são de diversa ordem: perceção de que os argumentos indutivos não são provas ou demonstrações, perceção da validade universal das demonstrações e sentido da necessidade para o desenvolvimento de demonstrações (Harel, 1997); e ainda, pouco conhecimento das diferentes técnicas de desenvolvimento de demonstrações, confusão entre condições suficientes e condições necessárias e dedução precipitada de generalizações com base em evidências insuficientes (Hillel, 2000).

Dificuldades sobre as diferentes linguagens e representações dos conceitos. O uso do formalismo aparece ligado à linguagem formal da álgebra linear, como designam Dorier e Sierpinska (2001). Este é um tipo de linguagem, entre outros, que se reconhece e predomina na álgebra linear. A questão das diferentes linguagens e, por inerência, das diferentes representações dos conceitos aparece também como fonte das dificuldades dos alunos na aprendizagem da álgebra linear.

Uma das dificuldades pode estar relacionada com o tipo de linguagem em si. Sobre a linguagem geométrica, os alunos demonstram falhas ao nível da interpretação geométrica dos conceitos (Dorier, 1998; Dubinski, 1997), facto porventura ligado com o conhecimento insuficiente que os alunos têm sobre geometria analítica (Dorier, 1998). O uso da geometria por parte dos professores nas aulas de álgebra linear pode funcionar como um "obstáculo didático", tal como lembra Gueudet-Chartier (2004), referindo-se à expressão de Brousseau. Harel (2000)

observou que quando os conceitos são inicialmente abordados geometricamente, os alunos tendem a estabelecer que esses são os aspetos centrais que têm de estudar, razão para Hillel (2000) e Wawro, Sweeney e Rabin (2011) inferirem o quanto enganadora a linguagem geométrica pode ser para os alunos, por ficarem enclausurados no "mundo geométrico".

Segundo Hillel (2000), a linguagem algébrica em álgebra linear é a linguagem de $\mathbb{R}^n$. Uma dificuldade específica que o investigador aponta sobre o uso da linguagem algébrica é o facto de esta eventualmente "tornar-se um obstáculo para a aprendizagem da teoria geral e o reconhecimento de […] funções, matrizes ou polinómios como vetores" (Hillel, 2000, p. 206).

Outro tipo de dificuldades diz respeito à consideração das diferentes linguagens da álgebra linear como um todo ou sistema único, mais concretamente, na passagem de um tipo de linguagem para outro. Num dos casos, Sierpinska (2000) dá nota do quanto é difícil para os alunos perceberem como é que a representação geométrica de um conceito se relaciona com a representação algébrica. Noutro, Hillel (2000) aponta as dificuldades que muitas vezes resultam da passagem da linguagem abstrata para a linguagem algébrica quando o espaço vetorial considerado é $\mathbb{R}^n$, dada a confusão entre os elementos e a sua representação em termos dos elementos de uma base. Trata-se, por isso, de uma questão de forma, sendo o problema minimizado no contexto de espaços vetoriais diferentes de $\mathbb{R}^n$.

A ação dos professores pode também ser a causa das dificuldades dos alunos na questão das múltiplas linguagens da álgebra linear. Este alerta é lançado por Hillel (2000), depois de ter observado que os professores em situação de sala de aula mudavam repetidamente de linguagem, sem garantir a possibilidade de os alunos isolarem os diferentes momentos ou tornar explícita cada passagem. Quando os alunos não conseguem ver as mudanças e as relações entre as diferentes linguagens, aquela opção didática será mais parte do problema do que da solução (Britton & Henderson, 2009).

As representações dos conceitos matemáticos, em particular os de álgebra linear, variam consoante a mudança de linguagem. Segundo Dorier e Sierpinska (2001), o problema consequente para os alunos passa pela dificuldade de conversão da representação de um conceito numa outra e pela dificuldade de interiorização do que são os objetos (abstratos) ou o que são as representações desses mesmos objetos. Adicionalmente, os alunos manifestam dificuldades no reconhecimento das diferentes representações do mesmo conceito (Dogan-Dunlap, 2010; Sierpinska, 2000). Mas é necessário lembrar que a álgebra linear já inclui muitos conceitos que os alunos têm de aprender, a par de novas notações e terminologias (Harel, 1997;

Hillel, 2000; Vinner, 1997). Se aquelas dificuldades forem efetivas, os alunos tenderão a "ver" mais conceitos do que aqueles que efetivamente têm de aprender, percebendo-se parte das suas queixas quando se referem "à enorme quantidade de novas definições", como citámos anteriormente (Dorier et al., 2000a), ou ao número de novas palavras como se duma linguagem estrangeira se tratasse (Artigue, Gueudet-Chartier, & Dorier, 2000).

Ainda em torno da questão da linguagem da álgebra linear, a literatura acautela que, sob o ponto de vista dos alunos, pode ser considerada como excessiva. As razões para tal pressuposto podem advir das múltiplas conexões entre os conceitos e das diferentes sequências possíveis e conhecidas para a sua exploração, o que Harel (1997) carateriza como múltiplas perspetivas da álgebra linear. Sobre as várias conexões entre os conceitos, há ainda o problema acrescido de, em muitos casos, estas não serem evidentes para os alunos e, como consequência, ocorrerá a tendência para se aglomerarem os conceitos em "grupos discretos de ideias" (Lapp, Nyman, & Berry, 2010, p. 2).

Dificuldades específicas associadas à aprendizagem de alguns conceitos. A literatura aponta como uma das principais dificuldades observadas nos alunos a aprendizagem dos conceitos de álgebra linear, sobretudo aqueles que estão relacionados com a teoria dos espaços vetoriais. Contrariamente a esta questão de cariz conceptual, os alunos costumam estar mais à vontade com os aspetos de natureza mais processual da álgebra linear, como a realização de operações entre matrizes ou a resolução de sistemas de equações lineares com aplicação do método de eliminação de Gauss (Carlson, 1993; Dorier, 1998; Stewart & Thomas, 2009).

Carlson (1993) destaca os conceitos de subespaço vetorial, conjunto de vetores geradores, subespaço vetorial gerado e dependência e independência linear e o impacto que as dúvidas em torno destes conceitos pode ter na aprendizagem de outros. Isto porque são conceitos "elementares", como estabelece Dorier (1998), na medida em que fazem parte de um sistema ainda maior de conceitos. Uma razão para que as dificuldades surjam na aprendizagem destes conceitos reporta aos procedimentos que os alunos têm que desenvolver e ao seu ajuste consoante o contexto, isto é, consoante o espaço vetorial. Como exemplo, Carlson (1993) indica a diferença em encontrar uma base do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ ou uma base de um espaço vetorial de funções. Segundo Harel (1997), tal dificuldade resulta de os conceitos serem definidos em termos genéricos. Dando como exemplo o conceito de dependência e independência linear, refere que não é a definição em si que é difícil, mas sim a dificuldade dos alunos para a aplicar em qualquer tipo de questões ou problemas e em diferentes espaços vetoriais.

Dorier (1998) acrescenta que a análise histórica vinca a dificuldade de se olhar para o conceito de dependência e independência linear como uma propriedade global. Num estudo realizado por Ousman (como citado em Dorier, 1998), os alunos inferiram a dependência e independência linear de equações lineares em termos da indeterminação ou determinação das incógnitas, respetivamente, e não em torno do conceito de combinação linear. Àquela conceção, Dorier (1998) chama dependência inclusiva, a qual revelou-se ser mais natural para os alunos. No entanto, a sua aplicação é "local", somente no âmbito da resolução de sistemas de equações lineares. Falta a estes alunos verem que só a definição formal do conceito de dependência e independência linear resolve a extensão da aplicação do conceito a quaisquer elementos de um espaço vetorial.

Ainda sobre o conceito de dependência e independência linear, a confusão causada nos alunos pode estar na própria definição. Num estudo realizado sobre a compreensão dos principais conceitos de álgebra linear, Hristovich (como citado em Ertekin, Solak, & Yazici, 2010) observou que os alunos entendiam a dependência ou independência linear de um conjunto de vetores como a dependência ou independência linear entre os elementos do conjunto, respetivamente.

Dubinski (1997) aponta uma outra fonte para as dificuldades dos alunos na aprendizagem de conceitos como subespaços vetoriais, bases, dependência e independência linear e transformações lineares. A razão para a incompreensão resulta de não se possibilitar que os alunos construam as suas próprias ideias acerca destes conceitos. Para este investigador, numa aula "tradicional", o professor antecipa todas as ideias e todo o trabalho relacionado com determinado conceito, diminuindo o papel ativo que o aluno possa ter.

O conceito de transformação linear tem sido amplamente considerado em projetos de investigação conduzidos por Sierpinska e pelos seus colegas (Hillel & Sierpinska, 1994; Sierpinska, 2000; Sierpinska, Dreyfus, & Hillel, 1999a; Sierpinska, Trgalová, Hillel, & Dreyfus, 1999b). De uma forma ampla, emergem o caráter abstrato e as diferentes representações associadas ao conceito como aspetos potenciadores das dificuldades dos alunos. Como referem Sierpinska et al. (1999a), as duas condições de linearidade são vistas pelos alunos como algo sem conteúdo e com símbolos desprovidos de significado, conferindo estatuto às dificuldades com as definições axiomáticas que aparecem na álgebra linear. Uma dificuldade específica detetada e investigada diz respeito à representação de uma transformação linear por meio de uma matriz e à mudança de um tipo de representação para outro (Hillel & Sierpinska, 1994).

Outra é a diferenciação da representação da transformação linear por meio de uma matriz da própria transformação (Sierpinska et al., 1999a).

Sobre o conceito de subespaço vetorial, uma das dificuldades detetadas diz respeito à verificação dos axiomas, em particular, os axiomas de fecho da adição de vetores e de fecho da multiplicação de um escalar por um vetor (Britton & Henderson, 2009; Wawro et al., 2011). Segundo Britton e Henderson (2009), os constrangimentos surgem da incompreensão da definição abstrata de subespaço vetorial e das lacunas ao nível da teoria de conjuntos e da escrita matemática. Como consequência, estas investigadoras observaram a tendência dos alunos para verificar tais axiomas usando vetores particulares, em vez de vetores genéricos. Adicionalmente, em coerência com o que já foi referido anteriormente, as dificuldades subiram de tom quando os alunos foram chamados a aplicarem o conceito de subespaço vetorial na presença de funções como elementos de um espaço vetorial.

Para Wawro et al. (2011), uma conceção errada que muitas vezes é reportada pelos professores de álgebra linear, a qual verificaram no seu estudo, é a de os alunos inferirem o espaço vetorial $\mathbb{R}^2$ como um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, este como um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$, e assim sucessivamente. Outra conceção errada é que qualquer subespaço vetorial de dimensão dois é necessariamente $\mathbb{R}^2$.

Por último, as dificuldades dos alunos em torno dos conceitos de álgebra linear residem também fora da teoria dos espaços vetoriais. No âmbito dos sistemas de equações lineares, tem sido observado que os alunos não têm totalmente desenvolvido o sentido de solução de um sistema de equações lineares (Trigueros, Oktaç, & Manzanero, 2007), revelam dificuldades na formulação das equações lineares que modelam uma situação real (Possani, Trigueros, Preciado, & Lozano, 2010) e confundem variáveis com parâmetros (Dorier et al., 2000a; Possani et al., 2010; Trigueros & Possani, 2013).

2.1.2.2 Dificuldades cognitivas

A organização desta subsecção passa pela apresentação de quatro caraterísticas do pensamento que a literatura estabelece como necessárias para a compreensão da álgebra linear e pela identificação das dificuldades que os alunos revelam em cada caso: a flexibilidade cognitiva (Alves-Dias & Artigue, 1995); os níveis *Intra-Inter-Trans* do pensamento (Hillel & Sierpinska, 1994); o pensamento teórico *versus* pensamento prático (Sierpinska, 2000); os

mundos corporificado, simbólico e formal do pensamento (Stewart & Thomas, 2007, 2009, 2010).

Flexibilidade cognitiva. Segundo Alves-Dias e Artigue (1995), algumas dificuldades que os alunos enfrentam na aprendizagem da álgebra linear podem ser vistas em termos de flexibilidade, mais propriamente, na falta de flexibilidade cognitiva entre ambientes (por exemplo, algébrico ou geométrico), registos de representações semióticas (por exemplo, representação matricial, representação segundo coordenadas ou representação segundo equações) e pontos de vista (por exemplo, cartesiano ou paramétrico).

Naquele estudo, as investigadoras centraram-se na questão da flexibilidade cognitiva entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico, em torno dos conceitos de vetor e de subespaço vetorial, e da subentendida flexibilidade entre os diferentes registos de representação associados a cada um dos pontos de vista. Os resultados deram a conhecer que esta flexibilidade tende a não ser conseguida pelos alunos, segundo a evidência de estes reduzirem as tarefas aos aspetos de natureza algorítmica. Por exemplo, a identificação das representações cartesiana ou paramétrica é realizada segundo os símbolos que as integram, mas sem atenção ao seu significado matemático.

Em resumo, a interpretação das transformações na representação dos conceitos operadas entre os pontos de vista cartesiano e paramétrico, em termos de variáveis ou parâmetros, de vetores associados e de equações, é difícil e complexa para a maioria dos alunos de álgebra linear (Artigue et al., 2000).

Nível Intra-Inter-Trans do pensamento. O trabalho de Piaget e Garcia, sobre os três níveis sequenciais em que está dividido o desenvolvimento do conhecimento, tem sido considerado por alguns investigadores em didática da álgebra linear. Aparecem na teoria APOE e na construção das decomposições genéticas e, segundo Dubinsky e McDonald (2001), o nível *Intra* "é caraterizado pelo foco nas ações individuais, processos e objetos, isolados de outros itens cognitivos de natureza similar" (p. 280), o nível *Inter* "é caraterizado pela construção de relações e transformações entre estas entidades cognitivas" (p. 280) e o nível *Trans* respeita à construção de uma "estrutura subjacente implícita ou explícita, através da qual as relações desenvolvidas no nível *Inter* são entendidas" (p. 280). Concretizando, segundo a decomposição genética do conceito de espaço vetorial proposta por Parraguez e Oktaç (2010): no nível *Intra*, o aluno consegue verificar se determinado conjunto é um espaço vetorial, mas sem lhe reconhecer a estrutura de espaço vetorial; no nível *Inter*, o aluno começa a estabelecer relações

do conceito de espaço vetorial com conceitos como subespaço vetorial, transformações lineares, bases, entre outros; no nível *Trans*, o aluno reflete sobre tais relações, tem consciência da estrutura de espaço vetorial e consegue lidar com qualquer exemplo, mesmo os não-*standard*.

Hillel e Sierpinska (1994) associam estes níveis ao pensamento que se espera que os alunos manifestem em diferentes circunstâncias da aprendizagem da álgebra linear e dão nota das dificuldades intrínsecas. Quando a exploração dos assuntos assenta mais no ponto de vista computacional, aqueles investigadores concluem que é suficiente que os alunos revelem um pensamento de nível *Inter* para lidar com objetos matemáticos como matrizes ou transformações lineares. Contudo, embora este nível seja facilmente acedido pelos alunos, é necessário ter ainda em consideração que, para alguns alunos, a sua compreensão da linguagem da álgebra linear permanece somente no nível *Intra* (Hillel, 2000; Hillel & Sierpinska, 1994). Sob o ponto de vista da exploração teórica dos assuntos, o nível de pensamento que é requerido é o nível *Trans*. Neste caso, mais do que pensar nos objetos e operações inerentes à álgebra linear em termos de relações entre matrizes, vetores ou transformações lineares, é necessário que os alunos pensem em termos das estruturas que os congregam (Hillel & Sierpinska, 1994).

Uma das dificuldades de aprendizagem da álgebra linear emerge da dificuldade observada de os alunos pensarem em termos do nível *Trans*. Como consequência, tendem a desenvolver uma estratégia de escapatória que passa por desenvolver um "discurso formal sem sentido", isto é, replicando o discurso do professor e a mensagem escrita nos livros de texto, mas sem entender o verdadeiro sentido dos símbolos e da terminologia (Dorier & Sierpinska, 2001).

Pensamento teórico versus pensamento prático. Considerando o pensamento que os alunos de álgebra linear habitualmente revelam, Sierpinska (2000) identificou uma outra fonte das dificuldades dos alunos: pensar mais em termos práticos do que em termos teóricos.

O pensamento teórico traduz-se por uma atividade mental especializada (Dorier & Sierpinska, 2001), onde o aluno olha para um sistema de conceitos como um todo e, refletindo sobre ele, procura estabelecer conexões lógicas e semânticas entre os conceitos e compreender o seu significado (Sierpinska, 2000). Em contraposição, o pensamento prático é voltado para as ações, as quais são desenvolvidas dentro de uma certa lógica conhecida e pressupondo uma associação empírica, funcional e contextualizada dos conceitos envolvidos. Significa que o pensamento prático é uma aplicação cega de técnicas e segundo o qual o significado dos conceitos é apropriado a partir do contexto em que são usados e não da reflexão sobre eles (Dorier & Sierpinska, 2001; Sierpinska, 2000).

Estes investigadores confirmam a tendência de os alunos de álgebra linear aderirem à "escola prática". Em particular, segundo Sierpinska (2000), as dificuldades de aprendizagem do conceito de transformação linear são uma consequência evidente de os alunos pensarem em termos de exemplos que funcionam como protótipo, em vez da própria definição. Também na aprendizagem dos conceitos, os alunos reduzem o pensamento aos problemas e aos contextos associados, demonstrando estarem pouco predispostos a desenvolver as longas cadeias de raciocínio induzidas pela grande quantidade de conceitos e de relações entre eles, algo que é muito próprio da álgebra linear.

Mundo corporificado, simbólico e formal do pensamento. Stewart e Thomas (2007, 2009, 2010) procuraram combinar a teoria APOE com a teoria dos três mundos da matemática de Tall (2004), com o propósito de criarem um quadro teórico que permitisse avaliar a compreensão conceptual da álgebra linear por parte dos alunos e conhecer a forma como estes desenvolvem a aprendizagem.

Segundo Tall (2004), os mundos corporizado, simbólico e formal descrevem a sequência dos diferentes tipos de pensamento que os indivíduos desenvolvem à medida que progridem na aprendizagem de determinado conceito. O mundo corporizado envolve o pensamento que inclui a perceção mental sobre os objetos que nos rodeiam e a perceção visual das relações espaciais dos objetos; o mundo simbólico pressupõe inicialmente ações sobre símbolos, as quais são posteriormente encapsuladas como conceitos (os símbolos funcionam como *proceitos*, isto é, têm a dupla função processual e conceptual); o mundo formal parte das definições formais, as quais funcionam como axiomas para a dedução de propriedades dentro de uma determinada estrutura matemática.

Os estudos de Stewart e Thomas, referidos a seguir, comprovaram as dificuldades dos alunos na compreensão de conceitos fundamentais da álgebra linear (vetor, multiplicação de um escalar por um vetor, subespaços vetoriais, combinação linear, conjunto de vetores geradores, dependência e independência linear e base), traduzidas pelas dificuldades em expressar o significado de cada uma das definições e relacionar os diferentes conceitos. Como novo contributo em termos do pensamento matemático, verificou-se que os alunos começam por pensar e trabalhar no mundo simbólico (considerando as representações algébricas e as representações matriciais), embora desvalorizando o uso das definições (Stewart & Thomas, 2007, 2009, 2010), e denotam pouco pensamento no mundo corporizado (Stewart & Thomas, 2009). Como consequência, sob o olhar dos três mundos da matemática de Tall (2004), dado

que aos alunos "lhes faltam muitas vezes aspetos corporizados dos conceitos, ficam presos no mundo simbólico e incapazes de progredirem para o mundo formal do pensamento matemático" (Stewart & Thomas, 2009, p. 960).

2.2 Recomendações para o ensino de álgebra linear

Com o objetivo de ajudar os alunos a contornar as dificuldades, os investigadores avançaram com um conjunto de recomendações didáticas para a reformulação do ensino, com destaque para as propostas pelo LACSG e reportadas por Carlson et al. (1993), as quais sintetizamos da seguinte forma:

- uso da tecnologia: principalmente a utilização do computador em sala de aula, com recurso a *software* de geometria dinâmica e a *software* de cálculo simbólico;
- abordagem matricial: exploração dos conceitos a partir das matrizes e com base em exemplos concretos e práticos, em detrimento da abordagem axiomática;
- exploração de tarefas e aplicações da álgebra linear: de modo a fazer sobressair o caráter transversal da álgebra linear e ir ao encontro das necessidades da maior parte do público-alvo;
- conhecimento dos pré-requisitos: contribuir para que os alunos enriqueçam o conhecimento sobre alguns conceitos essenciais para a aprendizagem dos novos conceitos, bem como o desenvolvimento das competências matemáticas inerentes;
- interligação dos conceitos de álgebra linear: de modo a fazer sobressair as relações entre os conceitos, como condição para o desenvolvimento dos conceitos imagem e como contributo para o processo de construção dos conceitos;
- alcance do formalismo: não evitando o uso do formalismo, mas ligando os conceitos formais ao conhecimento e competências anteriores dos alunos, segundo abordagens mais intuitivas, como forma de conduzir os alunos a compreenderem e a relevarem a sua natureza unificadora e generalizadora;
- atenção nas linguagens e múltiplas representações dos conceitos: opção pela linguagem geométrica como contributo para o desenvolvimento dos conceitos imagem e ênfase nas articulações desta com as linguagens algébrica e formal.

2.2.1 Uso da tecnologia

A introdução da tecnologia na sala de aula, em particular o uso do computador, foi uma novidade e um dos pilares em que assentou a reforma proposta pelo LACSG para o ensino de álgebra linear. Assumia-se a convicção de que o uso de computadores por parte dos alunos no desenvolvimento de projetos e na resolução de exercícios (também fora da aula) reforçava os conceitos aprendidos, contribuía para a descoberta de novos conceitos e tornava possível a resolução de problemas aplicados em contexto real (Carlson et al., 1993).

Valorizando o papel que o computador pode desempenhar, Harel (1997) destaca o seu potencial para explorar exemplos mais significativos, dar corpo às intuições iniciais e também formular e testar conjeturas. Dubinski (1997) acrescenta ao rol o poder da visualização que o computador faculta, ajudando decisivamente os alunos na construção de processos mentais que conduzirão a uma aprendizagem dos conceitos de álgebra linear mais efetiva.

Para além do uso do computador, LaTorre (1994) sugere que se olhe para a reforma do ensino do cálculo e que também se estenda a utilização das calculadoras às aulas de álgebra linear. As calculadoras, por serem um recurso de fácil acesso e utilização, capacitam os alunos para a realização de cálculos mais complexos e proporcionam aos professores formas de ensinar mais criativas (LaTorre, 1994).

Diversas investigações apontam para a possibilidade da integração dos designados *computer algebra systems* (CAS) – *software* de computação simbólica – e dos ambientes de geometria dinâmica (AGD) nas aulas de álgebra linear. Hillel (2001) reconhece o estatuto destes ambientes eletrónicos no apoio ao ensino e à aprendizagem da álgebra linear, defendendo que pertençam ao *cluster* onde já estão as lições, os textos e os tradicionais exercícios e problemas de "papel e lápis".

Os CAS são essencialmente relevantes para a manipulação de matrizes e resolução de sistemas de equações lineares, mas também podem ser uma ferramenta catalisadora da compreensão de alguns conceitos da teoria de espaços vetoriais, quando confinados ao espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ (Hillel, 2001). Na categoria dos CAS existem diversos tipos de *software* que têm sido considerados pelos investigadores no desenvolvimento de propostas para o ensino de alguns conceitos de álgebra linear, com destaque para os *softwares* MATLAB, Maple e Mathematica. Por exemplo, o projeto ATLAST – *Augment the Teaching of Linear Algebra through the use of Software Tools* – que decorreu nos Estados Unidos da América entre os anos

1992 e 1997, surgiu com o objetivo de encorajar e facilitar o uso de *software* no ensino de álgebra linear (Day & Kalman, 2001). Como produtos, criaram-se exercícios computacionais e planos de aula adstritos ao uso daqueles programas.

Harel (1997) e Hillel (2001) particularizam duas modalidades do uso dos CAS. Harel (1997), recomendando o uso do MATLAB por ser um programa que funciona em torno de matrizes e de vetores, sugere que os alunos usem este *software* para escrever programas próprios, perspetiva também corroborada por Dubinski (1997). Nesta atividade, os alunos apuram o sentido de imaginar as ações que o computador realizará e de antecipar os resultados. Conferindo estatuto ao uso dos CAS, em particular do Maple, Hillel (2001) desvenda três possíveis propósitos da resolução de tarefas segundo a utilização deste tipo de *software*: *surpreender*, face aos resultados obtidos; *clarificar* aspetos teóricos abordados na aula; *investigar* fenómenos que induzem novos conceitos.

Quanto aos AGD, Sierpinska et al. (1999b) estabelecem que estes ambientes permitem o "contacto" com os objetos de teorias mais abstratas, como os espaços vetoriais e transformações lineares, quando confinados a espaços de dimensão não superior a três. Os *softwares* Cabri e GeoGebra são dois recursos que entram nesta categoria e são usados pelos investigadores para explorar a natureza visual de alguns conceitos de álgebra linear. Note-se ainda que grande parte dos CAS, para além da componente do cálculo numérico e simbólico, têm também uma componente que permite a exploração geométrica dos conceitos em duas e três dimensões. Foi o que se verificou, por exemplo, com a utilização do Mathematica por Dogan-Dunlap (2004), no contexto dos conceitos de independência linear, subespaço vetorial gerado e base.

Como exemplos de utilização, o *software* Cabri aparece associado principalmente às transformações lineares, acreditando-se no seu potencial para a compreensão geométrica e conceptual do conceito. O uso deste programa é proposto para a observação e dedução de propriedades, dado o caráter facilitador de obtenção dos transformados, em comparação com a opção pela via "papel e lápis". Esta aprendizagem de caráter cinestésico tende a envolver e a motivar os alunos (Klasa, 2010), mas a ênfase no raciocínio sobre os conceitos em termos das suas representações visuais, em detrimento das próprias definições, pode tornar-se um obstáculo à compreensão (Sierpinska et al., 1999b) e reduzir o pensamento teórico (Uicab & Oktaç, 2006). Quanto ao GeoGebra, este é considerado por Todorova (2012) para a exploração do conceito e cálculo de determinantes, com foco no desenvolvimento do *conceito imagem* (esquema mental ao qual o aluno pode associar o que tem em mente sobre o conceito,

nomeadamente métodos, representações, imagens, exemplos, intuições ou relações com outros conceitos (Vinner, 1991)).

2.2.2 Abordagem matricial

A par da consideração da tecnologia para o ensino de álgebra linear, o LACSG sugere a orientação matricial para a exploração dos conceitos e conteúdos (Carlson et al., 1993). São duas vertentes interligadas e, num dos sentidos, Harel (1997) exterioriza que a utilização de *software*, tendo este como base os vetores e as matrizes, torna mais natural o ensino de álgebra linear a partir das matrizes e ajuda os alunos neste caminho. Esta proposta do LACSG considerou a realidade dos cursos clientes, quer para dar uma resposta à resolução de problemas de maior magnitude (Carlson et al., 1993), quer para ir ao encontro de práticas já observadas nos profissionais, como o uso do computador e de *software* para a resolução de problemas relacionados com a álgebra linear (Carlson, 1993; LaTorre, 1994).

Acresce ainda que grande parte dos alunos dos cursos de matemática têm como destino lecionar no ensino não superior ou trabalhar em empresas, tornando-se a abordagem matricial mais apropriada para o efeito (Tucker, 1993) e, consequentemente, a abordagem axiomática questionável (Day, 1997; Dorier & Sierpinska, 2001).

De acordo com o LACSG, a abordagem matricial é sinónimo de "proceder a partir de exemplos concretos, muitos deles práticos, para o desenvolvimento dos conceitos, princípios e teoria relacionada, de modo a simplificar e clarificar e a tornar a álgebra linear mais significativa e útil" (Carlson et al., 1993, p. 42). É um tipo de abordagem que enfatiza a representação dos vetores e das transformações lineares sob a forma de *n*-uplos e de matrizes (Dubinski, 1997).

Enveredar por esta estratégia não significa perda de rigor ou facilitismos, mas sim dar primazia à resolução de problemas e exploração de aplicações em detrimento das abstrações (Carlson, 1993). Até porque, segundo Dorier e Sierpinska (2001), continua a ser cognitivamente exigente, tendo como um dos princípios que os alunos interiorizem os vetores e as matrizes como objetos ou entidades conceptuais.

Como possíveis vantagens, Chang (1997) acredita que a abordagem matricial na introdução ao estudo da álgebra linear permitirá aos alunos perceberem o "como", etapa antecedente e necessária para se perceber o "porquê". Com outros termos, Vinner (1997)

estabelece o compromisso entre a abordagem processual e a abordagem conceptual: sendo difícil de contornar a valorização que os alunos dão aos procedimentos, a abordagem conceptual reconhece a sua importância e necessidade e admite que a compreensão conceptual depende em muitos casos do domínio de técnicas. Segundo Dubinski (1997), o desafio que se coloca (em forma de crítica à abordagem matricial) é levar os alunos para além do domínio de certas técnicas de manipulação com matrizes e não ceder à pretensão corrente dos alunos de o ensino passar pela transmissão de um conjunto de técnicas, as quais possam imitar.

2.2.3 Exploração de tarefas e aplicações da álgebra linear

O ensino de álgebra linear segundo uma vertente mais prática, considerando as aplicações dos conceitos, é uma possibilidade justificada pelos investigadores. Como ponto de partida, Strang (1988) começa por defender que a álgebra linear permite e encoraja a combinação da abstração com as aplicações, no sentido que estas devem ser ensinadas em articulação com os aspetos da teoria subjacentes. Também Fletcher aponta para uma álgebra linear segundo aplicações, não se introduzindo explicitamente os conceitos segundo definições, mas implicitamente como ferramentas para a resolução de situações problemáticas, em contextos diversos (como citado em Sierpinska, 2000).

As aplicações ajudam e treinam os alunos a pensar nos contextos em que se insere a teoria relacionada e (espera-se!) mostram a beleza e a força dos assuntos (Uhlig, 2003). Segundo a nossa interpretação, as aplicações enquadram-se no que Dorier e Sierpinska (2001) chamam de questões intelectualmente atraentes, as quais, segundo estes investigadores, desencadeiam o processo de aprendizagem e são essenciais para a eficácia do ensino.

Nesta linha, outra das recomendações do LACSG para o ensino de álgebra linear considera as aplicações em contextos diversos, como forma de alargar o horizonte, aos olhos dos alunos, do uso da álgebra linear nas mais diversas áreas (Carlson et al., 1993). É uma recomendação que está necessariamente ligada ao uso da tecnologia e implicitamente à abordagem matricial, também propostos pelo LACSG. Concretizando esta observação, Pecuch-Herrero (2000), numa das cinco estratégias que propõe para o ensino de álgebra linear, fala no desenvolvimento de projetos a partir do uso do computador, visando fomentar a motivação dos alunos e enfatizar as aplicações da álgebra linear; Day (1997) recria um contexto para as aulas de álgebra linear, que começa com a colocação de um problema realista e que continua com a

discussão de estratégias de resolução, uso do computador para os cálculos necessários e interpretação dos *outputs* obtidos.

Dado o possível público-alvo, as aplicações da álgebra linear podem visar campos como as ciências da computação, diversos ramos da engenharia (elétrica, sistemas informáticos, aeroespacial, entre outros), física, economia ou estatística, tal como sugere a obra *Resources for Teaching Linear Algebra* (Carlson et al., eds. 1997). Esta mesma obra, a par dos (muitos) livros de texto que nos últimos anos seguiram a tendência da referência às aplicações da álgebra linear (por exemplo, Lay (1997)), mostram também a vastidão das possíveis aplicações da álgebra linear dentro dos assuntos da própria matemática.

Segundo Blum (2002), as aplicações e a modelação estão relacionadas, embora com direções contrárias. As aplicações aparecem no sentido matemática/mundo real e enfatizam os objetos, enquanto a modelação parte do mundo real e enfatiza os processos. Investigações mais recentes abordam a possibilidade da exploração de tarefas de modelação nas aulas de álgebra linear, sob a consideração da teoria de modelos e modelação de Lesh e Doerr (2003), como as desenvolvidas por Possani et al. (2010) e por Trigueros e Possani (2013). Na primeira, consta uma sequência de ensino, no contexto da resolução de sistemas de equações lineares, a partir de uma situação de modelação de fluxo de tráfego. Na segunda, aparece um problema de economia de modelação da produção de um conjunto de indústrias, em torno da aplicação dos conceitos de combinação linear de vetores e de dependência e independência linear de vetores. Estes autores pretendiam dar um contributo para a possibilidade de se introduzirem conceitos segundo o uso de situações de modelação matemática e para a possibilidade de se delinearem estratégias de ensino baseadas em teorias de educação matemática.

2.2.4 Conhecimento dos pré-requisitos

A literatura sugere que se considere no ensino de álgebra linear o conhecimento anterior dos alunos, vulgarmente designado por pré-requisitos. Consideraremos o significado de Rogalski (2000) atribuído aos pré-requisitos, como sendo um tipo de conhecimento que é essencial para o ensino e para a aprendizagem da álgebra linear e que deve ser expressado pelos alunos. É dividido entre o conhecimento que se transmite imediatamente antes de se ensinar os diferentes conteúdos da álgebra linear e o conjunto de competências matemáticas que se espera que os alunos tivessem desenvolvido nos níveis de ensino anteriores.

Harel (1997) dá muita atenção à matemática que se ensina nas escolas e apresenta algumas sugestões no contexto do ensino de álgebra linear. Observa que há um grande desequilíbrio entre os tópicos relacionados com o cálculo e os relacionados com a álgebra linear, levando-o a concluir que o ensino da matemática não é guiado para as necessidades desta. Como já referido na subsecção 2.1.2.1., mesmo os conteúdos relacionados são explorados de forma distante da linguagem da álgebra linear, o que leva a que os alunos não estabeleçam conexões entre o que aprenderam antes e o que vão ouvir nas aulas de álgebra linear (Harel, 1997).

Como contramedida, Harel (1997) sugere que se passe o primeiro momento do ensino de álgebra linear da universidade para as escolas. Ao alcance estaria: o ensino de sistemas de equações lineares, mais sob o ponto de vista da álgebra linear; o ensino das definições básicas e operações com matrizes, bem como o cálculo de determinantes; o contributo para o desenvolvimento do conceito imagem de conceitos como dependência e independência linear, espaço vetorial, subespaço vetorial gerado, base, dimensão e transformação linear. Também devido às queixas dos alunos no trabalho com demonstrações, Harel (1997) sugere que o currículo de matemática dos ensinos básico e secundário induza o sentido de apreciação, compreensão e produção de justificações e de provas. Com todos estes pressupostos, a aprendizagem da álgebra linear no ensino superior seria a natural continuação do que aprenderam antes, assente em fortes conceitos imagem dos principais conceitos de álgebra linear que os alunos desenvolveram (Harel, 1997).

Em termos de conteúdo, os investigadores têm destacado três pré-requisitos essenciais, nomeadamente lógica elementar (Dorier et al., 2000a; Rogalski, 2000), teoria de conjuntos (Dogan-Dunlap, 2006; Rogalski, 2000) e geometria analítica (Carlson, 1993; Rogalski, 2000).

No que respeita ao primeiro, quer Dorier et al. (2000a), como Rogalski (2000), particularizam a necessidade de os alunos terem um conhecimento sustentado do uso de quantificadores.

Sobre a teoria de conjuntos, Rogalski (2000) concretiza que esta reflete-se em atividades como a representação de subespaços vetoriais, prova da inclusão de subespaços vetoriais e uso de interseções. Para melhorar a capacidade de os alunos lidarem com questões relacionadas com a linguagem da teoria de conjuntos, Dogan-Dunlap (2006) desenvolveu uma abordagem pedagógica para responder às três categorias de erros dos alunos que identificou (referidas na subsecção 2.1.2.1), em torno de tarefas onde os alunos tinham que associar vetores de $\mathbb{R}^n$ como possíveis elementos de conjuntos previamente apresentados.

O conhecimento sustentado da geometria analítica é concomitante com a ênfase na interpretação geométrica dos conceitos de álgebra linear referido por Carlson (1993), entre outros, subespaços vetoriais (representação cartesiana e paramétrica), combinações lineares, bases, soma direta e soluções de sistemas de equações lineares (Rogalski, 2000).

Em termos de competências, Rogalski (2000) qualifica como processo algébrico e axiomático o pré-requisito para a aprendizagem da álgebra linear que contempla "desenvolver autonomamente raciocínios abstratos […], manusear simples leis de composição, aceitar que um desvio formal pode trazer mais tarde uma simplificação e aumentar os campos de aplicação, [ter presente] que generalizar não é um exercício gratuito, etc." (p. 135).

A evidência mais recente dos pré-requisitos necessários para a aprendizagem dos diferentes conceitos de álgebra linear emerge da consideração, por parte dos investigadores da área, da teoria APOE de Dubinski e McDonald (2001). Nesta teoria ganha relevo a decomposição genética de um conceito matemático, como sendo a hierarquia de construções e mecanismos mentais que os alunos vão desenvolvendo até à assimilação do conceito abstrato (Dubinski & McDonald, 2001), ou uma "descrição dos seus diferentes aspetos e relações com outros conceitos" (p. 181), como interpreta Dorier (1995). Por exemplo, realçando-se a estreita ligação da teoria de conjuntos e da lógica aos conceitos de álgebra linear, na decomposição genética do conceito de espaço vetorial (Parraguez & Oktaç, 2010) e na decomposição genética do conceito de sistema de equações lineares (Possani et al., 2010), o ponto de partida é o pleno conhecimento de conceitos como conjunto, operação binária, axioma, função, equação ou igualdade.

Contudo, o conhecimento de pré-requisitos é apenas uma "fatia do bolo" no que concerne ao sucesso dos alunos na aprendizagem da álgebra linear. Isto porque já se verificou que a consideração de módulos introdutórios de geometria analítica, lógica e/ou teoria de conjuntos por parte dos professores de álgebra linear não conduziu necessariamente à melhoria do desempenho dos alunos (Dorier et al., 2000b; Dorier & Sierpinska, 2001).

2.2.5 Interligação dos conceitos de álgebra linear

Para além da ligação com os pré-requisitos assinalados, os investigadores sugerem que se reconheça a importância da interligação entre os novos conceitos. É uma intenção que vai ao encontro da aceitação e valorização dos múltiplos pontos de vista com que se pode olhar para

os conceitos e conteúdos da álgebra linear (Harel, 1997) e da resposta a uma das fontes de dificuldades dos alunos (referenciada na secção 2.1.2.).

Segundo Carlson et al. (1993), o público que utiliza a álgebra linear sugere que a apresentação das definições, teoremas e demonstrações seja feita de modo a fazer sobressair as diversas relações entre os conceitos, como condição para uma melhor compreensão. Por parte dos investigadores, Harel (1997) estabelece a dependência da construção dos conceitos imagem com a realização de conexões matemáticas; Hillel (2000), citando o trabalho de Brousseau, refere que um conceito matemático só é apreendido se relacionado com outros conceitos; Vinner (1997) invoca as relações entre os conceitos e as conexões lógicas para o desenvolvimento nos alunos do que apelida de comportamento conceptual.

De acordo com Harel (1987), a exploração dos conceitos de álgebra linear pode ser sob diversas perspetivas, como por exemplo, nos sentidos computação-abstração ou abstração-computação. Estas perspetivas ditam necessariamente as possibilidades de interligar e relacionar os diferentes conceitos, sendo os livros uma forma por excelência de as dar a conhecer, segundo a interpretação pessoal dos autores (Martin, Loch, Cooley, Dexter, & Vidakovic, 2010) ou a adoção de estratégias. Quanto a esta última, uma estratégia pode passar pela "introdução precoce dos conceitos-chave", como sugere Lay (1997). Refletindo o alcance das interpretações pessoais dos autores, Gonçalves (2005) apresenta a opinião de autores de livros de texto nacionais e internacionais de álgebra linear sobre a opção de a abordagem dos conceitos de dependência e independência linear ser anterior ou posterior à abordagem dos conceitos de conjunto de vetores geradores e subespaço vetorial gerado.

Dorier (1998) dá especial atenção à relação entre os principais conceitos da teoria de espaços vetoriais. Analisou histórica e epistemologicamente os conceitos de dependência e independência linear, vetores geradores, base, caraterística e dimensão, para aí encontrar uma fundamentação da melhor forma de estabelecer uma possível sequência e articulação, visando uma aprendizagem mais eficaz. Complementado com o trabalho de Artigue et al. (2000), fica-se a conhecer até quatro formas diferentes de abordar o conceito de base, em articulação com os conceitos de dependência e independência linear, conjunto de vetores geradores e combinação linear de vetores.

As decomposições genéticas, no contexto da aplicação da teoria APOE, e os mapas conceptuais são produtos de investigação relativamente recentes em didática da álgebra linear, os quais têm como uma das suas caraterísticas fundamentais fazer sobressair as relações entre

conceitos. Um exemplo de uma decomposição genética, neste caso para o conceito de dependência e independência linear de vetores (Trigueros & Possani, 2013, p. 1782), é apresentado na figura seguinte:

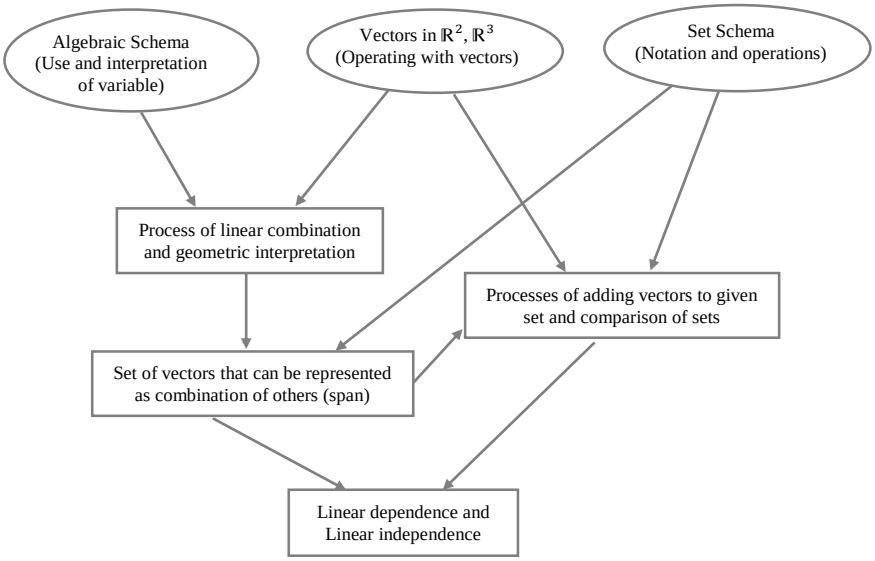


Figura 2.1: Decomposição genética do conceito de dependência e independência linear de vetores

Stewart e Thomas (2010) aplicaram um quadro teórico que combina a teoria APOE com a teoria dos três mundos de Tall (2004), o qual orienta a aprendizagem dos conceitos em termos da análise da sua decomposição genética. Focando o conceito de base e a inerente relação com os conceitos de dependência e independência linear e de vetores geradores, estes investigadores realizaram um estudo de caso com dois grupos sujeitos a diferentes tipos de ensino: num caso, com ênfase na exploração geométrica e na relação entre os conceitos; noutro, com ênfase na abordagem simbólica e matricial e na transmissão dos conceitos isoladamente. Os resultados evidenciaram que o grupo referente ao primeiro caso conseguia estabelecer mais relações entre os diferentes conceitos que integram as decomposições genéticas daqueles três conceitos. A justificar o pior desempenho do outro grupo, os alunos revelaram dificuldades significativas na explicação dos conceitos de base e de vetores geradores. No cômputo geral, os alunos não atribuíram o papel de destaque ao conceito de combinação linear de vetores. Não estabeleceram corretamente a forma como este se relaciona com os conceitos em estudo, razão pela qual se sugere toda a atenção para o ensino do conceito de combinação linear.

Com base na teoria dos campos conceptuais de Vernaud e no modelo para o crescimento da compreensão matemática de Pirie e Kieren, o estudo de Lapp et al. (2010) assenta na análise de mapas conceptuais construídos pelos alunos com o propósito de se investigar as conexões

que estes estabelecem entre os conceitos de álgebra linear. Os investigadores identificaram quatro categorias quanto ao tipo de conexão que estabeleceram entre os conceitos: computacional/processual (procedimentos para obter outros conceitos); recurso (conceitos para chegar a outros conceitos); representacional (relação entre diferentes representações do mesmo conceito); relacional (relações entre os conceitos derivadas de propriedades, definições, padrões ou teoremas). Os resultados mostraram que os alunos interiorizam os conceitos de vetores próprios e de valores próprios como estando muito desfasados dos restantes e conceitos como base e dimensão tendem a ser enquadrados na categoria relacional. Sobressaiu também a ideia de a maior parte das conexões serem estabelecidas pelos alunos como procedimentos ou conceitos para chegar a outros conceitos.

2.2.6 Alcance do formalismo

Alinhado com a abordagem matricial e as necessidades da maior parte do público-alvo, o LACSG propõe que a exploração dos conceitos e conteúdos da álgebra linear contemple menos incursões pelas abstrações e generalizações (Carlson et al., 1993). Tal não significa menor rigor na exploração dos conteúdos ou, por exemplo, deixar cair a demonstração de teoremas, mas sim a mudança do foco nas abstrações para o foco numa componente mais prática, sustentada pela abordagem matricial (Carlson et al., 1993).

O efeito pode ser a forma como se poderá ensinar, tal como relata um dos membros do LACSG: em vez de continuar com um estilo de ensino baseado na apresentação de definições e teoremas, seguidos de exemplos e exercícios de ilustração, passou a adotar a estratégia de discutir primeiramente exemplos para motivar uma nova ideia, explorar alguns exercícios para ilustrar casos especiais e, eventualmente, chegar a algumas generalizações (Day, 1997).

As demonstrações contextualizam-se naturalmente na temática do formalismo. Os investigadores em didática da álgebra linear sugerem que se proporcione a possibilidade de os alunos lidarem pelo menos com os casos mais simples. Segundo Vinner (1997), as demonstrações criam a oportunidade para praticar a linguagem da álgebra linear e para fomentar a abordagem conceptual, em vez de a aprendizagem da álgebra linear se confinar à apreensão de um conjunto de técnicas.

Os investigadores também sugerem formas alternativas de abordar e desenvolver as demonstrações em sala de aula. Uma possibilidade é explorá-las por indução, atribuindo maior

importância aos casos particulares $n = 2$, $n = 3$, … (Carlson, 1993; Day, 1997). Outra possibilidade, como sugere Day (1997), passa por poderem ser substituídas pela ilustração dos teoremas ou propriedades, acompanhadas por uma breve descrição sobre como podem ser desenvolvidas formalmente.

Os professores devem ainda considerar como transformar a construção de demonstrações numa experiência mais aliciante e profícua para os alunos. Segundo Harel (1997) tal pode ser conseguido pela adoção de técnicas como: os alunos terem um papel ativo na construção e justificação de relações entre ideias; os alunos serem ajudados a refinar as explicações intuitivas iniciais das relações sob a forma de demonstrações; os alunos serem encorajados a ler demonstrações (resolvendo exercícios não só com base nos teoremas, mas também com base nas demonstrações); os alunos serem conduzidos a compreender as demonstrações no seu todo e não cada um dos seus passos. Uhlig (2002) abre também espaço para uma nova forma de apresentação dos conteúdos matemáticos, como garantia de uma melhor preparação dos alunos para o desenvolvimento de demonstrações: substituir, num momento inicial, a sequência tradicional *Definição-Lema-Demonstração-Teorema-Demonstração-Corolário* pela sequência *"O que é que acontece se?"-"Por que é que tal acontece?"- "Como é que os diferentes casos ocorrem?"-"O que é que é verdadeiro aqui?"*. Para o investigador, a abordagem mais intuitiva e heurística dos conteúdos conduz os alunos a estabelecerem os primeiros "teoremas" e a forma como tal for alcançado subtende como os demonstrar.

O trabalho de Jean-Luc Dorier e dos seus colegas foca sobremaneira a questão do formalismo, sobretudo associado aos conceitos da teoria dos espaços vetoriais (Dorier, 1995, 1998; Dorier et al., 2000a, 2000b, 2000c; Dorier & Sierpinska, 2001). Considerando-se que "o aspeto formal da teoria dos espaços vetoriais é o resultado da sua natureza e uma condição para a sua simplicidade" (Dorier, 1998, p. 145), a vivência com o formalismo é o passo crucial para a aprendizagem efetiva da teoria dos espaços vetoriais.

A sugestão passa por não colocar o formalismo como etapa final de um processo gradual onde os conceitos se tornam cada vez mais genéricos, mas sim desde o início e em articulação com a abordagem intuitiva, visando fazer sobressair o papel unificador e generalizador da teoria (Dorier, 1998). Neste alinhamento, o formalismo não aparece para proporcionar a resolução de novos problemas, mas sim para tornar mais fácil encontrar a resposta a muitos problemas (Dorier, 1995). Por exemplo, a definição de dependência e independência linear de vetores que recorre à procura da combinação linear do vetor nulo é mais formal, mas também mais

operacional, do que a definição que recorre à procura de todas as combinações lineares entre os diversos vetores (Dorier, 1998).

Dorier (1995) descreve uma possível abordagem para o ensino dos conceitos de álgebra linear de teor mais abstrato, em torno do que apelida de conceitos unificadores e generalizadores. São conceitos formais que unificam e generalizam os métodos, ferramentas e objetos já conhecidos sob diferentes configurações e a sua construção percorre duas etapas: primeiro, o reconhecimento das similaridades entre objetos, ferramentas e métodos traz o conceito unificador e generalizador à existência; segundo, tornar o conceito unificador e generalizador explícito como um objeto que induz a reorganização de competências antigas e elementos do conhecimento (Dorier, 1995).

A construção dos conceitos unificadores e generalizadores é um processo que convoca o conhecimento e competências anteriores dos alunos e a reflexão sobre como se relacionam com os novos conceitos formais (Dorier, 1995). Para induzir este tipo de reflexão, Dorier et al. (2000b) propõem a introdução das designadas tarefas de nível meta, cujo propósito é colocar os alunos numa atividade matemática autónoma e que daí resulte a análise crítica da possibilidade de unificar e generalizar os métodos desenvolvidos pelos próprios alunos. O papel do professor passa por fomentar a atitude reflexiva dos alunos, falando sobre o significado dos conceitos introduzidos nas tarefas, no contexto da teoria a alcançar, do seu caráter unificador e generalizador ou do tipo de métodos mais genéricos a que conduzem (Dorier & Sierpinska, 2001).

Harel (2000) também propõe um quadro teórico que é transferível para o ensino e aprendizagem de conceitos de caráter mais abstrato, assente em três princípios pedagógicos: princípio da concretização, princípio da necessidade e princípio da generalização.

Quanto ao princípio da concretização, "para a abstração de uma estrutura matemática a partir de um modelo dessa estrutura, os elementos desse modelo devem ser entidades conceptuais aos olhos dos alunos" (Harel, 2000, p. 180). Segundo este princípio, a compreensão de um conceito é favorecida pela recriação de um contexto que é concreto para o aluno. A este contexto é ainda conferida a importância de promover a construção dos conceitos imagem.

Segundo o princípio da necessidade, "para os alunos aprenderem, devem ver uma necessidade (intelectual, em vez de social ou económica) para o que lhes será ensinado" (Harel, 2000, p. 185). Esta necessidade pode ser tripartida em necessidade para a computação, para a formalização, ou simplesmente, para a elegância.

O princípio da generalização complementa os anteriores e "quando a instrução parte de um «modelo» concreto, […] as atividades de instrução dentro deste modelo devem permitir e encorajar a generalização dos conceitos" (Harel, 2000, p. 187). Este princípio foca a abstração dos conceitos envolvidos num modelo específico, o qual deve ser escolhido e adotado muito criteriosamente.

2.2.7 Atenção nas linguagens e múltiplas representações dos conceitos

Uma caraterística muito própria da álgebra linear diz respeito aos diversos tipos de linguagem que podem ser implicados na exploração dos conceitos, o que conduz a diversas formas de os abordar e à introdução de diferentes representações do mesmo conceito. Vulgarmente, a distinção é feita entre linguagem geométrica, linguagem algébrica e linguagem formal. A influência para esta distinção pode ser encontrada nos três modos de descrição dos objetos e operações da álgebra linear (Hillel, 2000), nos três modos de pensamento e raciocínio (Sierpinska, 2000) ou nos três mundos da matemática (Tall, 2004).

Segundo Hillel (2000), o *modo geométrico* usa a linguagem e conceitos dos espaços bi e tridimensional, tais como, segmentos orientados, pontos, retas, planos ou transformações geométricas; o *modo algébrico* usa a linguagem e os conceitos do espaço $\mathbb{R}^n$, tais como, *n*-uplos, matrizes, espaço coluna ou soluções de um sistema de equações lineares; o *modo abstrato* usa a linguagem e os conceitos da teoria formal, tais como, espaço e subespaço vetorial, subespaço vetorial gerado ou dimensão de um espaço vetorial. Estes modos estão relacionados, respetivamente, com os modos de pensamento e raciocínio propostos por Sierpinska (2000): *sintético-geométrico* (um objeto é representado geometricamente e definido em termos das suas propriedades geométricas), *analítico-aritmético* (um objeto é definido por uma fórmula que possibilita os cálculos); *analítico-estrutural* (um objeto é definido por um conjunto de propriedades). Também estão relacionados, nesta ordem, com os mundos *corporizado, simbólico* e *formal* da matemática definidos por Tall (2004), entretanto apresentados na subsecção 2.1.2.2.

A ênfase na linguagem geométrica tem sido amplamente discutida pelos investigadores e as conclusões não são consensuais. Digamos, numa única ideia, que é reconhecida a importância da geometria no ensino de grande parte dos conceitos de álgebra linear, mas sob certas condições.

Voltando às recomendações do LACSG, Carlson et al. (1993) falam em "forte ênfase geométrica" na apresentação das propriedades de $\mathbb{R}^n$ e na motivação do estudo dos vetores próprios a partir de "exemplos geométricos". Dubinsky (1997) acha esta informação muito escassa para perceber-se a importância que o grupo pretende atribuir à abordagem geométrica dos conceitos. No entanto, o já mencionado livro de David C. Lay (membro do LACSG) dá uma pista, assumindo no prefácio que "é dada a todos os conceitos mais importantes no curso uma interpretação geométrica, porque muitos alunos aprendem melhor quando podem visualizar uma ideia" (Lay, 1997, p. xii).

O uso da linguagem geométrica pode ter um impacto positivo e funcionar como catalisador para a solidificação dos conceitos. Adequa-se e auxilia a aplicação do princípio da concretização (Gueudet-Chartier, 2004; Harel, 1997), contribui para o desenvolvimento dos conceitos imagem (Harel, 1989; Wawro et al., 2011), pode servir como "metáfora" dos conceitos mais formais (Harel, 1997; Stewart & Thomas, 2009), ajuda os alunos no desenvolvimento do pensamento analítico (Sierpinska, 2000) e, mais geralmente, pode promover a compreensão da álgebra linear e a capacidade para a resolução de problemas (Gueudet-Chartier, 2004; Stewart & Thomas, 2007). No entanto, não é recomendável construir os conceitos algébricos e abstratos como generalizações a partir da geometria (Dorier & Sierpinska, 2001; Gueudet-Chartier, 2006) e a abordagem geométrica por si só não justifica a necessidade da aprendizagem dos conceitos mais formais (Gueudet-Chartier, 2004). Dorier e Sierpinska (2001) alertam ainda para o facto de a exploração geométrica estar condicionada pelas limitações das representações geométricas (até três dimensões).

A consideração conjunta das diferentes linguagens no ensino dos conceitos de álgebra linear é também salientada na literatura. Um caso que se destaca é o quadro teórico proposto por Stewart e Thomas (2007, 2009, 2010), o qual foca a articulação entre as diferentes linguagens, com a consideração da teoria dos três mundos da matemática de Tall (2004). Este quadro foi desenvolvido para "ajudar os professores a cobrir um espetro de representações [dos conceitos] na sala de aula, de modo […] a ajudar os alunos na construção de conhecimento em álgebra linear" (Stewart & Thomas, 2009, p. 953).

Aranda e Callejo (2010) experimentaram o ensino do conceito de dependência e independência linear de vetores com foco na equivalência da sua caraterização segundo a linguagem geométrica e a linguagem algébrica. Para além de procurar que os alunos deduzissem propriedades do tipo algébrico e do tipo geométrico, procuraram também que estabelecessem

propriedades que refletissem o uso simultâneo de ambas as linguagens, como por exemplo, "se um vetor se pode expressar como combinação linear de outro, então são colineares ou paralelos" (p. 138). Os resultados do estudo mostraram que o uso simultâneo destas linguagens pode favorecer o desenvolvimento do processo de abstração implicado na construção dos conceitos, facto também corroborado por Dogan-Dunlap (2010).

Se a articulação das diferentes linguagens não for valorizada, os alunos tendem a permanecer no "mundo" que o professor deu a conhecer. Já vimos anteriormente a crítica de Harel (2000) sobre os alunos tenderem a ver os aspetos geométricos dos conceitos como questão central, se esta for a abordagem inicial e a enfatizada pelo professor. Também se apenas se focasse a abordagem algébrica, os alunos ficariam restringidos à aplicação de algoritmos e, portanto, distantes da compreensão conceptual dos conceitos (Hannah, Stewart, & Thomas, 2013; Stewart & Thomas, 2010).

A ordem para a abordagem das diferentes linguagens em torno de um determinado conceito ainda não é unânime. As sugestões apontam mais para que o uso da linguagem formal apareça como derradeira etapa. Com o sentido geométrico dos conceitos e o domínio de técnicas para os cálculos associados, a compreensão dos conceitos abstratos será, à partida, mais efetiva (Konyalioglu, 2011; Stewart & Thomas, 2009).

3 Descrição do estudo

The moving to new and improved action involves a creative 'moment' of transformation. This involves an imaginative leap from a world of 'as it is' to a glimpse of a world 'as it could be'.

(Wadsworth, 1998)

3.1 Problema, questões e objetivos da investigação

O problema de investigação assenta na dupla pretensão de contribuir para o estudo das práticas de ensino e de alargar o espetro dos contributos da investigação sobre os processos de ensino e de aprendizagem da álgebra linear. Na procura de uma "ideia geral" para a investigação a desenvolver (Elliott, 1991), a nossa atenção recaiu em dois factos aparentemente distintos à partida.

Facto 1. O conceito de investigação sobre a prática é um conceito polissémico, estando próximo de conceitos como "professor-investigador", sugerido por Stenhouse, "investigação-ação" ou "reflexão" (Ponte, 2002). De uma forma tácita ou acrítica, cada professor investiga permanentemente a sua própria prática, na medida em que reflete sobre a sua atividade. No entanto, como dão nota alguns investigadores, a balança está desequilibrada quando comparada com a realização de investigações sobre a prática segundo os ditames de uma investigação científica. Daí alguns apelos à inflexão quanto a esta tendência: faltam as "vozes" dos próprios professores, que tipo de problemas os preocupa e que quadros interpretativos usam para compreender e melhorar as práticas (Cochran-Smith & Lytle, 1993); ou, no caso particular da educação matemática, muito poucas investigações empíricas foram conduzidas para descrever e analisar as práticas dos professores de matemática do ensino superior (Speer et al., 2010), em

contraste com o observado quanto a outros níveis de ensino (Ponte & Chapman, 2006; Speer et al., 2010).

Facto 2. A didática da álgebra linear tem atualmente um histórico de mais de três décadas, motivada no início pela procura da identificação das dificuldades de aprendizagem que estavam a montante do insucesso dos alunos e da recorrente frustração dos professores. Existe atualmente um corpo extenso de literatura sobre o ensino e a aprendizagem da álgebra linear, o qual permitiu dar a conhecer as dificuldades de aprendizagem (Britton & Henderson, 2009) e propostas para serem integradas no ensino. Alguns livros de álgebra linear de referência, de autores como Lay (1997) e Strang (2006), foram veículos disseminadores, mostrando a possibilidade e formas de materialização dos resultados de investigação. No entanto, ainda em 2001, Dorier e Sierpinska afirmavam que uma grande quantidade dos livros de texto de álgebra linear não se baseavam nos resultados de investigação na área e esta tendência não teve volte-face no caso dos livros de álgebra linear de autores portugueses. Sem ser uma procura exaustiva, não se conhece em Portugal um livro que elicie a consideração extensiva dos resultados que a revisão de literatura nos permitiu conhecer, não obstante sobressair, em obras mais recentes, a tendência para serem exploradas algumas aplicações da álgebra linear e o recurso a um CAS.

Segundo Cohen, Manion e Morrison (2011), a escolha de um tema de investigação pode resultar, entre outros, da iniciativa de o investigador, enquanto professor, testar uma teoria na sua prática ou aplicar resultados conhecidos de uma investigação conceptual. Em proximidade com a sugestão destes autores e procurando-se relacionar os factos suprarreferidos, formalizou-se o seguinte problema de investigação:

> *Que práticas de ensino concorrem com as orientações do movimento internacional em didática da álgebra linear?*

Com a presente investigação pretende-se ir ao encontro da tendência, apontada por Latorre (2003), de aproximar a teoria da prática ou a investigação do ensino, "pois não há prática docente de qualidade que não se apoie nos resultados de investigação, nem investigação que não encontre na prática o canal e o espaço natural para indagar, analisar e aplicar os seus resultados" (p. 13). Pretendemos apontar para a mudança das práticas, no que concerne ao ensino de álgebra linear, olhando "criticamente para as ideias normalizadas e pré-formatadas e [...] [percebendo] que essas normalizações têm, por vezes, de ser desconstruídas […]" (Coutinho et al., 2009, p. 359).

Neste enquadramento e como contributo para o problema de investigação, procurar-se-á responder à seguinte questão de investigação:

> *Como é que um professor de álgebra linear pode desenvolver um desenho de ensino que incorpore extensivamente as recomendações didáticas conhecidas? Que dificuldades e oportunidades estão subjacentes à ação de implementação do desenho de ensino na sala de aula?*

Pretende-se, como produtos da investigação, que resultem materiais que qualquer professor de álgebra linear pode utilizar no ensino, nomeadamente: um texto de álgebra linear que se entende inovador pela extensa consideração das recomendações didáticas constantes na literatura (Apêndice B); uma adenda àquele texto que informa sobre todas as considerações na sua elaboração (Capítulo 4); as narrações multimodais que informam sobre as práticas de um professor na implementação, em sala de aula, de um desenho de ensino orientado por aquele texto (Apêndice C).

Os objetivos da investigação passam por alargar o espetro da materialização dos resultados de investigação conhecidos, apresentando uma possível interpretação das sugestões didáticas e a sua concretização, quer num possível texto de álgebra linear, quer no terreno; contribuir para a construção do conhecimento sobre as práticas de ensino e desenvolvimento profissional dos professores de álgebra linear; sensibilizar para a mudança no ensino de álgebra linear.

3.2 Paradigma e método de investigação

A investigação a que nos propomos segue uma abordagem qualitativa, dada a visão do mundo em que se enquadra (paradigma sociocrítico), o método de investigação escolhido (investigação-ação) e a natureza qualitativa dos dados recolhidos (Creswell, 2009).

São traços de uma investigação qualitativa a obtenção dos dados a partir do ambiente natural (com o investigador a ser o principal instrumento para a recolha de dados e análise), a descrição minuciosa dos resultados (normalmente segundo a forma de narrativa), o interesse a incidir mais nos processos do que nos produtos ou resultados, a análise indutiva dos dados (o objetivo não passa por confirmar ou infirmar hipóteses) e a importância que se atribui aos

significados ou perspetivas dos participantes envolvidos (Bogdan & Biklen, 1991/1994; Merriam, 1998).

De referência incontornável em qualquer investigação em educação, os paradigmas consistem numa visão do mundo, na forma como se olha e investiga um fenómeno, num conjunto de crenças e valores que orientam a ação e que são partilhados por uma comunidade científica (conferindo-lhe uma identidade própria) ou num modelo para enfrentar e interpretar uma realidade e conduzir à solução dos problemas aí emergentes (Cohen et al., 2011; Coutinho, 2014; Guba, 1990).

O paradigma sociocrítico assenta nos princípios da teoria crítica da Escola de Frankfurt e na influência do trabalho de Habermas (Cohen et al., 2011). Este paradigma consagra que em cada investigação deve haver sempre uma intenção de mudança e de transformação (Coutinho, 2014). Segundo o paradigma sociocrítico, o conhecimento é orientado por interesses de emancipação, conhecimento que chega por via da reflexão crítica sobre as práticas (Máximo-Esteves, 2008), isto é, pela via da *praxis* (Cohen et al., 2011). Nesta perspetiva, a teoria e a prática são indissociáveis, na medida em que os professores, que são agora os sujeitos de investigação, passam a gerar teoria alavancada na experiência da própria prática (Máximo-Esteves, 2008; Zuber-Skerritt, 1996).

Como método, a investigação-ação é vista, numa das várias conceções conhecidas, como o prolongamento do paradigma sociocrítico (Carr & Kemmis, 1986; Cohen et al., 2011). Uma definição que encontra esta perspetiva é a atribuída a Carr e Kemmis (1986), como sendo "uma forma de indagação autorreflexiva realizada pelos participantes em situações sociais, com vista a melhorar a racionalidade e a justiça das suas próprias práticas sociais ou educativas, bem como a sua compreensão dessas práticas e das situações onde decorrem" (p. 162).

A investigação-ação tem como palavras-chave "ação" e "reflexão crítica", que alternam ciclicamente no desenvolvimento de um estudo sistemático realizado pelos práticos para melhorar as práticas (Cohen et al., 2011). Para Elliott (1991), com a investigação-ação, as teorias não são validades independentemente e em seguida aplicadas à prática, mas validadas através da prática.

Segundo Ponte (2002), a investigação-ação está diretamente ligada ao conceito de investigação sobre a prática. Mas, ao contrário de outras formas de pesquisa, os holofotes estão voltados para a investigação da própria prática do investigador e daí a importância atribuída à autorreflexão (Cohen et al., 2011). Deste modo, o investigador torna-se sujeito e participante,

envolvendo-se ativamente na causa da investigação (Bogdan & Biklen, 1991/1994) e não se verificando o seu descomprometimento em relação ao objeto de estudo (Ponte & Chapman, 2006). Os investigadores passam a ser os agentes de mudança e assumem que a investigação irá refletir os seus próprios valores.

A investigação-ação pode ser adequada para vários propósitos de investigação. Dois desses propósitos que destacamos, segundo Cohen et al. (2011), são a relação entre a teoria e a prática e o planeamento, implementação, revisão e avaliação de uma intervenção delineada para melhorar as práticas ou solucionar um problema local. Para alcançar estes ou outros propósitos, os investigadores partem de questões que incidem no "como" e/ou no "o quê" ou, mais concretamente, formulam questões para investigar processos (como) ou para investigar caraterísticas (o quê) (Máximo-Esteves, 2008).

A literatura sugere diversas possibilidades (similares) para a escolha de um roteiro de investigação orientado pelo método de investigação-ação, sempre como pano de fundo o modelo espiralado concebido por Lewin. Como configura o modelo proposto por Kemmis, cada ciclo de investigação-ação envolve quatro momentos que estão interrelacionados: planeamento, ação, observação e reflexão (Latorre, 2003).

3.3 Fases de aplicação do método de investigação-ação

3.3.1 Planeamento

3.3.1.1 Cenário inicial

O cenário inicial inclui um professor (autor do estudo) localizado profissionalmente numa instituição pública do ensino superior politécnico que se depara com a possibilidade de lecionar pela primeira vez álgebra linear, a iniciar-se no ano letivo 2011-2012.

O conhecimento sobre o ensino de álgebra linear era meramente académico: a montante estava a realização de uma tese de mestrado na área da didática da álgebra linear, intitulada "Três estudos sobre o ensino e a aprendizagem dos conceitos de subespaço gerado e conjunto de vetores geradores: contributo para a formação dos professores de Matemática" (Gonçalves,

2005); no momento, mantinha-se o conhecimento de parte dos resultados de investigação em didática da álgebra linear, nomeadamente as principais dificuldades de aprendizagem dos alunos e algumas propostas para a reformulação do ensino.

Havia ainda a ideia concebida de o ensino atual da álgebra linear em Portugal não seguir nem refletir os avanços da investigação na área, pelo conhecimento que se tinha dos livros de autores portugueses. Como na instituição o ensino de álgebra linear vigente encontrava esta ideia, adotando-se uma abordagem mais clássica, entendeu-se ter surgido a oportunidade para procurar quebrar esta tendência, segundo os trâmites de uma investigação científica.

A apresentação da ideia à antiga orientadora do mestrado suprarreferido (orientadora do estudo) e a integração num curso de doutoramento foram os dois passos seguintes. A realização da investigação neste contexto proporcionou a supervisão por parte de duas orientadoras com as caraterísticas comuns da vasta experiência no ensino de álgebra linear e do conhecimento da dinâmica de investigação em didática da álgebra linear. Também contribuíram decisivamente ao nível dos domínios científico, didático e pedagógico ao longo do desenvolvimento da investigação.

3.3.1.2 Uma possível materialização dos resultados de investigação

O ano letivo 2010-2011 constituiu-se como o momento preparatório, com a fase de desenvolvimento de um plano no âmbito do método de investigação-ação. Face à questão de investigação colocada, procedeu-se em primeiro lugar a uma profunda revisão da literatura. Este passo permitiu-nos ampliar principalmente o conhecimento sobre as dificuldades de aprendizagem dos alunos (conceptuais e cognitivas) já identificadas e as recomendações didáticas avançadas pelos investigadores passíveis de serem integradas no ensino de álgebra linear (Capítulo 2).

Segundo a nossa interpretação, aquelas recomendações didáticas foram reunidas num conjunto de itens, doravante designados por indicadores do estudo, e quanto à designação e descrição sumária são:

- uso da tecnologia: principalmente a utilização do computador em sala de aula, com recurso a *software* de geometria dinâmica e a *software* de cálculo simbólico;
- abordagem matricial: exploração dos conceitos a partir das matrizes e com base em exemplos concretos e práticos, em detrimento da abordagem axiomática;

- exploração de tarefas e aplicações da álgebra linear: de modo a fazer sobressair o caráter transversal da álgebra linear e ir ao encontro das necessidades da maior parte do público-alvo;
- conhecimento dos pré-requisitos: contribuir para que os alunos enriqueçam o conhecimento sobre alguns conceitos essenciais para a aprendizagem dos novos conceitos, bem como o desenvolvimento das competências matemáticas inerentes;
- interligação dos conceitos de álgebra linear: de modo a fazer sobressair as relações entre os conceitos, como condição para o desenvolvimento dos conceitos imagem e como contributo para o processo de construção dos conceitos;
- alcance do formalismo: não evitando o uso do formalismo, mas ligando os conceitos formais ao conhecimento e competências anteriores dos alunos, segundo abordagens mais intuitivas, como forma de conduzir os alunos a compreenderem e a relevarem a sua natureza unificadora e generalizadora;
- atenção nas linguagens e múltiplas representações dos conceitos: opção pela linguagem geométrica como contributo para o desenvolvimento dos conceitos imagem e ênfase nas articulações desta com as linguagens algébrica e formal.

Seguiu-se a elaboração de um texto de álgebra linear (Apêndice B), publicado posteriormente (Gonçalves, 2015), procurando-se que refletisse extensivamente os sete indicadores do estudo, segundo a nossa interpretação. Ao longo de várias sessões de trabalho, o professor-investigador discutiu com as orientadoras as possíveis formas de os materializar e as estratégias a adotar e também procurou salvaguardar todo o rigor matemático do texto.

O passo seguinte consistiu na construção de um texto descritivo (Capítulo 4) para fundamentar o primeiro e como forma de explicar passo a passo todo o processo de interpretação e concretização dos indicadores do estudo, a par das intenções e dos objetivos. Para além da descrição detalhada de como o texto de álgebra linear foi desenvolvido ao longo de cada um dos quatro capítulos (matrizes, sistemas de equações lineares, determinantes e espaços vetoriais), incluíram-se informações relativas às principais influências, não só ao nível do conteúdo, mas também da "forma" a dar ao texto.

O texto de álgebra linear, bem como a sua fundamentação, configuraram o plano delineado para uma primeira experiência no ensino de álgebra linear em proximidade com as recomendações didáticas. Adicionalmente, constituíram-se como dois produtos de investigação, sendo materiais que passam a estar à disposição dos professores no ensino de álgebra linear.

3.3.2 Ação

3.3.2.1 Realização da experiência

No ano letivo 2011-2012, com a anuência do departamento e da escola (Anexo 1), o professor-investigador implementou um desenho de ensino guiado pelo texto construído, na sua experiência inicial de ensinar álgebra linear.

A experiência decorreu com uma turma do curso de engenharia elétrica, na unidade curricular Matemática Discreta e Álgebra Linear. A turma era constituída por um total de trinta e um alunos. Ao longo da realização da experiência foi possível contar com um grupo de sensivelmente dezoito alunos, aqueles que iam regularmente às aulas. O grupo era homogéneo em termos de formação (a maioria com frequência na disciplina de Matemática A no ensino secundário) e com um nível de desempenho médio. Havia o conhecimento prévio de que a experiência seria realizada com esta turma, pelo que direcionou-se substancialmente para o teor do curso a parte no texto relativa às aplicações da álgebra linear.

Na experiência consideraram-se as dezasseis aulas destinadas à componente de álgebra linear. Cada aula tinha a duração de sensivelmente uma hora e quarenta e cinco minutos. O texto de álgebra linear foi distribuído aos alunos no início desta componente, pretendendo-se que tivesse a função de manual escolar. Em cada uma das aulas, o professor considerou extensivamente o texto na abordagem dos assuntos, bem como nos diferentes tipos de tarefas propostas. O professor usava o seu computador para projetar o texto e exemplificar alguns conceitos com o recurso ao Scilab, para os cálculos numéricos, e ao GeoGebra e Mathematica, para a exploração geométrica. Os alunos usavam os seus computadores portáteis para a utilização do Scilab, principalmente quando o professor o indicava.

Em cada aula a prática letiva do professor foi orientada por um plano construído previamente (Apêndice A: exemplo de um plano de aula). Cada um era constituído pelo sumário da aula, pelos objetivos/competências a alcançar pelos alunos, pela identificação dos momentos de utilização dos recursos, principalmente do tipo de *software* a ser utilizado pelo professor e/ou alunos, e pelo desenvolvimento da aula, com a sequência de exploração dos assuntos.

No final de cada aula, o professor registou as notas sobre as ilações quanto ao modo como correu. Em novas sessões de trabalho, em conjunto com a orientadora, procurou decidir sobre eventuais ajustes e pequenas alterações metodológicas a fazer nas aulas subsequentes.

3.3.2.2 Instrumentos de recolha de dados

Os dados foram recolhidos em ambiente natural, como é apanágio da realização de uma investigação qualitativa (Bogdan & Biklen, 1991/1994).

Como instrumentos de recolha de dados, todas as aulas foram gravadas em registo áudio e recolheram-se algumas produções dos alunos, nomeadamente o caderno diário, trabalhos de grupo e alguns trabalhos extra-aula solicitados aos alunos. Segundo Latorre (2003), as gravações áudio ou vídeo adequam-se, no campo da investigação-ação, quando se pretende recolher informação que dê nota da perspetiva do investigador do que ocorre no ambiente da ação. Com a recolha de alguns cadernos diários pretendeu-se obter prova de todos os registos efetuados pelo professor no quadro, aspeto que o professor complementou com algumas fotografias que tirou ao quadro de situações que entendeu, no momento, pertinentes e relevantes.

Outros instrumentos foram as notas do professor, sobretudo tiradas após o término de cada uma das aulas, e os planos de aula.

Todos estes dados recolhidos contribuíram para a elaboração das narrações multimodais (subsecção 3.3.2.3). Procedeu-se à construção das narrações multimodais de cinco das dezasseis aulas lecionadas. O critério de seleção das aulas foi a representatividade dos indicadores do estudo consagrados na abordagem dos assuntos adstritos a essas mesmas aulas. As orientadoras do estudo tiveram neste contexto o papel de validadoras das narrações multimodais.

3.3.2.3 Narrações multimodais

As narrações multimodais são "um instrumento que recolhe dados sobre as práticas de ensino em sala de aula, que preserva a sua complexidade e completude, dando explícito destaque à intencionalidade didática, condição para todas as ações da aula terem significado" (Lopes et al., 2010, p. 1). Constituem-se como uma narração que normalmente é escrita pelo professor, da forma mais isenta possível, e que dá a conhecer todos os acontecimentos que decorreram na sala de aula, como se de uma história tratasse.

As narrações multimodais devem cumprir alguns requisitos (Lopes et al., 2010, 2014):

- a descrição de tudo o que acontece na aula (entre outros, a contextualização da aula, as intenções e perceções do professor, as reações dos alunos e do próprio professor, o

trabalho proposto e o trabalho realmente efetuado pelos alunos), de modo a preservar a natureza holística e complexa do ensino e da aprendizagem;

- a descrição multimodal, considerando: os dados independentes (gravações áudio ou vídeo, os documentos do professor relativos à pré-aula, aula e pós-aula, os documentos produzidos pelos alunos, a organização do espaço e caraterísticas físicas da sala, fotografias, artefactos usados, registos no quadro, etc.) e a inclusão de excertos destes dados; os dados dependentes (aquilo que não é captado pelos dados independentes, nomeadamente as intenções e decisões do professor ou as atitudes, gestos, silêncios, etc., de todos).
- a verificação de todos os eventos descritos, possibilitada pelo cruzamento dos dados que suportam a narração multimodal, e a comparação entre narrações multimodais escritas por diferentes professores, garantida por o foco se centrar nas tarefas propostas e desenvolvidas na aula e não em incidentes.

Como sugerem Lopes et al. (2014), a unidade base das narrações multimodais é o episódio, que vai desde a proposta de uma tarefa (ou num sentido mais amplo, uma atividade de instrução) até que o professor a dê por terminada ou proponha uma outra. Em termos da sua estrutura, uma narração multimodal divide-se em duas partes. A primeira relaciona-se com a contextualização – informações contextuais – e a apresentação da narração da aula por inteiro – narração sintética da aula. Nesta parte consideram-se como elementos orientadores os referenciais, objetivos da aula e diversos constituintes físicos. A segunda parte remete para a descrição dos episódios identificados – episódios relativos à aula – objetivando todas as ações do professor e dos alunos, a par das linguagens utilizadas.

O protocolo de elaboração de uma narração multimodal envolve três fases distintas e sequenciais (Lopes, 2010, 2014):

- recolha de dados: o narrador recolhe os dados independentes e dependentes;
- construção da narração multimodal: o narrador ouve (ou visualiza) as gravações, cruzando-as com outros elementos multimodais; redige a primeira parte, alusiva às informações contextuais e narração sintética da aula; desenvolve uma primeira versão da narrativa de cada um dos episódios e progressivamente enriquece-a com os elementos multimodais;
- validação: verificação por outros (no nosso caso, as duas orientadoras do estudo), com base nos dados independentes, acerca da sua fiabilidade, validade e facilidade de

leitura; por último, a narração multimodal será melhorada até ser aceite como versão final.

Pelos requisitos e protocolo de construção apresentados, as narrações multimodais "permitem o acesso às histórias da sala de aula, aos eventos em cada episódio, ao material usado, às ações levadas a cabo pelo professor e pelos alunos, bem como à linguagem usada" (Lopes et al., 2014, p. 423). Partes das narrações multimodais são justificadas à luz dos dados recolhidos, os quais são posteriormente verificados pelos validadores das narrações multimodais. Por esta razão, as narrações multimodais dispensam novas referências aos dados considerados na sua construção ao longo da investigação.

Procurou-se, no âmbito do nosso estudo, considerar todas estas indicações na construção das cinco narrações multimodais atrás anunciadas, as quais constam em apêndice (Apêndice C).

3.3.3 Observação

A análise qualitativa dos dados traduz-se como o processo de organização de todo o material recolhido ao longo da investigação, "dividindo-o em partes, relacionando essas partes e procurando identificar nele tendências e padrões relevantes (Lüdke & André, 1986, p. 45). Os objetivos passam por aumentar a compreensão desses mesmos dados, segundo as interpretações conseguidas, e dar a conhecer aquilo que revelam (Bogdan & Biklen, 1991/1994; Cohen et al., 2011).

Estando todos os dados recolhidos congregados num único instrumento – as narrações multimodais – o procedimento analítico (Goetz & LeCompte, 1984) para esta fase da investigação centrou-se na análise de conteúdo (Bardin, 1977/1995) das cinco narrações multimodais. Este é também o procedimento analítico sugerido por Lopes et al. (2014) como forma de análise deste instrumento de recolha de dados.

A análise de conteúdo constitui-se como um conjunto de procedimentos que consistem "na explicitação e sistematização do conteúdo das mensagens" (Bardin, 1977/1995, p. 43) ou no exame, análise e verificação rigorosa do conteúdo de dados escritos (Cohen et al., 2011). A análise de conteúdo pode ser considerada para a análise de largas quantidades de texto (no nosso caso, as cinco narrações multimodais com sensivelmente cento e quarenta páginas), sendo

normalmente usado o processo de categorização para a redução dos dados (Bardin, 1977/1995; Cohen et al., 2011).

Segundo Lüdke e André (1986), o referencial teórico de um estudo pode fornecer "pistas" para a classificação dos dados. A nossa investigação encontrou esta possibilidade, com a consagração de um conjunto de indicadores retirados da revisão de literatura, os quais passaram a constituir as sete dimensões da análise. Recordando, são elas: uso da tecnologia; abordagem matricial; exploração de tarefas e aplicações da álgebra linear; conhecimento dos pré-requisitos; interligação dos conceitos de álgebra linear; alcance do formalismo; atenção nas linguagens e múltiplas representações dos conceitos.

Uma vez formalizadas as dimensões da análise e por influência do trabalho de Lopes et al. (2014), estabelecemos as seguintes etapas para o desenvolvimento da análise, com o apoio do *software* de investigação qualitativa NVivo:

- uma primeira passagem pelas narrações multimodais para a seleção de todas as partes alusivas a cada um dos indicadores do estudo ou dimensões da análise;
- uma segunda passagem pelas narrações multimodais para a categorização *open-code* (Cohen et al., 2011) guiada pelos indicadores do estudo ou dimensões da análise. Implica uma primeira codificação e posterior categorização (agrupando-se os códigos para a definição das categorias e subdimensões emergentes, eventualmente com sugestões oriundas da revisão de literatura). Acresce a validação da codificação e categorização por parte das orientadoras do estudo;
- a análise qualitativa das categorias até alcançar resultados relevantes que contribuam para a resposta à questão de investigação formulada.

Seguindo-se a proposta de Cohen et al. (2011), quanto às diferentes possibilidades de organização e apresentação da análise, a forma adotada passou pela apresentação da análise segundo o assunto ou tema, ou mais concretamente, segundo os indicadores do estudo, na forma de narrativa (Creswell, 2009).

3.3.4 Reflexão

A reflexão – última etapa de um ciclo de investigação-ação – configurou-se como um segundo momento da análise, procurando-se uma interpretação mais profunda do significado dos dados recolhidos (Creswell, 2009). De acordo com a caraterização de Máximo-Esteves

(2008), refletir é a "operação de análise crítica das observações, discrepâncias e/ou padrões encontrados, com o intuito de descobrir as crenças e os esquemas de referência subsumidos nas práticas do investigador" (p. 82).

Até ao momento resultou um sistema de categorias e respetiva análise, que decorreu, por sua vez, da análise de conteúdo das cinco narrações multimodais. Daí termos um conjunto de informações sobre as práticas conseguidas pelo professor-investigador na implementação de um desenho de ensino guiado por um texto de álgebra linear, construído previamente. Tal como consagram Cohen et al. (2011), os resultados da análise realizada na seção anterior constituíram-se como novos dados a considerar nesta "segunda" análise.

Outros dados considerados nesta fase foram o texto de álgebra linear (Apêndice B) e a sua fundamentação (Capítulo 4). Constituíram-se como dados que antecipavam o que se considerava ser possível concretizar em sala de aula e que induziam a sequência de ensino desenhada e implementada no terreno.

Com base nestes dados, pretendeu-se desenvolver uma análise comparativa que estabelecesse uma relação entre a sequência de ensino desenhada e as práticas de ensino conseguidas. O intuito era que resultassem elementos para responder à segunda parte da questão de investigação colocada e que fornecessem indicações sobre como o desenho de ensino desenvolvido podia ser melhorado.

Esta análise comparativa pressupôs uma descrição grossa, no sentido proposto por Geertz (1973), que incluiu: interpretações, reflexões sobre os significados atribuídos aos dados observados e inferências a partir do que os dados mostravam ou escondiam (Cohen et al., 2011); um "diálogo" com autores de investigações divulgadas na área da didática da álgebra linear sobre o que já estava explicitado e o que havia de novo (Creswell, 2009; Máximo-Esteves, 2008).

3.4 Critérios de validade

A questão da validade dos estudos de investigação-ação ou, em maior escala, de natureza qualitativa, tem sido de debate permanente e é muito pouco consensual. Com investigações desta natureza não se consegue garantir a certeza das conclusões, tal como o positivismo

subentende, e daí apontar-se para uma "noção mais relativizada de certeza" (Ponte, 2002, p. 19).

Segundo Hammersley (como citado em Cohen et al., 2011), nas investigações qualitativas o conceito de certeza é substituído pela confiança nos resultados obtidos, sendo os factos narrados representações de uma realidade e não reproduções dessa mesma realidade. Daí centramo-nos neste ponto sobre critérios essencialmente de validade (interna), descurando os critérios de fiabilidade e de generalização (ou validade externa).

Numa perspetiva mais ampla, face à natureza do estudo desenvolvido, procurou-se que se refletissem as cinco caraterísticas de uma investigação qualitativa (Bogdan & Biklen, 1991/1994; Merriam, 1998), enunciadas atrás (subcapítulo 3.2): primeiro, a sala de aula constituiu-se como fonte direta dos dados e o professor-investigador como o instrumento para a sua recolha, permitindo dar a conhecer em profundidade (por via das narrações multimodais) o contexto e vários aspetos não captados pelos instrumentos físicos; segundo, a apresentação de uma extensa descrição dos factos que suportaram os resultados do estudo, quer ao nível do desenvolvimento do desenho de ensino, quer ao nível do que aconteceu em sala de aula, comprovados por diversos excertos; terceiro, o foco no processo de concretização dos resultados de investigação apontados na literatura, embora relevando o ganho colateral da obtenção de alguns produtos (o texto de álgebra linear, a sua fundamentação a funcionar como adenda e as narrações multimodais); quarto, a análise indutiva dos dados, gerando categorias guiadas apenas por dimensões estabelecidas à partida; quinto, a atenção a incidir nos significados construídos em particular pelo professor-investigador, desde o problema sentido no início às experiências "vividas" ao longo do estudo.

Um dos aspetos problemáticos à partida dizia respeito à duplicidade de papéis a assumir pelo professor-investigador – intrínsecos ao desenvolvimento do estudo pelo método de investigação-ação – pelo que foram considerados alguns aspetos para mitigar o desempenho promíscuo dos dois papéis.

Em primeiro lugar surgiu a questão da interpretação dos resultados de investigação e como os materializar. Neste caso, as orientadoras do estudo, familiarizadas com a dinâmica de investigação em didática da álgebra linear, validaram a interpretação realizada pelo professor-investigador, bem como a respetiva materialização num texto de álgebra linear, quer a nível pedagógico, quer a nível científico.

A seguir, no terreno, a posição de professor foi objetivada nas narrações multimodais, com grande parte dos dados (independentes) a merecerem, uma vez mais, a revisão de pares. Uma caraterística das narrações multimodais é a de ficarem trancadas, depois de serem validadas. Assim, na fase da análise, foi possível o distanciamento do investigador, face ao que realizou em sala de aula enquanto professor, restringindo-se apenas ao que estava "escrito".

Por último, a materialização do desenho de ensino num texto de álgebra linear, acompanhado ainda da sua fundamentação, permitiu "trancar" todas as intenções e objetivos iniciais e tornar isenta a análise comparativa na fase do estudo correspondente à reflexão.

4 Construção de sentidos do novo texto de álgebra linear: mais um dado da investigação

> *These results [of the research] do lead to some well founded 'recommendations' or 'good advice' concerning the practice of teaching, but the advice is not to be confused with an infallible recipe; in fact, the recommendations are but conjectures that are still open to questioning.*
>
> (Dorier & Sierpinska, 2001, p. 270)

Após a revisão da literatura no campo da didática da álgebra linear (Capítulo 2), que permitiu conhecer amplamente as dificuldades de aprendizagem e o conjunto das recomendações didáticas sugeridas para mudar o ensino, a presente investigação caminhou para a elaboração de um novo texto de álgebra linear. Esta foi a forma encontrada para materializar a nossa interpretação dos indicadores do estudo e para definir o desenho de ensino a implementar no terreno.

Este novo texto de álgebra linear, entretanto publicado (Gonçalves, 2015), consta integralmente no segundo volume desta tese (Apêndice B). Neste capítulo, é apresentada uma fundamentação daquele texto ou uma descrição detalhada que desvenda a forma como interpretámos e concretizámos a informação recolhida na literatura. Pode ainda ser visto como uma adenda que acrescenta a contextualização do novo texto de álgebra linear no âmbito da evolução histórica da bibliografia nacional e internacional, as fontes e as caraterísticas gerais e, principalmente, todos os objetivos e intenções patentes no desenvolvimento dos assuntos ao longo dos diferentes capítulos.

Como sugere o título deste capítulo, esta fundamentação integrará o leque dos dados recolhidos ao longo da investigação. Mais concretamente, será o dado que, em conjunto com o

texto subjacente, isola as expectativas iniciais quanto ao que é expectável conseguir-se em sala de aula (segundo a implementação de um desenho de ensino guiado pelo texto de álgebra linear) e que abrirá caminho para a análise comparativa com o que efetivamente foi conseguido pelo professor.

4.1 Na senda de mais um livro de texto de álgebra linear

Uma perspetiva histórica do ensino de álgebra linear pode ser associada a alguns livros de texto. *Algebra*, de Oskar Perron, e *Modern Algebra*, de Bartel L. van der Waerden, com primeiras edições de 1927 e 1936, respetivamente, são conhecidos como os primeiros livros de texto de referência contendo tópicos de álgebra linear, embora presentes em pequenos capítulos. Posteriormente, até ao final da década de sessenta, com a álgebra linear a conquistar o seu espaço como unidade curricular do ensino superior, o livro de texto *Finite-Dimensional Vector Space*, de Paul R. Halmos, com edições de 1942 e 1958, passou para o topo das referências bibliográficas e influenciou fortemente o ensino de álgebra linear neste período (Dorier, 2000b; Uhlig, 2003).

Em Portugal, tal como afirmam Santana e Queiró (2010), "desde a edição do clássico *Introdução à Álgebra Linear e Geometria Analítica*, de F. R. Dias Agudo, há 50 anos, foram publicados em Portugal vários livros nesta área" (p. vii). Com primeira edição de 1960 e com várias edições e reimpressões até à década de noventa, este livro de texto, contendo três capítulos com tópicos de álgebra linear, foi sobejamente referenciado e associado ao ensino de álgebra linear em Portugal.

Ao contrário do caráter mais abstrato das obras citadas, incidindo na apresentação axiomática dos espaços vetoriais e das transformações lineares, o livro *Matrices and Linear Algebra*, de Hans Schneider e George P. Barker, publicado em 1968, marcou uma posição daí em diante pela abordagem mais concreta a partir do estudo das matrizes (Uhlig, 2003). O primeiro livro de texto a ser editado em Portugal segundo esta corrente foi *Álgebra Linear como Introdução à Matemática Aplicada*, de Luís Magalhães, em 1989 (Santana & Queiró, 2010). Esta última perspetiva para a apresentação dos conteúdos de álgebra linear tornou-se mais recorrente entre a extensa lista de livros editados a partir dos anos setenta do século passado (Uhlig, 2003), passando a estar cada vez mais na moda a introdução da álgebra linear a partir

da resolução de sistemas de equações lineares e das aplicações do cálculo matricial (Dorier, 2000).

Alguns livros posteriores ao trabalho do LACSG passaram a considerar as recomendações didáticas avançadas pelo grupo. O maior exemplo é, porventura, o elogiado e reconhecido livro de texto *Linear Algebra and its Applications*, com primeira edição de 1994, por o autor também ter pertencido ao LACSG. No prefácio adianta que "os tópicos seguem as recomendações do Linear Algebra Curriculum Study Group, os quais se baseiam numa pesquisa cuidada das reais necessidades dos alunos e num consenso entre os profissionais de muitas áreas que usam a álgebra linear" (p. vi).

No início deste século, Dorier e Sierpinska (2001) destacavam, numa revisão de literatura, que grande parte dos livros de álgebra linear ainda não refletiam os resultados da investigação na área, porventura por estes serem resultados "pela negativa", nomeadamente sobre o porquê do insucesso dos alunos na aprendizagem da álgebra linear e sobre o porquê de algumas experiências de ensino realizadas terem falhado.

Não obstante os avanços na investigação na área da didática da álgebra linear até ao presente e a contínua edição de novos livros de texto, quisemos também participar nesta dinâmica, com a elaboração de um texto original de álgebra linear.

4.2 Caraterísticas gerais do novo texto

4.2.1 Fontes

Os resultados de investigação sobre o ensino e a aprendizagem da álgebra linear constituem-se como as fontes principais.

A principal atenção recaiu nas recomendações do LACSG, de onde sobressai um conjunto de recomendações didáticas a adotar no ensino de álgebra linear. Algumas reações àquele projeto, como as de Harel (1997) e de Dubinsky (1997), o trabalho de Jean-Luc Dorier e dos seus colegas, realizado em França e sintetizado por Dorier e Sierpinska (2001), bem como o de Hillel (2000), auxiliaram e complementaram a nossa interpretação sobre tais recomendações didáticas.

A partir dos trabalhos de investigação assinalados, em particular, e da revisão da literatura, em geral, inferimos sete indicadores para orientar, numa perspetiva macro, a elaboração do nosso texto de álgebra linear, nomeadamente:

- uso da tecnologia;
- abordagem matricial;
- exploração de tarefas e aplicações da álgebra linear;
- conhecimento dos pré-requisitos;
- interligação dos conceitos de álgebra linear;
- alcance do formalismo;
- atenção nas linguagens e múltiplas representações dos conceitos.

A revisão de literatura permitiu-nos também conhecer algumas experiências realizadas sobre o ensino de alguns conceitos de álgebra linear e daí delinear algumas estratégias, como por exemplo, o recurso a tarefas de modelação matemática no ensino dos sistemas de equações lineares (Possani et al., 2010; Trigueros & Possani, 2013).

Como outras fontes de informação foram usados livros de álgebra linear, essencialmente de autores internacionais, nos quais se descortinavam abordagens concomitantes com os desafios lançados na literatura (com destaque para o livro de Lay (1997)). Para o caso particular do indicador sobre a ligação dos conceitos de álgebra linear ao conhecimento anterior dos alunos, recorreu-se ainda à consulta de alguns manuais escolares portugueses dos níveis de ensino básico e secundário.

As aulas do professor, e autor de livros de referência de álgebra linear, Gilbert Strang[1] disponibilizadas na WEB influenciaram ainda a elaboração do texto, com um traço forte no capítulo sobre os determinantes.

4.2.2 Conteúdo

O programa proposto pelo LACSG para um primeiro curso de álgebra linear, e sugerido para um total de 26 a 28 sessões de 50 minutos, é distribuído pelos seguintes temas principais: "matrix addition and multiplication, systems of linear equations, determinants, properties of $\mathbb{R}^n$,

[1] Em http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06-linear-algebra-spring-2010/video-lectures/, acedido em Maio, 2011.

eigenvalues and eigenvectors, more on orthogonality" (Carlson et al., 1993, p. 43). Para a formulação de um programa, a nossa opção considerou os quatro primeiros temas, na mesma ordem, e renomeados por: matrizes; sistemas de equações lineares; determinantes; espaços vetoriais. Considerámos ainda largamente os tópicos propostos pelo LACSG no seu programa detalhado para cada destes capítulos.

Para o desenvolvimento do texto procurámos utilizar uma linguagem simples e sucinta. A notação e a terminologia introduzidas foram as consideradas estritamente necessárias, tal como as definições. Algumas destas definições foram inclusive remetidas para os contextos da apresentação de exemplos e da resolução de exercícios. Em coerência, o número de teoremas enunciados ficou bastante reduzido, limitado por nós aos considerados fundamentais, e as demonstrações foram suprimidas (tal como Lay (1997) o faz em grande parte dos teoremas que enuncia). Em substituição, apostou-se na ilustração de casos particulares e de propriedades, muitas destas aparecendo associadas a exemplos e a exercícios. Procurou-se também sintetizar os procedimentos de cálculo, optando-se pela sua apresentação sob a forma de algoritmos.

No sentido de potenciar a utilização autónoma, todos os exemplos apresentados foram resolvidos. Procurou-se que estes fossem diferenciados, com a pretensão de abarcarem um leque extensivo de procedimentos de cálculo.

Os exercícios, para além da função suprarreferida de introdução de outras definições e ilustração de propriedades, foram também associados às aplicações da álgebra linear (doravante também designados neste texto por "problemas", quando estão subjacentes contextos da realidade). Esta é uma vertente sugerida, por exemplo, por Carlson et al. (1993) ou por Sierpinska (2000). Como os primeiros destinatários deste texto eram alunos do curso de engenharia elétrica, houve a preocupação de se incluir no texto algumas das aplicações da álgebra linear, com recurso à linguagem específica da área. Tal como em muitos livros de texto de álgebra linear (Anton & Rorres, 2010; Lay, 1997; Strang, 2006; Williams, 2001; etc.), os exercícios são acompanhados das respetivas soluções, aparecendo no final de cada capítulo. Em alguns casos, para além da solução, foram ainda apresentadas estratégias ou alguns passos da resolução dos exercícios.

Em cada um dos quatro capítulos foi introduzida uma tarefa para ser resolvida em sala de aula, para motivar o trabalho conjunto dos alunos e a discussão de resultados ("Algoritmo para a multiplicação de matrizes", "Ponte de Wheatstone", "Sistemas LTI de tempo contínuo" e "A caminho das capitais de distrito", respetivamente). Esta é uma porta aberta por Dorier e

Sierpinska (2001), estabelecendo que as questões interessantes e significativas para os alunos são o ponto de partida de um processo que pode envolver a construção de exemplos e de conjeturas, a resolução de problemas, a demonstração de teoremas e a comunicação. Embora sejam todos casos de tarefas, foi feita no texto a distinção entre tarefas (as suprarreferidas) e exercícios. No capítulo sobre os determinantes, a tarefa, inserida no final, visa a aplicação de conhecimentos adquiridos nesse e em capítulos anteriores e a relação entre conceitos. Com as restantes tarefas dos outros capítulos, procurou-se motivar e justificar a necessidade de aprendizagem de novos conceitos.

Diversos resultados de investigação apontam vantagens e desvantagens da abordagem geométrica dos conceitos de álgebra linear. Por exemplo, o LACSG recomenda uma forte ênfase na representação geométrica dos conceitos da teoria dos espaços vetoriais, no contexto de $\mathbb{R}^n$ (Carlson et al., 1993). Presumindo o potencial da abordagem geométrica, esta aparece no capítulo dois, associada à interpretação da solução de um sistema de equações lineares; no capítulo três, no cálculo de áreas e volumes segundo a aplicação dos determinantes; no capítulo quatro, extensivamente na interpretação, em duas e três dimensões, dos conceitos de subespaço vetorial, combinação linear de vetores, dependência e independência linear de vetores, subespaço vetorial gerado e base, tal como defendem Carlson et al. (1993), Harel (1997) e Stewart e Thomas (2009).

Ao longo do texto, procurou-se deixar muito claro a correspondência entre as ilustrações apresentadas e a interpretação geométrica do conceito ou conceitos visados, com abuso da expressão "geometricamente significa …". Com a abordagem geométrica procurou-se ainda colmatar algumas lacunas ao nível de conhecimentos básicos de geometria analítica, como por exemplo, a posição relativa de retas e planos ou a representação geométrica de vetores.

Por último, olhou-se para os resultados de investigação e para alguns livros de texto, quanto a algumas possibilidades consagradas para a introdução e exploração dos conceitos de álgebra linear. Uma das possibilidades aponta para a introdução precoce dos conceitos, traço vincado por Lay (1997). Esta influência refletiu-se no texto na introdução do conceito de combinação linear de vetores, dada a importância atribuída por Stewart e Thomas (2010) a este conceito, ora aparecendo no contexto da multiplicação de matrizes, ora na aproximação aos sistemas de m equações e n incógnitas, para posterior formalização aquando do estudo da teoria dos espaços vetoriais. Este foi também um exemplo particular sobre a forma de fazer sobressair a relação entre os conceitos de álgebra linear.

As dificuldades de aprendizagem da álgebra linear podem passar pela grande quantidade de novas definições que os alunos têm que aprender, normalmente surgindo desligadas do que estes aprenderam em ciclos de ensino anteriores (Dorier, 1998). O LACSG sugere ainda que o nível e o modo de apresentação dos conceitos devem estar relacionados com o conhecimento de pré-requisitos (Carlson et al., 1993). Na elaboração do texto, a nossa atenção a este pressuposto evidenciou-se com a referência a conceitos anteriormente aprendidos pelos alunos e como estes estavam relacionados com os novos. O principal propósito era conduzir os alunos a interiorizarem os novos conceitos ou métodos como generalizações, a observarem a continuidade entre as antigas e as novas aprendizagens e a relevarem a importância do conhecimento dos pré-requisitos.

Os quadros teóricos de Harel (2000), com os três princípios para o ensino e aprendizagem da álgebra linear, e de Dorier (1995), com os conceitos unificadores e generalizadores, também influenciaram a forma como alguns conceitos e conteúdos foram introduzidos no texto.

4.2.3 Elementos físicos

Na elaboração do texto tivemos em consideração o *layout*, ou seja, a forma de dispor a informação no documento. Entendemos que os aspetos de natureza física e gráfica induzem no leitor a intuição inicial sobre o tipo de obra e a curiosidade (ou não) de a "conhecer" melhor.

Por um lado, incluímos aspetos de natureza gráfica consoante a importância do conteúdo: as definições e os teoremas, bem como outros elementos nucleares do texto, foram destacados por sombreado; as tarefas e os exemplos foram colocados em caixas de texto. Por outro, incluímos situações que consideramos facilitadoras da aprendizagem: esquemas que condensam e organizam a informação associada a alguns conceitos; quadros que apresentam sequencialmente os passos dos algoritmos; ilustrações que acompanham a exploração geométrica de alguns conceitos.

O recurso à tecnologia foi também incluído no texto, no seguimento do que é proposto na literatura e em concordância com o que é observável em livros de texto de álgebra linear de referência, como por exemplo, em secções alusivas a "technology exercises" (Anton & Rorres, 2010), "MATLAB problems" (Strang, 2006) ou exercícios para serem resolvidos com um "matrix program" (Lay, 1997).

Para a computação simbólica, escolhemos o uso do programa Scilab. Este é um *software* subsidiário do MATLAB, mas de acesso gratuito. A sua utilização é potenciada na exploração de exemplos ao nível de cálculos auxiliares, visando essencialmente acelerar os procedimentos de cálculo. Cada *output* do Scilab apresentado no texto inclui os comandos utilizados, bem como a referência à ação a realizar. Outra motivação para o uso deste *software* residiu na proposta de exercícios sobre a ilustração de propriedades, a par da resolução de todo o tipo de tarefas em contextos da realidade (Ponte, 2005). Muitos exemplos e exercícios pressupõem a utilização do Scilab, com a referência direta no enunciado à sua utilização, embora este *software* possa ser substituído por outro ou pela calculadora, desde que permitam o cálculo matricial.

Para as representações geométricas, escolhemos os *softwares* GeoGebra e Mathematica, no contexto de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, respetivamente. No caso particular do Mathematica, a opção por expor os comandos que conduzem à obtenção das figuras apresentadas é justificada pela pretensão de possibilitar a autonomia na utilização deste *software* e de facilitar a adaptação dos casos a novas situações.

4.3 Matrizes: capítulo 1

A opção pelo estudo inicial das matrizes é coerente com a abordagem matricial e com a exploração, em primeiro lugar, da parte mais concreta e computacional da álgebra linear. O capítulo foi organizado em três subcapítulos: a linguagem das matrizes – sobre as definições dos principais tipos de matrizes; operações com matrizes – sobre a adição de matrizes, multiplicação de uma matriz por um escalar e multiplicação de matrizes; matrizes como representação de situações concretas – sobre cinco aplicações possíveis da teoria das matrizes.

Uma notação nuclear do texto e introduzida logo no início, é a de um vetor, como m-uplo, ser escrito segundo uma matriz coluna com m linhas. Esta opção pode ter vantagens sob o ponto de vista computacional (Poole, 2011) e permite que, aquando do estudo de conceitos da teoria dos espaços vetoriais (no contexto do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$), os alunos já estejam familiarizados com a notação pretendida para os elementos deste espaço vetorial.

Complementando o conceito de matriz, estabeleceu-se que uma matriz genérica de dimensão $m \times n$ é uma representação de n vetores em $\mathbb{R}^m$. Desta forma, na aproximação à

linguagem da teoria das matrizes, procurou-se associar a um novo objeto (matriz) algo que é concreto para os alunos (vetor escrito segundo as coordenadas).

Cada uma das definições seguintes, sobre os tipos de matrizes, foi concretizada num exemplo individual. Na apresentação destes exemplos abriu-se a janela de oportunidade para a introdução de parte dos comandos básicos do Scilab, nomeadamente: como escrever uma matriz, a matriz nula, a matriz diagonal e a matriz identidade; como procurar a matriz transposta e a forma canónica reduzida por linhas de uma matriz. Nos exercícios relacionados, destaca-se o Exercício 1.2, onde se procurou alertar para a possibilidade da sobreposição de algumas definições em casos particulares de matrizes e conduzir à eventual necessidade de clarificação dos conceitos. Um caso extremo é o de uma matriz quadrada nula, a qual é simultaneamente diagonal, triangular (superior e inferior), escalar e simétrica.

A opção para a apresentação das operações com matrizes considerou o conhecimento anterior dos alunos, ao nível das operações com vetores, em termos das suas coordenadas, que aprenderam a realizar nos ensinos básico e secundário. O objetivo era o de traduzir as operações com matrizes como a extensão natural da aritmética de vetores. A partir de exemplos de vetores representados por uma matriz coluna, a adição de vetores, coordenada a coordenada, conduziu à adição de matrizes segundo a adição dos elementos homólogos. Tal como a adição de vetores se realiza entre vetores com a mesma dimensão, também a adição de matrizes só está definida quando estas são da mesma dimensão. De forma análoga, o modo conhecido de obter um múltiplo de um vetor conduziu ao modo de multiplicar uma matriz por um escalar, resultando uma matriz cujas colunas são múltiplas das colunas correspondentes da matriz original.

Sobre a multiplicação de matrizes, foi preparada a tarefa intitulada "Algoritmo para a multiplicação de matrizes" para ser resolvida em sala de aula, com o propósito da formalização do algoritmo "mais eficiente". A partir do resultado apresentado da multiplicação de duas matrizes, obtido através do Scilab, a primeira subtarefa pressupõe a relação com o produto interno de vetores e a segunda subtarefa a adaptação de uma proposta do LACSG (Carlson et al., 1993).

Partindo da revisão do produto interno de dois vetores segundo as coordenadas, espera-se com a primeira subtarefa que os alunos consigam vislumbrar, face ao resultado apresentado, que a multiplicação tem que se processar no sentido "linhas por colunas", com o mesmo número de elementos. Relacionada com o produto interno, a multiplicação de matrizes aparece também como a continuação de aprendizagens anteriores.

No programa detalhado sugerido pelo LACSG é proposto que se explorem três formas de obter o produto AB de matrizes. Uma delas é sugerida como se segue: "*AB is a sum of outer products (i.e., rank 1 matrices): $AB = col_1(A)row_1(B) + \cdots + col_k(A)row_k(B)$, when A is m by k and B is k by n.*" (Carlson et al., 1993, p. 43). Associando uma adaptação desta proposta à segunda subtarefa, procurou-se, em primeiro lugar, promover a capacidade dos alunos para interpretar e usar a informação disponibilizada e para realizar operações já conhecidas com matrizes; em segundo lugar, em articulação com a subtarefa inicial, conduzir os alunos à reflexão sobre o procedimento mais natural e sobre a preferência pessoal.

A nossa resposta à tarefa, ao nível do algoritmo que entendemos ser "mais eficiente", aparece na esquematização da multiplicação de duas matrizes, com destaque na matriz produto para o elemento que resulta da multiplicação da linha pela coluna respetiva e como tal é processado.

As propriedades sobre operações com matrizes foram colocadas num exemplo e num exercício. No Exemplo 1.12, em vez da demonstração, optou-se por recorrer ao Scilab para a ilustração de três propriedades intrínsecas à multiplicação de matrizes. No Exercício 1.11, entre outras, incluíram-se todas as propriedades sobre operações com matrizes que refletem os axiomas do espaço vetorial $M_{m\times n}(\mathbb{R})$, com o propósito de este exercício ser revisitado e relacionado com assuntos do capítulo sobre os espaços vetoriais. O exercício requer que os alunos ponderem matrizes que ilustrem as propriedades anunciadas e que recorram ao Scilab para o efeito.

Depois da multiplicação de matrizes tornou-se possível acrescentar duas novas designações sobre matrizes: matriz ortogonal e matriz inversa de uma matriz invertível. O recurso ao Scilab para a exemplificação permitiu mostrar precocemente como encontrar a inversa de uma matriz invertível e informar que existem matrizes que não são invertíveis.

O Exercício 1.13 tem particular interesse por constituir-se como um momento precoce para a referência ao conceito de combinação linear de vetores, o qual é de vital importância no âmbito do estudo dos espaços vetoriais. Relacionando-o com a multiplicação, estabeleceu-se uma combinação linear como um produto de uma matriz A por um vetor X, isto é, AX como uma combinação linear das colunas de A, com as coordenadas do vetor X como escalares. O exercício possibilita a primeira concretização da expressão e espera-se que os alunos desenvolvam a intuição sobre o conceito de combinação linear de vetores.

Para reforçar que os alunos vejam as matrizes como objetos ou entidades conceptuais (Dorier e Sierpinska, 2001), acrescentámos ao texto a exploração de cinco situações reais, passíveis de serem representadas por matrizes.

Em duas das situações, as matrizes apareceram para representar uma tabela de dupla entrada: tão simples, quanto à representação dos casos possíveis do produto das faces de dois dados numerados ou, menos elementar, quanto à forma de calcular as classificações dos alunos, como sugerido por Lima (2010). Neste último caso, a matriz das classificações obtidas em testes e exames multiplicada por uma matriz que representa as ponderações resulta numa matriz que informa sobre as classificações finais dos alunos.

Noutras duas situações foi usada linguagem e representações específicas da engenharia elétrica, para mostrar como alguns problemas de produção e os circuitos elétricos podem ser abordados em termos da linguagem matricial. No primeiro caso, destaca-se uma aplicação das matrizes estocásticas, enquanto no segundo, sobressaem elementos da teoria de grafos.

Por último, foi exposta uma aplicação da computação gráfica, sobre como as matrizes e operações entre elas permitem a manipulação de figuras.

4.4 Sistemas de equações lineares: capítulo 2

O desenvolvimento do texto continua com o estudo dos sistemas de equações lineares. É um tema que se relaciona diretamente com a resolução de diferentes tipos de problemas e é fundamental para a compreensão de muitos dos conceitos de álgebra linear (Trigueros et al., 2007). É também muito abrangente no que diz respeito às aplicações da álgebra linear e, tal como na teoria das matrizes, é de natureza fortemente computacional.

O capítulo foi organizado em três subcapítulos: aproximação ao estudo de sistemas de equações lineares – partindo dos sistemas com duas equações e duas incógnitas e dos sistemas com três equações e três incógnitas, já estudados pelos alunos, até à formalização do conceito; resolução de sistemas de equações lineares – partindo das limitações dos métodos conhecidos até à introdução e aplicação do método de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan; algoritmo para a determinação da matriz inversa de uma matriz invertível – sobre a introdução do procedimento de cálculo e sobre as suas aplicações.

Um momento crucial onde se pretende chegar no desenvolvimento do capítulo é a formalização do método de eliminação de Gauss (e de Gauss-Jordan). Toda a parte do texto antecedente assentou na tentativa de aplicação dos princípios de Harel (2000) para o ensino de álgebra linear.

Em resumo, um olhar pelos sistemas de equações lineares que os alunos aprenderam em ciclos de ensino anteriores, em conjunto com a proposta de uma tarefa de modelação ("Ponte de Wheatstone"), propiciam a estruturação do texto com base numa realidade que é concreta e familiar aos alunos (princípio da concretização). Neste caso, à luz do conceito imagem (Vinner, 1991), uma coleção de impressões, de experiências e de representações serão associadas mentalmente pelos alunos ao conceito de sistema genérico de equações lineares, bem como do método de eliminação de Gauss (e de Gauss-Jordan). Posteriormente, o surgimento na procura de uma resposta à tarefa de um sistema com um número maior de equações e de incógnitas que o habitual, a par da insuficiência dos métodos conhecidos para a resolução de sistemas de equações lineares, desencadeiam a perceção de que é necessário aprender algo novo (princípio da necessidade). Por último, o modelo definido no princípio da concretização parece ser suficiente para se generalizar os conceitos em questão, nomeadamente sistema com m equações e n incógnitas e métodos de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan (princípio da generalização).

Iniciou-se o capítulo com a referência aos sistemas com duas equações e duas incógnitas, sob múltiplas perspetivas e segundo a consideração e articulação das linguagens algébrica e geométrica. Primeiro, com a revisão da resolução pelo método de substituição, o qual é do conhecimento dos alunos desde o ensino básico; segundo, com a revisão do método gráfico com o apoio do GeoGebra, a par da interpretação gráfica consoante o número de soluções do sistema; terceiro, com a informação sobre a resolução de um sistema desta natureza pela via da resolução algébrica e geométrica da equação vetorial $xu + yv = t$ (significando a procura da combinação linear dos vetores u e v, dos coeficientes das incógnitas, que origina o vetor t, dos termos independentes); quarto, com a introdução da notação matricial $AX = B$.

O propósito de relacionar a resolução de sistemas de equações lineares com o conceito de combinação linear de vetores é o mesmo que o referido anteriormente, sobre a relação deste com a multiplicação de matrizes: introduzir precocemente um conceito que é central no estudo *a posteriori* da teoria dos espaços vetoriais e destacar como alguns conceitos de álgebra linear se podem relacionar.

O mesmo tipo de abordagem estendeu-se aos sistemas com três equações e três incógnitas. Para a representação geométrica da combinação linear e da posição relativa dos planos definidos pelas equações de diferentes sistemas, recorreu-se ao Mathematica e às suas potencialidades (também) como AGD.

A ligação aos pré-requisitos culminou com a formalização do conceito de sistema genérico de equações lineares. Procurou-se que, chegado este momento, os alunos concebam a ideia de que apenas se acrescentaram equações e incógnitas a uma entidade com a qual já estão familiarizados. Com o tipo de abordagem delineada, procurou-se desenvolver o sentido de algumas ações que serão necessariamente associadas à resolução de qualquer sistema de equações lineares, como a classificação quanto à existência e unicidade de solução e a representação na forma matricial.

A proposta da tarefa de modelação intitulada "Ponte de Wheatstone" principia o processo de conduzir o aluno a sentir a falta de um método que permita a resolução de qualquer sistema de equações lineares. Está enquadrada com o desafio de Strang (1998), sobre ensinar-se as aplicações da álgebra linear em articulação com a teoria, e com o desafio de Fletcher, sobre não se introduzir os conceitos segundo definições, mas como ferramentas para a resolução de problemas (como citado em Sierpinska, 2000).

A influência para o desenvolvimento da tarefa advém da literatura, mais concretamente do trabalho de Possani et al. (2010). O problema de investigação que consideraram foi a possibilidade do ensino de conceitos de álgebra linear segundo a teoria de modelos e modelação de Lesh e Doerr (2003), no âmbito da resolução de sistemas de equações lineares, a partir de uma situação de modelação de fluxo de tráfego.

O contexto que escolhemos para a tarefa foi o da aplicação das leis de Kirchhoff num circuito elétrico, conhecido por Ponte de Wheatstone, visando a determinação das respetivas intensidades das correntes elétricas. Dada a especificidade do assunto (com linguagem própria da engenharia elétrica), introduziu-se no enunciado a informação considerada necessária para que qualquer aluno, mesmo não tendo conhecimentos de teoria dos circuitos, consiga responder à tarefa. A primeira referência à tarefa subentende a resposta a duas subtarefas, onde se pretende, respetivamente, que os alunos apresentem as equações respeitantes à aplicação das leis de Kirchhoff e que representem tais equações num único sistema na forma matricial. Num momento posterior do texto, a tarefa será revisitada com a proposta de uma terceira (e última) subtarefa.

Distribuído pelas equações dos nós e equações dos circuitos, uma resposta correta à primeira subtarefa pode considerar um total entre seis a oito equações lineares, com seis incógnitas. Com a resposta à segunda subtarefa é reforçada a presença de um sistema de equações lineares com um número de equações e de incógnitas superior ao "normal". É este momento que consubstancia o objetivo da tarefa: os alunos depararem-se com um sistema de equações lineares que não sabem resolver ou duvidam que possam arriscar a aplicação de um dos métodos que já conhecem.

O texto continua com a exposição, apoiada em exemplos resolvidos, das limitações dos métodos que os alunos já aprenderam – método gráfico, método de substituição e método de adição ordenada – para enfatizar que se justifica a aprendizagem de um novo método e, uma vez mais, com a ligação aos pré-requisitos.

Pela via "régua e esquadro", o método gráfico parece adequar-se apenas a sistemas com duas incógnitas, dada a facilidade da representação de retas no plano. O mesmo não se pode dizer sobre a representação dos planos definidos por equações com três incógnitas. Com o auxílio de *software* apropriado, o método gráfico para a resolução de sistemas de equações lineares elicia muito potencial, tal como se mostra no Exemplo 2.5, mas esbarra na realidade de apenas ser possível a visualização em duas e três dimensões.

O método de substituição pode acarretar um enorme dispêndio de tempo e de escrita quando se aumenta o número de equações e/ou de incógnitas. Nestas situações, exemplificou-se que este método poder-se-ia apenas justificar na presença de sistemas de equações lineares cuja matriz dos coeficientes das incógnitas se aproximasse de uma matriz na forma escalonada (Exemplo 2.6). Só assim é que o processo de substituição, "de baixo para cima", permitiria encontrar rapidamente o conjunto solução.

O método de adição ordenada é exemplificado com um caso retirado de um livro de texto do ensino secundário (Soveral & Silva, 2004). Comparativamente com o método de substituição, parece agilizar a determinação do valor de uma das incógnitas. Tal é conseguido por anulação consecutiva das restantes incógnitas, por meio de operações entre as respetivas equações. Todavia, este método ganharia eficácia se fosse articulado com o método da substituição para a determinação do valor das restantes incógnitas. No caso de sistemas com um número maior de equações e de incógnitas, as demasiadas operações algébricas entre as equações também contribuiriam para a perda de eficácia do método de adição ordenada na sua resolução.

O método de eliminação de Gauss foi apresentado de modo a eliciar como se relaciona com os métodos de substituição e de adição ordenada. Pretende-se que os alunos constatem que não estão a aprender algo completamente novo, mas sim um método que congrega as potencialidades daqueles e usa alternativamente a linguagem matricial. Procurou-se ainda destacar que a aplicação do método de eliminação de Gauss envolve percorrer três etapas distintas.

Em paralelo com a exploração de um exemplo transversal (Exemplo 2.8), começou-se pela introdução da definição de matriz ampliada de um sistema de equações lineares.

A "codificação" das operações subjacentes ao método de adição ordenada a realizar entre as equações definiu a fase descente de aplicação do método. Tal como Lay (1997) e Lima (2010), também apresentámos uma leitura comparativa das operações entre as equações de um sistema com as operações elementares sobre as linhas de uma matriz. O procedimento para encontrar a matriz na forma escalonada foi sintetizado num algoritmo e optou-se por incluir um exemplo de execução. Acrescentou-se ainda um passo adicional ao algoritmo, condizente com a escrita de uma matriz na forma canónica reduzida por linhas (e correspondente ao método de eliminação de Gauss-Jordan), com tripla motivação: induzir a reflexão, em termos de eficiência, sobre a resolução de um sistema de equações lineares pelas duas vias; associar o algoritmo ao Scilab e à limitação deste de apenas permitir encontrar a forma canónica reduzida por linhas; ser uma referência precoce a um conhecimento futuramente associado à forma de determinar a matriz inversa de uma matriz invertível.

A fase ascendente do método de eliminação de Gauss reflete o aproveitamento da ideia já lançada aquando da referência à limitação do método de substituição. Na presença de uma matriz escrita na forma escalonada (ou na forma canónica reduzida por linhas) e após a escrita das equações lineares correspondentes, a resolução do sistema continua com a substituição e determinação de "baixo para cima" dos valores das incógnitas. Esta ação aparece como o reflexo da sugestão anunciada atrás, sobre o momento de articular o método de substituição com o método de adição ordenada: uma vez isolada a incógnita na equação correspondente à linha que contém o último pivô, o isolamento das restantes processa-se por substituição. Caso a opção passe por encontrar a forma canónica reduzida por linhas da matriz ampliada do sistema de equações lineares, então a solução já está encontrada.

Os exemplos seguintes (Exemplos 2.9, 2.10 e 2.11) são representativos dos diferentes tipos de sistemas de equações lineares, quanto à existência e número de soluções. Um elemento

adicional introduzido foi a "discussão inicial do sistema", pretendendo-se fomentar o sentido crítico na resolução de sistemas de equações lineares. Incutindo a previsão quanto à classificação, à luz do número de equações e de incógnitas e/ou interpretação geométrica, perspetiva-se que os alunos não ignorem o controlo de resultados. Adicionalmente, mostrou-se como o Scilab pode auxiliar a resolução de sistemas de equações lineares.

A primeira experiência de aplicação deste novo método foi recriada com a continuação da tarefa "Ponte de Wheatstone", como resposta à curiosidade sobre como encontrar a solução da questão colocada. Sendo proposta para realizar em grupo, prevê-se que a discussão entre os alunos e a discussão final conjunta dos resultados obtidos possibilite um reforço no processo de interiorização do método.

Entre os exercícios propostos, aparece um primeiro grupo de exercícios (Exercícios 2.6-2.10), considerados rotineiros, de aplicação do método de eliminação de Gauss (ou Gauss-Jordan) na resolução de sistemas de equações lineares. O Exercício 2.11 e o Exercício 2.12 focam o conceito de sistema homogéneo, refletindo uma vez mais a opção de se introduzirem no texto algumas definições no âmbito da resolução de exercícios. Outro grupo de exercícios de destaque é sobre a resolução de problemas e as aplicações dos sistemas de equações lineares (Exercícios 2.14-2.20). Um contributo particular dos problemas propostos é a necessidade de se interpretar a obtenção de um sistema possível e indeterminado no contexto da situação e como obter uma solução particular para a resposta ao problema. Também se espera que o conhecimento conseguido com a resolução da tarefa "Ponte de Wheatstone" melhore a capacidade dos alunos para resolver este tipo de problemas, essencialmente ao nível da modelação da situação por meio de equações lineares e a interpretação da solução.

Sabendo-se como encontrar a forma escalonada ou a forma canónica reduzida por linhas de uma matriz, seguiu-se no texto a introdução do conceito de caraterística de uma matriz. A partir da sinalética de Lay (1997), para a posição dos pivôs em representações de matrizes na forma escalonada e na forma canónica reduzida por linhas, o conceito apareceu para dar nome ao número de pivôs ou número de linhas não nulas. A primeira das várias relações da caraterística de uma matriz com outros conceitos mencionados ao longo do texto é com os sistemas de equações lineares. Por meio de um esquema, organizou-se a informação sobre como o conceito de caraterística de uma matriz informa sobre a classificação de um sistema de equações lineares. Nos exemplos e exercícios relacionados deu-se primazia à discussão da caraterística de uma matriz em função de parâmetros.

O capítulo termina com a formalização de um procedimento para a determinação da matriz inversa de uma matriz invertível e a sua aplicação na resolução de exercícios.

O modo de introduzir no texto um algoritmo para a inversão de matrizes invertíveis foi adaptado da proposta de Williams (2001), por esta enfatizar a relação entre os anteriores e os novos conceitos. Os assuntos já abordados anteriormente e que aqui se constituem como pré-requisitos são a definição de matriz inversa de uma matriz invertível e o método de eliminação de Gauss-Jordan para a resolução de sistemas de equações lineares.

Primeiramente foi lançado um desafio em torno da resolução de sistemas com n equações lineares e com n incógnitas, com a aplicação do método de eliminação de Gauss-Jordan. Por meio do Exemplo 2.14, obteve-se com o Scilab a solução única de dois sistemas com três equações e três incógnitas, apenas diferindo entre eles os termos independentes. A seguir, contrapôs-se com a forma canónica reduzida por linhas da matriz ampliada, não com uma, mas simultaneamente com as duas colunas referentes aos termos independentes. O objetivo era induzir a conjetura de ser possível a resolução conjunta de sistemas de equações lineares quando a matriz dos coeficientes é comum.

Para o caso em estudo, generalizou-se que ampliando a matriz dos coeficientes com um bloco, constituído por colunas correspondentes aos termos independentes, e aplicando o método de eliminação de Gauss-Jordan, a primeira transformar-se-ia na matriz identidade e a segunda numa matriz que reuniria todas as soluções, dispostas por coluna.

Se, como caso particular, a matriz que reúne os termos independentes coincide com a matriz identidade, a aplicação do método de eliminação de Gauss-Jordan conduz à obtenção de uma matriz, na parte ampliada, que sob certas condições passa a ser a matriz inversa da matriz inicial dos coeficientes. Simbolicamente, formalizou-se que, segundo a aplicação do método de eliminação de Gauss-Jordan, a matriz $[A|I_n]$ resulta na matriz $[I_n|A^{-1}]$. Encontrou-se assim um procedimento para a determinação da matriz inversa de uma matriz invertível, o qual foi sintetizado em três passos de um algoritmo.

A última informação acrescentada ao texto neste capítulo é o Teorema 2.1, numa espécie de sumário de alguns dos conceitos abordados e sobre como se relacionam.

Sobre as aplicações da matriz inversa de uma matriz invertível, mostrou-se como esta possibilita uma forma alternativa de resolução de sistemas de equações lineares possíveis e determinados, a partir da expressão algébrica $AX = B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$ (Exemplo 2.16). Segundo

Lay (1997), também "a matriz inversa proporciona *insight* para os modelos matemáticos de aplicações concretas (p. 104)". As aplicações desta natureza que incluímos nos exercícios são da área da Física e da Criptografia.

4.5 Determinantes: capítulo 3

Os determinantes aparecem no texto após o estudo das matrizes e dos sistemas de equações lineares, em coerência com o programa recomendado pelo LACSG (Carlson et al., 1993). Uma alternativa para a organização dos assuntos era "seguir a história e começar com os determinantes" (Uhlig, 2003, p. 151), mas estes estão atualmente mais longe de ocuparem uma posição central na álgebra linear do que há um século atrás (Kleiner, 2007; Strang, 2006) e, "juntamente com as matrizes, relegados para a categoria das ferramentas técnicas" (Sierpinska, Nnadozie, & Oktaç, 2002, p. 27).

O capítulo foi organizado em três subcapítulos: definição e propriedades dos determinantes – envolvendo a introdução da definição de determinante como função e a dedução das propriedades a partir dos axiomas; algoritmos para o cálculo de determinantes de qualquer ordem – sobre a extensão das propriedades ao cálculo de determinantes de segunda e terceira ordem e a generalização pelo teorema de Laplace; os determinantes em novos métodos de cálculo – sobre a procura da inversa de uma matriz invertível pelo método da matriz adjunta e a resolução de sistemas de Cramer.

As aulas do Professor Gilbert Strang disponibilizadas na WEB mostram a exploração dos determinantes segundo a sequência propriedades-cálculo-aplicações. Esta proposta aparece naturalmente materializada por Strang (2006) e, ao nível da bibliografia nacional, foi também seguida por Lima (2010). Considerámos esta sequência e o tipo de abordagem no estudo dos determinantes, por entendermos que congregavam extensivamente as recomendações do LACSG: dedução e ilustração das propriedades dos determinantes, evitando-se demonstrações formais; exploração do uso dos determinantes; exploração das dificuldades relacionadas com o cálculo de determinantes (Carlson et al., 1993). Quanto a este último ponto, a nossa interpretação foi que o estudo dos determinantes a partir das propriedades mantem o foco sobre como estas podem facilitar o cálculo de qualquer determinante. Ao invés, a introdução das "fórmulas" para o cálculo dos determinantes antes das propriedades pode levar a que estas

sejam vistas como uma aprendizagem que não se justifica, pondo em causa o princípio da necessidade de Harel (2000).

A introdução da definição de determinante, como uma função que estabelece a correspondência entre o subconjunto constituído pelas matrizes quadradas e um número real, deu o mote para a apresentação e ilustração de uma lista de onze propriedades. Para facilitar a escrita, a leitura e futuras referências, associou-se a cada propriedade uma etiqueta numerada.

As primeiras três propriedades, como axiomas da definição, começam por estabelecer, respetivamente, que o determinante da matriz identidade vale um, que o sinal do determinante muda consoante a troca de linhas e que o determinante é uma função linear em cada linha separadamente. Tal como sugerem Lima (2010) e Strang (2006), e em coerência com as sugestões apontadas na literatura para o desenvolvimento de demonstrações (Carlson, 1993; Day, 1997), a ilustração das propriedades com determinantes de segunda ordem foi realizada de forma a mostrar como cada uma das propriedades seguintes resulta das três iniciais.

Finalizou-se esta parte do texto com a nota sobre as propriedades dos determinantes tanto serem válidas sobre as linhas, como sobre as colunas de uma matriz. No entanto, considerámos na resolução dos exemplos e exercícios apenas as propriedades sobre linhas, com o apoio, quando necessário, da propriedade que estabelece a igualdade entre o determinante da matriz e o da sua matriz transposta. Com esta opção, pretendeu-se dar continuidade ao trabalho já realizado anteriormente com as operações elementares sobre linhas de uma matriz e evitar o hipotético ruído resultante da realização de operações entre colunas.

A aplicação das propriedades no cálculo dos determinantes de matrizes genéricas de ordem dois e de ordem três conduziu à formalização e esquematização de algoritmos para o cálculo do determinante deste tipo de matrizes. No caso particular das matrizes de ordem três, dada a complexidade, o cálculo simbólico foi auxiliado pelo *software* Mathematica. A intenção era unicamente mostrar como é que a expressão resultante estabelece um algoritmo e nunca que o aluno *per si* o conseguisse fazer pela via "papel e lápis".

Uma das aplicações dos determinantes, enunciada por Strang (2006), respeita ao cálculo de áreas e de volumes. Nesta linha, começou-se por expor no texto como o cálculo de determinantes de segunda ordem permite determinar a área de paralelogramos e de triângulos.

Segundo a estratégia da decomposição de figuras e o auxílio do Mathematica para a realização do cálculo simbólico, obteve-se como expressão para a área de um paralelogramo a

anteriormente estabelecida para o cálculo de determinantes de segunda ordem. De forma imediata, estabeleceu-se a expressão para a área de um triângulo. Com o Exemplo 3.2 mostrou-se como a área de qualquer polígono decomposto em triângulos e paralelogramos é facilmente encontrada pela via do cálculo de determinantes, comparativamente com a aplicação das fórmulas de áreas que os alunos conhecem de antemão.

Transpondo a situação das figuras para os sólidos geométricos, formalizou-se que também o volume de um paralelepípedo oblíquo corresponde ao módulo do determinante da matriz dos vetores representantes dos seus lados.

Sobre como possibilitar o cálculo do determinante de uma matriz de qualquer ordem, começou-se por organizar num quadro a notação e terminologia necessária. O teorema de Laplace formalizado a seguir congrega todos estes símbolos e generaliza um método para o cálculo de qualquer determinante. Este, em articulação com as propriedades, torna os processos de cálculo bastante mais céleres, tal como se pretendeu mostrar com os exemplos. Um elemento que se acrescentou à exploração dos exemplos foi a menção à estratégia adotada e ao motivo, como forma de justificar o caminho seguido para o cálculo do determinante em questão, de entre as várias possibilidades agora conhecidas.

Com os exercícios propostos neste subcapítulo procurou-se destacar a aplicação direta ou indireta das propriedades dos determinantes e outras aplicações dos determinantes (sobretudo na geometria), bem como a necessidade de se recorrer ao Scilab perante situações de cálculo mais complexas e para a verificação de propriedades.

A terminar o capítulo, é revisitada e relacionada com o cálculo de determinantes a procura da inversa de uma matriz invertível e a resolução de sistemas de equações lineares (possíveis e determinados).

A exposição de um método alternativo para a inversão de matrizes invertíveis assentou no princípio de enriquecer a perspetiva sobre como alguns conceitos de álgebra linear se podem relacionar e no de estabelecer generalizações a partir de algo mais concreto. Novamente a partir da ilustração do caso para $n = 2$, apresentou-se a aplicação do já conhecido método de eliminação de Gauss-Jordan na determinação da inversa de uma matriz invertível genérica, com o cálculo simbólico a ser realizado no Mathematica. Por meio da observação do resultado obtido, da introdução da notação de matriz dos cofatores e da introdução da definição de matriz adjunta, resultou a formalização do denominado método da matriz adjunta.

Os exemplos e exercícios propostos, quanto à aplicação do método da matriz adjunta, incidiram em matrizes de ordem dois e de ordem três, eliciando as dificuldades de computação manual com matrizes de ordem superior. Uma vez mais, continuou-se a enfatizar o recurso ao Scilab para a ilustração de propriedades. Como este *software* não tem um comando próprio para o cálculo da matriz adjunta, apresentou-se uma função construída no Scilab que permite que qualquer aluno possa também determinar esta matriz, para ajudar, por exemplo, no controlo de resultados. Procurou-se com esta opção desvendar a possibilidade de os alunos também escreverem os seus próprios programas, tal como é sugerido por alguns investigadores (Dubinsky, 1997; Harel, 1997), quando enfrentam algumas das limitações dos *softwares*.

A dedução de um método para a resolução de sistemas de equações lineares, envolvendo os determinantes, foi realizada nos mesmos termos que o caso anterior. Começou-se com a resolução de um sistema genérico com duas equações e duas incógnitas e consequente aplicação de conhecimentos já adquiridos. Por meio de um quadro, organizou-se a exposição comparativa dos casos particular e geral. Numa fase intermédia, voltou-se a fazer menção à forma alternativa de resolver sistemas de equações lineares pelo conhecimento da matriz inversa, já referida no Exemplo 2.16 do capítulo anterior. No final desta exploração, encontrou-se a forma como os determinantes podem auxiliar a descoberta do valor de cada uma das incógnitas de um sistema de equações lineares possível e determinado.

No seguimento, introduziu-se o termo *sistema de Cramer* e formalizou-se, tal como se pretendia, a *regra de Cramer*. Com o Exemplo 3.10, foram apresentados cinco casos distintos da aplicação da regra de Cramer, inclusive como definir uma função no Scilab para o efeito, dada também a limitação do *software* neste ponto.

O capítulo termina com a proposta de resolução de uma tarefa, denominada "Sistemas LTI de tempo contínuo", mantendo-se o objetivo inicial de incluir uma tarefa em cada um dos capítulos do texto. Esta tarefa incluiu uma linguagem mais específica da engenharia elétrica – teoria de sinais e sistemas – uma vez mais com atenção aos destinatários iniciais deste texto. Para poder ser resolvida autonomamente, acrescentou-se ao enunciado toda a informação considerada essencial. Como fonte principal de informação para a elaboração da tarefa considerou-se a obra de Antsaklis e Michel (2007).

A tarefa foi introduzida no final do capítulo com vista à aplicação e consolidação de conceitos deste e de capítulos anteriores. O objetivo principal da tarefa é destacar algumas relações entre os conceitos até então explorados e proporcionar um momento de constatação

sobre as diversas possibilidades da sua aplicação na resolução de problemas da álgebra linear. Outro objetivo da tarefa prende-se com a avaliação da iniciativa, momento e função a atribuir pelos alunos ao uso de *software* como suporte à resolução da tarefa.

Um dos principais desafios que se coloca diz respeito à interpretação do enunciado e à compreensão da natureza do trabalho solicitado. A primeira subtarefa envolve operações com matrizes, com alguns elementos como parâmetros. No entanto, os alunos terão que constatar a limitação do Scilab na realização de cálculos simbólicos (embora neste caso particular, como se trata de um único parâmetro e se for definido no Scilab como um polinómio de grau um, a questão pode ser resolvida com o apoio deste *software*). No caso do cálculo manual da matriz inversa, os alunos terão que decidir qual a melhor opção, entre as possibilidades de aplicar o método de eliminação de Gauss-Jordan ou o método da matriz adjunta.

A segunda e terceira subtarefas são similares e começam por requerer a multiplicação de matrizes. O trabalho continua com a procura da caraterística da matriz resultante, com um leque alargado de alternativas: recorrer ao comando *rank* do Scilab; encontrar a forma canónica reduzida por linhas da matriz com o apoio do Scilab e contar os pivôs; determinar manualmente a forma escalonada da matriz e concluir sobre a caraterística da matriz; aplicar o Teorema 2.1 e concluir sobre a caraterística da matriz pelo teste da invertibilidade da matriz, pelo cálculo do determinante ou pelo cálculo da própria matriz inversa.

4.6 Espaços vetoriais: capítulo 4

O texto termina com o estudo dos principais conceitos da teoria dos espaços vetoriais, cujo teor é mais abstrato do que o dos assuntos abordados anteriormente. A literatura na área identificou que a maioria dos alunos evidencia dificuldades de aprendizagem da álgebra linear e, embora mostrem ser capazes de resolver sistemas de equações lineares e operar com matrizes, por exemplo, sentem-se desorientados face a conceitos elementares da teoria de espaços vetoriais (Carlson, 1993). Uma das razões avançadas por este investigador é a recorrente introdução dos conceitos da teoria dos espaços vetoriais distante do conhecimento anterior dos alunos e das suas aplicações. Por sua vez, Dorier (1995) destaca as eventuais dificuldades dos alunos como consequência da natureza mais abstrata e formal destes conceitos.

Os conceitos abordados definiram a divisão desta parte do texto em seis subcapítulos. No primeiro subcapítulo procedeu-se à introdução e formalização do conceito de espaço vetorial, enquanto no segundo subcapítulo abordou-se o conceito de subespaço vetorial de um espaço vetorial. Os restantes subcapítulos foram designados por combinação linear de vetores, subespaço vetorial gerado, dependência e independência linear de vetores e ainda bases e dimensão.

A ordem escolhida para a exploração destes conceitos reflete a forma como se procurou relacioná-los e como umas definições conduziram a outras, segundo a influência do trabalho de Dorier (1998). Quanto ao tipo de abordagem delineada, o objetivo passa por os alunos compreenderem o raciocínio por detrás da construção dos conceitos, como forma de estes assuntos não serem reduzidos à memorização de algoritmos e de definições (Harel, 1997). Para tal, adotou-se a estratégia de Dorier (1998) de não se partir da introdução formal dos conceitos, mas articulando o conhecimento prévio dos alunos com a exploração de situações menos formais numa etapa inicial, de modo a conduzir os alunos a uma necessidade de generalização daqueles e, por inerência, mais formais.

Na aproximação ao estudo do conceito de espaço vetorial começou-se por invocar a procura de outro tipo de vetores. O conceito imagem que os alunos têm no momento sobre vetor poderá incluir: a ideia de "seta", com os quais se podem realizar operações geométricas e algébricas e sobre eles se conhecem algumas propriedades – conhecimento adquirido nos ensinos básico e secundário; a possibilidade de as suas coordenadas poderem ser representadas por uma matriz coluna – informação introduzida no início do texto. A partir daqui, espera-se que os alunos ampliem o conceito imagem de vetor, agora como elemento de uma estrutura doravante conhecida por espaço vetorial.

O modo como se procurou introduzir no texto o conceito de espaço vetorial foi segundo a tentativa de construção de um conceito unificador e generalizador (Dorier, 1995), "como uma abstração a partir de um domínio de objetos já abstratos tais como [entre outros] vetores geométricos, *n*-uplos e polinómios" (Dorier & Sierpinska, p. 257).

Apontando-se ao conhecimento anterior dos alunos, elaborou-se uma lista de entes matemáticos que tinham em comum as operações sobre eles definidas, bem como um conjunto de propriedades, com vista a reagrupá-los numa única estrutura. O ponto de partida foi o conjunto dos vetores livres, com a revisão das duas operações geométricas que são do conhecimento dos alunos desde o ensino básico. Para se reforçar quais as propriedades já

anteriormente associadas aos vetores livres, acrescentou-se ao texto a informação retirada de um manual escolar do 10.º ano de escolaridade (Neves, Guerreiro, Leite, & Silva, 2010), mantendo a divisão das propriedades segundo a operação interna. Adicionalmente, com o Exemplo 4.1, mostrou-se uma aplicação da propriedade $k(\vec{u}+\vec{v}) = k\vec{u} + k\vec{v}$, sobre como esta permite duas formas de encontrar a resposta à questão colocada e sobre a importância do conhecimento de propriedades. A rematar, estabeleceu-se o conjunto dos vetores livres como o primeiro candidato a integrar a estrutura procurada.

Com a correspondência biunívoca entre o conjunto dos vetores do plano e os conjuntos $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{C}$ e entre o conjunto dos vetores do espaço e o conjunto $\mathbb{R}^3$, estabeleceu-se que as propriedades acima continuariam válidas. Seguiu-se o registo das duas operações internas nestes conjuntos, bem como a generalização para o caso $\mathbb{R}^n$, e a inclusão destes conjuntos na referida lista dos candidatos. Com o Exemplo 4.2 exemplificou-se e generalizou-se nestes conjuntos a existência de elemento neutro e a existência de elemento simétrico.

O conjunto das matrizes foi o último conjunto revisitado, motivado pela possibilidade de também um vetor poder ser escrito como matriz coluna. Em particular, fez-se a alusão a oito propriedades presentes no Exercício 1.11 e às operações de adição de matrizes e de multiplicação de uma matriz por um escalar. O exemplo de aplicação (Exemplo 4.3) possibilitou ainda ilustrar pela primeira vez no texto o significado de uma operação estar bem definida.

A definição de espaço vetorial surge como consequência da necessidade e possibilidade de se atribuir uma designação a estes e outros conjuntos não vazios, que estão munidos com aquelas operações e propriedades comuns. Assim, os axiomas aparecem para generalizar e organizar a informação sobre tais operações (axiomas de fecho) e propriedades (axiomas da adição e axiomas da multiplicação por um escalar).

Em conformidade com as recomendações do LACSG (Carlson et al., 1993), os axiomas de espaço vetorial não foram demonstrados e limitou-se o estudo dos espaços vetoriais ao espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, com os escalares a serem números reais. Dada a forte ênfase geométrica também sugerida pelo LACSG para este tema, confinou-se substancialmente a exploração aos espaços vetoriais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$.

No subcapítulo seguinte, o conceito de subespaço vetorial de um espaço vetorial não foi introduzido segundo uma definição formal. A opção passou por atalhar caminho, isto é,

identificar quais dos axiomas de espaço vetorial apenas tinham que ser verificados para que um subconjunto de um espaço vetorial fosse subespaço vetorial.

Com os exemplos resolvidos, apresentados a seguir, pretendeu-se informar: primeiro, como determinar analiticamente que um conjunto de um espaço vetorial ($\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$) é um subespaço vetorial (neste caso, optou-se por verificar os axiomas sempre a partir da representação paramétrica do conjunto); segundo, como o interpretar geometricamente (segundo a utilização do GeoGebra ou do Mathematica). Dito de outra forma, contribuir para que os alunos construam um conceito imagem de subespaço vetorial de um espaço vetorial, quer como objeto algébrico, quer como objeto geométrico (Wawro et al., 2011), realçando-se assim a consideração conjunta de diferentes linguagens da álgebra linear.

Nos exemplos e nos exercícios propostos procurou-se fomentar a escrita da representação paramétrica dos conjuntos a partir da representação cartesiana. Esta foi a forma de procurar mitigar algumas das dificuldades dos alunos reportadas na literatura, ao nível da teoria de conjuntos (Dogan-Dunlap, 2006; Dorier et al., 2000a, 2000b; Dubinsky, 1997).

No terceiro subcapítulo considerou-se o conceito de combinação linear de vetores. Começou-se por revisitar as duas situações anteriores (capítulos um e dois), onde o conceito de combinação linear de vetores foi introduzido precocemente.

A abordagem do conceito continuou em torno de três questões, com o enfoque em procedimentos algoritmos e na interpretação geométrica. Pela via analítica, seguiu-se a opção mais comum de aplicar o método de eliminação de Gauss (ou Gauss-Jordan) sobre matrizes cujas colunas são os vetores dados (Harel, 1997), com o apoio do Scilab para acelerar os cálculos. Pela via gráfica, representaram-se os vetores (de $\mathbb{R}^3$) com o auxílio do Mathematica, de modo a facilitar a interpretação geométrica da situação. Estas três questões foram rotuladas, com o objetivo de serem retomadas e complementadas em cada um dos subcapítulos seguintes, como forma de enfatizar a relação entre os conceitos subjacentes; reportam, respetivamente, à verificação de uma combinação linear e a situações, pela positiva e pela negativa, de um vetor poder ser escrito como combinação linear de outros.

Só posteriormente o conceito de combinação linear de vetores foi formalizado sob a forma de definição. Em diferentes momentos anteriores procurou-se que os alunos construíssem o conceito imagem e agora introduziu-se um conceito definição de combinação linear de vetores no âmbito da linguagem da teoria de espaços vetoriais.

A tarefa quatro, intitulada "A caminho das capitais de distrito (de Portugal)", foi delineada de modo a refletir transversalmente uma aplicação dos conceitos de combinação linear de vetores, subespaço vetorial gerado e base de um espaço vetorial. As diferentes subtarefas foram integradas no momento de exploração destes conceitos, mas com propósitos diferentes. Neste subcapítulo, a primeira subtarefa surge como primeira oportunidade de aplicação e consolidação do conceito.

No subcapítulo seguinte, a aproximação aos conceitos de subespaço vetorial gerado e conjunto de vetores geradores começou na ideia intuitiva de alguns vetores, representados por pontos em diferentes sistemas de coordenadas, poderem ser escritos como combinação linear de dois vetores fixados à partida. Na explanação do caso, acrescentou-se informalmente ao texto expressões como "v_1 e v_2 geram os vetores u e w" ou "qualquer vetor do plano pode ser gerado por estes vetores" e começou-se a desvendar partes do procedimento algorítmico a ser associado àqueles conceitos. Juntamente com a introdução do Teorema 4.1 (sobre o conjunto de todas as combinações lineares ser um subespaço vetorial de um espaço vetorial), esta abordagem inicial culminou com o registo de uma definição formal para os conceitos de subespaço vetorial gerado e de conjunto de vetores geradores.

As três questões suprarreferidas foram revisitadas e complementadas com a procura do subespaço vetorial gerado pelos vetores apresentados. Na direção de se obter uma resposta, procurou-se deixar bem claro os passos do procedimento de cálculo apresentado, nomeadamente a aplicação da definição, os cálculos auxiliares (sem o recurso ao Scilab pela presença de parâmetros) e a resposta com base na interpretação de quando o sistema de equações lineares subjacente admitia solução.

A menção à tarefa novamente, com a inclusão de duas novas subtarefas, manteve o propósito de funcionar como aplicação dos conceitos entretanto abordados. O enunciado das subtarefas não é explícito quanto aos conceitos envolvidos e a aplicar, esperando-se assim que contribuam para uma reflexão mais aprofundada sobre os conceitos de subespaço vetorial gerado e de conjunto de vetores geradores. Quanto aos exercícios colocados a seguir, para além de alguns de aplicação direta destes conceitos, bem como o de combinação linear de vetores (Exercícios 4.9-4.13), optou-se por incluir duas aplicações em situações concretas (Exercícios 4.14 e 4.15).

O modo de introdução e formalização dos conceitos de dependência e independência linear de vetores, no quinto subcapítulo, foi fortemente influenciado pelo trabalho de Dorier

(1995, 1998). Primeiro, parte-se de uma definição dos conceitos mais intuitiva e que aplica implicitamente o conhecimento sobre o conjunto de vetores geradores de um subespaço vetorial, para depois se procurar um conceito unificador e generalizador, consequentemente mais formal e surpreendentemente mais prático.

A condição necessária e suficiente para que alguns vetores sejam "desnecessários" para gerarem um subespaço vetorial é que sejam combinação linear dos restantes. A ideia intuitiva da dependência daqueles vetores levou à primeira definição introduzida no texto sobre os conceitos de dependência e independência linear de vetores. Tal como atrás, as três questões transversais foram revisitadas, nas quais se procurou aplicar a definição, mas com um propósito em mente: mostrar a morosidade da verificação de os vetores, um a um, serem combinação linear dos restantes; expor a primeira tentativa de escrever o vetor nulo como combinação linear dos vetores em apreço e atender aos escalares serem ou não todos nulos.

"Depois de alguns exemplos", conclui Dorier (1998), "é fácil explicar aos alunos que seria melhor haver uma definição segundo a qual todos os vetores desempenhassem o mesmo papel" (p. 152). O Teorema 4.2 aparece no texto para dar forma a esta pretensão, formalizando os conceitos de dependência e independência linear de vetores.

Com o Exemplo 4.9, aplicou-se aquele teorema a conjuntos de vetores de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$, apresentando-se um procedimento de cálculo e a interpretação geométrica com recurso ao Mathematica. Relativamente aos exercícios, assinala-se o Exercício 4.19, onde se retomou o circuito elétrico da tarefa do capítulo dois – "Ponte de Wheatstone" – para a aplicação destes conceitos na procura de uma justificação para a possibilidade de o sistema de equações lineares adstrito à aplicação das leis de Kirchhoff poder conter entre seis a oito equações.

No estudo dos conceitos de base e de dimensão de um espaço vetorial (último subcapítulo), começou-se com uma abordagem de natureza prática, com vista a indiciar informação relevante sobre estes conceitos. Por um lado, a última subtarefa da tarefa "A caminho das capitais de distrito" sugere a atenção na cardinalidade de conjuntos "especiais" de vetores. Por outro, uma das questões transversais que têm vindo a ser exploradas dita que os elementos daqueles conjuntos "especiais" têm que formar um conjunto de vetores independentes e gerar o espaço vetorial.

Do aproveitamento destas duas situações resultaram dois conceitos que são complementares aos conceitos de dependência e independência linear de vetores e de vetores

geradores, segundo os seguintes resultados fundamentais: um conjunto maximal de vetores linearmente independentes ser um conjunto minimal de vetores geradores; todos estes conjuntos que se possam constituir terem o mesmo número de elementos (Dorier, 1998).

Por último, o Teorema 4.4, relacionando ambos os conceitos quando a cardinalidade do conjunto de vetores que compõem a base é igual à dimensão do espaço vetorial, proporcionou a economia de ser suficiente aludir ao conceito de independência linear (a opção exemplificada no texto por entender-se ser mais rápida) ou ao conceito de conjunto de vetores geradores. Quanto aos exercícios propostos, são de aplicação direta (Exercícios 4.21 e 4.22) e de reflexão sobre a natureza e interligação dos conceitos adstritos aos últimos quatro subcapítulos, com questões de "Verdadeiro" e "Falso" (Exercício 4.23).

5 Análise da implementação do desenho de ensino

> *"Since teaching practice has a complex and holistic nature, we need to gather multimodal data and organize and transform them in order to construct an insightful and integrated picture of what happens in the classroom."*
>
> (Lopes et al., 2014, p. 433)

Este momento da investigação, referente à fase de observação do ciclo de investigação-ação, consiste na análise de conteúdo (Bardin, 1977/1995) das narrações multimodais (Lopes et al., 2010, 2014).

Pretende-se aferir sobre as práticas de ensino conseguidas pelo professor na implementação de um desenho de ensino guiado por um texto de álgebra linear, construído para o efeito (Apêndice B), e obter informações que possam contribuir para a resposta à questão de investigação colocada.

A categorização é *open-code*, guiada por sete dimensões que resultaram do enquadramento teórico (Capítulo 2), e auxiliada pelo *software* de análise qualitativa NVivo. As dimensões correspondem aos sete indicadores do estudo formalizados, respeitantes às principais recomendações didáticas apontadas na literatura: uso da tecnologia; abordagem matricial; exploração de tarefas e aplicações da álgebra linear; conhecimento dos pré-requisitos; interligação dos conceitos de álgebra linear; alcance do formalismo; atenção nas linguagens e múltiplas representações dos conceitos.

Do conjunto das dezasseis aulas relativas à implementação do desenho de ensino, escolheram-se cinco para a construção das respetivas narrações multimodais (Apêndice C). A aula a que se refere cada uma das narrações multimodais, no contexto global das aulas e

sequência dos assuntos, bem como os conteúdos e conceitos abordados e o número de episódios, aparecem sintetizados na Tabela 5.1. O critério de escolha destas aulas recaiu unicamente na representatividade e predominância dos indicadores do estudo.

Tabela 5.1: Narrações multimodais por aula, conteúdo/conceitos e número de episódios

Aula	Narração multimodal	Conteúdo/Conceitos	Nº de episódios
1		Linguagem das matrizes.	
2	**NM_1**	**Linguagem das matrizes; Operações com matrizes: adição e multiplicação por um escalar; multiplicação.**	**3**
3		Matriz ortogonal e matriz inversa de uma matriz invertível; Aplicações das matrizes.	
4		Introdução aos sistemas de equações lineares.	
5	**NM_2**	**Sistemas de equações lineares: métodos de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan.**	**4**
6		Resolução de sistemas de equações lineares.	
7	**NM_3**	**Sistemas de equações lineares: resolução de problemas.**	**3**
8		Sistemas de equações lineares: resolução de problemas; Determinação da matriz inversa de uma matriz invertível.	
9	**NM_4**	**Matriz inversa de uma matriz invertível: procedimentos de cálculo.**	**5**
10		Determinantes e propriedades; Cálculo de determinantes: teorema de Laplace.	
11		Teorema de Laplace; Determinação da matriz inversa de uma matriz invertível pelo método da matriz adjunta.	
12		Sistemas de Cramer e regra de Cramer; Espaços vetoriais.	
13		Espaços vetoriais; Subespaços vetoriais de um espaço vetorial.	
14	**NM_5**	**Combinação linear de vetores; Subespaço vetorial gerado.**	**4**
15		Subespaço vetorial gerado; Dependência e independência linear de vetores.	
16		Dependência e independência linear de vetores; Base e dimensão de um espaço vetorial.	

Nos subcapítulos seguintes, organizados segundo as dimensões, são apresentadas as subdimensões e as categorias emergentes, bem como a sua breve descrição e correspondente análise. Em cada um dos subcapítulos aparecem tabelas que sintetizam as categorias e a respetiva codificação e outras que incluem excertos das narrações multimodais que comprovam

as evidências associadas às diferentes categorias. Os exemplos e os exercícios citados nos excertos continuam a seguir a numeração com que são apresentados no texto de álgebra linear (Apêndice B).

5.1 Dimensão *Uso da tecnologia*

Uma primeira passagem pelas cinco narrações multimodais conduziu à identificação de 115 unidades de registo (Bardin, 1977/1995) relacionadas com o uso da tecnologia. Este trabalho inicial levou à constatação, num primeiro momento, de que era preciso atender a dois aspetos: quais os recursos tecnológicos usados pelo professor e pelos alunos (Recursos tecnológicos convocados); e no caso particular do recurso aos diferentes tipos de *software*, para quê ou com que objetivos eram usados (Função do *software*) (Tabela 5.2).

Tabela 5.2: Subdimensões e categorias emergentes (*Uso da tecnologia*) e respetiva codificação

Dimensão: *Uso da tecnologia*			
Subdimensões	**Categorias**		
Recursos tecnológicos convocados			
	Videoprojetor		**R-v**
	Software		**R-s**
	Calculadora		**R-c**
Função do *software*			
	Descobrir novos conceitos		
		Natureza visual	**Fs-d-nv**
		Natureza numérica	**Fs-d-nn**
	Clarificar aspetos teóricos		
		Natureza visual	**Fs-cl-nv**
		Natureza numérica	**Fs-cl-nn**
	Calcular		
		Economia de tempo	**Fs-ca-et**
		Complexidade de cálculos	**Fs-ca-cc**
		Verificação de resultados	**Fs-ca-vr**
	Antecipar		**Fs-a**
Atitudes face ao uso da tecnologia			
	Iniciativa		**A-i**

Entusiasmo	**A-e**
Valorização	**A-v**
Desalento	
Dispêndio de tempo	**A-d-dt**
Dificuldades de implementação	**A-d-di**
Erros de utilização do Scilab	**A-d-e**

Quando se procurou continuar a análise, guiada por estas duas subdimensões, surgiu a necessidade de se criar uma terceira, pela constatação de aspetos de natureza comportamental relativos ao professor e aos alunos e relacionados com o recurso à tecnologia em sala de aula, em particular do computador. Pressupondo-se a relevância destes aspetos, a decisão passou por enquadrá-los na subdimensão denominada *Atitudes face ao uso da tecnologia*.

As categorias emergentes e assinaladas na Tabela 5.2, quanto a cada uma das subdimensões, incidem maioritariamente em ações adstritas ao professor, embora algumas categorias reflitam o ponto de vista dos alunos. Nas secções e subsecções seguintes são apresentadas as categorias que emergiram em cada uma das subdimensões assinaladas, bem como a sua descrição e correspondente análise. As evidências apresentadas não são exaustivas, mas sim representativas de todas as situações captadas das narrações multimodais e que apontam para as diversas categorias.

5.1.1 Subdimensão R_Recursos tecnológicos convocados

Uma subdimensão relacionada com o uso da tecnologia aponta para o tipo de recursos, não só os utilizados nas aulas, mas também aqueles que em algum momento foram referidos. Na Tabela 5.3 são sintetizadas as categorias relacionadas com os diferentes recursos e a descrição do seu significado.

A utilização do computador é transversal a duas das categorias emergentes. O professor usou o computador em simultâneo com o videoprojetor, ora para projetar excertos do texto de álgebra linear, ora para mostrar a utilização que fazia dos *softwares*; os alunos usaram o computador para trabalhar com o Scilab. Ao contrário da sugestão de LaTorre (1994), tínhamos optado por não incluir a utilização da calculadora gráfica, dada a redundância face à utilização dos diferentes tipos de *software*. No entanto, algumas menções dos alunos ao uso da calculadora gráfica fizeram emergir uma terceira categoria.

Tabela 5.3: Categorias emergentes da subdimensão R, codificação e breve descrição

R_Recursos tecnológicos convocados		
Categorias		**Descrição**
Videoprojetor	**R-v**	O professor usa o computador e o videoprojetor como apoio ao ensino.
Software	**R-s**	O professor e os alunos usam o computador e *software*, consoante o propósito.
Calculadora gráfica	**R-c**	Os alunos sugerem a utilização da calculadora gráfica como alternativa aos diferentes tipos de *software*.

Categorias R-v, R-s e R-c

Face ao que é apontado na literatura, falar-se do uso da tecnologia nas aulas de álgebra linear significa praticamente falar-se do uso do computador com a utilização de *software*. A nossa atenção a esta questão também incidiu na consideração deste recurso, materializada à partida com a preparação de exemplos e de exercícios para serem explorados ou resolvidos com o apoio de *software*.

A Tabela 5.4 reúne um conjunto de categorias relacionadas com a subdimensão R, evidenciando a utilização do videoprojetor como elemento de apoio ao ensino, o tipo de *software* usado e o hábito de utilização da calculadora gráfica por parte dos alunos.

Tabela 5.4: Evidências das categorias R-v, R-s e R-c

Categoria	
Videoprojetor	**R-v**
Software	**R-s**
Calculadora gráfica	**R-c**

Evidências	**Categoria**
O professor dirige-se recorrentemente aos alunos com uma projeção como pano de fundo: "projetei"/ "projetando"/ "[…] projetado(a)"/ etc.: 1. Exemplo; 2. Enunciado/folha de rosto da tarefa/exercício; 3. Imagem; 4. Janela de visualização do GeoGebra; 5. Parte do texto de álgebra linear; 6. Algoritmo; 7. Ambiente (do *software*); 8. Teorema; 9. Resposta; 10. Resolução.	**R-v**
O professor e os alunos usam diferentes tipos de *software*: 1. "[…] voltando ao GeoGebra […]"; 2. "[…] recorri ao Mathematica para ilustrar […]";	**R-s**

3. "[…] fui escrevendo a matriz inicial no Scilab […]"; 4. "[…] certificar-me que os alunos utilizavam corretamente o Scilab".	**R-s**
O professor conversa com um aluno sobre o recurso à calculadora gráfica, equiparando-a aos *softwares* usados nas aulas: "Quando os alunos já estavam a arrumar o material e a sair da sala, o Eduardo aproximou-se do meu lugar com a sua calculadora gráfica na mão. Perguntou-me como utilizar uma das janelas, relacionada com o cálculo matricial. […]. Só depois percebi que ele procurava um comando para encontrar a forma escalonada de uma matriz, pelo que sugeri que procurasse na calculadora gráfica a possibilidade de se escrever cada operação elementar. Acrescentei que no Scilab, com o comando *rref*, se obtinha a matriz na forma canónica reduzida por linhas e procurei incentivar o uso deste *software*. […] Entretanto, o Eduardo […] mostrou-me como já conseguia fazer o traçado gráfico na sua calculadora, equiparando ao que já lhes tinha mostrado com o Mathematica. […] - Pois … no outro dia não conseguia fazer isto. Só que agora vai-se ao Youtube e eles ensinam-nos a fazer certas operações – respondeu o Eduardo."	**R-c** **R-s**

As narrações multimodais desvendaram o estatuto que atribuímos ao computador. Foi um recurso que se articulou com a utilização do videoprojetor e que facultou o uso dos diferentes *softwares*.

Em todas as aulas, na perspetiva do ensino, a projeção na parede anunciava a sequência e a natureza das atividades (R-v). Ora insinuava ou elucidava um aspeto teórico, mostrando um exemplo, um procedimento, uma definição, um teorema, uma imagem obtida no GeoGebra ou no Mathematica, um resultado ditado pelo Scilab, etc.; ora apresentava o trabalho sugerido aos alunos, com enunciados de exercícios e de tarefas.

Também em todas as aulas, pelo menos algum tipo de *software* era utilizado pelo professor, entre o Scilab, o Mathematica ou o GeoGebra (R-s): o Scilab para a computação numérica ou (muito residualmente) simbólica, sendo que em alguns casos o Mathematica também serviu este propósito; o Mathematica e o GeoGebra para a exploração geométrica de alguns conceitos. Por sua vez, em quase todas as aulas, foi proposto aos alunos que recorressem ao Scilab para a realização de cálculos numéricos.

Ao nível dos recursos tecnológicos, a calculadora gráfica também foi lembrada. O excerto do episódio 4.1 da NM2 (Apêndice C) incide num diálogo com um aluno, sobre como a calculadora gráfica podia substituir, em parte, os *softwares* utilizados nas aulas. O professor nunca usou a calculadora gráfica ou fez qualquer referência a apelar ao seu uso. No entanto, este é um recurso familiar aos alunos, estando muito presente ao longo do seu percurso escolar e académico, facto que torna natural a iniciativa deste aluno.

Para alguns alunos a calculadora gráfica fazia parte do material que traziam para a aula, mas cuja função era a de realização de cálculos numéricos simples, fora do âmbito da álgebra linear. Face a este tipo de utilização, a calculadora gráfica não foi vista como recurso tecnológico usado nas aulas.

5.1.2 Subdimensão Fs_Função do *software*

Nesta subdimensão, o processo de criação das categorias foi auxiliado pelo que decorre da literatura na área da didática da álgebra linear, ao nível do papel que o computador e alguns tipos de *software* podem desempenhar. Neste contexto, olhámos para a proposta de Hillel (2001) quanto aos três propósitos de utilização dos CAS: surpreender, face aos resultados obtidos; clarificar aspetos teóricos abordados na aula; investigar fenómenos que induzem novos conceitos. Segundo a nossa interpretação, os dois últimos propósitos são sinónimos da proposta de Carlson et al. (1993): reforçar os conceitos aprendidos e descobrir novos conceitos, respetivamente.

Outros dois aspetos salientados pelos investigadores forneceram também "pistas" na criação das categorias. Por um lado, a exploração da natureza visual de alguns conceitos de álgebra linear, salientada, entre outros, por Sierpinska et al. (1999b), que nós associámos à descoberta de novos conceitos e ao momento posterior de clarificação ou consolidação dos mesmos. Por outro, a exploração de exemplos mais significativos, de acordo com Harel (1997), de onde inferimos a complexidade de cálculos que normalmente está subjacente à resolução de tarefas enquadradas sobretudo em contextos da realidade (Ponte, 2005).

Na Tabela 5.5 são apresentadas as categorias que emergiram quanto à subdimensão em análise, bem como uma breve descrição do seu significado.

Tabela 5.5: Categorias emergentes da subdimensão Fs, codificação e breve descrição

Fs_Função do *software*		
Categorias		**Descrição**
Descobrir novos conceitos		
Natureza visual	**Fs-d-nv**	O professor, por via dos AGD, procura introduzir novos conceitos, explorando a sua natureza visual.
Natureza numérica	**Fs-d-nn**	O professor, por via do Scilab, proporciona situações de introdução de novos conceitos, considerando a sua natureza numérica.

Clarificar aspetos teóricos			
	Natureza visual	**Fs-cl-nv**	O professor, por via dos AGD, procura consolidar e esclarecer conceitos, explorando a sua natureza visual.
	Natureza numérica	**Fs-cl-nn**	O professor, por via do Scilab, desenvolve situações de consolidação dos conceitos, considerando a sua natureza numérica.
Calcular			
	Economia de tempo	**Fs-ca-et**	Os alunos, mas também o professor, usam o Scilab para facilitar o desenvolvimento de cálculos auxiliares.
	Complexidade de cálculos	**Fs-ca-cc**	Os alunos usam o Scilab na resolução dos diversos tipos de tarefas para vencer a natureza dos cálculos associados.
	Verificação de resultados	**Fs-ca-vr**	Os alunos, mas também o professor, usam o Scilab para verificar resultados, antes obtidos.
Antecipar		**Fs-a**	O professor usa o *software* para antecipar alguns conceitos.

Categorias Fs-d-nv e Fs-d-nn

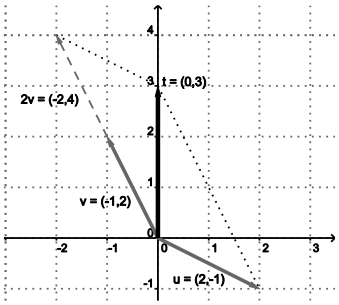
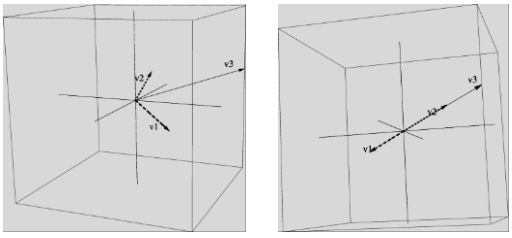
Uma das funções que procurámos extensivamente atribuir aos diferentes tipos de *software* considerados – Scilab, Mathematica e GeoGebra – foi a de auxílio no processo de introdução de novos conceitos. As razões que eventualmente podem estar a montante da ocorrência destas categorias estão relacionadas com as estratégias procuradas de introduzir os novos conceitos a partir de situações concretas, deixando para momentos derradeiros a formalização dos mesmos, e de relacionar os novos conceitos com o conhecimento anterior dos alunos.

O Mathematica e o GeoGebra foram utilizados, particularmente, na introdução de conceitos da teoria dos espaços vetoriais. Esta possibilidade é apontada por Sierpinska et al. (1999b), dado os AGD permitirem o "contacto" com os objetos de teorias da álgebra linear mais abstratas como, por exemplo, os espaços vetoriais. A importância que procurámos atribuir aos AGD na introdução de conceitos relativos aos espaços vetoriais justificou a nossa aposta nos espaços vetoriais reais de dimensão dois e três.

De acordo com a Tabela 5.6, a introdução do conceito de combinação linear de vetores é um exemplo captado das narrações multimodais que consubstancia o propósito de introdução de conceitos de álgebra linear segundo a utilização dos *softwares* GeoGebra e Mathematica (Fs-d-nv).

Tabela 5.6: Evidências das categorias Fs-d-nv e Fs-d-nn

Categoria	
Descobrir novos conceitos	
Natureza visual	**Fs-d-nv**
Natureza numérica	**Fs-d-nn**

Evidências	**Categoria**
O professor mostra no GeoGebra como um vetor pode ser obtido a partir da adição de múltiplos de outros dois vetores, por aplicação da regra do paralelogramo: 	
"Centrando a atenção no segundo caso [relacionado com esta figura], que tinha aparecido no contexto da aproximação ao estudo de sistemas de equações lineares, comecei por destacar a escrita similar, sendo que os escalares eram desconhecidos. E usando a representação geométrica dos vetores, recordei quais os valores que teríamos para os escalares *x* e *y*. […] "- Estão a ver, para já, qual é o formato do que é uma combinação linear? É ter um vetor que à custa de outros por ser obtido, desde que … o quê? Se multipliquem os outros por escalares quaisquer, que se podem determinar para dar aquele vetor – concluí eu."	**Fs-d-nv**
O professor desenvolve situações problemáticas com vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ para investigar com o Mathematica a sua posição relativa e daí inferir a possibilidade de um vetor se escrever como combinação linear de outros: "Recorrendo ao Mathematica, mostrei a representação dos três vetores considerados. No início não era evidente que estavam sobre o mesmo plano, mas rodando a figura, ficou claro que os vetores se encontravam sobre o mesmo plano. - Então geometricamente o que é que aconteceu? Se um dos vetores se escreve como combinação linear dos outros, têm ou não que estar no mesmo plano? - Sim – respondeu a Juliana."	**Fs-d-nv**
	
O professor usa o GeoGebra e o Scilab para introduzir as operações com matrizes: 1. "Face à soma dos vetores que eu executei no *software* e à menção que fiz à regra do paralelogramo, os alunos avançaram que o vetor soma resultava da adição das coordenadas respetivas dos vetores, inclusive já falando na soma dos elementos das linhas correspondentes."	**Fs-d-nv**
2. "Isto é o que sabemos … O Scilab fez a multiplicação e deu isto – disse eu, apontando para o resultado da multiplicação que constava no enunciado e que estava projetado. Continuei, afastando a possibilidade de se multiplicarem apenas os elementos homólogos. […]	———

> Quem é que me descreve o procedimento por palavras informais … ou vulgares? […] Há alguém que não sabia a multiplicação e conseguiu aplicar? – insisti eu.
> - … (Silêncio) **Fs-d-nn**
> […]
> Voltando-me para o enunciado […] adiantei que a aplicação do algoritmo subjacente pressupunha uma escolha conveniente da multiplicação entre linhas e/ou colunas das matrizes."

No contexto do estudo dos sistemas de equações lineares, o professor tinha relacionado a resolução de um sistema com duas equações e duas incógnitas com o conceito de combinação linear de vetores. Os vetores associados a cada uma das incógnitas e aos termos independentes, representados no GeoGebra, sugeriam a combinação linear deste em função daqueles, ou como o vetor dos termos independentes poderia ser obtido a partir dos restantes.

Na procura da formalização do conceito de combinação linear de vetores, o professor começou por rever aquela situação representada no GeoGebra, procurando valorizar a interpretação geométrica do conceito (Fs-d-nv). Seguiu-se a exploração de três questões (Figura 5.1), onde se continuou a promover a interpretação geométrica do conceito de combinação linear de vetores, agora com o recurso ao Mathematica.

A possibilidade criada com a utilização do Mathematica na exploração destas questões foi a verificação, por via da rotação das imagens inicialmente obtidas, de os vetores implicados pertencerem ou não ao mesmo plano e, consequentemente, concluir-se sobre determinado vetor poder ser escrito ou não como combinação linear de outros. Esta conclusão começou logo a surgir com a exploração da questão inicial. Tendo-se concluído a partir da expressão apresentada que o vetor v_3 era combinação linear dos vetores v_1 e v_2, os alunos observaram que os vetores pertenciam ao mesmo plano, começando-se assim a desvendar a condição geométrica para um determinado vetor ser combinação linear de outros vetores.

Considere-se os seguintes vetores de $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}; v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; v_3 = \begin{bmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Q_1: Mostrar que $v_3 = 2v_1 + 3v_2$.

Q_2: Verificar se o vetor $u = \begin{bmatrix} -1 \\ -10 \\ 3 \end{bmatrix}$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores v_1, v_2 e v_3.

Q_3: Verificar se o vetor $w = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$ pode ser escrito como combinação linear dos vetores v_1, v_2 e v_3.

Figura 5.1: Excerto do texto de álgebra linear (Apêndice B, pp. 183-187)

Outro caso que valida a categoria Fs-d-nv está relacionado com a introdução das operações de adição de matrizes e de multiplicação de uma matriz por um escalar.

A partir de dois vetores representados no GeoGebra e ligando as coordenadas dos vetores à possibilidade de escrita como matrizes coluna, foi possível conduzir os alunos à conclusão de que, tal como a adição de dois vetores é ainda um vetor, com a adição por coordenadas correspondentes, também a adição de duas matrizes resulta numa matriz de igual dimensão, com a adição dos elementos homólogos. De igual forma, foi introduzida a operação de multiplicação de uma matriz por um escalar (Fs-d-nv): se a multiplicação de um vetor por um escalar resulta num novo vetor, também a multiplicação de uma matriz por um escalar resulta numa nova matriz.

Mesmo com a associação da multiplicação de matrizes ao conceito de produto interno, não foi claro para os alunos, pelo menos à partida, sobre como alcançar o produto das duas matrizes anunciado e conseguido por meio do Scilab (Fs-d-nn). Deste modo, em termos da formalização de um algoritmo para a multiplicação de matrizes, questiona-se a estratégia seguida e a utilidade do *software*. No entanto, pareceu ser uma vantagem conseguir-se logo no início comprovar que a multiplicação de duas matrizes não se processa pela multiplicação dos elementos homólogos. Adicionalmente, pelo tipo de matrizes consideradas, bem como pelo resultado obtido com o Scilab e acrescentado ao enunciado da tarefa, também foi possível estabelecer, à partida, que a multiplicação de matrizes não requer a obrigatoriedade de estas terem a mesma dimensão.

Categorias Fs-cl-nv e Fs-cl-nn

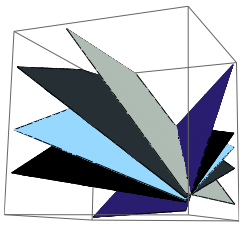
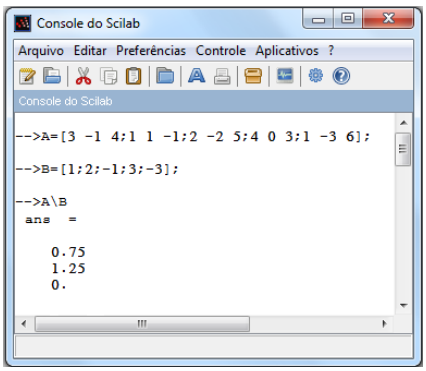
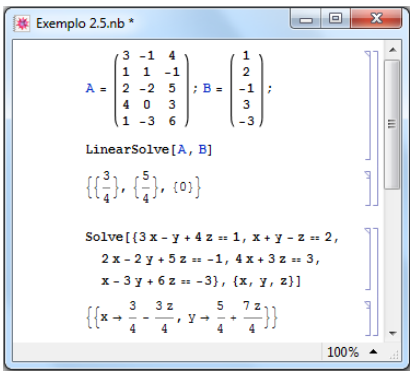
Tal como para a descoberta de novos conceitos (categorias Fs-d-nv e Fs-d-nn), também procurámos, com o auxílio do GeoGebra, Mathematica e Scilab, clarificar alguns dos conceitos de álgebra linear abordados (categorias Fs-cl-nv e Fs-cl-nn). Aqui, o termo clarificar é visto por nós como sinónimo de consolidar, esclarecer ou exemplificar. Temos, portanto, um leque de categorias que se localizam a montante e a jusante do momento de formalização dos conceitos, respetivamente, e onde o papel dos *softwares* utilizados tem a ver com interpretar ou compreender processos, por via da exploração visual ou numérica, e não com obter produtos, por via da estrita realização de cálculos.

Segundo as evidências destacadas nas duas tabelas seguintes (Tabela 5.7 e Tabela 5.8), as duas categorias relacionadas com a clarificação de aspetos teóricos emanam da utilização de

software, segundo a opção pela visualização (Fs-cl-nv), ou segundo a opção pela exploração numérica (Fs-cl-nn).

Tabela 5.7: Evidências das categorias Fs-cl-nv e Fs-cl-nn

Categoria	
Clarificar aspetos teóricos	
Natureza visual	**Fs-cl-nv**
Natureza numérica	**Fs-cl-nn**

Evidências	**Categoria**
O professor, recorrendo a *software*, procura que os alunos consigam classificar um sistema de equações lineares, a partir da sua resolução pelo método gráfico, e diferenciar os conceitos de solução geral e de solução particular:	
"Abordei […] um sistema de equações lineares com duas incógnitas, mas com um número maior de equações, concluindo que reportava à representação de retas no plano e à sua posição relativa […]. Estendendo ao contexto de um sistema de equações lineares com três incógnitas e um número maior de equações, projetei o seguinte sistema de equações lineares, a par da representação geométrica, no contexto do Exemplo 2.5 […].	
$\begin{cases} 3x - y + 4z = 1 \\ x + y - z = 2 \\ 2x - 2y + 5z = -1 \\ 4x + 3z = 3 \\ x - 3y + 6z = -3 \end{cases}$ 	**Fs-cl-nv**
Comecei por questionar o número de equações: - Cinco – responderam os alunos. - Credo! – reagiu imediatamente a Juliana. […]	
Rodei depois a figura no Mathematica e os alunos disseram que os planos se intersetavam numa reta e que o sistema de equações lineares seria possível e indeterminado. […]	
Em seguida, pedi aos alunos que, recorrendo ao Scilab, escrevessem uma matriz *A*, com os coeficientes do sistema de equações lineares apresentado, e uma matriz *B*, com os termos independentes. […]	
Depois de dizer o comando para a resolução do sistema de equações lineares (A\B), os alunos foram dizendo as soluções obtidas. […]. Recorrendo agora ao Mathematica, mostrei-lhes a solução que obtive e que, apenas por mero acaso, era igual. Consequentemente, estabeleci que, nestes casos, apenas encontrávamos soluções particulares […]."	**Fs-cl-nn**
 	

A partir das narrações multimodais, encontrámos evidências relativas à utilização de *software* na procura da clarificação de aspetos teóricos, como a classificação de sistemas de equações lineares e a interpretação das soluções geral e particular de um sistema de equações lineares possível e indeterminado (Tabela 5.7).

O primeiro caso, quanto à classificação de sistemas de equações lineares, enquadra-se na discussão das limitações dos métodos já conhecidos para a resolução de um sistema de equações lineares, em particular o método gráfico.

Na aula anterior, no âmbito da introdução ao estudo de sistemas de equações lineares, o professor tinha procurado assegurar que os alunos, a partir da resolução de sistemas com duas equações e duas incógnitas e com três equações e três incógnitas, conseguiam relacionar o número de soluções que se podia obter com a classificação e a interpretação geométrica. Para tal, recorreu ao GeoGebra e ao Mathematica para representar exaustivamente as diferentes posições relativas de retas e de planos, respetivamente, recordando o que os alunos já tinham aprendido nos ciclos de ensino anteriores.

Este assunto foi recapitulado no início da presente aula, uma vez que estaria relacionado com as limitações da resolução de um sistema de equações lineares pelo método gráfico e onde a novidade passaria pelo aumento do número de equações lineares. Aquando desta abordagem, os alunos observaram primeiro que um sistema com quatro equações e duas incógnitas era possível e determinado, por visualizarem no GeoGebra as quatro retas correspondentes a intersetarem-se num único ponto (Fs-cl-nv). Noutro caso, observando que os cinco planos se intersetavam numa reta, pela manipulação da imagem correspondente no Mathematica, os alunos concluíram corretamente sobre a classificação do sistema de equações lineares em causa (Fs-cl-nv). Neste contexto, os AGD utilizados permitiram fácil e rapidamente representar ambas as situações e auxiliaram a resolução de sistemas de equações lineares pelo método gráfico, com um número de equações lineares que não era familiar aos alunos.

A resolução deste último sistema de equações lineares, sendo possível e indeterminado, levou à oportunidade de se aprofundar o significado de solução geral e de solução particular. A procura simultânea de uma solução particular com recurso ao Scilab e ao Mathematica, com este *software* aqui a funcionar como CAS, conduziu à obtenção da mesma solução, ao contrário do que se perspetivava e do que normalmente acontece. Esta ocorrência podia induzir em erro que a solução encontrada era a única solução do sistema de equações lineares. No entanto, face ao que tinha sido observado anteriormente no Mathematica, com os planos a intersetarem-se

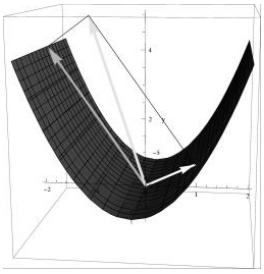
simultaneamente numa reta, estava claro que o sistema de equações lineares teria que ter infinitas soluções. Para vincar este facto, o professor recorreu ao Mathematica (dadas as limitações do Scilab ao nível do cálculo simbólico) para indiciar a solução geral, acrescentando que a solução particular anteriormente obtida correspondia ao caso em que a incógnita *z* era zero.

Sem se resolver o sistema de equações lineares, a utilização do Scilab e do Mathematica permitiu, pela via numérica e algébrica, distinguir a solução geral de possíveis soluções particulares (Fs-cl-nn) e, pela via geométrica inicialmente explorada, garantir que qualquer que fosse a solução encontrada, esta não podia ser única (Fs-cl-nv).

A partir das narrações multimodais, também encontrámos evidências relativas à utilização de *software* na procura da clarificação de aspetos teóricos ao nível da distinção entre a forma escalonada e a forma canónica reduzida por linhas de uma matriz e da definição de subespaço vetorial de um espaço vetorial, por via da exploração e interpretação dos respetivos axiomas (Tabela 5.8).

Tabela 5.8: Evidências das categorias Fs-cl-nv e Fs-cl-nn (cont.)

Categoria		
Clarificar aspetos teóricos		
	Natureza visual	**Fs-cl-nv**
	Natureza numérica	**Fs-cl-nn**

Evidências	**Categoria**
O professor usa o Scilab para distinguir a forma escalonada da forma canónica reduzida por linhas de uma matriz: "Voltando ao Scilab, apresentei o resultado final, destacando o comando utilizado, *rref*, e referi que a forma canónica reduzida por linhas encontrada era única. "	**Fs-cl-nn**
O professor usa o Mathematica para validar geometricamente os axiomas de subespaço vetorial de um espaço vetorial: "Comecei por mostrar a representação geométrica do conjunto H_1 [Exercício 4.7]:  - Passa pelo zero, ali! – disse imediatamente o Hélder, depois de eu salientar a origem do referencial. […] - Hélder, o triplo deste vetor, para onde é que vai? – perguntei eu, apontando para o vetor representado mais à esquerda. […]	**Fs-cl-nv**

- Sai fora da parábola – respondeu o Hélder. - Sai da superfície! – concluí eu. - Ah! – exclamou o Paulino. […] Sobre os conjuntos H_4 e H_5 […] estabeleci que um dos conjuntos seria subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$, aquele que passava pela origem. - Mas como é que sabe que passa pela origem? – perguntou o David. […] Rodando a figura, ficou claro que o plano passava pela origem e que os restantes axiomas se verificavam. Dirigindo-me ao David, pedi-lhe para reparar no efeito de substituir na equação do plano o valor de *d* por 1: - David, repara, se aqui puser o 1, o que vai acontecer? O plano … olha … - Já não passa pela origem – observou o Paulino.”	**Fs-cl-nv**

A clarificação dos conceitos de matriz na forma escalonada e matriz na forma canónica reduzida por linhas (Tabela 5.8) envolveu o recurso ao Scilab (Fs-cl-nn). Na primeira abordagem aos procedimentos algorítmicos, tínhamos decidido introduzir simultaneamente como encontrar a forma escalonada e a forma canónica reduzida por linhas de uma matriz. Mas para o caso da procura da forma canónica reduzida por linhas de uma matriz, em vez de primeiro ser encontrada a forma escalonada e depois procurar-se a forma canónica reduzida por linhas, por meio do desenvolvimento de operações elementares sobre linhas, a opção passou por, coluna a coluna, tornar o pivô “um” e anular não só os elementos abaixo deste, mas também acima.

A partir de um exemplo resolvido, os alunos observaram como podia ser encontrada a forma escalonada da matriz apresentada. A seguir, conjuntamente com os alunos, o professor aplicou o algoritmo de modo a encontrar-se a forma canónica reduzida por linhas, nos termos referidos atrás. O recurso ao Scilab permitiu vincar que a forma canónica reduzida por linhas de uma matriz era única, facto que os alunos podiam verificar por comparação dos resultados obtidos entre eles e o obtido pelo professor (Fs-cl-nn). Paralelamente, ficou estabelecido que, pelo contrário, a forma escalonada de uma matriz nunca era única.

Sobre os axiomas de subespaço vetorial de um espaço vetorial (Tabela 5.8), depois de estes terem sido explorados analiticamente, o recurso ao Mathematica possibilitou complementar a abordagem por via da exploração geométrica. Sem este *software* não teria sido possível a representação precisa dos planos correspondentes às equações apresentadas em cada um dos conjuntos.

Observou-se que, face a cada uma das figuras apresentadas, os alunos foram conseguindo associar o significado geométrico a cada um dos três axiomas conhecidos (Fs-cl-nv). O

Mathematica permitiu ainda esclarecer algumas dúvidas sobre geometria no espaço, que os alunos estudaram no 11.º ano de escolaridade, ao nível da representação geométrica de equações cartesianas do plano.

Categorias Fs-ca-et, Fs-ca-cc e Fs-ca-vr

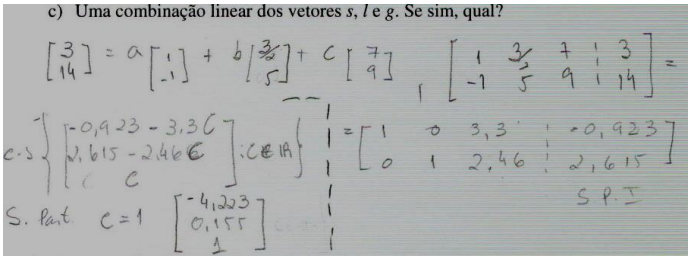
Centradas na utilização do Scilab, emergiram categorias que se relacionam com a realização de cálculos, levados a cabo sobretudo pelos alunos, mas também pelo professor. Observou-se que estes cálculos apareceram em momentos associados a operações entre matrizes, determinação da matriz inversa de uma matriz invertível, procura da forma canónica reduzida por linhas de uma matriz e resolução de sistemas de equações lineares. A função que o Scilab aqui adquiriu é concordante com a observação apontada por Hillel (2001), sobre a relevância dos CAS ao nível da manipulação de matrizes, resolução de sistemas de equações lineares e compreensão de conceitos da teoria de espaços vetoriais.

Imergindo-se nos dados obtidos, observou-se que a utilização do Scilab no auxílio à realização de cálculos serviu propósitos diferentes (Tabela 5.9), entre eles: para diminuir o tempo de resolução dos diferentes tipos de tarefas, resultando em economia de tempo (Fs-ca-et); para facilitar a realização de cálculos mais complexos (Fs-ca-cc); para verificar resultados obtidos (Fs-ca-vr).

Tabela 5.9: Evidências das categorias Fs-ca-et, Fs-ca-cc e Fs-ca-vr

Categoria	
Calcular	
Economia de tempo	**Fs-ca-et**
Complexidade de cálculos	**Fs-ca-cc**
Verificação de resultados	**Fs-ca-vr**

Evidências	**Categoria**
O professor e os alunos consideram o Scilab na realização de cálculos auxiliares subjacentes ao procedimento analítico associado ao conceito de combinação linear de vetores:	
1. "Quando a Juliana me perguntou se tinham que resolver o sistema de equações lineares, eu disse que usaria o Scilab para se ganhar tempo. […] No meu computador, também fui escrevendo a matriz ampliada que os alunos ditaram e disse-lhes para continuarem o exercício com a matriz equivalente que entretanto obtive."	**Fs-ca-et**
2. "A seguir, chamou-me o Hélder: - Tenho que passar isto para equações e resolver? – perguntou o aluno, quanto à última questão, apontando para a matriz ampliada na forma canónica reduzida por linhas obtida a partir do Scilab."	



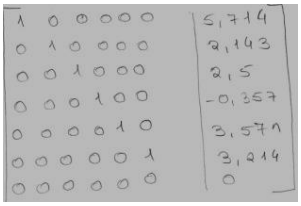
Fs-ca-et

O professor proporciona situações onde, pela natureza dos cálculos envolvidos, se justifica que os alunos recorram ao Scilab:

"Nesta altura encontrava-se a Juliana a escrever no papel a matriz ampliada e o Eduardo a transcrever para o Scilab.

[…]

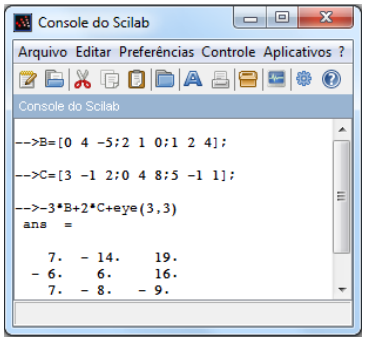
Entretanto passei pelo Grupo 6, onde a Juliana, que já me estava a chamar há algum tempo, mostrou-me a matriz na forma canónica reduzida por linhas […]"



Fs-ca-cc

O professor e os alunos usam o Scilab para verificar resultados obtidos, relativamente a operações com matrizes, procura da forma canónica reduzida por linhas de uma matriz e determinação da matriz inversa de uma matriz invertível:

1.



Fs-ca-vr

2.

"Depois pedi aos alunos que encontrassem autonomamente a matriz equivalente. […] enquanto os alunos continuavam a resolução, fui escrevendo a matriz inicial no Scilab, com o objetivo de a seguir confirmar o resultado."

3.

"Depois, falando para a turma, sugeri a quem já tivesse acabado a resolução, que confirmasse o resultado recorrendo ao Scilab.

– Oh professor, mas eu não sei como é que agora se escreve no Scilab! – referiu logo o Fernando.

- Oh Fernando, já disse hoje … – disse logo eu de uma forma ríspida. – Como é que era? Quem é que ajuda o Fernando? Qual era só … a sigla? – continuei eu, olhando em redor.

- *inv* – ouviu-se na sala, comigo também a repetir."

A categoria Fs-ca-et elicia a opção do professor pelo uso ou sugestão do Scilab para efetuar alguns cálculos auxiliares e, por conseguinte, tornar as resoluções em causa mais rápidas.

Onde tal se verificou, unicamente, foi na resolução de exercícios e da tarefa "A caminho das capitais de distrito", todos em torno do conceito de combinação linear de vetores (NM5).

Um passo do procedimento para estudar a combinação linear de vetores consiste na resolução de um sistema de equações lineares. Umas vezes, é suficiente concluir se o sistema de equações lineares é possível ou não. Outras vezes, tem que se encontrar o conjunto solução quando se procura a (ou uma) combinação linear. Segundo as evidências, o professor permitiu e incitou que os alunos "saltassem" este passo, recorrendo ao Scilab para encontrarem a forma canónica reduzida por linhas da matriz ampliada do sistema de equações lineares que tinham que resolver (Fs-ca-et). Esta opção refletiu que, aquando do estudo dos sistemas de equações lineares, procurou-se que os alunos desenvolvessem a destreza de os resolver por si só, segundo os métodos de eliminação de Gauss ou de Gauss-Jordan, e que agora se dava tal conhecimento como garantido.

Outra categoria emergente sugere a utilização do Scilab para facilitar o trabalho dos alunos ao nível da realização de cálculos mais complexos (Fs-ca-cc). Por norma, a exploração de situações mais significativas, como designa Harel (1997), conduzem à realização de cálculos que podem envolver, entre outros, números grandes ou muito pequenos, números decimais, matrizes de grande dimensão ou sistemas com um grande número de equações e de incógnitas.

A possibilidade de se recorrer ao Scilab levou-nos ao desenvolvimento e proposta em sala de aula de algumas tarefas aplicadas em contexto real, as quais acarretavam o tipo de cálculos mencionado. Foi o que se constatou com a tarefa designada por "Ponte de Wheatstone" (NM2 e NM3). Para a descoberta das intensidades da corrente elétrica, os alunos tinham que passar pela resolução de um sistema com seis incógnitas e entre seis a oito equações. Entendemos aqui por complexidade de cálculos a procura da forma escalonada ou da forma canónica reduzida por linhas da matriz ampliada deste sistema de equações lineares, dada a sua dimensão. O "eventualmente recorrendo ao Scilab" constante no enunciado da tarefa deu pistas quanto ao recurso a este *software*, o qual foi considerado por todos os grupos para a obtenção da matriz na forma canónica reduzida por linhas da matriz ampliada do sistema de equações lineares (Fs-ca-cc).

Outra função que se procurou atribuir ao uso do Scilab ao longo das diferentes aulas, desvendada nas narrações multimodais, foi a da verificação de resultados (Fs-ca-vr). Não foi percetível, a partir da revisão de literatura, a referência a esta possibilidade, mas em relação à qual reconhecíamos o seu potencial. Daí o professor ter procurado criar situações de resolução

de exercícios complementadas com a verificação dos resultados obtidos, pela via da utilização do Scilab.

As evidências alusivas à categoria Fs-ca-vr (Tabela 5.9) referem-se à verificação de resultados por meio do Scilab no contexto de (1) operações com matrizes, (2) procura da forma canónica reduzida por linhas de uma matriz e (3) determinação da matriz inversa de uma matriz invertível.

Um aspeto que se destacou diz respeito ao momento da proposta da utilização do Scilab para a verificação de resultados, que é comum aos três casos. Em cada um deles, o Scilab apareceu para confirmar os resultados obtidos, aquando (1) da exploração do primeiro exemplo sobre operações com matrizes, (2) da primeira concretização do algoritmo introduzido para a procura da forma canónica reduzida por linhas da matriz dada e (3) da primeira aplicação do algoritmo para a determinação da matriz inversa de uma matriz invertível, subjacente ao método de eliminação de Gauss-Jordan.

Categoria Fs-a

Por último, ainda sobre as possíveis funções destinadas ao uso dos diferentes tipos de *software*, emergiu uma categoria relacionada com a antecipação da obtenção de resultados relacionados com conceitos já conhecidos, mas cujos procedimentos analíticos ainda não tinham sido abordados.

A Tabela 5.10 reúne as evidências sobre como o Scilab permitiu tal antecipação (F-a), observando-se ser em torno do conceito de matriz na forma canónica reduzida por linhas e da classificação de sistemas de equações lineares.

Tabela 5.10: Evidências da categoria Fs-a

Categoria	
Antecipar	**Fs-a**

Evidências	**Categoria**
O professor usa o Scilab para obter exemplos de matrizes na forma canónica reduzida por linhas:	
"A seguir, usando o Scilab, mostrei aos alunos como encontrar a forma canónica reduzida por linhas desta matriz […]. Informei os alunos que no momento apenas conseguiam reconhecer se uma determinada matriz estava escrita na forma escalonada ou na forma canónica reduzida por linhas e que num momento posterior iriam aprender a realizar os cálculos, tal como o Scilab o fazia."	**Fs-a**

O professor discute a classificação de um sistema de equações lineares a partir da solução obtida por meio do Scilab e do Mathematica: "Ainda neste exemplo, impliquei os alunos na experiência inicial de resolver um sistema de equações lineares utilizando o Scilab. […] Recorrendo agora ao Mathematica, mostrei-lhes a solução que obtive […]."	**Fs-a**

O primeiro tópico a ser abordado nas aulas, ao qual chamámos "linguagem das matrizes", foi sobre a definição de diversos tipos de matrizes, nomeadamente de matriz na forma escalonada e de matriz na forma canónica reduzida por linhas. Para a explicação destes conceitos, o Scilab permitiu obter exemplos de matrizes na forma canónica reduzida por linhas, sem os alunos terem ainda conhecimento sobre um procedimento que permitisse obter este tipo de matrizes (Fs-a). Para além de auxiliar o trabalho de exemplificação destes conceitos, o Scilab permitiu desvendar, enquadrar e justificar futuras aprendizagens.

Outra possibilidade passou pela obtenção da solução geral e de soluções particulares de um sistema de equações lineares (possível e indeterminado), com a utilização do Scilab e do Mathematica, sem os alunos terem ainda conhecimento do método de eliminação de Gauss (Fs-a). Isto permitiu que ao longo da discussão das limitações dos métodos conhecidos para a resolução de sistemas de equações lineares, que antecedeu a introdução do método de eliminação de Gauss, se tornasse mais fácil e concreta a classificação dos sistemas de equações lineares que iam surgindo, face à obtenção das soluções proporcionada por aqueles *softwares*.

5.1.3 Subdimensão A_Atitudes face ao uso da tecnologia

Para além dos recursos tecnológicos e das diferentes funções atribuídas ao uso dos *softwares* utilizados nas aulas, considerou-se uma terceira subdimensão para enquadrar algumas atitudes observadas no professor e nos alunos relativas ao uso da tecnologia. Entendemos ser um contributo saber-se como o uso da tecnologia nas aulas de álgebra linear pode ser visto pelo professor ou pelos alunos, na medida em que não descortinámos na literatura a abordagem ao uso da tecnologia segundo esta perspetiva.

Na Tabela 5.11 são apresentadas as seis categorias que emergiram quanto às atitudes face ao uso da tecnologia (subdimensão A), acompanhadas por uma descrição sucinta do seu significado.

Tabela 5.11: Categorias emergentes da subdimensão A, codificação e breve descrição

A_Atitudes face ao uso da tecnologia		
Categorias		**Descrição**
Iniciativa	**A-i**	Os alunos, por sua iniciativa e de forma autónoma, recorrem ao Scilab.
Entusiamo	**A-e**	Os alunos demonstram algum grau de satisfação pelo trabalho realizado ou resultados alcançados.
Valorização	**A-v**	O professor procura incutir a utilização do Scilab, destacando algumas potencialidades.
Desalento		
Dispêndio de tempo	**A-d-dt**	As expectativas do uso da tecnologia são goradas por dispêndio supérfluo de tempo.
Dificuldades de implementação	**A-d-di**	As expectativas do uso da tecnologia são goradas por dificuldades técnicas de implementação.
Erros de utilização do Scilab	**A-d-e**	As expectativas do uso da tecnologia são goradas por erros de utilização do Scilab, por parte dos alunos.

Categorias A-i e A-e

As narrações multimodais, de acordo com as evidências apresentadas na Tabela 5.12, fizeram sobressair duas atitudes centradas exclusivamente nos alunos, relativamente ao uso do computador e *software* em sala de aula: iniciativa de utilização do Scilab (A-i) e entusiamo sobre os produtos conseguidos por meio do recurso a este *software* (A-e).

Tabela 5.12: Evidências das categorias A-i e A-e

Categoria	
Iniciativa	**A-i**
Entusiasmo	**A-e**

Evidências	**Categoria**
Os alunos demonstram iniciativa e entusiamo pela utilização do Scilab quando se trata da obtenção da forma canónica reduzida por linhas de uma matriz, quase sempre no âmbito da resolução de sistemas lineares:	
1. "Depois pedi aos alunos para escreverem no caderno a matriz equivalente que se obtinha, uma vez delineada aquela operação elementar. Entretanto, o Abel lançou a questão sobre se o Scilab auxiliava este trabalho."	**A-i**
2. Tarefa "*Ponte de Wheatstone*": "Todos os grupos acabaram por optar pela utilização deste *software* […]" […] "Entretanto, observei no Grupo 6 o entusiamo face à obtenção no Scilab da matriz na forma canónica reduzida por linhas e logo mostraram a alunos de outros grupos o resultado que tinham obtido.	**A-i** **A-e**

[…] A certa altura, o Fernando, fazendo-se ouvir na sala, disse que *«dava os uns todos direitinhos»*."	
3. Exercício 2.15: "Nesta altura, a Juliana reclamava que dava muito trabalho e o Eduardo colocava a questão pertinente sobre a eventual possibilidade de usar o Scilab. Disse-lhe que iria decidir quando se utilizaria o *software*, que não seria neste caso para se treinar a resolução "à mão", mas reiterei as potencialidades daquele, tal como se viu na tarefa terminada atrás ["Ponte de Wheatstone"]. - Mas que aceleramento, fogo! – observou a Juliana sobre o Scilab, sendo corroborada pelo Hélder."	**A-i** **A-e**
4. Problema dos enfeites luminosos: "O Fernando também me perguntou se podia resolver no Scilab, tendo eu dito que não."	**A-i**
5. Tarefa "*À procura das capitais de distrito"*: "Entretanto, ouvi um comentário do Fernando para com um colega, o qual captou a minha atenção: - Oh! … isso vou ver ao Scilab! Achas que vou estar a resolver?"	**A-i**

Sendo o Scilab o único *software* que os alunos usavam nas aulas, é natural que a iniciativa e o entusiamo demonstrado aparecessem associados apenas a este. No entanto, as categorias A-i e A-e emergiram unicamente da procura da forma canónica reduzida por linhas de uma matriz, sendo esta a matriz ampliada de um sistema de equações lineares na maior parte dos casos.

A primeira manifestação da iniciativa dos alunos pela utilização do Scilab (A-i) apareceu aquando da primeira exemplificação dos algoritmos introduzidos para a procura da forma escalonada e da forma canónica reduzida por linhas de uma matriz. Até aí, a experiência de utilização do Scilab centrava-se na realização de operações com matrizes. Mas face ao trabalho que iam realizando em torno do desenvolvimento e aplicação das operações elementares sobre as linhas da matriz, um aluno intuiu a possibilidade de o Scilab facilitar tal trabalho, procurando desde logo saber como.

Em situações posteriores, no âmbito da resolução de tarefas de natureza diversa, os alunos procuraram aferir sobre a possibilidade de recorrerem ao Scilab nos casos em que os enunciados eram omissos em relação a este aspeto, cabendo depois ao professor a decisão de permitir ou não o seu uso. A exceção foi a tarefa "Ponte de Wheatstone", onde estava claro a partir do enunciado que cabia aos alunos decidirem ou não pelo recurso ao Scilab. Todos os alunos optaram por recorrer a este *software* na procura da forma canónica reduzida por linhas de uma matriz com seis a oito linhas e com seis colunas.

O entusiasmo observado face a resultados alcançados com a ajuda do Scilab surgiu no decorrer da resolução da tarefa "Ponte de Wheatstone" (A-e). Resultou, porventura, do facto de os alunos terem-se deparado, pela primeira vez, com uma matriz constituída por um número de linhas e de colunas bem acima do que estavam habituados a ver. Quando encontraram os "«uns» todos direitinhos", isto é, a forma canónica reduzida por linhas da matriz ampliada do sistema de equações lineares que tinham que resolver para responder à tarefa, os alunos viram o caminho aberto para encontrar uma resposta, reconhecendo a ajuda prestada pelo Scilab.

Categoria A-v

Uma categoria emergente da ação do professor foi a valorização em todas as aulas do uso de *software* (A-v), principalmente do Scilab por ser aquele que os alunos usavam. Esta atitude é condizente com a importância atribuída ao uso de *software* na fase de planeamento da investigação e reflete as tentativas do professor para que os alunos reconhecessem o valor desta opção didática.

Como mostra a Tabela 5.13, o professor procurou vincar o papel e a importância do uso de *software* e incutir a sua utilização (A-v), falando em termos das suas potencialidades e oportunidades.

Tabela 5.13: Evidências da categoria A-v

Categoria	
Valorização	**A-v**

Evidências	**Categoria**
O professor fala com os alunos sobre as potencialidades da utilização de *software*, principalmente do Scilab: "tenho repetidamente transmitido a importância", "voltei a insistir na recomendação", "reiterei as potencialidades" [do uso de *software* ao nível de]: 1. Interpretações geométricas; 2. Procedimentos algorítmicos; 3. Situações da aula; 4. Situações de estudo; 5. Ajuda na resolução de exercícios; 6. Verificação de resultados (na aula e em casa); 7. Economia do tempo de resolução.	**A-v**
O professor fala com os alunos sobre as oportunidades de utilização do Scilab: 1. "Sugeri ainda que recorressem ao Scilab na fase descendente da aplicação do método de eliminação de Gauss."	

2. "Concluí o esquema com a referência ao *software* Scilab, dados os comandos que permitem a escrita ou os cálculos associados à maior parte daqueles conceitos e que foram abordados na aula anterior."	**A-v**
3. "[…] aproveitei o momento para fazer a referência sobre como determinar a matriz inversa de uma matriz invertível com recurso ao Scilab."	

A categoria A-v incide sobretudo na utilização do Scilab, dado ser o único *software* que os alunos usavam e também ao qual o professor mais recorreu. No entanto, o professor não esqueceu a importância da utilização dos AGD – GeoGebra e Mathematica – no contexto da sua prática para o auxiliar ao nível da interpretação geométrica de alguns dos conceitos que ensinou.

Sobre as potencialidades de utilização do *software* Scilab, o professor procurou valorizar o seu papel na ajuda prestada na resolução de diversos exercícios, associando-o a uma maior rapidez de resolução ou desenvolvimento dos procedimentos algorítmicos. De uma forma mais incisiva, o professor procurou que os alunos vissem no Scilab o "amigo" próximo, que está sempre presente, e que na aula ou fora dela lhe garante a autonomia de avaliar o trabalho realizado.

A valorização da utilização do *software* Scilab, por parte do professor, incidiu também ao nível das oportunidades que possibilita. Nestas circunstâncias, o professor procurou que os alunos reconhecessem a utilidade deste *software* em situações relacionadas com as operações com matrizes, o desenvolvimento da fase descendente dos métodos de eliminação de Gauss ou de Gauss-Jordan, ajudando na obtenção da forma canónica reduzida por linhas da matriz ampliada do sistema de equações lineares, e a determinação da matriz inversa de uma matriz invertível.

Categorias A-d-dt, A-d-di e A-d-e

De acordo com as evidências apresentadas na Tabela 5.14, as narrações multimodais permitiram observar que se podem enfrentar algumas contrariedades quando se opta por recorrer ao uso da tecnologia em sala de aula. Vemos estas contrariedades como causadoras de um certo desalento no professor, por estarem na origem da quebra do ritmo normal da aula ou por, em algum momento, o uso da tecnologia, em particular de *software*, não corresponder às expectativas criadas.

Tabela 5.14: Evidências das categorias A-d-dt, A-d-di e A-d-e

Categoria	
Desalento	
Dispêndio de tempo	**A-d-dt**
Dificuldades de implementação	**A-d-di**
Erros de utilização do Scilab	**A-d-e**

Evidências	**Categoria**
O professor, em alguns momentos da aula, ensina ou ajuda os alunos na utilização do Scilab: "[…] fui, entretanto, interrompido pelo Abel, com uma dúvida sobre o Scilab. Era a primeira vez que o aluno estava a usar o computador na sala e a sua dúvida era sobre o ambiente de trabalho e como escrever uma matriz, pelo que percebi que ainda não tinha qualquer experiência de utilização do *software*. Apenas lhe disse como escrever uma matriz e aproveitei para me dirigir a todos, esclarecendo-os que não tinham a necessidade de memorizar os comandos, pois estes constavam em situações exemplo no texto de apoio […]."	**A-d-dt**
O professor enfrenta dificuldades de implementação do uso da tecnologia em sala de aula: 1. "E continuei, depois de alterar as cores dos planos, porque a imagem estava pouco nítida." 2. "Dado que não é possível que as aulas decorram em salas com computadores, foi pedido aos alunos, no início do semestre, que trouxessem e usassem os seus computadores portáteis na aula. Os alunos concordaram, mas tem-se registado alguma resistência em trazerem o computador portátil para a aula. […]. Na presente aula nove alunos trouxeram o computador portátil." 3. "Utilizo ainda, como ferramenta auxiliar de ensino, o *software* Mathematica, […], mas quanto ao qual os alunos não têm licença de utilização." 4. "Observei que o Rui e o David, sentados lado a lado, eram os alunos menos empenhados, dada a distração com o computador. Desde o início da aula que já os estava a chamar à atenção, pelo que procurei mostrar todo o meu desagrado com a circunstância."	**A-d-di**
Os alunos comprometem a obtenção de resultados por erros de utilização do Scilab: "Só que erros na escrita das equações lineares e erros de transcrição da matriz ampliada no Scilab ditaram a obtenção de matrizes na forma canónica reduzida por linhas que correspondiam a sistemas impossíveis. Ainda procurei identificar alguns dos erros, até que decidi dizer aos grupos para avançarem com uma resposta concordante com o tipo de matriz que obtiveram."	**A-d-e**

A categoria A-d-dt sugere o desalento do professor face ao tempo que gastou superfluamente. Entenda-se como tempo em que o professor não está a ensinar propriamente tópicos de álgebra linear ou os alunos não estão a avançar na resolução dos desafios propostos, dadas as dúvidas sobre como utilizar o Scilab.

Ao longo de quase todos as aulas objeto de construção da narração multimodal, foi recorrente a interrupção do discurso do professor ou o pedido de ajuda na vertente prática da aula, com os alunos a procurarem saber como realizar algumas operações no Scilab (A-d-dt). Por exemplo, para a obtenção da resposta à tarefa "Ponte de Wheatstone", o professor esteve

quase o mesmo tempo a ajudar os alunos na utilização do Scilab, quanto o que foi necessário para os ajudar na interpretação do trabalho solicitado.

Para além do dispêndio de tempo, o desalento do professor também proveio de algumas dificuldades de implementação da tecnologia (A-d-di), sobretudo relacionadas com a utilização do computador.

Uma das dificuldades é intrínseca à utilização do videoprojetor. A qualidade da imagem projetada, por causa do reflexo, desfocagem ou cores pouco nítidas, originou pontualmente a quebra do ritmo normal da aula. Na maior parte dos casos, a agitação dos alunos era o pronúncio de não estarem a conseguir ver na imagem projetada o que o professor pretendia mostrar ou sobre a qual se estava a referir. No caso das imagens projetadas a partir da utilização do Mathematica, a nitidez das cores no ecrã do computador não correspondia à nitidez da imagem projetada, pelo que foi necessário, por vezes, o professor interromper a aula para proceder à alteração das cores.

Algumas questões de logística estiveram na origem de dificuldades de implementação do uso da tecnologia. Sendo necessário o uso do computador e não havendo salas com computadores disponíveis, a solução passou por o professor pedir aos alunos para trazerem os seus computadores portáteis. Embora a resistência dos alunos para trazer o seu computador portátil tenha diminuído com o avançar das aulas, nunca foi possível alcançar a situação ideal de cada aluno usar o seu próprio computador nas situações proporcionadas pelo professor para o efeito.

A razão de termos apostado no uso do Scilab prendeu-se com este ser de utilização gratuita. Caso os alunos tivessem licença de utilização do Mathematica, teríamos optado unicamente por este *software*, dadas as suas potencialidades ao nível do cálculo numérico e simbólico e da construção de figuras em duas e em três dimensões.

Uma última dificuldade de implementação do uso da tecnologia respeita à forma como os alunos encararam a utilização do computador em sala de aula. Esperava-se que todos os alunos utilizassem o computador quando necessário e que o fizessem de uma forma positiva ou construtiva. No entanto, face à evidência apresentada na Tabela 5.14, observou-se que, por vezes, o professor teve que interromper a aula para avisar os alunos quanto à distração e utilização indevida do computador.

Ainda segundo a Tabela 5.14, a categoria A-d-e indicia o desalento do professor face às expectativas criadas em torno de algumas situações planeadas para o uso de *software* por parte dos alunos. Na procura de uma resposta à tarefa "Ponte de Wheatstone", o próprio Scilab comprometeu em alguns casos a obtenção dessa resposta, por transcrição incorreta da matriz que tinha muitos "uns" e muitos "zeros". Como consequência, observou-se que alguns grupos obtiveram uma matriz ampliada do sistema de equações lineares na forma canónica reduzida por linhas que apontava para um sistema de equações lineares impossível e não possível e determinado como se esperava.

5.2 Dimensão *Abordagem matricial*

Todas as narrações multimodais evidenciaram a abordagem matricial que delineámos para o ensino de álgebra linear, como alternativa à abordagem axiomática. É um tipo de abordagem que encontra uma das recomendações do LACSG para a reformulação do ensino de álgebra linear (Carlson et al., 1993), por consideração das atuais necessidades do público-alvo e dos avanços tecnológicos. Procurámos seguir a atual tendência de se ensinar álgebra linear a partir do estudo das matrizes, da resolução de sistemas de equações lineares e das aplicações do cálculo matricial (Dorier, 2000; Uhlig, 2003), em detrimento da tradicional abordagem axiomática, a partir do estudo dos espaços vetoriais e das aplicações lineares.

No desenvolvimento do processo de categorização, após uma primeira passagem pelas narrações multimodais, observámos que as evidências destacadas quanto à dimensão *Abordagem matricial* repartiam-se em comprovações da opção pela abordagem matricial (ou em contraste com a abordagem axiomática) e em aspetos consequentes. Tal facto, como apresentado na Tabela 5.15, conduziu à formalização de duas subdimensões: configurações da abordagem matricial (C); fatores motivados pela abordagem matricial (F_m).

Três das categorias assinaladas estão explícita ou implicitamente ligadas a outras dimensões, pelo que importa estabelecer os limites da sua análise. Nos casos da resolução das quatro tarefas e outros problemas em contextos da realidade (F_m-t/p) e do recurso ao *software* (F_m-s), estando relacionadas com as dimensões *Exploração de* t*arefas e aplicações da álgebra linear* (subcapítulo 5.3) e *Uso da tecnologia* (subcapítulo 5.1), respetivamente, apenas são aqui objeto de análise as circunstâncias em que a abordagem matricial motivou ou conduziu à

resolução das quatro tarefas ou dos problemas e proporcionou a utilização do Scilab. No caso da apresentação dos conceitos, apenas é objeto de análise até que ponto cada um refletiu a abordagem matricial e não que estratégias foram adotadas para a sua introdução e formalização, vistas à frente no contexto da dimensão *Alcance do formalismo* (subcapítulo 5.6).

Tabela 5.15: Subdimensões e categorias emergentes da dimensão *Abordagem matricial* e respetiva codificação

Dimensão: *Abordagem matricial*		
Subdimensões	**Categorias**	
Configurações da abordagem matricial		
	Programa/sequência dos assuntos	**C-p/s**
	Apresentação dos conceitos	**C-ac**
Fatores motivados pela abordagem matricial		
	Resolução de tarefas/problemas	**F_m-t/p**
	Recurso ao *software*	**F_m_s**
	Aplicação de algoritmos/procedimentos	**F_m_a**
	Forma de atuação do professor	**F_m-ap**
	Feedback dos alunos	**F_m-fa**

5.2.1 Subdimensão C_Configurações da abordagem matricial

Esta subdimensão relaciona-se mais com aspetos de natureza física e que refletem a concretização da abordagem matricial delineada. De uma forma mais abrangente, reporta ao programa e sequência dos assuntos estabelecida, e mais especificamente, como alguns conceitos de álgebra linear foram apresentados aos alunos.

Na Tabela 5.16 são apresentadas as categorias que emergiram quanto à subdimensão C, acompanhadas por uma breve descrição do seu significado.

Tabela 5.16: Categorias emergentes da subdimensão C, codificação e breve descrição

C_Configurações da abordagem matricial		
Categorias		**Descrição**
Programa/sequência dos assuntos	**C-p/s**	Programa e sequência dos assuntos explorados pelo professor.
Apresentação dos conceitos	**C-ac**	Forma de apresentar conceitos de álgebra linear que reflete a opção pela abordagem matricial.

Categoria C-p/s

No desenvolvimento do programa, orientámo-nos pelo sugerido pelo LACSG numa das suas recomendações para a reformulação do ensino de álgebra linear, segundo a qual se deveria considerar para um primeiro curso de álgebra linear a forma *matrix-oriented course*.

Resumidamente, o programa sugerido pelo grupo incluía operações com matrizes, sistemas de equações lineares, determinantes, propriedades de $\mathbb{R}^n$, valores próprios e vetores próprios e ortogonalidade (Carlson et al., 1993). No nosso caso, respeitámos esta ordem dos temas, seguimos algumas sugestões de tópicos a abordar em cada um dos temas e, dado o número de aulas que tínhamos para a implementação do desenho de ensino, reduzimos o programa até ao estudo dos espaços vetoriais.

Segundo as evidências apresentadas na Tabela 5.17, o professor cumpriu o programa previsto, respeitando a sequência dos assuntos pré-estabelecida.

Tabela 5.17: Evidências da categoria C-p/s

Categoria	
Programa/sequência dos assuntos	**C-p/s**

Evidências	**Categoria**
Programa e sequência dos assuntos considerada e conseguida pelo professor:	
1. "[…] coloquei inicialmente o termo vetor e referi-me a este como estando subjacente à linguagem das matrizes."	
2. "[…] apresentação e exemplificação de definições básicas sobre matrizes […]"	
3. "A aula continuou com a introdução dos conceitos de matriz escalonada e matriz na forma canónica reduzida por linhas."	
4. "[…] estudo do subcapítulo 1.2 – Operações com matrizes – […]"	
5. "[…] revisão da resolução algébrica e geométrica de sistemas com duas equações e duas incógnitas e de sistemas com três equações e três incógnitas […]"	**C-p/s**
6. "[…] resolução de sistemas de equações lineares, com qualquer número de equações e de incógnitas, no caso, o método de eliminação de Gauss."	
7. "O que é a característica de uma matriz? Que conceito é este da última aula?"	
8. "[…] consolidação da aplicação do método de eliminação de Gauss-Jordan para a determinação de uma matriz invertível […]"	
9. "[…] estudo do último capítulo – espaços vetoriais – depois de terem sido estudados, por esta ordem, os capítulos matrizes, sistemas de equações lineares e determinantes."	

10. "Uma vez explorados os conceitos de espaço vetorial e subespaço de um espaço vetorial na aula anterior, esta aula [...] é continuada com a exploração do conceito de combinação linear […] e a aproximação ao conceito de subespaço vetorial gerado." "[…] recordei que esta designação [combinação linear de vetores] já tinha aparecido atrás." 11. "[…] aproximação ao conceito de base."	**C-p/s**

A divisão do número de aulas por temas não foi prevista por nós à partida. Face ao ritmo imposto e conseguido pelo professor, para aulas com a duração de uma hora e quarenta e cinco minutos, foram dedicadas sensivelmente três aulas para o estudo das matrizes, seis aulas para o estudo dos sistemas de equações lineares, três aulas para o estudo dos determinantes e quatro aulas para o estudo dos espaços vetoriais.

Quanto à sequência dos assuntos, um aspeto que tínhamos definido como essencial era a associação da representação de um vetor, em termos das suas coordenadas, à sua representação como matriz coluna. Logo a seguir à introdução da definição de matriz de dimensão $m \times n$, segundo a ideia de "um quadro retangular de valores" ou "quadro de dupla entrada", ficou estabelecido pelo professor que esta também podia ser vista como representando *n* vetores de $\mathbb{R}^m$.

Como traço da abordagem matricial, o estudo da álgebra linear foi iniciado a partir das matrizes, com a introdução de um conjunto de definições básicas. Entre elas, as definições de matriz na forma escalonada e de matriz na forma canónica reduzida por linhas, definições que podem nem ser consideradas em algum momento quando a opção recai pela abordagem axiomática (Agudo, 1978; Giraldes, Fernandes, & Smith, 1995). Não se tendo estudado anteriormente as aplicações lineares, as operações entre matrizes não decorreram da correspondência com as operações entre aplicações lineares, como sugere a abordagem axiomática, mas da ligação concreta às operações entre vetores.

O estudo dos sistemas de equações lineares continuou o trabalho que os alunos já tinham iniciado em ciclos de ensino anteriores, chegando agora o momento da generalização das técnicas ou métodos conhecidos, segundo a linguagem das matrizes. Assim, o método de eliminação de Gauss foi particularmente associado à resolução de sistemas de equações lineares e o método de eliminação de Gauss-Jordan à procura da matriz inversa de uma matriz invertível. Paralelamente, o conceito de caraterística de uma matriz foi sobretudo associado à discussão de sistemas de equações lineares.

Depois do estudo dos determinantes, surgiu a parte mais "teórica", com o estudo dos principais conceitos da teoria dos espaços vetoriais, quase na totalidade restringidos ao contexto do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. A sequência delineada e seguida pelo professor assentou na proposta de Dorier (1998), sucedendo-se às definições de espaço vetorial e subespaço vetorial de um espaço vetorial, a exploração dos conceitos de combinação linear de vetores, subespaço vetorial gerado (e conjunto de vetores geradores), dependência e independência linear de vetores, base e dimensão de um espaço vetorial. O professor procurou destacar a importância do conceito de combinação linear de vetores, fazendo referências precoces e colocando-o como conceito central para a compreensão dos conceitos subsequentes.

Categoria C-ac

A partir das narrações multimodais resultaram evidências (Tabela 5.18 e Tabela 5.19) da forma como alguns dos conceitos de álgebra linear foram apresentados pelo professor, no seguimento da abordagem matricial e, por contraposição, distanciados da abordagem axiomática. Tais conceitos são: vetor representado como matriz coluna, matriz na forma escalonada/forma canónica reduzida por linhas e operações com matrizes (Tabela 5.18); sistemas de equações lineares, operações elementares sobre linhas de uma matriz, subespaço vetorial de um espaço vetorial e combinação linear de vetores, no âmbito do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ (Tabela 5.19).

Tabela 5.18: Evidências da categoria C-ac

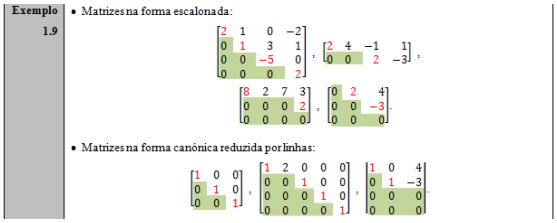
Categoria	
Apresentação dos conceitos	**C-ac**

Evidências	**Categoria**
O professor prepara e associa a notação matricial, desde o início, à representação dos elementos do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$:	
1. "- O vetor *u*, em termos da linguagem das matrizes, como é que eu escrevo? – avancei eu. - Coluna – respondeu logo o David. - Uma matriz linha ou coluna? – insisti eu, percorrendo com o olhar a turma. - Coluna – respondeu a maioria dos alunos, sendo que alguém ainda disse linha. - Coluna! Dois por um! – rematei eu."	**C-ac**
2. "Recordei a nova notação que tinha introduzido na primeira aula de álgebra linear, relacionada com a linguagem matricial. […] Referindo que pretendia introduzir uma notação para vetores num texto sobre um capítulo seguinte [Espaços vetoriais] e que queria seguir a sugestão dos alunos, perguntei-lhes se preferiam usar a nova representação, segundo a linguagem matricial, ou a representação que usavam antes […].	

[Algumas respostas dos alunos:]
- Aquela (como *n*-uplo ordenado) estamos mais habituados a ver!
- Se estamos a aprender matrizes … se está no nosso programa … acho que devíamos … **C-ac**
- Porquê? Eu primeiro tinha escrito daquela maneira, mas depois lembrei-me das matrizes e fiz por lá. "

O professor procura conduzir os alunos ao reconhecimento das formas escalonada e canónica reduzida por linhas de uma matriz e à identificação dos requisitos a partir de exemplos:

"[…] questionei os alunos sobre o que viam e o que lhes parecia a mancha colorida em cada uma das matrizes.



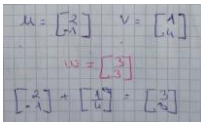
C-ac

[…]

O Hélder ainda acrescentou a ocorrência de zeros, antes de eu, sem dar mais tempo, introduzir a designação intuitiva "em escada". Depois, balizando o caso das matrizes na forma escalonada, avancei com a procura de requisitos para a identificação de matrizes desta natureza."

O professor introduz as operações com matrizes a partir da escrita na forma matricial das operações conhecidas com vetores:

1.



2.

"Depois escrevi no quadro as coordenadas do vetor *u* como matriz coluna, tendo os alunos indicado facilmente as coordenadas do vetor -3*u*." **C-ac**

3.

"Apontando para as matrizes escritas no quadro, referi-me de seguida à necessidade de se articularem dois vetores com o mesmo número de coordenadas e concluí, com base na resposta do Fernando, que se teriam de multiplicar os elementos da primeira linha com os elementos da primeira coluna. Depois acrescentei como tinham de somar, apontando para a definição de produto interno."

Em concomitância com a opção de centrar o estudo da teoria dos espaços vetoriais no espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e seguir a abordagem matricial, o professor procurou, desde o início, tornar natural a escrita de um vetor em termos das suas coordenadas como uma matriz coluna (C-ac), em detrimento da escrita como *n*-uplo ordenado (Tabela 5.18). Ao longo dos diferentes capítulos, as referências a vetores (sobretudo como elementos de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, em articulação com a interpretação geométrica de alguns conceitos) foram concretizadas na escrita de matrizes coluna, cujos elementos eram as respetivas coordenadas.

Esta ação do professor aproximou-se da estratégia delineada de procurar que os alunos mudassem gradualmente o conceito imagem inicial de vetor ("seta" para a representação no

plano ou no espaço e "*u* com setinha" para a representação segundo as coordenadas) até ao estudo da teoria dos espaços vetoriais. Daí que, algumas aulas antes de se iniciar este último capítulo, o professor tenha recriado uma situação de escrita simbólica de um conjunto de afirmações que ditou, envolvendo a referência a vetores (por exemplo, "*A soma do vetor de coordenadas -2 e 1 com o triplo do vetor de coordenadas -3 e 4*"). Segundo os elementos recolhidos (Tabela 5.18), alguns alunos já viam como natural a representação das coordenadas de um vetor na forma matricial, em parte derivado do hábito de trabalharem com matrizes desde o início (C-ac).

Na exploração das definições básicas sobre matrizes, o professor também considerou, como planeado, as definições de matriz na forma escalonada e de matriz na forma canónica reduzida por linhas, por estas não terem conceitos precedentes. No âmbito da abordagem matricial, estas definições apareceram associadas aos métodos de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan (C-ac), mas foram introduzidas num momento inicial e não apenas aquando da abordagem destes métodos.

O professor procurou que os alunos reconhecessem similaridades a partir de um exemplo mostrado com algumas matrizes, como ponto de partida para a identificação dos requisitos que as matrizes na forma escalonada e na forma canónica reduzida por linhas teriam de cumprir. No entanto, a participação e os contributos dos alunos ficaram aquém do esperado pelo professor. A ideia intuitiva de escada que o sombreado destacava surgiu apenas por menção do professor e os requisitos para a identificação das formas escalonada e canónica reduzida por linhas de uma matriz apenas surgiram das pistas ou referências diretas também apresentadas pelo professor.

Quanto às operações com matrizes, o professor procurou que os alunos as deduzissem a partir das operações conhecidas com vetores, com estes representados na forma matricial (C-ac). Se o propósito foi facilmente alcançado para as operações de adição de matrizes e multiplicação de uma matriz por um escalar, o mesmo não aconteceu para o caso da multiplicação de matrizes. Teve que haver uma maior intervenção do professor para que os alunos, no contexto da resposta a uma tarefa, vissem os elementos da matriz produto como entradas "linha por coluna" e a relação desta operação com o produto interno ou escalar. E ainda mais distantes estiveram de conseguir responder autonomamente a uma das subtarefas, relacionada com uma "visão não *standard*" da multiplicação de matrizes, como Carlson (1993) rotula e propõe.

Tabela 5.19: Evidências da categoria C-ac (cont.)

Categoria	
Apresentação dos conceitos	**C-ac**

Evidências	**Categoria**
O professor estabelece, como primeira novidade, a possibilidade de os alunos escreverem os sistemas de equações lineares que conhecem na forma matricial $AX = B$: "[…] deu-se início ao estudo do segundo capítulo, intitulado Sistemas de Equações Lineares, segundo a opção metodológica da revisão da resolução algébrica e geométrica de sistemas com duas equações e duas incógnitas e de sistemas com três equações e três incógnitas, que os alunos já aprenderam em ciclos de ensino anteriores, a par da aproximação à escrita dos sistemas de equações lineares na linguagem matricial."	**C-ac**
O professor introduz as operações elementares sobre linhas de uma matriz em correspondência com as operações entre equações observadas no método de adição ordenada: "Continuei, registando no quadro as operações elementares sobre as linhas de uma matriz, explicando e relacionando-as com as operações sobre as equações observadas no exemplo sobre o método de adição ordenada."	**C-ac**
O professor explora os conceitos de subespaço vetorial de um espaço vetorial, combinação linear de vetores e subespaço vetorial gerado no contexto do espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, considerando a linguagem matricial: 1. "[…] reiterando que se pretendia verificar se era um subespaço vetorial do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$." 2. "[…] mostrei no texto de apoio a escrita seguinte e verifiquei a igualdade: $\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + 1\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix}$ - Ou seja, comecem a ver … qual é o formato do que é uma combinação linear? – perguntei eu e procurando concluir a abordagem. Acrescentei que era possível identificar quem eram os vetores e quais eram os escalares. – Um determinado vetor pode resultar de operações com os outros – disse eu, por último." 3. "- Usando o v_1 e v_2 consigo chegar a qualquer um dos pontos assinalados? Será que existe uma combinação linear para isso? - Existe – foram dizendo os alunos. - Existe! Só que agora não vou estar ali a concretizá-las todas – referi eu. – Como é que consigo fazer este trabalho genericamente? Aqui está o u com aquelas coordenadas e aqui está o v com aquelas coordenadas. Escolham coordenadas para um ponto genérico – pedi eu. - $\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}$ – sugeriu o Fernando. - Isso não é genérico – alertei eu. – $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ para não confundir com a e b, porque temos usado a e b para quê? Para os escalares!"	**C-ac**

O professor distanciou-se da abordagem axiomática ao iniciar o estudo dos sistemas de equações lineares com a revisão da resolução de sistemas com duas equações e duas incógnitas e com três equações e três incógnitas e com a introdução de duas novas representações possíveis (Tabela 5.19): a representação matricial $AX = B$, com A a matriz dos coeficientes das incógnitas, X a matriz das incógnitas e B a matriz dos termos independentes do sistema de

equações lineares; a representação, também segundo a linguagem das matrizes, da escrita do vetor associado aos termos independentes como combinação linear dos vetores associados aos coeficientes de cada uma das incógnitas (C-ac).

As operações elementares sobre linhas de uma matriz não foram deduzidas como um conjunto de operações que não alteram a dependência ou independência das linhas ou colunas de uma matriz ou a sua caraterística, possibilidades que tipicamente a abordagem axiomática recria (como por exemplo, segundo Agudo (1978) ou Giraldes et al. (1995)). A opção passou pela relação com as possíveis operações entre equações de um sistema de equações lineares. No entanto, alguns alunos assumiram que não aprenderam o método de adição ordenada (ou não se recordavam), pelo que as operações elementares surgiram para estes alunos desarticuladas de qualquer outro conceito.

A categoria C-ac, no contexto do ensino dos principais conceitos da teoria dos espaços vetoriais, emanou da ênfase no espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ (e não em qualquer espaços vetoriais abstratos) e da escrita dos vetores e expressões dos diferentes conceitos segundo a linguagem matricial. O professor considerou amplamente exemplos de vetores dos espaços vetoriais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ na exploração dos conceitos e, no seguimento do que já estava estipulado, as expressões associadas aos conceitos foram apresentadas e exemplificadas com vetores escritos na forma de matriz coluna.

5.2.2 Subdimensão F_m_Fatores motivados pela abordagem matricial

A subdimensão F_m reúne um conjunto de categorias que decorreram da opção de exploração dos conceitos de álgebra linear segundo a abordagem matricial. A possibilidade motivada pela abordagem matricial do uso do computador, da resolução de problemas voltados para os interesses e necessidades dos alunos e da ênfase nos procedimentos já aparece largamente mencionada na literatura. O que aparece como elemento novo, a partir da análise, respeita ao impacto que teve na forma de atuação do professor e ao *feedback* dos alunos ao tipo de trabalho realizado.

Na Tabela 5.20 são apr**e**sentadas as categorias emergentes quanto a esta subdimensão, bem como a respetiva codificação e descrição.

Tabela 5.20: Categorias emergentes da subdimensão F_m, codificação e breve descrição

F_m_Fatores motivados pela abordagem matricial		
Categorias		**Descrição**
Resolução de tarefas/problemas	**F_m-t/p**	O professor propõe a resolução de tarefas e de problemas, em parte com linguagem técnica específica, relacionados com a introdução e consolidação de conceitos e em linha com a abordagem matricial.
Recurso ao *software*	**F_m-s**	O professor explora situações associadas à abordagem matricial e que permitem incutir o uso do Scilab.
Aplicação de algoritmos/procedimentos	**F_m-a**	O professor alia a abordagem processual à abordagem matricial.
Forma de atuação do professor	**F_m-ap**	Conjunto de ações levadas a cabo pelo professor, em consonância com a abordagem matricial seguida.
Feedback dos alunos	**F_m-fa**	Conjunto de factos decorrentes da atividade dos alunos, em consonância com a abordagem matricial seguida pelo professor.

Categorias F_m-t/p, F_m-s e F_m-a

Algumas evidências emanadas das narrações multimodais (Tabela 5.21) mostram a aproximação à possibilidade de a abordagem matricial conduzir à proposta de resolução de tarefas e problemas de contexto real, ao uso de *software* e à ênfase nos algoritmos ou procedimentos.

Tabela 5.21: Evidências das categorias F_m-t/p, F_m-s e F_m-a

Categoria	
Resolução de tarefas/problemas	**F_m-t/p**
Recurso ao *software*	**F_m-s**
Aplicação de algoritmos/procedimentos	**F_m-a**

Evidências	**Categoria**
O professor potencia a abordagem matricial com a proposta de resolução de tarefas e de problemas, bem como o recurso ao Scilab:	
1. "Diz aí que fez uma operação, que é a multiplicação, e obteve a matriz que aí está! Isto é o que sabemos … O Scilab fez a multiplicação e deu isto – disse eu, apontando para o resultado da multiplicação que constava no enunciado e que estava projetado."	**F_m-t/p** **F_m-s**
2. "[…] propus que se retomasse a tarefa Ponte de Wheatstone, com a resolução das duas subtarefas restantes. Informei que o método de eliminação de Gauss que os alunos tinham aprendido, auxiliado pelo *software* de cálculo Scilab, facilitaria a resolução de um sistema de equações lineares com um grande número de equações e de incógnitas […]."	

3. "Pretendia aferir a atual capacidade dos alunos quanto à escrita das equações lineares no contexto de uma situação concreta e a aplicação do método de eliminação de Gauss na resolução de sistemas de equações lineares."	**F_m-t/p**
4. "Desvendando o assunto e o contexto da primeira subtarefa, adiantei que tinha a ver com a aplicação do conceito de combinação linear num mapa de Portugal."	
O professor, sempre que possível, aplica algoritmos/procedimentos como meio para facilitar os processos de resolução:	
Algoritmos/procedimentos implementados: 1. Dois algoritmos para a multiplicação de matrizes; 2. Método de eliminação de Gauss; 3. Método de eliminação de Gauss-Jordan; 4. Algoritmo para a determinação da matriz inversa de uma matriz invertível; 5. Procedimento para a investigação da combinação linear de vetores; 6. Procedimento para a determinação do subespaço vetorial gerado por um conjunto de vetores.	**F_m-a**

Com a tarefa desenvolvida para a introdução da multiplicação de matrizes, o professor "negociou" com os alunos qual o algoritmo a adotar (F_m-a), entre as duas possibilidades exploradas. A situação concreta que recriava a possibilidade de inferir algoritmos para a multiplicação de matrizes incluía a matriz produto obtida no Scilab, sugerindo que no futuro este ou qualquer outro tipo de *software* podia ser considerado pelos alunos para a realização deste tipo de operações (F_m-s). Face aos dois algoritmos deduzidos para a multiplicação de matrizes, a opção dos alunos recaiu na multiplicação "linha por coluna" que vulgarmente é ensinada e reproduzida nos livros e quanto à qual Guimarães (1964) afirma que "a formação de C a partir das matrizes A e B é um procedimento matricial intrínseco" (p. 253).

As tarefas e problemas com linguagem específica do curso que os alunos frequentavam (engenharia elétrica) apareceram nas narrações multimodais relacionados com a resolução de sistemas de equações lineares. Uma vez mais, o *software* surgiu como elemento facilitador, o qual, em articulação com a aplicação do método de eliminação de Gauss-Jordan, tornou viável a resolução do tipo de sistemas de equações lineares que académica ou profissionalmente os alunos poderão ter que resolver no futuro (F_m-t/p, F_m-s e F_m-a). Aquelas tarefas e problemas, pelo cariz real, permitiram alargar o trabalho realizado em torno da resolução de sistemas de equações lineares, nomeadamente explorar situações de modelação e obter os próprios sistemas de equações lineares.

As narrações multimodais evidenciaram ainda a forma processual atribuída à resolução de exercícios relacionados com a teoria dos espaços vetoriais, por exemplo, os conceitos de

combinação linear de vetores e subespaço vetorial gerado (F_m-a). O professor procurou tornar estas resoluções num conjunto de passos sequenciais a serem cumpridos. Também relacionado com estes conceitos, o professor procurou com uma tarefa apresentar possíveis aplicações concretas, algo pouco comum nos textos comprometidos com a abordagem axiomática.

Categorias F_m-ap e F_m-fa

A abordagem matricial para o ensino dos conceitos de álgebra linear que se implementou no terreno teve efeito na forma como o professor procurou ensinar ou transmitir a mensagem. Esta ação associada ao professor teve impacto na atitude e trabalho desenvolvido pelos alunos; e vice-versa, pelo *feedback* dos alunos, o professor teve que adequar a sua prática ao contexto ou situações recriadas. As evidências em torno das categorias F_m-ap e F_m-fa (Tabela 5.22) contextualizam-se na exploração dos conceitos de matriz na forma escalonada e matriz na forma canónica reduzida por linhas, na aplicação das operações elementares sobre linhas de uma matriz e na dinâmica de introdução e aplicação de algoritmos ou procedimentos.

Tabela 5.22: Evidências das categorias F_m-ap e F_m-fa

Categoria	
Forma de atuação do professor	**F_m-ap**
Feedback dos alunos	**F_m-fa**

Evidências	**Categoria**
O professor explora com os alunos os conceitos de matriz na forma escalonada/canónica reduzida por linhas, por via da dedução dos requisitos, análise de exemplos, resolução de exercícios e recurso a ideias intuitivas:	
1. "[…] o Fernando perguntou se «podia ser só um zero à direita» […]"	**F_m-fa**
2. "As sugestões avançadas pelos colegas não eram concordantes, pelo que voltei a insistir na referência aos requisitos anteriormente abordados. […]. Quando na resposta à segunda alínea ouvi a Carla dizer que a matriz não estava escrita em nenhuma das formas porque "tem um degrau muito grande", centrei logo a atenção nesta circunstância e repeti para o resto da turma o que a colega tinha dito. Foi uma forma de destacar a ideia informal que minutos atrás tinha lançado e apreciei como foi aproveitada pela aluna para alcançar a resposta correta."	**F_m-ap** **F_m-fa**
Os alunos assimilam a relação das operações elementares sobre linhas com as operações entre equações lineares de um sistema, embora revelando algumas dificuldades de aplicação no início, sobretudo perante matrizes com parâmetros:	
1. "Falando depois da linha que resultava da operação escolhida, o Abel interrompeu-me: - Há uma diferença em relação à soma ordenada, não é? Porque desaparecia uma equação e aí não desapareceu nada!"	**F_m-fa**
2. "Passando na fila da frente, a Juliana aproveitou para esclarecer a seguinte situação: - Acho que estou a pensar numa operação que é impossível fazer! […]. Posso somar?	

- Somar uma com a outra? – perguntei eu, tentando adivinhar a dúvida da aluna.
- Não! Somar um número com uma linha.
- Não percebi! – disse eu num tom hesitante.
- Se eu quiser somar aqui 3. Não posso!? – propôs a Juliana apontando para a segunda linha da matriz e cujo primeiro elemento era -3." **F_m-fa**

3.

"- Como vamos escalonar, professor? Tipo, o α e o β tem que ficar… o α e o β têm que ficar na posição onde estão, então? – perguntou imediatamente o Hélder […]"

O professor centra grande parte do seu trabalho na aplicação de algoritmos:

1.

"Depois de chegarmos ao resultado pretendido para a subtarefa 2, lancei a questão: "Qual é o melhor algoritmo em termos de economia de tempo?

[…]

[…] voltei a repetir a sinalética com as mãos anteriormente usada para exemplificar como se multiplicaria, a partir de agora, duas matrizes."

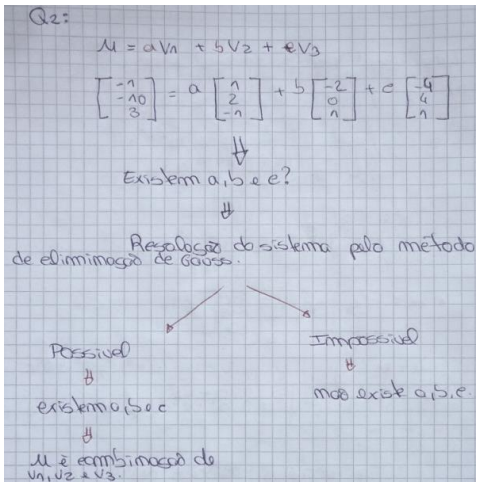
2.

"Rapidamente, questionados por mim, os alunos foram identificando as etapas do trabalho que se seguia: primeiro, "passar para uma matriz ampliada"; segundo, "escalonar"; terceiro, "voltar ao sistema" (ou "logo se vê" na versão da Carla)."

3.

"[…] procedi à revisão de alguns conceitos e procedimentos segundo a construção de um mapa conceptual. Projetei parte do mapa que já tinha construído, contendo três conceitos (sistema de equações lineares, característica de uma matriz e matriz invertível) e a referência a dois procedimentos (métodos de eliminação de Gauss/ Gauss-Jordan). O desafio que lancei aos alunos passava pela correspondência entre os conceitos e procedimentos." **F_m-ap**

4.



Os alunos, por vezes, confundem os algoritmos a aplicar e não os relacionam corretamente com os conceitos subjacentes:

"Quando acrescentei ao esquema uma seta entre as referências sistemas de equações lineares e Gauss e o símbolo [A|B] ouvi uns "ah" de surpresa.

[…]

Eis que o Eduardo coloca uma questão surpreendente, que me fez ver até onde podem ir as confusões dos alunos, em torno dos conceitos e dos procedimentos que ensinei: **F_m-fa**

- Porque é que não põe A barra I?

Depois de perceber que pretendia dizer $[A|I_n]$, disse ao aluno que isso tinha a ver com o procedimento mais recente para a determinação da matriz inversa de uma matriz invertível, relacionado com o método de eliminação de Gauss-Jordan."

Na exploração dos conceitos de matriz na forma escalonada e de matriz na forma canónica reduzida por linhas, o professor acabou por considerar muitos exemplos (F_m-ap). Face às questões colocadas pelos alunos ou sugestões para novos valores e posições dos elementos das matrizes (F_m-fa), o professor foi aliando às suas explicações novos exemplos, ação que ainda complementou com a resolução de alguns exercícios relacionados. Em paralelo e repetidamente, o professor teve que referir os requisitos que conduziam à identificação do tipo de matriz em causa (F_m-ap), devido às confusões observadas entre os dois conceitos.

A opção do professor de procurar que os alunos deduzissem os requisitos a partir das evidências observadas num conjunto de matrizes não correspondeu às expectativas, dadas as sugestões dos alunos terem sido pouco profícuas. Uma estratégia alternativa que o professor considerou foi a introdução das ideias intuitivas de "escada" e do "tipo de degrau", à qual recorreu, por vezes, aquando da ausência de resposta dos alunos (F_m-ap). Esta ideia acabou por ser retida e considerada por alguns alunos nas explicações que procuraram apresentar ao professor e também no diálogo com os colegas.

No início foram recorrentes as confusões entre os conceitos de matriz na forma escalonada e matriz na forma canónica reduzida por linhas. Num momento posterior, no contexto da aplicação dos métodos de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan, algumas dúvidas ainda persistiam, o que obrigou a um novo reforço dos conceitos por parte do professor (F_m-ap).

A relação que o professor estabeleceu entre as operações elementares sobre linhas de uma matriz e as operações entre equações lineares de um sistema foi compreendida pelos alunos (F_m-fa), embora estas últimas tenham sido também novidade para alguns, como referido anteriormente. Segundo uma das evidências da Tabela 5.22, um aluno tenta desenvolver uma conceção própria sobre como se efetuam as operações elementares entre linhas de uma matriz em analogia com o modo de operar com equações lineares de um sistema. No entanto, o aluno destacou a diferença quanto ao processo, aludindo ao cálculo auxiliar que habitualmente se faz no método de adição ordenada, com a soma de parcelas, duas a duas, e não quanto à forma.

Os alunos demonstraram, no início, algumas dificuldades ao nível da escolha de possíveis operações elementares sobre linhas de uma matriz. Com todo o treino de aplicação destas operações proporcionado pelo professor, no contexto da resolução de sistemas de equações lineares e determinação da matriz inversa de uma matriz invertível, os alunos mostraram dominar progressivamente o processo. No entanto, os alunos mostraram estranheza e pouco à

vontade em levar a cabo algumas operações elementares quando as matrizes continham parâmetros, ora no âmbito da discussão de sistemas de equações lineares, ora no âmbito da discussão da caraterística de uma matriz (F_m-fa).

Outras evidências sobre a categoria F_m-ap eliciam a importância que o professor atribuiu aos algoritmos e procedimentos. Manteve ao longo das diferentes aulas um "discurso algorítmico", falando sempre sobre qual o passo a executar e qual o passo seguinte, quer nas suas explicações teóricas, quer no apoio prestado aos alunos na resolução dos exercícios. No caso particular da multiplicação de matrizes, para além de explorar uma situação que permitiu a discussão de qual o melhor algoritmo a aplicar segundo a perspetiva dos alunos, o professor sugeriu-lhes uma forma particular e intuitiva de aplicarem o algoritmo escolhido, em termos de sinalética.

A valorização dos algoritmos e procedimentos por parte do professor refletiu-se ainda ao nível dos registos no quadro, da realização de várias exemplificações e das informações transmitidas sobre o propósito de cada um a anteceder a sua apresentação. Uma forma que o professor encontrou para rever alguns dos algoritmos e procedimentos introduzidos e a que conceitos diziam respeito foi mediante a construção de um mapa conceptual (Figura 5.2).

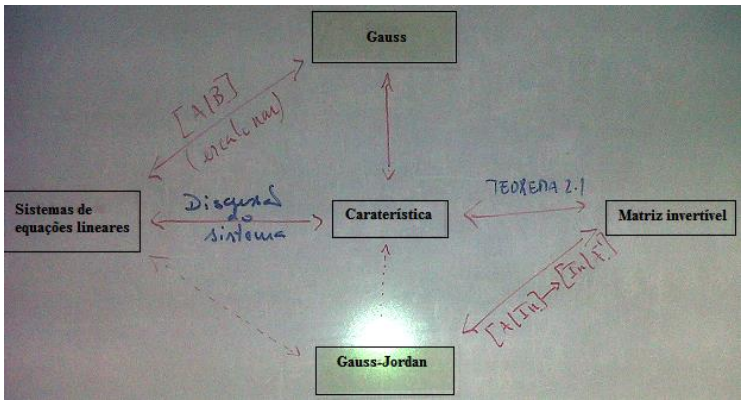


Figura 5.2: Mapa conceptual sobre a relação entre conceitos e algoritmos/procedimentos (NM4)

Na construção deste mapa conceptual evidenciaram-se algumas dificuldades dos alunos para estabelecer relações entre os algoritmos ou procedimentos aprendidos e os conceitos subjacentes (F_m-fa), embora se deva considerar como atenuante a dúvida se efetivamente os alunos compreenderam a intenção do professor e o trabalho solicitado.

Após a introdução simultânea dos métodos de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan, verificou-se alguma hesitação dos alunos sobre qual a melhor opção quanto ao método a utilizar.

Neste caso, o professor foi esclarecendo que quando a resolução era feita inteiramente "à mão", era preferível aplicar o método de eliminação de Gauss na resolução de sistemas de equações lineares; quando recorriam ao *software* Scilab, deveriam ter presente que este *software* conduzia-os segundo o método de eliminação de Gauss-Jordan, uma vez que fornecia a matriz na forma canónica reduzida por linhas da matriz ampliada do sistema de equações lineares.

A confusão maior foi após a associação do método de eliminação de Gauss-Jordan ao algoritmo para a determinação da matriz inversa de uma matriz invertível. O facto de o método de eliminação de Gauss-Jordan ter sido associado à resolução de sistemas de equações lineares e à determinação da matriz inversa de uma matriz invertível levou a que alguns alunos, em situações posteriores, principiassem erradamente a resolução dos exercícios propostos, por confusão entre os conceitos envolvidos e os algoritmos ou procedimentos adequados.

5.3 Dimensão *Exploração de tarefas e aplicações da álgebra linear*

As aplicações da álgebra linear têm sido amplamente referenciadas e sugeridas pelos investigadores em didática da álgebra linear e foram particularmente impulsionadas pelas sugestões do LACSG (Carlson et al., 1993). Face a trabalhos de investigação mais recentes, em torno da exploração de tarefas de modelação nas aulas de álgebra linear, como os de Possani et al., (2010) e Trigueros e Possani (2013), decidimos integrar numa única dimensão a exploração de tarefas e de aplicações da álgebra linear.

Convém salvaguardar que nem todas as tarefas que incluímos na análise desta dimensão refletem as aplicações da álgebra linear. Nestes casos, o interesse passou a residir na análise das ações do professor e dos alunos em torno do trabalho desta natureza. Acrescenta-se que, nos moldes em que planeámos a ação, as aplicações da álgebra linear também ganharam forma com a resolução de problemas que refletem o caráter real.

Esta dimensão relaciona-se com as anteriores, na medida em que a exploração de situações de natureza prática justificam o recurso aos CAS (por exemplo, pela complexidade de cálculos subjacentes) e enquadram-se na abordagem matricial. Dada a análise já realizada destas dimensões, tudo o que for relativo à utilização de *software* e à abordagem matricial no contexto da proposta e resolução de todo o tipo de tarefas não será aqui considerado.

Após uma primeira passagem pelas narrações multimodais, com atenção na resolução das tarefas e dos problemas relacionados com situações reais, o primeiro destaque foi para o possível agrupamento das categorias em duas subdimensões (Tabela 5.23), ora relativas ao teor da linguagem associada e aos conceitos envolvidos – Contexto e aspetos da teoria subjacente (C/T) – ora relativas às ações do professor e dos alunos e algumas dificuldades observadas – Exteriorização da exploração de tarefas e aplicações (E).

Tabela 5.23: Subdimensões e categorias emergentes (*Exploração de tarefas e aplicações da álgebra linear*) e respetiva codificação

Dimensão: *Exploração de tarefas e aplicações da álgebra linear*			
Subdimensões	**Categorias**		
Contexto e aspetos da teoria subjacente			
	Situação real ou científica		**C/T-s**
	Conceitos e aspetos teóricos envolvidos		**C/T-cat**
	Desenvolvimento conceptual		**C/T-dc**
Exteriorização da exploração de tarefas e aplicações			
	Momentos do trabalho do professor		
		Preparação	**E-m-p**
		Condução	**E-m-c**
		Feedback	**E-m-f**
	Potenciais condicionantes da exploração de tarefas e aplicações		**E-pc**

5.3.1 Subdimensão C/T_Contexto e aspetos da teoria subjacente

A subdimensão C/T aparece para destacar os assuntos enquadrados com a resolução das tarefas e dos problemas. Sugere, por um lado, o campo de aplicação dos conceitos e, por outro, os conceitos de álgebra linear que foram relacionados com a exploração de tarefas e de aplicações, a par das possibilidades para o ensino.

A Tabela 5.24 organiza as categorias que emergiram quanto a esta subdimensão e inclui uma breve descrição do seu significado.

Tabela 5.24: Categorias emergentes da subdimensão C/T, codificação e breve descrição

C/T_Contexto e aspetos da teoria subjacente		
Categorias		**Descrição**
Situação real ou científica	**C/T-s**	Identificação das situações recriadas e que informam sobre os campos de aplicação da álgebra linear.
Conceitos e aspetos teóricos envolvidos	**C/T-cat**	Identificação dos conceitos e aspetos teóricos envolvidos na exploração de tarefas e aplicações da álgebra linear.
Desenvolvimento conceptual	**C/T-dc**	Clarificação (ou possibilidade de) de alguns aspetos teóricos, fruto da natureza prática do trabalho realizado.

Categorias C/T-s e C/T-cat

Tal como apresentado na Tabela 5.25, as narrações multimodais permitiram a obtenção de evidências que comprovam em que situações o professor mostrou aos alunos algumas das aplicações da álgebra linear (C/T-s), bem como todos os conceitos considerados (C/T-cat).

Tabela 5.25: Evidências das categorias C/T-s e C/T-cat

Categoria	
Situação real ou científica	**C/T-s**
Conceitos e aspetos teóricos envolvidos	**C/T-cat**

Evidências	**Categoria**
O professor explora alguns campos de aplicação da álgebra linear a partir de uma seleção de contextos, alguns relacionados com o teor de formação dos alunos: [Contextos e relação com os conceitos abaixo, segundo as etiquetas (i)…(vii):] 1. Leis de Kirchhoff/circuitos elétricos (“Ponte de Wheatstone”) (i); 2. Transferência de calor (ii); 3. Fluxo de tráfego (iii); 4. Lei de Hooke (iv); 5. Codificação/descodificação de mensagens (Criptografia) (v); 6. Problemas de produção (vi); 7. Mapas (Geografia) (vii).	**C/T-s**
O professor associa alguns conceitos de álgebra linear à exploração de tarefas e aplicações nos contextos referidos, aproveitando ainda a situação para a introdução de elementos relacionados da teoria: 1. Multiplicação de matrizes: “Neste momento, aproveitei para introduzir a condição necessária para a operação de matrizes estar bem definida.” “[…] concluí, com base na resposta do Fernando, que se teriam de multiplicar os elementos da primeira linha com os elementos da primeira coluna. Depois acrescentei como tinham de somar, apontando para a definição de produto interno.” 2. Escrita de um sistema de equações lineares na forma matricial $AX = B$ (i); 3. Representação de um modelo sob a forma de um sistema de equações lineares (i), (ii), (iii), (vi);	**C/T-s** **C/T-cat**

4. Resolução de um sistema de equações lineares pelo método de eliminação de Gauss/Gauss-Jordan (i), (ii), (iii), (vi); 5. Matriz inversa de uma matriz invertível (iv), (v); 6. Combinação linear de vetores (vii).	**C/T-s** **C/T-cat**

As aplicações da álgebra linear exploradas pelo professor implicaram maioritariamente a resolução de sistemas de equações lineares por via da aplicação do método de eliminação de Gauss (C/T-s). Principiando com a tarefa "Ponte de Wheatstone" e sendo extensível a todos os casos restantes, o objetivo passou por conduzir os alunos a depararem-se com sistemas com um elevado número de equações e de incógnitas, de modo a tornar a aplicação do método de eliminação de Gauss como a melhor estratégia a adotar.

Uma vicissitude da associação da resolução de sistemas de equações lineares a situações concretas ou reais foi a necessidade de se encontrarem as próprias equações que modelavam a situação apresentada. Este foi um trabalho que o professor colocou a cargo dos alunos com a tarefa "Ponte de Wheatstone", com o problema de produção e com a resolução de dois exercícios (Exercício 2.17 e Exercício 2.19) (C/T-cat).

Outros conceitos onde o professor procurou mostrar possíveis aplicações foram o de matriz inversa de uma matriz invertível, com ligações à Física e à Criptografia, e o de combinação linear de vetores, em torno do desenvolvimento da tarefa "A caminho das capitais de distrito" (C/T-s). Aqui o professor procurou conduzir os alunos à associação entre o conceito de combinação linear de vetores e a ideia intuitiva de possíveis locais a alcançar no mapa, a partir de direções pré-estabelecidas.

A tarefa de introdução da multiplicação de matrizes permitiu, aquando da discussão, que o professor aproveitasse a oportunidade para ir referindo alguns aspetos teóricos adstritos a esta operação, nomeadamente a condição para estar bem definida e a forma como se processava uma das possibilidades (a mais comum) de multiplicar duas matrizes (C/T-cat).

No desenvolvimento do texto de álgebra linear procurou-se que as aplicações fossem também ao encontro das necessidades dos alunos e, por isso, que refletissem o teor do curso (engenharia elétrica). Observou-se, a partir das narrações multimodais, que o professor atendeu a essa questão, embora sem preponderância face a outro tipo de aplicações da álgebra linear, dado apenas eliciar a linguagem específica do curso a tarefa "Ponte de Wheatstone" e o problema de produção (de enfeites luminosos).

Categoria C/T-dc

Para além das categorias C/T-s e C/T-cat, emergiu das narrações multimodais uma terceira categoria (C/T-dc), cujas evidências estabelecem a possibilidade de se melhorar a compreensão de conceitos e processos (Tabela 5.26).

Tabela 5.26: Evidências da categoria C/T-dc

Categoria	
Desenvolvimento conceptual	**C/T-dc**

Evidências	**Categoria**
Os alunos, confrontados pelo professor, inferem o algoritmo para a multiplicação de matrizes conceptualmente mais significativo e eficiente em termos de tempo: "- Ah … vou é perguntar-vos qual é o melhor algoritmo? … qual é o que tem maior economia de tempo, porventura? - O primeiro – disseram logo alguns alunos. - O primeiro ou o segundo? – insisti eu. - O segundo – ouvi alguém dizer. - Fogo professor, este é quase impossível – desabafou a Carla, referindo-se ao segundo algoritmo. - Claro que é o segundo – disse o Fernando, contradizendo-se. - O segundo? … este é mais rápido? – perguntei eu ao Fernando, por ter mudado de opinião. - Mas pelo menos é mais seguro – disse o Eduardo, sem eu saber a qual se estava a referir. - O primeiro! … o primeiro é muito mais rápido! – defendia a Carla, voltando-se para os colegas que a contrariavam. - Têm liberdade … escolham o que quiserem! – disse eu, encerrando a discussão."	**C/T-dc**
Os alunos, a partir da resolução de uma tarefa, estabelecem a relação entre a notação na forma matricial de um sistema de equações lineares e a escrita das equações lineares do sistema na forma canónica: 1. "[…] tendo ainda tempo para ouvir o Fernando a questionar o colega do lado se realizar este tipo de trabalho é que significava escrever uma equação na forma canónica." 2. "[…] observei que algumas equações lineares não estavam escritas na forma canónica. No entanto, estavam a colocar no Scilab os coeficientes das incógnitas de uma forma correta. Perante a minha questão sobre tal opção, os alunos rapidamente concluíram que se tivessem escrito o sistema de equações lineares na forma canónica, este processo seria mais rápido."	**C/T-dc**
Os alunos, no contexto da resolução de um problema, desenvolvem a atitude crítica face aos resultados obtidos: 1. "Achei curioso que, a certa altura, alguns alunos estranharam a obtenção de linhas nulas na forma escalonada da matriz." 2. "O Edgar, […], chamou-me a seguir para noticiar a sua surpresa pela obtenção de linhas nulas. – Já dei cabo disto tudo! – disse o aluno. Vendo que estava correto apenas lhe perguntei onde colocar as linhas nulas, segundo a definição de matriz escalonada […]."	**C/T-dc**
Os alunos, no contexto da resolução das tarefas e de problemas, desenvolvem a atitude crítica quanto ao método mais adequado a considerar na resolução de sistemas de equações lineares: 1. "Quando o Fernando me questionou se tinha que por na "forma escalonada reduzida por linhas", eu alertei que isso não existia. Ou era uma forma, a escalonada, ou a outra, a reduzida por linhas.	**C/T-dc**

- Qual achas que precisas? – perguntei eu.
- Reduzida por linhas.
- Para resolver um sistema? Olha o nosso esquema, ali – disse eu apontando para o esquema construído no quadro, que ainda não tinha apagado.
- Também dá na escalonada.
- Pronto! Chega! – disse eu.
- Mas se pusesse na reduzida por linhas sabia logo qual era o *x* …" **C/T-dc**

2.

"Sugeri ao Manuel que ponderasse como resolver um sistema de equações lineares. Tinha reparado que o aluno tinha seguido o método de eliminação de Gauss na primeira questão, escrevendo a matriz ampliada na forma escalonada. Como o sistema tinha duas equações, mas apenas uma incógnita, dei a entender que havia uma opção mais rápida."

Segundo as evidências, a proposta de resolução das tarefas e a consideração de possíveis aplicações dos conceitos contribuíram para o desenvolvimento das aprendizagens. Constatou-se que os alunos atribuíram significados a aspetos matemáticos que, por vezes, são dados como adquiridos pelo professor ou não são captados na resolução dos exercícios ditos de rotina. Ou ainda que apenas são despoletados pela situação real e concreta em si.

Um dos exemplos foi a surpresa e aparente incompreensão da obtenção de linhas nulas no processo de obtenção da forma escalonada ou reduzida por linhas da matriz ampliada de um sistema de equações lineares.

Quer na tarefa "Ponte de Wheatstone", quer no problema de produção, e caso os alunos respondessem corretamente, iriam encontrar linhas nulas na forma escalonada ou na forma canónica reduzida por linhas da matriz ampliada do sistema de equações lineares em causa. A dúvida apenas surgiu no segundo caso, o que nos leva a pensar em possíveis razões: na tarefa, os alunos tinham mais equações que incógnitas, recorreram ao Scilab para encontrar a forma canónica reduzida por linhas e depararam-se com um sistema possível e determinado (ou impossível, face a erros de transcrição para o Scilab); no problema, os alunos tinham também mais equações do que incógnitas, mas encontraram manualmente a forma escalonada da matriz ampliada, a qual sugeria estarem perante um sistema possível e indeterminado.

Estes factos dão a entender que na resolução de sistemas de equações lineares correspondentes a situações concretas e de modelação, os alunos esperavam encontrar "a" solução, pelo que tudo o que os desviasse deste tipo de resultado significava terem errado na resolução. Desta forma, o trabalho proposto contribuiu para que alguns alunos aprofundassem o sentido da resolução de sistemas de equações lineares (C/T-dc), com a interpretação e confronto da solução obtida com a solução procurada.

Um segundo exemplo remeteu para uma situação não prevista pelo professor. Na resolução da tarefa "Ponte de Wheatstone", sendo o primeiro momento em que os alunos tinham que encontrar as equações lineares (a partir da aplicação das leis de Kirchhoff), surgiu a discussão em termos da necessidade da escrita das equações na forma canónica. Nos exercícios mais comuns de resolução de sistemas de equações lineares esta questão não se coloca, por já ser apresentado o sistema com as equações escritas na forma canónica. A situação proporcionou que os alunos passassem a ter presente um requisito para a escrita de um sistema de equações lineares na forma matricial (C/T-dc).

Por último, as situações recriadas em torno da exploração de tarefas e aplicações permitiram que os alunos apurassem um certo sentido de "negociação", sobre a adequação e eficácia dos processos conhecidos, face à situação enfrentada. Como alternativa à imposição, os alunos foram desenvolvendo o sentido de iniciativa e de ponderação nos casos da multiplicação de matrizes e da resolução de sistemas de equações lineares (C/T-dc).

No caso da multiplicação de matrizes, a resolução da tarefa permitiu que os alunos escolhessem, entre duas propostas, a mais significativa conceptualmente, tendo o professor dado liberdade de escolha. No caso da resolução de sistemas de equações lineares, os alunos foram estabelecendo com a resolução das tarefas, dos problemas e dos exercícios relacionados qual o método que melhor respondia ao desafio proposto. A situação mais curiosa foi com a resolução de um sistema muito peculiar (com duas equações e uma incógnita) que surgiu na tarefa "A caminho das capitais de distrito". Observou-se que a iniciativa pode passar por continuar a aplicar-se o método de eliminação de Gauss, o que indicia uma certa mecanização dos processos, em vez de se proceder "à moda antiga" como referiu uma aluna.

5.3.2 Subdimensão E_Exteriorização da exploração de tarefas e aplicações

As categorias que emergiram das narrações multimodais e que foram associadas à subdimensão E sugerem, segundo a ação do professor, o tipo de trabalho realizado ao longo dos diferentes momentos da proposta e resolução das tarefas e de um problema de aplicação e algumas dificuldades de implementação do trabalho de natureza prática.

Na Tabela 5.27 são apresentadas as categorias emergentes relativas à subdimensão E, acompanhadas da respetiva codificação e descrição.

Tabela 5.27: Categorias emergentes da subdimensão E, codificação e breve descrição

E_Exteriorização da exploração de tarefas e aplicações			
Categorias			**Descrição**
Momentos do trabalho do professor			
	Preparação	**E-m-p**	O professor realiza um conjunto de ações que antecedem a resolução das tarefas e alguns problemas.
	Condução	**E-m-c**	O professor orienta e conduz a resolução das tarefas e alguns problemas.
	Feedback	**E-m-f**	O professor dá *feedback* e recorda o trabalho de resolução das tarefas e alguns problemas.
Potenciais condicionantes da exploração de tarefas e aplicações		**E-pc**	Conjunto de fatores que podem comprometer as expectativas do professor em torno da realização de trabalho de natureza prática.

Categorias E-m-p, E-m-c e E-m-f

A Tabela 5.28 reúne um conjunto de evidências que refletem o esforço do professor e o trabalho desenvolvido ao longo dos diferentes momentos adstritos à exploração de tarefas e aplicações da álgebra linear, em prol de se tornarem situações potencialmente relevantes para o ensino.

Tabela 5.28: Evidências das categorias E-m-p; E-m-c e E-m-f

Categoria		
Momentos do trabalho do professor		
	Preparação	**E-m-p**
	Condução	**E-m-c**
	Feedback	**E-m-f**

Evidências	**Categoria**
O professor tenta criar condições favoráveis à realização de trabalho de natureza prática, individualmente ou em grupo:	
1. "Introduzindo o estudo da multiplicação de matrizes, comecei por brincar propositadamente com os alunos, sobre se estavam com muita vontade de trabalhar, face à natureza do trabalho que iria propor. Isto porque tinha delineado uma tarefa de introdução para ser resolvida em grupo."	**E-m-p**
2. "Face à informação prévia do trabalho a realizar, os alunos reagiram naturalmente à minha proposta de resolução de uma tarefa."	
O professor desvenda o propósito do trabalho de natureza prática anunciado:	
"Avancei que o propósito era o de nos depararmos com sistemas de equações lineares com um grande número de equações e de incógnitas, pois até agora apenas tinham sido abordados sistemas até três equações e três incógnitas."	**E-m-p**

O professor auxilia na interpretação do enunciado e na "descodificação" da linguagem técnica: "Projetei a folha de rosto da tarefa e questionei os alunos sobre o circuito apresentado […]. Para me assegurar que os alunos conheciam e aplicavam corretamente as leis de Kirchhoff, projetei uma imagem relativa a uma situação exemplo."	**E-m-p**
O professor acompanha o trabalho dos alunos no lugar, interagindo ao nível do reforço da interpretação do enunciado, de contributos para o progresso na resolução e da aceitação ou refutação dos resultados alcançados: 1. "Em alguns grupos, ainda foi necessário voltar a explicar o teor da tarefa, tendo eu avançado com a mesma informação que disse no início." 2. "[…] a resposta não era a correta, pelo que tive de pedir uma nova tentativa, com uma outra escolha de linhas e colunas e sem acrescentar novos elementos às matrizes." 3. "No diálogo que estabeleci com o Júlio, quanto à segunda questão, procurei que o aluno decidisse se somando múltiplos dos vetores *s* e *l* era possível obter o vetor *b* e sugeri que resolvesse o sistema de equações lineares subjacente." **O professor, apenas num caso, discutiu com os alunos os resultados obtidos:** "Comecei por pedir que algum grupo apresentasse a sua resposta à primeira subtarefa: - Como é que alguém na subtarefa 1 aplicou o algoritmo para o produto de A por B … e chegar a este resultado que apresenta o Scilab? Quem é que me descreve o procedimento por palavras informais … ou vulgares? Sugestões? – fui perguntando, dirigindo-me àqueles que não conheciam a multiplicação de matrizes."	**E-m-c**
O professor considerou a correção das respostas recolhidas como forma principal de dar *feedback* do trabalho realizado pelos alunos: "Acompanhando de perto o trabalho de cada grupo, a minha ajuda inicial consistiu em explicar aos alunos o trabalho a realizar em cada subtarefa e aspetos relacionados com a minha correção da Subtarefa 1." **O professor, em situações similares, lembrou o trabalho anteriormente realizado em torno da exploração de tarefas e aplicações:** "Continuei falando para a turma, lembrando a tarefa Ponte de Wheatstone e referindo que o trabalho era similar: - Têm aí as variáveis … escrevam as equações para depois resolverem o sistema."	**E-m-f**

As evidências apresentadas dizem respeito a episódios centrados na resolução de três tarefas ("Algoritmo para a multiplicação de matrizes", "Ponte de Wheatstone" e "A caminho das capitais de distrito") e de um problema de produção. A resolução dos exercícios atrás referidos, que também refletem as aplicações da álgebra linear, não foi captada nas narrações multimodais, por ser realizada noutras aulas. Nas narrações multimodais construídas apenas foram captadas as referências a estes exercícios, com a explicação do enunciado ou proposta de resolução extra aula/aula seguinte.

Observou-se que o professor desenvolveu um conjunto de ações que antecedeu a resolução das tarefas e do problema, as quais permitiram tornar mais natural a realização deste

trabalho de natureza prática e fornecer as informações mínimas necessárias para que os alunos compreendessem o propósito e o tipo de trabalho solicitado.

O professor procurou tornar o ambiente em torno da resolução das tarefas e do problema de produção o mais informal possível, aproveitando vários momentos para brincar com a situação, de modo a que os alunos reagissem com maior à vontade ao tipo de trabalho que se seguiria (E-m-p).

Aquando da proposta de resolução da primeira tarefa, os alunos acharam muito estranho que o professor lhes tivesse pedido para realizarem trabalho de grupo e a reação não foi a melhor. O que demonstra que esta prática não é habitual neste nível de ensino, pelo menos nas unidades curriculares de cariz mais teórico, foi a menor predisposição demonstrada pelos alunos repetentes. Face a esta observação, o professor passou a antecipar mais à distância a realização deste tipo de trabalho, ora avisando na aula anterior, ora no início da própria aula, com uma espécie de sumário do trabalho que esperava que realizassem e sugerindo que se sentassem, logo no início, em função dos hipotéticos grupos (E-m-p). Progressivamente, a atitude dos alunos foi-se alterando, passando a reagir cada vez mais com maior naturalidade.

Uma situação que merece destaque reporta à resolução do problema de produção, que neste caso, era para ser realizada individualmente. O professor falou em pretender avaliar o conhecimento acerca da modelação de uma situação, por via da escrita das equações lineares, e da resolução de um sistema de equações lineares, por meio da aplicação do método de eliminação de Gauss. Para o efeito, distribuiu uma folha com o enunciado e espaço para a resposta, o que levou a que os alunos ficassem constrangidos e julgassem tratar-se de um "teste". Inclusive foram avançando que o professor não os tinha preparado para tal.

O professor procurou também ajudar os alunos na interpretação dos enunciados e salvaguardar que a linguagem técnica associada a algumas situações não se tornasse um obstáculo adicional. Atendendo à proposta de Lopes et al. (2010), o professor revelou totalmente as tarefas logo no início, com a projeção do enunciado e leitura, e explicitou o tipo de produto final esperado, falando sobre o propósito da resolução das tarefas e do problema (E-m-p).

No momento de resolução, o professor acompanhou o trabalho dos alunos no lugar e foi permanentemente solicitado (E-m-c). As dúvidas iniciais colocadas pelos alunos incidiram sempre na interpretação do enunciado, demonstrando a insuficiência do trabalho anterior que o professor realizou para o efeito. Na interação com os alunos, o professor procurou, muitas vezes,

conduzi-los até ao passo seguinte por meio da colocação de questões sucessivas que permitissem o desenvolvimento do raciocínio (E-m-c). Embora a ajuda tivesse que, por vezes, ser mais explícita, observou-se que a falta de autonomia revelada era de certa forma encapotada. Isto pela propensão dos alunos para chamar o professor, aproveitando a disponibilidade demonstrada por este, em detrimento de a devida discussão ter ocorrido dentro do grupo ou os alunos esforçarem-se por avançar *per si* na resolução.

Com as questões colocadas, os alunos procuraram também que o professor validasse o trabalho realizado nos diferentes momentos ou a resposta final encontrada, tendo este correspondido a esta solicitação. No entanto, o professor apenas procedeu à discussão dos resultados relativa à primeira tarefa, sobre a multiplicação de matrizes (E-m-c). Aqui a situação naturalmente o exigia, na medida que o aspeto fundamental da tarefa era a discussão em torno da escolha do melhor algoritmo para a multiplicação de matrizes.

Globalmente, o professor descurou a discussão dos resultados e os alunos não tiveram na hora o *feedback* do trabalho realizado. A forma como o professor correspondeu a este item foi recolher as produções dos alunos, proceder à correção das resoluções apresentadas e devolvê-las numa das aulas seguintes (E-m-f). No caso particular da tarefa "Ponte de Wheatstone", uma vez que a resolução foi feita em dois momentos e em aulas diferentes, a devolução das respostas corrigidas referentes à subtarefa considerada inicialmente permitiu que os alunos corrigissem os erros e avançassem na resolução com menos obstáculos.

A posteriori, e em várias ocasiões, surgiu a oportunidade para o professor revisitar situações anteriores, pela similaridade com o trabalho a desenvolver e como forma de responder às dúvidas colocadas pelos alunos. Como exemplo, e segundo uma das evidências apresentadas (Tabela 5.28), o professor aludiu a uma tarefa anteriormente explorada aquando da procura de uma resposta ao problema de produção, dado o trabalho idêntico da escrita das equações lineares que modelavam a situação apresentada.

Categoria E-pc

A Tabela 5.29 reúne um conjunto de evidências que demonstram como os objetivos delineados pelo professor correspondentes à exploração de tarefas e aplicações da álgebra linear podem ser difíceis de alcançar.

Tabela 5.29: Evidências da categoria E-pc

Categoria	
Potenciais condicionantes da exploração de tarefas e aplicações	**E-pc**

Evidências	**Categoria**
Os alunos demonstram resistência inicial à realização de trabalho que não seja a resolução de exercícios: 1. "Esta atitude comportamental é relevante dado que, até à data, já foram propostas duas tarefas, uma individual e outra em grupo, e em ambas os alunos mostraram-se muito reticentes e surpreendidos com o tipo de trabalho proposto." 2. "Pedi a concentração máxima e mantive-me no meu lugar, em silêncio. O primeiro comentário que surgiu, passados uns instantes, foi da parte do David: - Oh professor, nunca fizemos nenhum exercício destes na aula! […] - Não estou a gostar disto! Não sei fazer isto – comentou de seguida a Carla. - Não percebo nada disto! – disse também o Fernando."	**E-pc**
O professor, por vezes, diferencia o trabalho solicitado aos alunos repetentes: "Dirigi-me ainda aos alunos que já conheciam um algoritmo para a multiplicação de matrizes, pressupondo que eram os alunos repetentes, que esta tarefa, sendo de introdução, podia não ser relevante. […] Passando por um grupo constituído por alunos repetentes, o Edgar e o Júlio, sugeri-lhes que respondessem apenas à segunda subtarefa […]"	**E-pc**
O trabalho conseguido pelos alunos não corresponde ao esperado, refletindo-se nos resultados alcançados: 1. "Pelo que tinha observado anteriormente, nenhum grupo chegou a concluir esta subtarefa e alguns tão pouco a começaram. Nem mesmo o grupo de alunos repetentes, os quais tiveram mais tempo." 2. "Só que erros na escrita das equações lineares e erros de transcrição da matriz ampliada no Scilab ditaram a obtenção de matrizes na forma canónica reduzida por linhas que correspondiam a sistemas impossíveis. Ainda procurei identificar alguns dos erros, até que decidi dizer aos grupos para avançarem com uma resposta concordante com o tipo de matriz que obtiveram."	**E-pc**
O tempo gasto pelos alunos, acima do esperado, na resolução das tarefas e do problema reflete-se na atuação do professor: 1. "Face ao tempo demorado, não se discutiram os resultados, apenas dizendo que posteriormente resolveriam outros exercícios relacionados com a aplicação das leis de Kirchhoff e que aí apontaria algumas causas para os erros cometidos na resolução desta tarefa." 2. "Como o tempo de resolução da subtarefa se estava a alongar, passei a pedir aos alunos para apenas escreverem as expressões para cada uma das combinações lineares do vetor *b*, nas diferentes questões. O resto seria para fazer em casa."	**E-pc**

Segundo um dos tipos de evidências que constam na Tabela 5.29, os alunos demonstraram sair da zona de conforto quando o professor substituiu o "*lecturing*" pela proposta de trabalho

de grupo ou individual e que pressupunha, no final, a entrega das suas produções (E-pc). A reação inicial típica dos alunos passou por proferirem afirmações avulsas sobre não saberem, não estarem preparados ou nunca terem realizado algo semelhante. O aspeto salutar é que, após este embaraço inicial, os alunos mostraram-se globalmente envolvidos na realização do trabalho proposto pelo professor de uma forma proativa, com sentido de responsabilidade e postura adequada. A satisfação de alguns alunos pela obtenção dos resultados e as conversas entre grupos sobre o que tinham ou não que ter feito são exemplos que ajudam a comprovar aquela observação.

No contexto das tarefas que eram condizentes com a aproximação aos conceitos, o professor teve que salvaguardar que os alunos repetentes, pelo conhecimento já adquirido, não antecipavam os resultados que se pretendia que os restantes obtivessem no final (E-pc).

O caso mais notório foi com a tarefa "Algoritmo para a multiplicação de matrizes". Na primeira subtarefa, se estes alunos se lembrassem da multiplicação de matrizes e avançassem com essa informação, a ideia de conduzir os alunos a inferirem uma forma de multiplicar matrizes, tendo como princípio o conceito de produto interno de vetores, ficaria irremediavelmente comprometida. Outro caso, embora não seja propriamente uma situação de comprometer os resultados esperados, mas sim do tipo de resposta apresentada, foi com a tarefa "Ponte de Wheatstone". Na primeira subtarefa, era pedido que os alunos indicassem as equações dos nós e as equações das malhas referentes à aplicação das leis de Kirchhoff no circuito apresentado. A resposta apresentada pelo Grupo 5, constituído por três alunos, sendo dois deles repetentes, foi a única que continha logo no início todas as equações lineares reunidas num único sistema.

Não foi fácil para os alunos alcançar a resposta correta às tarefas e ao problema. Duas questões que se colocam são sobre o grau de dificuldade estabelecido e sobre a linguagem específica incluída nas situações. Julgamos que não foi pelo teor da linguagem que o desempenho dos alunos foi menos conseguido, até porque na situação porventura mais técnica ("Ponte de Wheatstone") o professor recorreu, no início, a uma situação exemplo para explorar as questões da linguagem. Por sua vez, o facto de nenhum grupo ter conseguido responder à segunda subtarefa da tarefa sobre a multiplicação de matrizes indicia que uma das formas alternativas que Carlson (1993) propõe para a multiplicação de matrizes é conceptualmente desafiadora para os alunos e não é gratuito que a estratégia mais tradicional seja a multiplicação "linha por coluna".

O que acabou por condicionar a obtenção da resposta final foi a sucessão de erros que os alunos foram cometendo ao longo das resoluções. Sendo muitas das situações de modelação matemática, a decisão inicial (errada) quanto às equações lineares a considerar no modelo foi o maior obstáculo com que os alunos tiveram que lidar. Uma das decisões do professor no momento, na impossibilidade de corrigir todos os erros, foi a de aceitar o trabalho entretanto realizado pelos alunos e solicitar uma resposta conforme (E-pc).

O tempo gasto pelos alunos foi sempre superior ao esperado e ao anunciado pelo professor. Face a esta circunstância, o professor teve que proceder a alguns ajustes quanto ao trabalho que tinha planeado (E-pc). A falta de tempo levou a que o professor colocasse de lado a discussão de resultados, à exceção da primeira tarefa. Muita da ajuda que o professor acabou por prestar aos alunos, o que contribuiu para reduzir a sua autonomia, resultou da preocupação quanto ao tempo despendido e por cumprir o plano da aula. No caso particular da tarefa "A caminho das capitais de distrito", o professor decidiu reduzir a atividade dos alunos, sugerindo formas de acelerar a resolução, e adiar a recolha das respostas para a aula seguinte.

5.4 Dimensão *Conhecimento dos pré-requisitos*

De acordo com Harel (1997), muitos dos conceitos de álgebra linear têm por base conceitos já lecionados em ciclos de ensino anteriores, embora a relação não seja evidente por estes aparecerem distanciados dos objetos e ferramentas próprias da álgebra linear. Por conseguinte, uma das estratégias delineadas e que o professor procurou colocar em prática consistiu em estabelecer a relação e a continuidade natural das antigas para as novas aprendizagens.

Na análise das narrações multimodais à luz da dimensão *Conhecimento dos pré-requisitos* centrámos, desde logo, a atenção nos principais tópicos e competências matemáticas que a literatura destaca como pré-requisitos essenciais para a aprendizagem da álgebra linear, resultando a formalização de algumas categorias relacionadas. Uma categoria adicional que emergiu sugere outros pré-requisitos que podem ser também considerados basilares para a aprendizagem da álgebra linear.

Na Tabela 5.30 são apresentadas as categorias que emergiram quanto à dimensão *Conhecimento dos pré-requisitos*, bem como a codificação e a descrição do seu significado.

Tabela 5.30: Categorias emergentes da dimensão *Conhecimento dos pré-requisitos*, codificação e breve descrição

Dimensão: *Conhecimento dos pré-requisitos*			
Categorias			**Descrição**
Pré-requisitos que encontram a literatura			
	Lógica	**Pr-l-lg**	Trabalho planeado pelo professor e/ou circunstâncias da invocação de conceitos de lógica.
	Teoria de conjuntos	**Pr-l-tc**	Trabalho planeado pelo professor e/ou circunstâncias da invocação de conceitos de teoria de conjuntos.
	Geometria analítica	**Pr-l-ga**	Trabalho planeado pelo professor e/ou circunstâncias da invocação de conceitos de geometria analítica.
	Competências matemáticas	**Pr-l-cm**	Conjunto de competências matemáticas que os alunos revelam ter adquirido/não adquirido.
Outros pré-requisitos sugeridos pelo tipo de abordagem (sistemas de equações lineares)		**Pr-sel**	Trabalho planeado pelo professor e/ou circunstâncias da invocação da resolução de sistemas até três equações e três incógnitas.

Categorias Pr-l-lg, Pr-l-tc e Pr-l-ga

A Tabela 5.31 reúne um conjunto de evidências que sugerem a relação subentendida na abordagem delineada ou que o professor procurou estabelecer com conceitos de lógica, de teoria de conjuntos e de geometria analítica. Sugerem ainda como em algumas situações da aula, sobretudo motivadas pelas questões dos alunos, esta relação emergiu.

Tabela 5.31: Evidências das categorias Pr-l-lg, Pr-l-tc e Pr-l-ga

Categoria		
Pré-requisitos que encontram a literatura		
	Lógica	**Pr-l-lg**
	Teoria de conjuntos	**Pr-l-tc**
	Geometria analítica	**Pr-l-ga**

Evidências	**Categoria**
O professor faz referência a operadores lógicos abordados anteriormente, na parte correspondente à matemática discreta:	
1. "O David, não convencido, questionou-me sobre o que decidir quando uma equação diz que o valor da incógnita pode ser qualquer e outra equação diz que essa incógnita tem de ser um número real. Eis que me ocorreu fazer a associação com o assunto Lógica Proposicional,	**Pr-l-lg**

abordado na parte Matemática Discreta, referindo que podíamos ver esta situação como a conjunção de duas condições."

2.

"- A matriz A é invertível se e só se … posso usar esta designação porque a conhecem… a característica da matriz é *n*. O que é a característica de uma matriz? Que conceito é este da última aula?"

Pr-l-lg

Um aluno demonstra não conhecer o sentido da designação de axioma:

"Finda a verificação do primeiro axioma, o David aproveitou para me colocar uma questão, demonstrando não estar ainda familiarizado com o conceito de subespaço vetorial:

- Mas aquelas condições, foi o professor que as impôs?

- Estas? – perguntei eu apontando para os axiomas resumidos no quadro. – Oh David … é a definição! – disse eu, surpreendido. – Como é que foi definido um subespaço?"

O professor explora a classificação de sistemas de equações lineares a partir das condições que definem o tipo de conjunto solução:

"Disse então o Hélder:

- Então, se for 0*x* = 0 é um sistema possível e indeterminado. Se for 0*x* igual a outro número qualquer, diferente de zero, é impossível!

[…]

Procurei então mostrar que a presença da equação 0*y* = 0 não era suficiente para se concluir que o sistema, neste caso, era possível e indeterminado, uma vez que com as restantes equações era possível determinar os valores de *x* e de *y*, caso o valor do parâmetro *a* não fosse nulo."

O professor representa, em simultâneo, os subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$ nas formas cartesiana e paramétrica:

"Lembrei-me que não tinha reescrito o conjunto H_1, tal como tinha sugerido na aula anterior. Sugeri que se usasse a condição para isolar a variável y e escrevi no quadro:

$$H_1 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 - y = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x^2 \\ z \end{bmatrix} : x, z \in \mathbb{R} \right\}."$$

Pr-l-tc

Os alunos revelam dificuldades na identificação de elementos de um conjunto, no contexto dos subespaços vetoriais:

"- Este elemento – apontando para última matriz coluna – tem o formato estabelecido para o conjunto H_1?

- …(silêncio)

- Tem – disse a Juliana, num tom baixo.

- … (silêncio)

- Estão com medo vocês? Estão muito sérios! – disse eu.

Surgiram outras respostas, mas indo ao encontro do mesmo, isto é, que o vetor obtido pertencia ao conjunto.

- Este $a^2 + c^2$ representa elevar o anterior ao quadrado? – continuei eu, à procura que os alunos constatassem que estavam a responder erradamente."

O professor introduz e explora alguns conceitos de álgebra linear a partir do conhecimento anterior dos alunos sobre geometria analítica:

[nomeadamente:]

1. Adição de vetores e multiplicação de um vetor por um escalar representados geometricamente e em termos das suas coordenadas;
2. Resolução gráfica de sistemas de equações lineares e classificação em termos da posição relativa de retas e planos;
3. Interpretação de subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ com base na equação cartesiana de retas e planos.

Pr-l-ga

Relembramos que a unidade curricular lecionada pelo professor designava-se por Matemática Discreta e Álgebra Linear, com a primeira parte a incluir a abordagem de tópicos

de lógica proposicional e lógica de predicados, teoria de conjuntos e relações. Os conceitos de lógica podem aqui ser enquadrados no conhecimento transmitido imediatamente antes de se ensinar álgebra linear, segundo a consideração de Rogalski (2000), embora no currículo do ensino secundário a lógica seja um tema transversal e por isso já os alunos tiveram algum tipo de contacto com o assunto.

As narrações multimodais sugerem que não foi particularmente considerada pelo professor a relação dos novos conceitos com a lógica. As evidências apresentadas mostram que as breves referências a conceitos associados à lógica surgiram como consequência de questões ou dúvidas manifestadas pelos alunos. Apenas ficou patente que a linguagem da álgebra linear pressupõe o conhecimento sobre operadores lógicos, tendo o professor chamado a atenção para o que os alunos já sabiam sobre a conjunção e a equivalência (Pr-l-lg).

Na introdução ao estudo da lógica, o professor desenvolveu o significado de conceitos como axioma, conjetura, demostração, argumento e teorema. Contudo, no contexto do estudo dos espaços e subespaços vetoriais, foi possível observar não ser claro o significado de axioma e o seu papel na definição (Pr-l-lg), julgando um aluno poderem tratar-se de "condições impostas pelo professor".

Ao contrário do que se verificou relativamente à lógica, surgem nas narrações multimodais ligações mais concretas dos conceitos de álgebra linear ao que os alunos aprenderam anteriormente sobre teoria de conjuntos.

Observou-se que a discussão de sistemas de equações lineares e da caraterística de uma matriz em função de parâmetros pressupõe conhecimentos de teoria de conjuntos, tendo sido suscitada a identificação dos conjuntos que aparecem associados às condições estabelecidas (Pr-l-tc). No caso particular da discussão de sistemas de equações lineares em função de parâmetros, a estratégia que o professor acabou por seguir resultou da propensão dos alunos para pensar em termos de possíveis concretizações dos parâmetros na matriz na forma escalonada (ou canónica reduzida por linhas) e do tipo de equação resultante. No entanto, esta estratégia levou a que os alunos "decorassem" que se por exemplo encontrassem uma equação indeterminada, então o sistema de equações lineares subjacente era necessariamente possível e indeterminado, sem refletirem se todas as variáveis ficavam ou não determinadas.

A discussão de sistemas de equações lineares e da caraterística de uma matriz em função de parâmetros também contempla a associação entre as condições que representam um conjunto e o próprio conjunto (Pr-l-tc). Nos registos no quadro, o professor foi estabelecendo as

condições a associar a todos os casos. Combinou com os alunos que o trabalho culminava com a identificação dos conjuntos aos quais os parâmetros deveriam pertencer em cada caso. Neste contexto, os alunos não revelaram qualquer tipo de dificuldade.

Uma situação que foi planeada e que o professor implementou em sala de aula foi a representação algébrica dos subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$ na forma cartesiana e na forma paramétrica (Pr-l-tc), por consideração do trabalho de Dorier e Sierpinska (2001). Concordávamos à partida que a verificação dos axiomas seria mais fácil para os alunos a partir da representação paramétrica e que o treino de escrita desta representação a partir da representação cartesiana melhorava a capacidade dos alunos para escrever o conjunto solução de um sistema possível e indeterminado. Observou-se que embora os alunos conseguissem obter a representação paramétrica de um conjunto, o mesmo não aconteceu com a identificação dos elementos pertencentes a esses mesmos conjuntos, como comprova uma das evidências associada à categoria Pr-l-tc.

As narrações multimodais permitiram a obtenção de evidências que refletem que a abordagem seguida pelo professor apelou a conhecimentos básicos de geometria analítica. Em correspondência com as operações com matrizes, os alunos revelaram saber operar com as diferentes representações conhecidas de vetores (Pr-l-ga), mas alguns assumiram já não se recordarem das designações "regra do paralelogramo" e "regra do triângulo".

Embora os alunos tenham maior experiência na resolução gráfica de sistemas com duas equações e duas incógnitas, estes demonstraram associar facilmente a classificação de sistemas de equações lineares à posição relativa de retas e planos no espaço. E o desempenho não mudou perante a novidade de sistemas com um número maior de equações (Pr-l-ga). No entanto, um dado que confirma uma das dificuldades já reportadas (Dorier et al., 2000a), ao nível de equações algébricas de um objeto geométrico, foi a manifesta dificuldade dos alunos ao nível do reconhecimento das condições dos conjuntos associados a subespaços vetoriais como equações cartesianas de retas e planos, sobretudo em $\mathbb{R}^3$.

Categoria Pr-l-cm

A conceção de pré-requisitos que considerámos foi a adotada por Rogalski (2000) e daí justificar-se também a atenção nas competências matemáticas que os alunos deveriam ter desenvolvido ao longo do seu percurso escolar. Com base em algumas competências matemáticas que aquele investigador estabelece como essenciais para a aprendizagem da

álgebra linear (secção 2.2.4), procurámos a partir das narrações multimodais encontrar evidências que definissem esta categoria (Tabela 5.32).

Tabela 5.32: Evidências da categoria Pr-l-cm

Categoria		
Pré-requisitos que encontram a literatura		
	Competências matemáticas	**Pr-l-cm**

Evidências	**Categoria**
Os alunos demonstram maior facilidade ao nível do cálculo numérico, comparativamente com o cálculo simbólico: 1. "Notei que os alunos já revelavam uma boa destreza na realização das operações elementares sobre linhas de uma matriz." 2. "A dúvida inicial do Fernando prendia-se com como conseguir que os elementos $\alpha+3$ e β passassem a ser um, dando pistas que a origem da dúvida estava na realização de operações elementares com linhas contendo parâmetros."	**Pr-l-cm**
Os alunos demonstram dificuldade e pouca propensão para raciocinar em termos abstratos: 1. "Dado que os alunos, a partir daqui, conseguiram acompanhar o raciocínio e apresentar sugestões, deduzi que foi a complexidade de escrita desta expressão, com muitos parâmetros, que condicionou o progresso dos alunos aquando do seu trabalho." 2. "Esclareci que qualquer vetor que se escolhesse tinha que ter como segunda componente o quadrado da primeira. Aproveitando a circunstância de se ter pensado em números, adiantei que mesmo que somasse vetores concretos, pretendia verificar se a soma era ainda um vetor pertencente ao mesmo conjunto. Sugeri que pensassem em letras para se obter um vetor genérico, nomeadamente considerando as primeiras letras do alfabeto."	**Pr-l-cm**

Ao longo da aprendizagem dos diferentes conteúdos da álgebra linear, os alunos foram demonstrando ser bastante capazes ao nível da realização de cálculos de natureza mais numérica (Pr-l-cm). São exemplos a realização de operações com matrizes, com a multiplicação de matrizes segundo o procedimento "linha por coluna", a realização de operações elementares sobre linhas de uma matriz e, embora não captado nas narrações multimodais, o cálculo de determinantes. No entanto, notou-se que o desempenho dos alunos em torno destas atividades era menos conseguido se se deparassem com a presença de parâmetros, sugerindo que ainda perduravam lacunas ao nível da realização de cálculos de natureza mais simbólica.

As evidências apresentadas sugerem que nos ciclos de ensino anteriores os alunos não desenvolveram a capacidade que se espera e que a aprendizagem da álgebra linear requer quanto ao desenvolvimento de raciocínios abstratos (Pr-l-cm). Este facto pode justificar a razão para os alunos não terem respondido à segunda subtarefa no contexto da multiplicação de matrizes,

dada a natureza do enunciado (Figura 5.3) e o raciocínio requerido ao nível da interpretação e aplicação da informação fornecida.

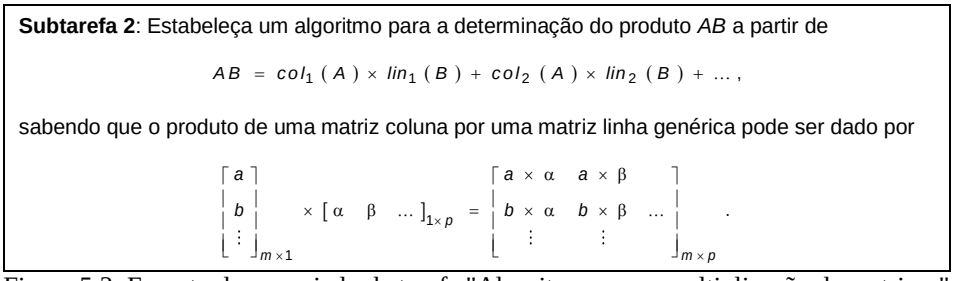


Figura 5.3: Excerto do enunciado da tarefa "Algoritmo para a multiplicação de matrizes"

No contexto da exploração dos conceitos de espaços e subespaços vetoriais, em particular da verificação dos axiomas, observou-se ser artificial para os alunos a necessidade de se pensar em termos de vetores genéricos. Quando solicitados para justificar as respostas ou raciocínios, a tendência demonstrada pelos alunos foi a de recorrerem a vetores concretos, o que levou ao esforço do professor de reforçar a necessidade de se considerar vetores genéricos. Esta razão pode estar a montante da dificuldade observada no que respeita à validação analítica dos diferentes axiomas.

Categoria Pr-sel

Para além da ligação da álgebra linear à lógica, teoria de conjuntos e geometria analítica, já consagrada na literatura, a categoria Pr-sel sugere, face à abordagem delineada e posta em prática pelo professor, que se considere também como pré-requisito a resolução de sistemas de equações lineares até três equações e três incógnitas.

Tabela 5.33: Evidências da categoria Pr-sel

Categoria	
Outros pré-requisitos sugeridos pelo tipo de abordagem (sistemas de equações lineares)	**Pr-sel**

Evidências	**Categoria**
O professor, segundo a abordagem delineada, estabelece como pré-requisito a resolução de sistemas até três equações e três incógnitas segundo os métodos gráfico, de substituição e de adição ordenada:	
1. "Na última aula, deu-se início ao estudo do segundo capítulo, intitulado Sistemas de Equações Lineares, segundo a opção metodológica da revisão da resolução algébrica e geométrica de sistemas com duas equações e duas incógnitas e de sistemas com três equações e três incógnitas, que os alunos já aprenderam em ciclos de ensino anteriores […]."	**Pr-sel**

2. "Questionei os alunos se conheciam o método de adição ordenada. O silêncio inicial dos alunos sugeria que não conheciam. Foram afirmando que não aprenderam, mas quando comecei a exploração do Exemplo 2.7, surgiram alguns comentários de já terem visto "algo parecido."	**Pr-sel**

O professor introduziu o estudo dos sistemas de equações lineares a partir do conhecimento anterior dos alunos sobre o tópico (Pr-sel). Mais em concreto, o conhecimento da resolução de sistemas de equações lineares, segundo a aplicação do método gráfico, do método de substituição e do método de adição ordenada, foi considerado pelo professor para justificar a aprendizagem dos novos métodos e mostrar a relação destes com os antigos.

Os alunos demonstraram conhecer de uma forma sustentada a resolução, pelo método gráfico, de sistemas com duas equações e duas incógnitas e a resolução, pelo método de substituição, de sistemas até três equações e três incógnitas. Pelo contrário, o método de adição ordenada revelou-se ser quase desconhecido para os alunos. Mas o conhecimento deste método torna-se relevante segundo os moldes em que assenta a abordagem delineada, onde se pretende estabelecer a correspondência entre as operações elementares sobre linhas de uma matriz e as operações possíveis com as equações lineares de um sistema.

A revisão, embora superficial, do método de adição ordenada, possibilitou que este método fosse visto como um pré-requisito, no sentido de Rogalski (2000), isto é, como conhecimento transmitido imediatamente antes de se ensinar conteúdos da álgebra linear. Considerando-se como primeiros conceitos intrínsecos à álgebra linear, relativamente a este capítulo, a generalização da definição de sistema de equações lineares e os métodos de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan, também a exploração que o professor fez do método gráfico e do método de substituição, perante sistemas com um número maior de equações, pode ser enquadrada nos pré-requisitos daquela natureza.

5.5 Dimensão *Interligação dos conceitos de álgebra linear*

Depois de analisada a relação dos novos conceitos com outros que os alunos aprenderam anteriormente, à luz da dimensão *Conhecimento dos pré-requisitos*, surge agora a análise de uma nova dimensão, respeitante à relação entre os próprios conceitos de álgebra linear.

Uma caraterística particular da atuação do professor em sala de aula, para destacar a interligação de muitos dos conceitos lecionados, consistiu na construção de mapas conceptuais, por influência do trabalho de Lapp et al. (2010). Influenciando também a nossa análise, estes investigadores estabeleceram um conjunto de categorias que definem os diferentes tipos de relações entre os conceitos de álgebra linear que os mapas conceptuais construídos pelos alunos eliciaram.

A partir das narrações multimodais, definimos oito categorias divididas entre a interligação dos conceitos que o professor procurou estabelecer à medida que foi lecionando os diferentes assuntos e a capacidade ou dificuldade revelada pelos alunos para relacionar alguns dos conceitos aprendidos (Tabela 5.34).

Tabela 5.34: Categorias emergentes da dimensão *Interligação dos conceitos de álgebra linear*, codificação e breve descrição

Dimensão: *Interligação dos conceitos de álgebra linear*			
Categorias			**Descrição**
Interligação dos conceitos desenvolvida pelo professor			
	Processual	**Ic_{pr}-p**	O professor carateriza um conceito como procedimento ou algoritmo usado para chegar a outros conceitos.
	Recurso	**Ic_{pr}-c**	O professor aponta à utilidade de um conceito para chegar a outros conceitos.
	Representacional	**Ic_{pr}-r**	O professor estabelece a ligação entre diferentes representações do mesmo conceito.
	Relacional	**Ic_{pr}-dpt**	O professor estabelece a relação entre conceitos por via de definições, propriedades, teoremas, etc.
Interligação dos conceitos conseguida pelos alunos			
	Processual	**Ic_{al}-p**	Os alunos caraterizam um conceito como procedimento ou algoritmo usado para chegar a outros conceitos.
	Recurso	**Ic_{al}-c**	Os alunos apontam à utilidade de um conceito para chegar a outros conceitos.
	Representacional	**Ic_{al}-r**	Os alunos estabelecem a ligação entre diferentes representações do mesmo conceito.
	Relacional	**Ic_{al}-dpt**	Os alunos estabelecem a relação entre conceitos por via de definições, propriedades, teoremas, etc.

Categorias Ic_{pr}-p e Ic_{al}-p

De acordo com as evidências apresentadas na Tabela 5.35, as categorias Ic_{pr}-p e Ic_{al}-p focam essencialmente os métodos de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan como procedimentos que conduzem direta ou indiretamente a outros conceitos de álgebra linear.

Tabela 5.35: Evidências das categorias Ic_{pr}-p e Ic_{al}-p

Categoria		
Interligação dos conceitos desenvolvida pelo professor		
	Processual	**Ic_{pr}-p**
Interligação dos conceitos conseguida pelos alunos		
	Processual	**Ic_{al}-p**

Evidências	**Categoria**
O professor sugere o método de eliminação de Gauss como método preferencial para a resolução de sistemas de equações lineares:	
1. "[…] a minha pretensão era a de justificar a necessidade de se aprender como determinar o conjunto de solução de um sistema de equações lineares com qualquer número de equações e de incógnitas. Esquematicamente, estabeleci que o "caminho a percorrer" era segundo a aplicação de um método que iria ser introduzido (método de eliminação de Gauss) […]"	**Ic_{pr}-p**
2. "- Qual achas que precisas? – perguntei eu. - Reduzida por linhas. - Para resolver um sistema? Olha o nosso esquema, ali – disse eu apontando para o esquema construído no quadro, que ainda não tinha apagado. - Também dá na escalonada. - Pronto! Chega! – disse eu. - Mas se pusesse na reduzida por linhas sabia logo qual era o *x* … - Mas vais ter muito mais trabalho. Olha ali a tracejado! Aquele esquema é poderoso, até! – observei eu, continuando a seguir o esquema."	——— **Ic_{pr}-p** **Ic_{al}-p**
O professor estabelece a possibilidade de, por meio de operações elementares sobre linhas, obter-se a forma escalonada ou a forma canónica reduzida por linhas de uma matriz:	———
"Referi que, enquanto em alguns exercícios era suficiente encontrar a forma escalonada de uma matriz, noutros era necessário encontrar a forma canónica reduzida por linhas. Neste contexto, usei a metáfora de "estrada", procurando dizer que seguindo por uma estrada, os alunos encontrariam a forma escalonada de uma matriz e, caso pretendessem, continuando na mesma estrada, obteriam no final a forma canónica reduzida por linhas (método de eliminação de Gauss-Jordan). Por sua vez, caso soubessem de antemão que teriam que encontrar a forma canónica reduzida por linhas, eu iria sugerir que escolhessem uma outra estrada, a qual funcionaria como um atalho."	**Ic_{pr}-p**
O professor relaciona o método de eliminação de Gauss-Jordan com a procura da matriz inversa de uma matriz invertível:	
"[..] avancei com a revisão do algoritmo para a determinação da inversa de uma matriz invertível segundo o método de eliminação de Gauss-Jordan, introduzido na última aula."	
A maioria dos alunos relaciona facilmente o método de eliminação de Gauss com a resolução de sistemas de equações lineares:	
"Reformulando o discurso, perguntei agora: - O que é que vocês precisam para resolver sistemas de equações lineares? - Gauss … o método de Gauss – fui ouvindo."	**Ic_{al}-p**

As eventuais confusões dos alunos são entre a resolução de um sistema de equações lineares e a determinação da matriz inversa de uma matriz invertível e são posteriores à introdução do algoritmo para a determinação desta matriz: 1. "Vendo ainda que um aluno apenas estava a escalonar a matriz, lembrei que, tal como tinha dito antes, o propósito era o de encontrar a forma canónica reduzida por linhas, para depois se concluir sobre a existência da inversa da matriz proposta." 2. "- Porque é que não põe *A* barra *I*? Depois de perceber que pretendia dizer $[A\|I_n]$, disse ao aluno que isso tinha a ver com o procedimento mais recente para a determinação da matriz inversa, relacionado com o método de eliminação de Gauss-Jordan."	**Ic_{al}-p**

O professor apresentou logo no início os métodos de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan como duas possibilidades para a resolução de sistemas de equações lineares. No entanto, foi sugerindo que a escolha do método deveria ser criteriosa: quando a resolução era feita "à mão", justificava-se encontrar apenas a forma escalonada da matriz ampliada do sistema de equações lineares, pelo que a resolução era segundo a aplicação do método de eliminação de Gauss; quando se colocava a possibilidade de se recorrer ao Scilab, por este indicar apenas a forma canónica reduzida por linhas, estava subjacente a aplicação do método de eliminação de Gauss-Jordan na resolução dos sistemas de equações lineares. Daí o professor ter recorrentemente associado o método de eliminação de Gauss à resolução de sistemas de equações lineares (Ic_{pr}-p).

As evidências apresentadas na Tabela 5.35 sugerem que os alunos viam essencialmente o método de eliminação de Gauss como um procedimento para ser usado na resolução de sistemas de equações lineares (Ic_{al}-p). O diálogo apresentado entre o professor e um aluno sugere ainda que o método de eliminação de Gauss-Jordan é visto como alternativa, mesmo quando a resolução não pressupõe o uso de *software*, dada a vantagem de no desenvolvimento da fase ascendente não ter que se fazer a substituição nas equações.

O conceito de operações elementares sobre linhas de uma matriz surgiu no contexto da resolução de sistemas de equações lineares e é intrínseco à categoria Ic_{pr}-p, aparecendo relacionado com os conceitos de matriz na forma escalonada e matriz na forma canónica reduzida por linhas. O professor transformou a fase descendente dos métodos de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan num novo procedimento, assente na realização de operações elementares sobre linhas da matriz ampliada do sistema de equações lineares. Uma particularidade do trabalho do professor consistiu em mostrar, por meio da realização de operações elementares sobre linhas, como era possível encontrar diretamente a forma canónica

reduzida por linhas, isto é, sem seguir os trâmites tradicionais de primeiro obter-se a forma escalonada. Neste contexto, o professor estabeleceu a relação de uma forma intuitiva, segundo a escolha da "estrada" a percorrer, face à natureza dos exercícios ou problemas a resolver.

O método de eliminação de Gauss-Jordan foi sobretudo referido pelo professor como um procedimento para a determinação da matriz inversa de uma matriz invertível (Ic_{pr}-p). A razão para o método de eliminação de Gauss-Jordan ter aparecido anteriormente consistiu em "abrir caminho" para a determinação da matriz inversa de uma matriz invertível, como resolução simultânea de muitos sistemas de equações lineares que mantêm a matriz simples e onde apenas mudam os termos independentes.

No entanto, verificou-se que uma vez estabelecida a relação entre o método de eliminação de Gauss-Jordan e a determinação da matriz inversa de uma matriz invertível, os alunos começaram a evidenciar algum desacerto na associação daqueles métodos aos conceitos, por exemplo, resolvendo um sistema de equações lineares ou investigando a caraterística de uma matriz como da determinação da matriz inversa se tratasse. A constatação deste facto decorreu sobretudo da construção de um mapa conceptual que o professor levou a cabo, a partir das sugestões dos alunos quanto a possíveis relações entre os métodos de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan e os conceitos de sistema de equações lineares, caraterística e matriz invertível.

Categorias Ic_{pr}-c e Ic_{al}-c

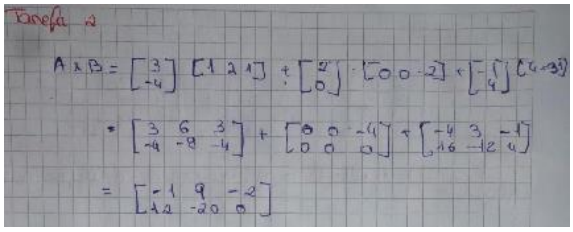
As relações desvendadas pelas narrações multimodais sob a forma de conceitos que funcionam como recurso para chegar a outros conceitos aparecem sobretudo no âmbito da manipulação de matrizes e dos sistemas de equações lineares. No entanto, surgem também evidências de relações desta natureza (Tabela 5.36) entre alguns conceitos subjacentes a estes temas e o conceito de combinação linear, o qual é parte integrante do estudo da teoria dos espaços vetoriais.

Em concomitância com o que tinha sido planeado, o professor procurou desenvolver o sentido da designação "linear" do conceito de combinação linear de vetores, colocando na sua base as operações aprendidas no início – adição de matrizes e multiplicação de uma matriz por um escalar. Aprofundando o papel que estas operações podem ter noutros conceitos, o professor mostrou, no contexto do desenvolvimento da tarefa "Algoritmo para a multiplicação de matrizes", como a multiplicação de duas matrizes pode ser vista como resultado do desenvolvimento articulado daquelas operações (Ic_{pr}-c). A expressão "invertendo e somá-los"

usada por um aluno, sobre como um determinado vetor podia ser obtido à custa de outros dois, sugere a naturalidade, aos olhos dos alunos, sobre o quão as operações de adição de matrizes e de multiplicação de uma matriz por um escalar estão envolvidas com o conceito de combinação linear de vetores (Ic_{al}-c).

Tabela 5.36: Evidências das categorias Ic_{pr}-c e Ic_{al}-c

Categoria		
Interligação dos conceitos desenvolvida pelo professor		
	Recurso	**Ic_{pr}-c**
Interligação dos conceitos conseguida pelos alunos		
	Recurso	**Ic_{al}-c**

Evidências	**Categoria**
O professor propicia que a multiplicação de matrizes seja vista como tendo por base as operações de adição de matrizes e de multiplicação de uma matriz por um escalar: 	**Ic_{pr}-c**
O professor conduz os alunos a considerarem principalmente a obtenção da forma escalonada de uma matriz como meio para a determinação da sua caraterística: 1. "O que é a característica de uma matriz? Que conceito é este da última aula? - Número de pivôs – responderam alguns alunos, tendo ainda ouvido alguns a dizer número de linhas. - Como é que consigo ler o número de pivôs? Quando colocar a matriz em que forma? - … [Silêncio] - Reduzida por linhas – disse depois o Hélder. - Forma canónica reduzida por linhas. Só? Ou há outra hipótese de ler? - Escalonada – disse agora o David."	**Ic_{pr}-c** **Ic_{al}-c**
2. "- Através do Gauss-Jordan também podemos chegar à característica [sugeriu a Carla]. […] Só que tu para veres o número de pivôs tens mesmo que escalonar ou reduzir por linhas? Basta fazer o quê? - Escalonar – disse agora a Juliana. - Então esta ligação é mais profunda onde? – perguntei eu, mas sem esperar por uma resposta coloquei uma seta "a cheio" entre as referências característica e Gauss."	
O professor destaca o conceito de caraterística de uma matriz como meio facilitador da discussão de sistemas de equações lineares: "- Mais … em que é que a característica da matriz me ajuda a ver nos sistemas? … [silêncio]. Na última aula eu fiz um esquema. Se a característica da matriz simples for igual à característica da matriz ampliada […] diz-nos que o sistema é possível … possível e determinado ou possível e indeterminado."	**Ic_{pr}-c**

O professor procura mostrar como o conceito de combinação linear pode funcionar como recurso quanto a uma das diferentes formas de multiplicar matrizes:	
"Revendo os casos, comecei por dizer: - Vocês até fizeram este exercício na aula, que foi o 1.13, em que eu dava-vos aqui … olhem está aqui o conceito de combinação linear. Eu na altura pedi-vos …tentem adaptar esta informação na multiplicação de matrizes."	**Ic_{pr}-c**
Os alunos demonstram reconhecer a subjacência das operações de adição de matrizes e de multiplicação de uma matriz por um escalar, bem como dos sistemas de equações lineares, com o conceito de combinação linear de vetores:	
1. "- Do que agora vocês já sabem, e fizeram bem, digam-me como é que eu posso chegar, usando v_1 e v_2, ao u? - Invertendo e somá-los – começou por dizer o Fernando. - Como combinação linear é sempre a mesma coisa. Por quanto eu multiplico um deles e por quanto eu multiplico o outro para que juntos deem o u - relembrei eu."	
2. "- Mas isto deve dar com algum sistema – disse agora o Fernando. - … (risos, devido a um ruído na sala) - Desenvolve – pedi eu. - Sei lá. Como uma matriz … fazendo uma matriz ampliada com o resultado … se calhar conseguimos descobrir o a, b e c – acrescentou o Fernando. - Isso cheira a algo que sabemos, não? – disse eu. O Fernando tinha acabado de referir o aspeto onde eu pretendia chegar. Disse que continuávamos com a escrita das equações lineares e que o Hélder atrás tinha referido já a primeira. Portanto, seguir-se-ia a resolução de um sistema de equações lineares."	**Ic_{pr}-c** **Ic_{al}-c**

As evidências apresentadas na Tabela 5.36 sugerem que os alunos ladearam o professor sobre quais os conceitos que permitiam a obtenção da caraterística de uma matriz. Mesmo com o professor a dar primazia à obtenção da forma escalonada (Ic_{pr}-c), alguns alunos foram lembrando que o conceito de matriz na forma canónica reduzida por linhas também antecedia o conceito de caraterística de uma matriz (Ic_{al}-c). Foi ainda sugerido pelos alunos, e concretizado pelo professor num mapa conceptual (Figura 5.2), que os métodos de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan estão a montante do estudo da caraterística de uma matriz. Desta forma, estes métodos não devem aqui ser vistos segundo as categorias anteriores Ic_{pr}-p e Ic_{al}-p, mas como conceitos cujo desenvolvimento conduz à possibilidade de investigar o número de pivôs de uma matriz. Com base no conceito de caraterística de uma matriz, o professor acrescentou que este também podia ser visto como recurso, por consideração do seu papel na discussão dos sistemas de equações lineares (Ic_{pr}-c).

Voltando ao conceito de combinação linear de vetores, e sobressaindo a relação entre assuntos de diferentes capítulos, observou-se como um aluno aponta à resolução de um sistema de equações lineares como forma de descobrir os escalares (Ic_{al}-c). Isto, na primeira abordagem que o professor fez quanto à introdução de um procedimento relativo à possibilidade de um vetor poder ou não ser escrito como combinação linear de outros.

Com a alusão a um exercício proposto logo no capítulo inicial, onde aparecia a referência precoce "AX é uma combinação linear das colunas de A", o professor procurou conferir também a este conceito o estatuto de recurso, adiantando a ideia de também ser possível multiplicar matrizes à custa do conceito de combinação linear, quando se trata do produto de uma matriz de qualquer dimensão por uma matriz coluna.

Categorias Ic_{pr}-r e Ic_{al}-r

Segundo as evidências emanadas das narrações multimodais, as relações identificadas em torno de designações ou conceitos que podem ser vistos como diferentes representações do mesmo conceito reportam ao par vetor/matriz coluna e ao trio sistema de equações lineares/forma matricial $AX = B$/matriz ampliada $[A|B]$.

Tabela 5.37: Evidências das categorias Ic_{pr}-r e Ic_{al}-r

Categoria	
Interligação dos conceitos desenvolvida pelo professor	
Representacional	**Ic_{pr}-r**
Interligação dos conceitos conseguida pelos alunos	
Representacional	**Ic_{al}-c**

Evidências	**Categoria**
O professor relaciona o conceito de vetor com o de matriz coluna, algo que se torna natural e percetível para os alunos: 1. "- O vetor *u*, em termos da linguagem das matrizes, como é que eu escrevo? – avancei eu. - Coluna – respondeu logo o David. - Uma matriz linha ou coluna? – insisti eu, percorrendo com o olhar a turma. - Coluna – respondeu a maioria dos alunos, sendo que alguém ainda disse linha." 2. "- Eu escolhi essa forma porque como estamos a trabalhar com matrizes … é natural que fizéssemos dessa forma … – foi dizendo o Paulino."	**Ic_{pr}-r** **Ic_{al}-r**
A discussão de sistemas de equações lineares em função de parâmetros e a aplicação dos métodos de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan induziram a tripla perspetiva do conceito de sistema de equações lineares: "Disse então o Hélder: - Então, se for 0*x* = 0 é um sistema possível e indeterminado. Se for 0*x* igual a outro número qualquer, diferente de zero, é impossível! Com base nesta afirmação, referi que, caso os alunos entendessem que era uma ajuda, poderiam reescrever o sistema de equações lineares a partir da matriz apresentada, como se da fase ascendente do método de eliminação de Gauss se tratasse. Ouvindo as sugestões dos alunos, escrevi no quadro as equações lineares atendendo ao caso que estávamos a discutir e onde sugeri que se substituísse o valor de *b* por 3."	**Ic_{pr}-r** **Ic_{al}-r**

Logo no início, aquando da introdução das definições básicas sobre matrizes, o professor estabeleceu a correspondência entre o conceito de vetor e o conceito de matriz coluna (Ic_{pr}-r). Pela recorrência da escrita das coordenadas de um vetor, esta relação tornou-se evidente para os alunos, assumindo ser natural escrever-se um *n*-uplo sob a forma de matriz coluna por se estar a "trabalhar com matrizes" (Ic_{al}-r). Esta relação foi enfatizada no estudo da teoria dos espaços vetoriais, na medida em que foi praticamente confinado ao espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, continuando os vetores, como elementos dos espaços vetoriais, a serem quase em todas as circunstâncias matrizes coluna.

A discussão de sistemas de equações lineares em função de parâmetros motivou a consideração de diferentes representações dos sistemas de equações lineares. Para algumas concretizações dos parâmetros, os alunos procuraram deduzir as equações lineares a partir da matriz ampliada correspondente (escrita na forma escalonada ou na forma canónica reduzida por linhas) como recolha de indícios quanto ao tipo de sistema de equações lineares que se poderia obter.

No entanto, os alunos revelaram lacunas ao nível da relação entre estes conceitos no sentido matriz ampliada/sistema de equações lineares. Resultou a ideia da memorização das condições que sugeriam cada uma das possibilidades quanto à classificação do sistema de equações lineares correspondente. Como ajuda, o professor lembrou que aquela relação também ocorria na passagem para a fase ascendente no método de eliminação de Gauss (ou de Gauss-Jordan), dando pistas para o possível raciocínio em termos da existência ou não de incógnitas livres.

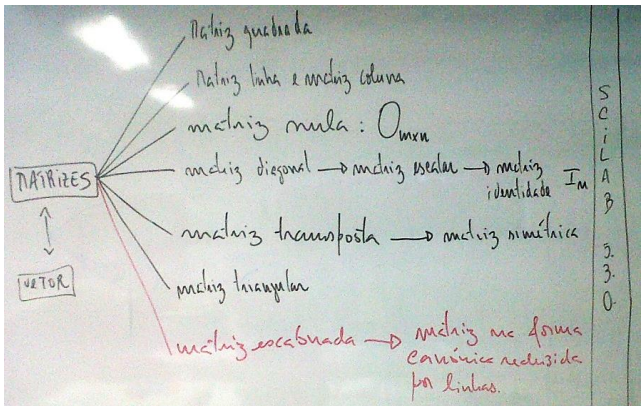
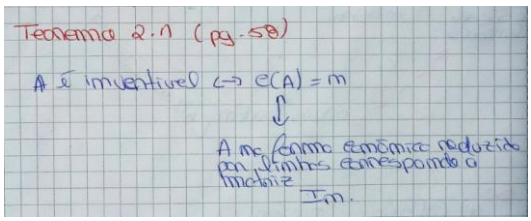
Categorias Ic_{pr}-dpt e Ic_{al}-dpt

As narrações multimodais permitiram obter evidências (Tabela 5.38) que comprovam que as relações indexadas a estas categorias foram estabelecidas sobretudo com base nas próprias definições, mas também com base num teorema. Respeitam a relações entre os diferentes tipos de matrizes e entre conceitos da teoria dos espaços vetoriais (por definição); entre matriz invertível, caraterística de uma matriz e matriz identidade como a forma canónica reduzida por linhas (por meio de um teorema).

Por sua vez, não se descortinaram nas narrações multimodais evidências sobre relações estabelecidas com base em propriedades.

Tabela 5.38: Evidências das categorias Ic_{pr}-dpt e Ic_{al}-dpt

Categoria		
Interligação dos conceitos desenvolvida pelo professor		
	Relacional	**Ic_{pr}-dpt**
Interligação dos conceitos conseguida pelos alunos		
	Relacional	**Ic_{al}-dpt**

Evidências	**Categoria**
O professor, por via da construção de um mapa conceptual, revê e relaciona alguns dos conceitos básicos sobre matrizes, por consideração das definições: 	
O professor destaca a relação entre matriz simples e matriz ampliada de um sistema de equações lineares, por consideração das definições: "A esta matriz procurei associar a ideia de se acrescentar uma coluna à matriz simples, no caso, a referente aos termos independentes."	
O professor relaciona a existência da matriz inversa de uma matriz com a sua caraterística e com a forma canónica reduzida por linhas, por consideração de um teorema: 	**Ic_{pr}-dpt**
O professor explora a relação dos conceitos de espaço vetorial e subespaço vetorial de um espaço vetorial, por consideração da sobreposição de alguns axiomas: "É a definição de subespaço. No fundo é um espaço vetorial por si só, mas que por estar dentro de outro, que apenas se têm que respeitar três axiomas daquela lista de dez, no contexto de espaços vetoriais … e é isso que estamos a verificar – acrescentei eu."	
O professor estabelece o conceito de combinação linear de vetores como conceito central e relacionado com os conceitos de subespaço vetorial gerado, dependência e independência linear de vetores e base: "Em termos da construção do texto, estes vetores seriam considerados em três questões e respetivas subquestões que delineei para acompanhar a exploração dos conceitos de combinação linear, subespaço vetorial gerado, independência e dependência linear e base. Estas questões seriam constantemente revisitadas com o objetivo maior de aclarar as relações entre aqueles conceitos."	

Os alunos revelam dificuldades, no início, em transpor para a resolução de exercícios a relação entre conceitos ditada por um teorema: "Constatando que não estava a conseguir que os alunos apresentassem um raciocínio correto ou que referissem uma forma de usar o teorema anterior, acabei por fazer a referência a este resultado e perguntei como o usar. - A característica – disse de seguida o Patrício. É um aluno pouco participativo, mas revela um bom desempenho. - E tem que ser quanto? – perguntei eu. - Tem que ser … três – respondeu o Patrício, com o Hélder a sugerir o mesmo."	**Ic_{al}-dpt**

No início da aula subsequente à introdução da maioria das definições básicas sobre matrizes, o professor procedeu à sua revisão, procurando destacar os conceitos relacionados. Por meio da construção de um mapa conceptual, o professor foi pedindo aos alunos que avançassem com as diferentes designações que se lembravam e organizou-as de modo a destacar algumas das relações que as definições estabeleciam. Passou a ser evidente o afunilamento desde o conceito de matriz diagonal até ao conceito de matriz identidade, o requisito para uma matriz ser simétrica com base no conceito de matriz transposta e o prolongamento da forma escalonada de uma matriz à sua forma canónica reduzida por linhas, por acréscimo de dois requisitos (Ic_{pr}-dpt).

A resolução do Exercício 1.2 permitiu mostrar o conhecimento dos alunos em torno destas definições e das relações subjacentes. Mesmo com a dificuldade colocada pela consideração da matriz nula, os alunos identificaram corretamente todas as designações que esta matriz podia abarcar. Convém ainda ressalvar que a estratégia anteriormente referida de encontrar a forma canónica reduzida por linhas de uma matriz anulando logo em cada coluna os elementos acima e abaixo do pivô 1 (em vez de primeiro encontrar-se a forma escalonada e depois, operando da coluna mais à direita para a esquerda, encontrar-se a forma canónica reduzida por linhas) esconde o sentido da relação entre as duas formas e pode contribuir para que os alunos não tenham presente esta relação.

Sobre os conceitos de matriz simples e matriz ampliada, no contexto do estudo dos sistemas de equações lineares, o professor enfatizou a diferença ao nível do acréscimo de uma nova coluna. Noutro sentido, apontando às semelhanças, destacou que os axiomas associados à definição de subespaço vetorial também constavam na lista dos dez axiomas da definição de espaço vetorial, como forma de clarificar como os conceitos se relacionavam (Ic_{pr}-dpt).

Sobre os restantes conceitos da teoria dos espaços vetoriais, o professor procurou destacar a proximidade entre eles e a posição central ocupada pelo conceito de combinação linear de

vetores (Ic_{pr}-dpt). As questões e subquestões transversais aos diferentes conceitos que o professor explorou permitiram a observação da recorrência da aplicação do conceito de combinação linear de vetores e qual a informação precedente e necessária que cada conceito seguinte requeria. Ainda para reforçar a relação entre os conceitos, o professor tinha planeado introduzir expressões alusivas aos conceitos de subespaço vetorial gerado e conjunto de vetores geradores logo na abordagem do conceito de combinação linear, mas na aula tal acabou por não acontecer.

Uma vez formalizado e esquematizado um teorema que relacionava os conceitos de matriz invertível, caraterística de uma matriz e matriz identidade como a forma canónica reduzida por linhas, o professor avançou com a proposta de um exercício de aplicação (Exercício 2.27). Observou-se que os alunos, mesmo com a proximidade das situações, não foram capazes de recorrer à informação fornecida e ditada pelo teorema. Só depois da referência àquele resultado, por parte do professor, os alunos conseguiram chegar à conclusão de a determinação dos parâmetros para que a matriz fosse invertível pressupor a articulação com o conceito de caraterística da matriz. Esta situação sugere que, embora os teoremas tornem bastante claro possíveis relações entre conceitos, não é imediata a capacidade dos alunos para porem em prática a informação resultante daqueles resultados.

5.6 Dimensão *Alcance do formalismo*

A literatura relaciona a questão do formalismo da álgebra linear principalmente com o estudo da teoria dos espaços vetoriais. Sobre este tema, as narrações multimodais permitem inferir as dificuldades reveladas pelos alunos na aprendizagem do conceito de subespaço vetorial de um espaço vetorial e a ação do professor e atitude dos alunos em torno da introdução dos conceitos de combinação linear de vetores e de subespaço vetorial gerado (Tabela 5.39).

Na fase de planeamento da investigação, a atenção quanto ao formalismo levou-nos à opção pela omissão das demonstrações e, em alternativa, pela inclusão da ilustração de algumas propriedades. A falta de evidências nas narrações multimodais comprova o primeiro ponto, mas omite a ilustração de propriedades que foi considerada noutras aulas, parte delas considerando o recurso ao Scilab.

Em linha com uma das recomendações do LACSG, o professor seguiu a opção de minimizar a incursão pelas abstrações e generalizações. A análise anterior de outras dimensões comprova a mudança do foco para a abordagem dos conceitos segundo uma componente mais prática.

Tabela 5.39: Categorias emergentes da dimensão *Alcance do formalismo*, codificação e breve descrição

Dimensão: *Alcance do formalismo*			
Categorias			**Descrição**
Estratégias que contornam o formalismo			
	Motivação de uma ideia por meio da discussão de casos ou abordagem prática	**F-e-mi**	Formas adotadas pelo professor de aproximação à formalização de alguns conceitos.
	Formalização dos conceitos	**F-e-fc**	Momento da aula em que o professor decide (ou não) formalizar um conceito, em concomitância com a estratégia delineada.
Obstáculo do formalismo e outras dificuldades		**F-ofd**	Dificuldades coincidentes com o obstáculo do formalismo e natureza de outras dificuldades observadas.

Categorias F-e-mi e F-e-fc

As evidências associadas às categorias F-e-mi e F-e-fc extraídas das narrações multimodais (Tabela 5.40) centram-se nos processos de formalização da multiplicação de matrizes, dos métodos de resolução de sistemas com *m* equações e *n* incógnitas e dos conceitos de combinação linear de vetores e de subespaço vetorial gerado.

Tabela 5.40: Evidências das categorias F-e-mi e F-e-fc

Categoria		
Estratégias que contornam o formalismo		
	Motivação de uma ideia por meio da discussão de casos ou abordagem prática	**F-e-mi**
	Formalização dos conceitos	**F-e-fc**

Evidências	**Categoria**
O professor formaliza um algoritmo para a multiplicação de matrizes como consequência do trabalho dos alunos na resolução de uma tarefa:	
1. "[…] dizendo que antes de saberem multiplicar matrizes e sem eu apresentar um algoritmo, os alunos iriam ser desafiados a responder a uma tarefa, para no final se discutirem os resultados e, consequentemente, se formalizar um algoritmo para a multiplicação de matrizes."	**F-e-mi** **F-e-fc**

2. "O impasse foi desbloqueado quando o Fernando, a meu pedido, propôs que se multiplicasse cada elemento da primeira linha da primeira matriz com cada elemento da primeira coluna da segunda matriz."	**F-e-mi**
O professor, por meio da proposta de resolução de uma tarefa, conduz os alunos à obtenção de um sistema com um grande número de equações e de incógnitas; a partir das limitações dos métodos conhecidos, formaliza o método de eliminação de Gauss (e de Gauss-Jordan) para a resolução de qualquer sistema de equações lineares:	
1. "[…] acerca da realização de uma tarefa relacionada com as leis de Kirchhoff. Avancei que o propósito era o de nos depararmos com sistemas de equações lineares com um grande número de equações e de incógnitas […]."	**F-e-mi**
2. "Finalizei esta parte da aula, afirmando que a articulação do método de substituição com este último seria a base do método de eliminação de Gauss, cuja aprendizagem se seguia. Perto de metade do tempo da aula, avancei para a formalização do método de eliminação de Gauss, reiterando a importância do assunto na aprendizagem da álgebra linear."	**F-e-mi** **F-e-fc**
O professor desenvolve a ideia intuitiva de combinação linear de vetores em diferentes capítulos, julgando todo o trabalho realizado suficiente para contornar a apresentação formal do conceito:	
1. "Em dois momentos do texto, em capítulos anteriores, tinha colocado a referência a combinações lineares com o objetivo de o leitor ganhar alguma familiaridade com a designação. Também na aula explorei esses casos, pelo que podia pressupor que o conceito não era, no momento, inteiramente novo para os alunos."	**F-e-mi**
2. "[…] explorei três questões e respetivas respostas, com o objetivo de estabelecer o conceito de combinação linear e procedimentos associados."	**F-e-mi**
3. "Tinha planeado formalizar o conceito de combinação linear de vetores, uma vez exploradas as três questões, mas optei por não o fazer. Entendi que no momento os alunos já tinham a noção do conceito e conseguiam realizar o procedimento analítico associado."	**F-e-fc**
O professor introduz intuitivamente o conceito de subespaço vetorial gerado, a partir da investigação da possibilidade de escrever qualquer vetor representado num referencial como combinação linear de vetores pré-estabelecidos:	
"Considerei ter chegado ao momento de colocar a questão que eu considerava central para desvendar o conceito de subespaço vetorial gerado. - Usando o v_1 e v_2 consigo chegar a qualquer um dos pontos assinalados? Será que existe uma combinação linear para isso?"	**F-e-mi**

A multiplicação de matrizes foi introduzida a partir da proposta do professor para a realização de uma tarefa que orientava para a possibilidade de inferir um algoritmo que estabelecesse a forma como a operação se processava (F-e-mi). O desempenho dos alunos ficou aquém do esperado, com apenas parte deles a conseguir responder à primeira subtarefa e ninguém a conseguir apresentar uma resposta (ou mesmo um esboço) à segunda subtarefa. Esperava-se que os alunos, na primeira subtarefa, por meio do conceito imagem construído

sobre o produto interno de vetores, encontrassem facilmente a forma "linha por coluna" para a multiplicação de matrizes.

Na fase de discussão da tarefa, os contributos dos alunos e as explicações do professor para desmontar toda a informação permitiram chegar ao consenso sobre como realizar a multiplicação de matrizes. Dando por terminada a tarefa, o professor avançou com a formalização da multiplicação de matrizes, segundo o algoritmo (mais comum) que considera a multiplicação de cada linha da primeira matriz pelas colunas da segunda matriz (F-e-fc). Tal como constava no texto de álgebra linear, o professor esquematizou como um elemento da matriz produto C era obtido a partir das matrizes A e B e ainda reviu a informação introduzida durante a realização da tarefa sobre os critérios para esta operação estar bem definida.

Com a proposta de resolução da tarefa "Ponte de Wheatstone", o professor proporcionou a obtenção de um sistema com um número de equações lineares e de incógnitas maior do que era familiar aos alunos (F-e-mi). Continuando a abordagem a incidir em pressupostos concretos e do conhecimento dos alunos, o professor passou para a exploração das limitações dos métodos conhecidos relativos à resolução de sistemas de equações lineares – método gráfico, método de substituição e método de adição ordenada – para aí encontrar uma base para a formalização do método de eliminação de Gauss (e de Gauss-Jordan) (F-e-mi). Neste processo, com a exploração paralela de um exemplo (F-e-fc), o professor destacou a proximidade da fase descendente com o método de adição ordenada e a fase ascendente com o método de substituição.

A formalização do conceito de combinação linear de vetores foi preparada à distância. Com a associação à multiplicação de matrizes e à resolução de sistemas de equações lineares em capítulos anteriores ao estudo da teoria dos espaços vetoriais, o professor procurou que os alunos desenvolvessem progressivamente o sentido do conceito. A anteceder o momento da sua formalização, foram exploradas três questões que permitiram estudar diversas possibilidades de vetores de $\mathbb{R}^3$ poderem ou não ser escritos como combinação linear de outros, a par do seu significado geométrico (F-e-mi). A realização de todo este trabalho em torno do conceito, com a recorrente aplicação da expressão da combinação linear de vetores, levou o professor a dar como adquirido a apropriação do conceito por parte dos alunos e a omitir a sua apresentação formal (F-e-fc).

A continuidade da exploração do conceito de combinação linear de vetores, a partir de vetores representados em dois referenciais e da observação do conjunto de todas as suas

combinações lineares, definiu o ponto de partida considerado pelo professor para a formalização do conceito de subespaço vetorial gerado (F-e-mi).

Categoria F-ofd

Segundo Dorier et al. (2000a), o obstáculo do formalismo deriva do conhecimento insuficiente de alguns pré-requisitos (entre eles, a competência relacionada com a manipulação de expressões algébricas), o que conduz ao "afastamento" dos alunos da parte mais abstrata da álgebra linear.

A Tabela 5.41 reúne evidências que encontram o obstáculo do formalismo e dão nota da dificuldade dos alunos com a parte mais formal dos conceitos, nomeadamente de espaço e subespaço vetorial.

Tabela 5.41: Evidências da categoria F-ofd

Categoria Obstáculo do formalismo e outras dificuldades **F-ofd**	
Evidências	**Categoria**
Os alunos revelam dificuldades na manipulação de expressões algébricas: 1. "Um aspeto que começava a ser recorrente era o da dificuldade de os alunos escreverem o sistema de equações lineares na forma canónica." 2. "A dúvida inicial do Fernando prendia-se com como conseguir que os elementos $\alpha + 3$ e β passassem a ser um […]".	
Os alunos revelam dificuldades em perceber o significado dos axiomas de espaço e subespaço vetorial e da simbologia associada: "Começando por atender ao axioma sobre o vetor nulo pertencer ao conjunto, logo se desvendaram algumas das confusões criadas pelos alunos. - Então que me dizem? Qual é a perspetiva de eu verificar este axioma? - Tem que ser tudo zero – sugeriu o Hélder. - Ou … quem é este V, Hélder, neste momento? Este V aqui é o quê? – perguntei eu, apontando para a expressão $0_V \in V$ que ainda estava escrita no quadro. - Um vetor – disse a Juliana, entrando também na discussão. - É o *x*, *y*, *z*, não é? – respondeu o Hélder. - Não! – disse eu, num tom de alarme. – Este é o espaço vetorial V genérico – referi eu."	**F-ofd**

Com a análise da dimensão *Conhecimento dos pré-requisitos*, ficaram patentes as dificuldades dos alunos no desenvolvimento de raciocínios abstratos e a propensão para raciocinar em termos concretos. Enquadrado com o que a literatura rotula de obstáculo do formalismo, o domínio por parte dos alunos na manipulação algébrica de expressões revelou-se insuficiente. O facto mais marcante foi a dificuldade de escreverem equações na forma

canónica, quando o trabalho pressupôs a consideração de variáveis fora do comum. Outros, foram ao nível da validação algébrica dos axiomas de espaço e subespaço vetorial e da realização de operações elementares sobre linhas de matrizes contendo parâmetros

As dificuldades dos alunos na validação dos axiomas de espaço e subespaço vetorial não se confinam ao domínio da manipulação algébrica de expressões. A evidência apresentada sugere que os alunos memorizam o que devem fazer para validar os axiomas como forma de lutar contra o caráter abstrato do conceito. Quando interpelados, debitam informações avulsas e desajustadas de cada um dos axiomas, denotando não terem a real perceção sobre o significado de cada um e, por inerência, do procedimento que possibilita a sua verificação ou validação (F-ofd).

5.7 Dimensão *Atenção nas linguagens e múltiplas representações dos conceitos*

A literatura reconhece unanimemente a existência de três linguagens distintas da álgebra linear, embora com variações ao nível das designações e dos limites de cada uma. Para a análise da presente dimensão consideraremos a distinção entre linguagem geométrica, linguagem algébrica e linguagem formal, mas com uma visão ampla e abarcando os pressupostos dos três modos de descrição dos objetos e operações da álgebra linear de Hillel (2000) (modo geométrico, modo algébrico e modo abstrato), dos três modos do pensamento de Sierpinska (2000) (sintético-geométrico, analítico-aritmético e analítico-estrutural) e dos três mundos da matemática de Tall (2004) (corporizado, simbólico e formal).

O foco da análise incide principalmente na exploração, por parte do professor, dos diversos conceitos de álgebra linear em concomitância com o(s) tipo(s) de linguagem que se considerou possível. Por inerência, estão subjacentes as diferentes representações possíveis para determinados conceitos, consoante o tipo de linguagem. Assim, a atenção não passa por conceitos que têm diferentes representações dentro da mesma linguagem: por exemplo, importa destacar a possibilidade de um segmento orientado ser representado geometricamente e em termos das suas coordenadas e não a possibilidade, dentro da linguagem algébrica, de ser representado por meio de uma matriz coluna ou por meio de um *n*-uplo.

No âmbito da dimensão *Uso da tecnologia*, foi objeto de análise como o professor se apoiou no *software* para a exploração geométrica de alguns conceitos, tendo-lhe sido associadas, como contributo, as funções de descoberta de novos conceitos e de clarificação de aspetos teóricos. Não obstante a proximidade das evidências destacadas das narrações multimodais, agora a atenção recai nos conceitos que o professor lecionou e aos quais associou, entre outras, a linguagem geométrica.

Quanto ao processo de criação das categorias, observou-se não haver evidências que sugerissem a articulação entre, e somente, as linguagens geométrica e formal. Essa articulação é muito natural e é apontada por Sierpinska (2000), quando se refere ao "grau de parentesco" entre os modos de pensamento sintético-geométrico e analítico-estrutural, por terem em comum a incidência em propriedades e não em cálculos. No nosso caso, embora essa articulação seja evidente, as narrações multimodais eliciaram que a possibilidade da associação das linguagens geométrica e formal a alguns conceitos também se estendeu à linguagem algébrica.

No processo de categorização surgiu ainda uma categoria que se apropriou da designação "versatilidade representacional", que não é da nossa autoria e a qual se deve a Stewart e Thomas (2007).

Na Tabela 5.42 constam as categorias que emergiram das narrações multimodais, acompanhadas da respetiva codificação e da descrição sucinta do significado de cada uma.

Tabela 5.42: Categorias emergentes (*Atenção nas linguagens e múltiplas representações dos conceitos*), codificação e breve descrição

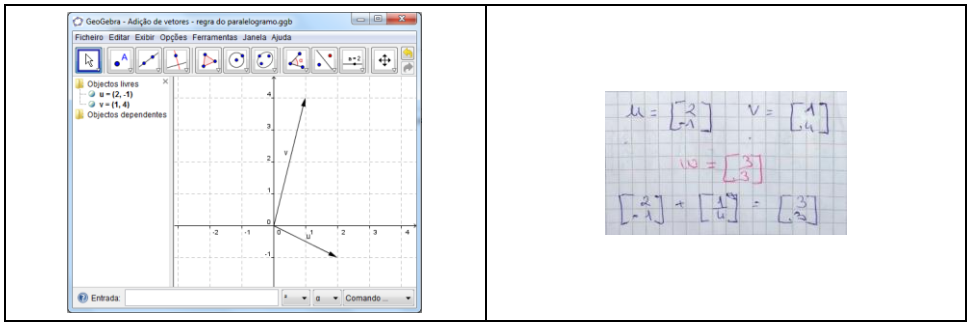
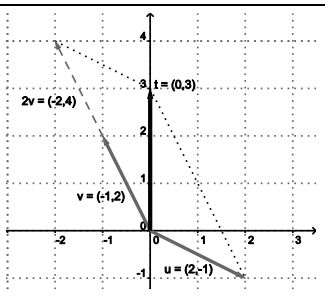
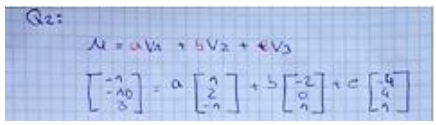
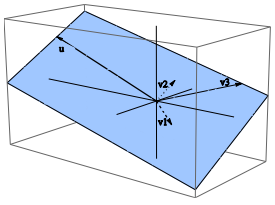
Dimensão: *Atenção nas linguagens e múltiplas representações dos conceitos*		
Categorias		**Descrição**
Conceitos enquadrados em múltiplas linguagens		
Geométrica/algébrica	**L-m-ga**	Abordagem e referência aos conceitos nas linguagens geométrica e algébrica.
Algébrica/formal	**L-m-af**	Abordagem e referência aos conceitos nas linguagens algébrica e formal.
Geométrica/algébrica/formal	**L-m-gaf**	Abordagem e referência aos conceitos nas linguagens geométrica, algébrica e formal.
Versatilidade representacional por parte dos alunos	**L-m-vr**	Capacidade dos alunos para compreender um conceito numa determinada linguagem e convertê-lo numa outra.
Conceitos enquadrados numa linguagem	**L-u**	Abordagem e referência aos conceitos confinada a uma única linguagem.

Categoria L-m-ga

Na tabela 5.43 são apresentadas, sob a forma de figura, as evidências que comprovam quais os conceitos lecionados pelo professor que configuram a articulação entre a linguagem geométrica e a linguagem algébrica, com destaque para a combinação linear de vetores do espaço bi e tridimensional.

Tabela 5.43: Evidências da categoria L-m-ga

Categoria Conceitos enquadrados em múltiplas linguagens		
	Geométrica/Algébrica	**L-m-ga**

Evidências	**Categoria**
O professor desenvolve geométrica e algebricamente o conceito de combinação linear de vetores e algumas operações com matrizes: 1.  2. *Dada uma matriz* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{K})$, *com colunas* $v_1, \ldots, v_n$, *e uma matriz coluna* $X \in M_{m\times 1}(\mathbb{K})$, *tal que* $$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix},$$ *tem-se* $AX = x_1 \times v_1 + x_2 \times v_2 + \cdots + x_m \times v_n$ *e diz-se que AX é uma combinação linear das colunas de A.*   	**L-m-ga**

Como estratégia de introdução de duas das operações com matrizes, o professor destacou, a partir de dois vetores representados no plano, a conversão da adição geométrica de vetores na adição de matrizes coluna e a conversão da multiplicação geométrica de um vetor por um escalar na multiplicação de uma matriz coluna pelo mesmo escalar (L-m-ga). A "visão"

geométrica e algébrica destas operações, ora com segmentos orientados, ora com matrizes coluna, continuou a merecer a atenção no contexto da aproximação ao estudo dos sistemas de equações lineares e na exploração dos conceitos de combinação linear de vetores e de subespaço vetorial gerado.

Tal como referido anteriormente (subcapítulo 5.5), o conceito de combinação linear de vetores foi relacionado precocemente com a multiplicação de uma matriz qualquer por uma matriz coluna – emergindo o cariz algébrico do conceito – e também relacionado com a resolução de sistemas até três equações e três incógnitas – emergindo o cariz geométrico do conceito (L-m-ga). No âmbito do estudo da teoria dos espaços vetoriais, o conceito de combinação linear de vetores continuou confinado às linguagens geométrica e algébrica.

A aposta clara do professor na consideração de vetores de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$ levou, em termos geométricos, à discussão da possibilidade de um vetor escrever-se como combinação linear de outros face à posição relativa de todos os vetores no plano e no espaço. Para além de recorrer ao *software* para a obtenção das construções, o professor procurou desenvolver a intuição geométrica do conceito a partir de vetores representados por marcadores ou canetas, de planos representados pelo quadro ou paredes e de vetores representados sobre um mapa.

Para marcar a mudança de linguagem, o professor referiu recorrentemente tratar-se ou seguir-se a interpretação geométrica do conceito, em contraposição com as referências "procedimento analítico" ou "matematicamente" como alusão à consideração da linguagem algébrica. Esta última linguagem ganhou forma como o meio para a resolução de exercícios relacionados com o conceito de combinação linear de vetores. O trabalho do professor foi desenvolvido mais em termos de transformar a expressão algébrica deste conceito num *proceito* (Gray & Tall, 1994), sugerindo simultaneamente tratar-se da sua simbolização (facto suficiente para não ser abordado em termos da linguagem formal) e do processo a executar sem ter que se pensar muito no seu significado (substituir os vetores na expressão, resolver um sistema de equações lineares e concluir face à obtenção de um sistema de equações lineares possível ou impossível).

Aparentemente, a resolução de sistemas de equações lineares entrava nesta categoria. No entanto, a revisão do método gráfico apenas serviu para justificar a aprendizagem de um método "mais abrangente", pelo que não foi considerado pelo professor como algo que os alunos tinham que dominar.

Categoria L-m-af

A simultaneidade das linguagens algébrica e formal foi observada em torno do procedimento e resultados sobre a determinação da matriz inversa de uma matriz invertível, tal como sugerem as evidências apresentadas na Tabela 5.44.

Tabela 5.44: Evidências da categoria L-m-af

Categoria		
Conceitos enquadrados em múltiplas linguagens		
	Algébrica/Formal	**L-m-af**

Evidências	**Categoria**
O professor aborda a procura da matriz inversa duma matriz invertível nas linguagens algébrica e formal:	
1. "Em primeiro lugar referi que se ampliou a matriz A com a matriz identidade de igual ordem. Destaquei que, por meio de operações elementares sobre linhas, o objetivo passava por encontrar a forma canónica reduzida por linhas da matriz $[A\|I_n]$."	**L-m-af**
2. **Teorema 2.1.** Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{K})$. As seguintes afirmações são equivalentes: 1. A é invertível; 2. $c(A) = n$; 3. I_n é a forma canónica reduzida por linhas de A.	

A definição de matriz invertível e o procedimento introduzido para a sua determinação conferem o cariz algébrico da abordagem delineada. Os exemplos e a resolução de exercícios relacionados com a procura da matriz inversa de uma matriz invertível enfatizaram a exploração do conceito levada a cabo pelo professor, em termos da linguagem algébrica.

Mais próximo das atribuições de Sierpinska (2000) e de Tall (2004) à parte mais formal da linguagem da álgebra linear, em que os objetos são apresentados em termos das suas propriedades e deduzidos a partir de axiomas ou teoremas, o professor relacionou a determinação da matriz inversa de uma matriz invertível com a sua caraterística e a forma canónica reduzida por linhas (L-m-af). No entanto, a atenção do professor nesta parte foi mínima, tendo apenas proposto a resolução de um exercício (Exercício 2.27), no qual, para a determinação de parâmetros de modo que a matriz apresentada fosse invertível, era necessário que os alunos deduzissem que o caminho passava pela discussão da sua caraterística.

Categoria L-m-gaf

De acordo com a Tabela 5.45 apresentada a seguir, as linguagens geométrica, algébrica e formal foram consideradas simultaneamente na abordagem dos conceitos de vetor, subespaço

vetorial de um espaço vetorial, subespaço vetorial gerado e na discussão de sistemas de equações lineares.

Sobre o conceito de vetor, o professor começou pela sugestão da escrita das coordenadas de um vetor sob a forma de matriz coluna. Para além desta representação de vetor, no âmbito da linguagem algébrica, o professor recorreu a vetores representados em diferentes referenciais para criar a oportunidade de explorar outros conceitos. Posteriormente, aquando da introdução da definição de espaço vetorial, o conceito de vetor como elemento de um espaço vetorial, particularmente de $\mathbb{R}^n$, passou a ser enquadrado na linguagem formal (L-m-gaf).

Esta possibilidade de ver um vetor segundo as diferentes linguagens é reforçada pelo trabalho de Stewart e Thomas (2009), onde aparece a referência cruzada das diferentes representações do conceito de vetor segundo os diferentes estágios da teoria APOE e os três mundos da matemática de Tall (2004).

Tabela 5.45: Evidências da categoria L-m-gaf

Categoria		
Conceitos enquadrados em múltiplas linguagens		
	Geométrica/Algébrica/Formal	**L-m-gaf**

Evidências	**Categoria**
O professor agrupa, quanto às diferentes representações de vetores, os segmentos orientados, as matrizes coluna e os elementos de um espaço vetorial: 1. "[…] a partir de dois vetores representados, primeiro numa malha, depois num referencial cartesiano […]" 2. "[…] escrevi no quadro a matriz coluna correspondente às coordenadas do vetor […]" 3. "Nós designamos por vetor nulo … por exemplo, o vetor nulo de $\mathbb{R}^2$ é o ponto … […]"	
O professor estende a discussão de sistemas de equações lineares às diferentes linguagens: 1. "De forma análoga, estendi a discussão de sistemas de equações lineares com três equações e três incógnitas à posição relativa de planos no espaço. Neste contexto, recorri a conceções geométricas intuitivas, usando como diferentes representações de planos, as paredes da sala, o chão, o teto, os tampos das mesas e folhas de papel." 2. "Questionando a seguir os alunos se o sistema de equações lineares seria possível e indeterminado ou qual a condição que consideravam, logo o Hélder avançou que a equação linear respetiva teria que ser $0z = 0$." 3. "Quanto à conclusão, passava por continuar a aferir se o sistema de equações lineares era possível."	**L-m-gaf**

O professor começa por referir os axiomas de subespaço vetorial de um espaço vetorial em termos da linguagem formal e depois estende a verificação dos axiomas às linguagens geométrica e algébrica: 1. "Repeti que qualquer que fosse o ente geométrico que representasse um conjunto, este apenas incluiria o vetor nulo se passasse na origem." 2. "Depois de registar no quadro dois vetores genéricos u e v, solicitei a procura do vetor soma, repetindo como teria que ser tal vetor para que também pertencesse a H_1. **O professor deduz o conceito de subespaço vetorial gerado a partir do conceito de combinação linear de vetores:** 1. "[…] explorei a ideia do conjunto de todas as combinações lineares daqueles, ou como chegar a todos os pontos da malha ou do referencial cartesiano." 2. "Sobre a expressão para a combinação linear de um vetor genérico, lembrei que no subcapítulo anterior atendíamos à combinação linear de um vetor conhecido, o que não era agora o caso."	**L-m-gaf**

A discussão de sistemas de equações lineares começou por ser explorada à luz da linguagem geométrica. Aproveitando o conhecimento adquirido anteriormente pelos alunos, o professor realçou a associação da posição relativa de retas e de planos à classificação de sistemas de equações lineares com duas e com três incógnitas. Na maioria das situações seguintes e relacionadas, o professor foi repetidamente desafiando os alunos para se pronunciarem sobre a interpretação geométrica do conjunto solução obtido.

Com a consideração de sistemas de equações lineares envolvendo parâmetros, a discussão passou a ser enquadrada na linguagem algébrica (L-m-gaf). Independentemente de ter ou não que se encontrar a forma escalonada ou a forma canónica reduzida por linhas da matriz ampliada, o cariz da primeira estratégia seguida pelo professor (por influência das propostas dos alunos) foi puramente algébrico. A discussão assentou na identificação das condições que conduziam à informação sobre os valores dos parâmetros, de modo a percorrer as diferentes possibilidades quanto à classificação do sistema de equações lineares.

A discussão dos sistemas de equações lineares resolvidos, como cálculo auxiliar, na investigação da possibilidade de um vetor poder ser escrito como combinação linear de outros ou na determinação do subespaço vetorial gerado por um conjunto de vetores passou a ser vista em termos da linguagem formal (L-m-gaf). Tal como assegura Sierpinska (2000), a atenção nas condições sobre a matriz A e a matriz $[A|B]$ para a existência de solução evidencia o uso da linguagem formal, por "as propriedades das matrizes serem mais importantes que a natureza numérica dos seus componentes" (p. 235).

O conceito de subespaço vetorial de um espaço vetorial começou por ser apresentado em termos da linguagem formal, dada a atenção nos axiomas que derivavam do conceito de espaço vetorial. A partir daí, o professor apoiou-se na linguagem algébrica (L-m-gaf) quando apresentou uma forma de validar os axiomas analiticamente, partindo da representação paramétrica do conjunto e verificando se o vetor nulo do espaço vetorial considerado pertencia ao conjunto e se para quaisquer vetores genéricos o conjunto era fechado para a adição e para a multiplicação por um escalar. Em paralelo, o professor mostrou a representação geométrica da maioria dos conjuntos candidatos a serem subespaço vetorial do espaço vetorial considerado e procurou que os alunos assimilassem a validação geométrica dos axiomas (L-m-gaf).

Uma vez que o conceito de combinação linear de vetores foi abordado a partir da consideração das linguagens geométrica e algébrica e que o conceito de subespaço vetorial gerado foi introduzido a partir da generalização do conjunto de todas as combinações lineares dos vetores considerados, fica também presente que o professor invocou as três linguagens na introdução e exploração do conceito de subespaço vetorial gerado (L-m-gaf).

Categoria L-m-vr

Na Tabela 5.46 são apresentadas algumas evidências sobre a capacidade demonstrada pelos alunos quanto à compreensão de alguns conceitos na linguagem geométrica e na respetiva conversão noutras linguagens. As evidências destacam ainda que a articulação menos conseguida pelos alunos é entre a linguagem algébrica e a linguagem formal.

Tabela 5.46: Evidências da categoria L-m-vr

Categoria		
Conceitos enquadrados em múltiplas linguagens		
	Versatilidade representacional por parte dos alunos	**L-m-vr**

Evidências	**Categoria**
Os alunos revelam maior domínio na articulação da linguagem geométrica com as restantes, comparativamente com a articulação entre a linguagem algébrica e a linguagem formal:	
1. "Usando um vetor *u* de coordenadas (-2,1), fui questionando os alunos sobre a representação geométrica ou gráfica de alguns múltiplos daquele vetor. Os alunos iam respondendo corretamente, inclusive falando em termos das suas coordenadas."	**L-m-vr**
2. "[…] os alunos disseram que os planos se intersetavam numa reta e que o sistema de equações lineares seria possível e indeterminado."	

3. "- O que vos parece, é subespaço ou não é subespaço? Vamos ao primeiro axioma. A origem está lá? - Está – responderam alguns alunos. […] - Por exemplo, se somar um vetor da interseção com outro vetor da interseção, sai desta reta? - Não – disse eu e apenas mais um aluno. – Se eu multiplicar um vetor por um escalar, sai desta reta? - Não – agora ouviram-se mais alunos a falar. - Não! Conclusão? Já sabem se é subespaço ou não é! O que é que dizem? - É – ouviu-se."	**L-m-vr**
4. "O aluno viu que tinha dois valores para o escalar a e orientei-o de modo a concluir que este facto era coerente com a interpretação geométrica inicial."	
Os alunos revelam dificuldades de compreensão do conceito de subespaço vetorial de um espaço vetorial na linguagem algébrica: "Disse-lhe que passava pela escolha de um vetor genérico e a multiplicação por um escalar, por exemplo c. Escrevendo no quadro, conduzi os alunos a concluírem que o vetor resultante não pertencia a H_1, embora continuasse a reparar na dificuldade generalizada dos alunos na verificação algébrica dos axiomas."	

A partir do conceito de subespaço vetorial de um espaço vetorial apresentado em termos da linguagem formal, os alunos revelaram posteriormente maior facilidade em compreender o conceito na linguagem geométrica do que na linguagem algébrica (L-m-vr). A partir das imagens obtidas essencialmente no Mathematica, os alunos foram conseguindo falar em termos do significado geométrico de cada um dos três axiomas.

No entanto, tal como já foi referido anteriormente na questão do formalismo associado a este conceito, o simbolismo inerente à linguagem algébrica conduziu a um obstáculo difícil de superar (L-m-vr). Como consequência, a facilidade dos alunos para observar, por exemplo, se a soma de dois vetores representados sobre uma reta ou um plano continuava a pertencer ou não a esse ente geométrico era contraposta pela dificuldade de compreender e desenvolver algebricamente a expressão $u + v \in H$.

Os alunos não revelaram qualquer dificuldade em lidar com vetores representados no plano e no espaço, bem como com a sua representação sob a forma de uma matriz coluna. Também decorrente do conhecimento sobre geometria analítica adquirido anteriormente, os alunos conseguiram corresponder ao desafio lançado inúmeras vezes pelo professor na interpretação geométrica do conjunto solução de um sistema de equações lineares. A capacidade dos alunos para articular cabalmente a linguagem geométrica com a linguagem algébrica refletiu-se também com o conceito de combinação linear de vetores (L-m-vr). A partir de imagens com vetores de $\mathbb{R}^2$ e de $\mathbb{R}^3$, os alunos começaram a antever com facilidade e

espontaneidade a possibilidade de um vetor poder ser escrito ou não como combinação linear dos restantes. No sentido inverso, na resposta à questão sobre o sistema de equações lineares construído para o estudo da existência dos escalares ser possível ou não, os alunos conseguiram complementá-la com o seu significado geométrico (L-m-vr).

Categoria L-u

Muito do trabalho realizado com matrizes desenvolveu-se estritamente segundo a linguagem algébrica. Tal como eliciam as evidências apresentadas na Tabela 5.47, a operação de multiplicação de matrizes e a resolução de sistemas de equações lineares pelos métodos de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan consubstanciam este facto.

Tabela 5.47: Evidências da categoria L-u

Categoria Conceitos enquadrados numa linguagem	**L-u**

Evidências	**Categoria**
O professor destaca o caráter algébrico das operações com matrizes: "Entretanto lembrei-me que era importante que os alunos tivessem conhecimento do processo de resolução de exercícios que envolvessem operações algébricas com matrizes, mas no contexto da resolução de uma equação matricial." **O professor centra na linguagem algébrica a resolução de sistemas de equações lineares:** "Ainda faltava escrever o sistema de equações lineares na forma *AX = B* para acabarem a resposta à Subtarefa 2. Quando ia falar no que faltava na resposta, decidi sugerir que avançassem logo para a subtarefa seguinte e que começassem por escrever a matriz ampliada [A|B]."	**L-u**

As operações de adição de matrizes e de multiplicação de matrizes por um escalar foram generalizadas a partir das mesmas operações sobre matrizes coluna, por correspondência com as operações conhecidas sobre vetores definidos em termos das suas coordenadas. Esta generalização assentou na ideia de adicionar os elementos das matrizes que ocupam a mesma posição e de multiplicar todos os elementos da matriz pelo escalar. Acrescentando-se a multiplicação de matrizes, resulta a evidência de as operações entre matrizes serem implicadas unicamente na linguagem algébrica (L-u). A partir de exemplos de matrizes, expressões do tipo $BC - 2I_2$ e a resolução de equações matriciais passaram a definir o trabalho de natureza algébrica em torno das diferentes operações.

A resolução de sistemas de equações lineares, remetida para a aplicação dos métodos de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan, ficou também confinada à linguagem algébrica (L-u).

Sierpinska (2000) considera que quando se escreve um sistema de equações lineares na forma matricial $AX = B$ ou na forma vetorial $x_1A_{1+\ldots+}x_nA_n = B$, está-se a pensar em termos do ponto de vista analítico-estrutural. Pelo facto do professor não ter destacado estas representações e, tal como aconteceu na resolução da tarefa "Ponte de Wheatstone, passar logo do sistema de equações lineares para a escrita da matriz ampliada, saiu reforçada a opção pela resolução de sistemas de equações lineares unicamente no contexto da linguagem algébrica.

6 Reflexão: contributos para o ensino dos conceitos de álgebra linear

> *[...] we´re moving up progressively from the empirical trenches to a more conceptual overview of the landscape. We´re no longer dealing with just observables [...].*
>
> (Miles, Huberman, & Saldaña, 2014, p. 292)

Neste momento temos um *corpus* constituído pelo texto de álgebra linear (Apêndice B), a respetiva fundamentação (Capítulo 4) e a análise da implementação didática (Capítulo 5). Este conjunto de dados inspirará o desenvolvimento da reflexão – última etapa do ciclo de investigação-ação – sob a forma de análise comparativa entre a sequência de ensino desenhada e as práticas de ensino conseguidas.

Para comprovar alguns factos e enriquecer a discussão, consideraremos alguns dados relativos ao planeamento e à concretização no terreno do desenho de ensino, referentes a aulas que não foram objeto de construção da respetiva narração multimodal. Doravante designados por dados periféricos, incluem as gravações áudio, os planos de aula e as notas do professor.

A análise da implementação didática foi desenvolvida e apresentada (Capítulo 5) em torno de cada uma das dimensões da análise/indicadores do estudo. Procurou-se destacar um conjunto de evidências sobre a atenção e o impacto de cada um dos indicadores do estudo no trabalho realizado pelo professor. Neste capítulo, para centrarmos a discussão em torno de como o desenho de ensino pode ser eventualmente melhorado, olharemos para fragmentos desse desenho que coincidem com o ensino de alguns conteúdos específicos da álgebra linear, aqueles captados nas narrações multimodais: operações com matrizes, o conceito e a resolução de sistemas de equações lineares, a determinação da matriz inversa de uma matriz invertível, a definição e a validação dos axiomas de subespaço vetorial de um espaço vetorial e o conceito

de combinação linear de vetores. Procuraremos destacar como os diferentes indicadores do estudo reportam a oportunidades para o ensino destes conteúdos ou a dificuldades que podem ser experienciadas.

Cada um destes conteúdos será abordado separadamente e, para auxiliar a discussão, será apresentada no início uma tabela que: (1) sintetiza a correspondência entre um conjunto de pressupostos tidos em consideração *a priori* e as categorias decorrentes da análise da implementação didática, classificadas segundo possíveis oportunidades a considerar no ensino de cada um dos conteúdos e algumas dificuldades ou constrangimentos subjacentes à opção didática considerada; (2) informa sobre as categorias que se relacionam com trabalho realizado pelo professor, mas não sugerido no texto de álgebra linear; (3) inclui informações complementares às categorias e que são exteriores às narrações multimodais construídas (dados periféricos); (4) recorda, sob a forma de legenda, a codificação das categorias.

6.1 Operações com matrizes

Esta parte da análise corresponde matematicamente ao espaço entre a aproximação às operações de adição de matrizes e multiplicação de uma matriz por um escalar, a partir da correspondência com as operações com vetores (representados geométrica e algebricamente), e a abordagem das propriedades sobre operações com matrizes. Aparece no texto de álgebra linear no subcapítulo 1.2 (Apêndice B) e a exploração em sala de aula é dada a conhecer por meio da primeira narração multimodal (Apêndice C).

Sobre o primeiro tópico da Tabela 6.1 (página seguinte), a opção pela abordagem matricial, reforçada pela não inclusão no programa do estudo das aplicações lineares, afastou a possibilidade de relacionar e deduzir as operações com matrizes a partir das operações com aplicações lineares. Segundo a categoria C-ac, a alternativa à abordagem axiomática ganhou forma a partir da correspondência entre as operações com matrizes e as operações com vetores que são estudadas em ciclos de ensino anteriores.

Relativamente às operações de adição de matrizes e de multiplicação de uma matriz por um escalar, o professor partiu de vetores representados no GeoGebra e da revisão e interpretação das operações geométricas de adição de vetores e de multiplicação de um vetor

por um escalar (Fs-d-nv). Desta forma, a abordagem geométrica antecedeu a abordagem algébrica refletida no texto de álgebra linear. A ligação inicial à geometria é um dado novo, quanto ao qual não se descortinam pontos em seu desfavor, face aos conhecimentos de geometria analítica revelados globalmente pelos alunos (Pr-l-ga) e pela versatilidade representacional demonstrada de "ler" as coordenadas dos vetores a partir das suas representações geométricas (L-m-vr).

Tabela 6.1: Relação entre os dados quanto ao ensino das operações com matrizes

<table>
<tr><th colspan="4">Operações com matrizes</th></tr>
<tr><td colspan="3">Fontes de dados</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Texto de álgebra linear; Fundamentação do texto.</td><td colspan="2">Análise da implementação didática</td><td rowspan="2">Dados periféricos</td></tr>
<tr><td>Oportunidades</td><td>Dificuldades</td></tr>
<tr><td>• Exploração algébrica da correspondência entre a aritmética de vetores e as operações com matrizes;</td><td>C-p/s; C-ac; Pr-l-cm; L-m-ga; L-m-vr; L-u.</td><td>C-ac.</td><td></td></tr>
<tr><td>• Tarefa "Algoritmo para a multiplicação de matrizes";</td><td>F_m-t/p; F_m-s; F_m-a; F_m-ap; C/T-cat; C/T-dc.</td><td>Fs-d-nn; Pr-l-cm; F-e-mi.</td><td></td></tr>
<tr><td>• Relação entre as diferentes operações;</td><td>Ic_{pr}-c.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>• Formalização do procedimento para a multiplicação de matrizes;</td><td>F-e-fc.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>• Ilustração das propriedades das operações com matrizes;</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>• Introdução precoce de conceitos: Combinação linear de vetores</td><td></td><td></td><td>Resolução do Exercício 1.13: reforço da ligação a um conceito futuro.</td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td colspan="2">Opções didáticas exteriores ao texto de álgebra linear e seguidas pelo professor</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Exploração geométrica da adição de vetores e multiplicação de um vetor por um escalar.</td></tr>
<tr><td>Fs-d-nv; Pr-l-ga; L-m-ga; L-m-vr.</td><td></td></tr>
</table>

Legenda:

Fs-d-nv – Função do *software*-Descobrir novos conceitos- Natureza visual;
Fs-d-nn – Função do *software*-Descobrir novos conceitos-Natureza numérica;
C-p/s – Configurações da abordagem matricial-Programa/Sequência dos assuntos;
C-ac – Configurações da abordagem matricial-Apresentação dos conceitos;
F_m-t/p – Fatores motivados pela abordagem matricial-Resolução de tarefas/problemas;
F_m-s – Fatores motivados pela abordagem matricial-Recurso ao *software*;
F_m-a – Fatores motivados pela abordagem matricial-Aplicação de algoritmos;
F_m-ap – Fatores motivados pela abordagem matricial-Forma de atuação do professor;
C/T-cat – Contexto e aspetos da teoria subjacente-Conceitos e aspetos teóricos envolvidos;
C/T-dc – Contexto e aspetos da teoria subjacente-Desenvolvimento conceptual;
Pr-l-ga – Pré-requisitos que encontram a literatura-Geometria analítica;
Pr-l-cm – Pré-requisitos que encontram a literatura-Competências matemáticas;
Ic_{pr}-c – Interligação dos conceitos desenvolvida pelo professor-Recurso;
F-e-mi – Estratégias que contornam o formalismo-Motivação de uma ideia por meio da discussão de casos ou abordagem prática;
F-e-fc – Estratégias que contornam o formalismo-Formalização dos conceitos;
L-m-ga – Conceitos enquadrados em múltiplas linguagens-Geométrica/Algébrica;
L-m-vr – Conceitos enquadrados em múltiplas linguagens-Versatilidade representacional por parte dos alunos;
L-u – Conceitos enquadrados numa linguagem.

A relevância da estratégia delineada assenta na transposição algébrica das operações com vetores, em termos das suas coordenadas e com os vetores escritos sob a forma de matrizes

coluna, para as operações com matrizes. As operações de adição de matrizes e de multiplicação de matrizes por um escalar não resultam, por isso, de uma generalização a partir da geometria, em linha com a atenção dada a esta questão por Dorier e Sierpinska (2001) e por Gueudet-Chartier (2006). Mas como potencial vantagem, os alunos começaram a lidar com a representação de vetores e com as operações geométricas entre eles, as quais aparecerão mais tarde associadas, por exemplo, à equação vetorial de um sistema de equações lineares e ao conceito de combinação linear de vetores. Também conduziu à oportunidade de o professor rever e assegurar que os alunos conheciam a regra do paralelogramo ou a regra do triângulo para a adição geométrica de vetores, justificada pela observação de alguns alunos não se lembrarem destas regras.

A partir das operações conhecidas com vetores, os alunos conseguiram deduzir a forma de adicionar matrizes de qualquer dimensão e de multiplicar qualquer matriz por um escalar. No caso concreto da operação de adição de matrizes, os alunos chegaram à conclusão, por si próprios, que só seria possível adicionar matrizes de igual dimensão, tal como só era possível adicionar vetores com o mesmo número de coordenadas. O domínio dos alunos ao nível da realização de cálculos numéricos, destacado pela categoria Pr-l-cm, também facilitou o desenvolvimento da ideia de continuarem a realizar as mesmas operações já conhecidas, só que agora com novos objetos matemáticos – as matrizes.

A opção considerada para o ensino da multiplicação de matrizes é bastante discutível. Face ao desempenho dos alunos na resolução da tarefa "Algoritmo para a multiplicação de matrizes", a categoria F-e-mi desvenda a tenuidade da ideia engendrada, que passava por deduzir esta operação a partir de uma situação concreta e relacionada com o conhecimento anterior dos alunos.

Ao contrário das operações anteriores, a apresentação da multiplicação de matrizes em articulação com as operações com vetores já conhecidas – produto interno de vetores – não foi conseguida como se esperava. A inclusão no enunciado de uma das subtarefas da definição e expressão, segundo as coordenadas, do produto interno de dois vetores genéricos e do resultado do produto de duas matrizes obtido no Scilab (categorias C-ac, F_m-s e Fs-d-nn) não foi suficiente para que a globalidade dos alunos chegasse autonomamente a uma possível forma de multiplicar matrizes. Apenas na discussão da tarefa, a partir do contributo de um dos grupos e das explicações do professor, os alunos ficaram a conhecer melhor como o conceito de produto interno de vetores pode estar a montante de um algoritmo para a multiplicação de matrizes.

A exploração da multiplicação de matrizes a partir da proposta de resolução de uma tarefa é fundamentada pela abordagem matricial (F_m-t/p), a qual motivou ainda a consideração de uma situação concreta e o uso do computador, dada a atenção nas sugestões do LACSG (Carlson et al., 1993). A categoria C/T-cat insinua potenciais vantagens da opção considerada. Do trabalho dos alunos em torno da resolução da primeira subtarefa e da discussão realizada no final, foi emergindo informalmente a forma mais tradicional de multiplicar matrizes – a multiplicação "linhas por colunas" – e ainda surgiu a oportunidade para o professor introduzir o aspeto teórico sobre as circunstâncias necessárias para que a multiplicação de matrizes seja possível ou esteja bem definida.

Foi esta modalidade de multiplicação de matrizes que o professor formalizou após a resposta à tarefa, em coerência com o texto de álgebra linear, evidenciando a estratégia de formalização dos conceitos ou procedimentos após uma exploração de natureza mais concreta (F-e-fc). A inclusão de uma segunda subtarefa, sugerindo uma forma alternativa de multiplicar matrizes, previa atribuir um critério à escolha daquele algoritmo, acreditando-se que os alunos, após a resposta a ambas as subtarefas, também optariam por aquela escolha. Como senão, foi a incapacidade de os alunos alcançarem uma resposta a esta subtarefa, pela evidente insuficiência de competências matemáticas ao nível do desenvolvimento de raciocínios mais abstratos e do cálculo simbólico, evidenciada pela categoria Pr-l-cm.

Esta segunda subtarefa consistia na adaptação de uma das formas não-*standard* de multiplicar matrizes propostas por Carlson (1993). As dificuldades observadas nos alunos dão razão à crítica de Dubinski (1997), quando fala sobre a complexidade simbólica associada àquelas formas de multiplicar matrizes e sobre a possibilidade de serem pouco concretas e acessíveis para a maioria dos alunos. No entanto, Carlson (1993) argumenta com a sua aplicabilidade em alguns temas de álgebra linear, mas que no nosso caso não foram estudados, pelo que não se retira daí essa potencial vantagem. Ainda sobre esta subtarefa, um aspeto vantajoso que a categoria Ic_{pr}-c fez sobressair foi a possibilidade de se relacionar a multiplicação de matrizes com as restantes operações, dado o desenvolvimento da expressão $AB = col_1(A)lin_1(B) + col_2(A)lin_2(B) + col_3(A)lin_3(B)$ passar a configurar-se como o produto de cada elemento da coluna pela linha respetiva (multiplicação de uma matriz por um escalar) e, no final, como a adição de matrizes.

O facto de estarem, no final da resolução da tarefa, perante dois algoritmos ou duas possíveis formas de multiplicar matrizes levou a que cada aluno enfrentasse o desafio de

escolher o algoritmo conceptualmente mais significativo para si (C/T-dc). O professor decalcou este desafio ao lançar o repto para a escolha do algoritmo mais eficiente, avançando como indicador a economia de tempo. De acordo com a categoria F_m-a, foi uma forma de o professor fazer sobressair a veia algorítmica ou o foco nos procedimentos para o ensino de álgebra linear.

Não obstante o ponto de partida considerar operações geométricas com vetores, conclui-se que na abordagem das operações com matrizes considerou-se essencialmente a linguagem algébrica (L-u), algo que não surpreende pela natureza dos objetos matemáticos envolvidos.

A exploração continuou com a resolução de exercícios de aplicação. No entanto, há dois exercícios que merecem particular atenção. Por um lado, o Exercício 1.11, relacionado com a ilustração de propriedades das operações com matrizes por via da utilização do *software* Scilab. O professor optou por não resolver este exercício em sala de aula por ter presente que seria revisitado posteriormente, para associar parte das propriedades apresentadas aos axiomas de espaço vetorial. Todavia, no âmbito do estudo dos espaços vetoriais, o professor apenas falou em algumas dessas propriedades e não as explorou com o Scilab. Permanece a dúvida se os alunos resolveram por iniciativa o exercício e se as ditas propriedades foram interiorizadas.

Por outro lado, com a resolução do Exercício 1.13, o professor teve a oportunidade de referir e vincar a relação do teor do exercício com um conceito a estudar *a posteriori* – combinação linear de vetores. Um aspeto que sobressaiu foi a recorrência das dificuldades dos alunos perante questões de natureza mais simbólica e formal, só conseguindo avançar na resolução do exercício com um acompanhamento mais de perto por parte do professor.

6.2 Conceito e resolução de sistemas de equações lineares

Esta parte da análise corresponde matematicamente ao espaço desde a aproximação ao estudo dos sistemas de equações lineares, a partir da resolução de sistemas com duas equações e duas incógnitas e com três equações e três incógnitas, até à resolução de problemas a envolver a modelação de uma situação por meio de um sistema de equações lineares e respetiva resolução. O tópico está englobado no texto de álgebra linear entre as subsecções 2.1.1 e 2.2.2 (Apêndice B) e é referido nas narrações multimodais NM2 e NM3 e ainda no quinto episódio da narração multimodal NM4, referente à resolução de um problema de produção (Apêndice C).

Tabela 6.2: Relação entre os dados quanto ao ensino do conceito e resolução de sistemas de equações lineares

Conceito e resolução de sistemas de equações lineares			
Fontes de dados			
Texto de álgebra linear; Fundamentação do texto.	Análise da implementação didática		Dados periféricos
	Oportunidades	Dificuldades	
• Princípios de Harel:			
Concretização: Pré-requisitos;	C-ac; Pr-l-ga; Pr-sel.	Pr-sel.	
Tarefa "Ponte de Wheatstone";	Fs-ca-cc; A-i; A-e; F_m-s; F_m-t/p; C/T-s; C/T-dc; F-e-mi.	A-d-e; F-ofd.	
Necessidade: Insuficiência dos métodos conhecidos;	Fs-cl-nv; F-e-mi.		
Generalização: Definição de sistema de equações lineares;			
Método de eliminação de Gauss (Gauss-Jordan);	Fs-ca-vr; A-i; A-v; C-ac; F_m-a; F_m-fa; Ic_{al}-p; F-e-fc; L-u.	F_m-fa.	
• Relação com outros conceitos: Combinação linear de vetores;	Fs-ca-et; A-i; Ic_{al}-c.		
• Discussão de sistemas de equações lineares;	Fs-cl-nv; Fs-cl-nn; Fs-a; Pr-l-tc; L-m-gaf; L-m-vr.	Pr-l-tc; Ic_{al}-r.	
• Introdução precoce de conceitos: Combinação linear de vetores;			Articulação com a resolução de sistemas com duas/três equações e duas/três incógnitas;
Método de eliminação de Gauss-Jordan;		F_m-fa.	
• Resolução de exercícios/problemas;	Fs-ca-cc; A-i; F_m-t/p; F_m-ap; C/T-s; C/T-cat; C/T-dc; E-m-f; Pr-l-cm.	F_m-fa; Pr-l-cm.	
• Exercícios contendo definições novas.			Por exemplo, sistemas homogéneos.
	Opções didáticas exteriores ao texto de álgebra linear e seguidas pelo professor		
	Modo alternativo de encontrar a forma canónica reduzida por linhas:		
	Ic_{pr}-p.	Ic_{al}-dpt.	

Legenda:

Fs-cl-nv – Função do *software*-Clarificar aspetos teóricos- Natureza visual;
Fs-cl-nn – Função do *software*-Clarificar aspetos teóricos -Natureza numérica;
Fs-ca-et – Função do *software*-Calcular-Economia de tempo;
Fs-ca-cc – Função do *software*-Calcular-Complexidade de cálculos;
Fs-ca-vr – Função do *software*-Calcular-Verificação de resultados;
Fs-a – Função do *software*-Antecipar;
A-i – Atitudes face ao uso da tecnologia-Iniciativa;
A-e – Atitudes face ao uso da tecnologia-Entusiasmo;
A-v – Atitudes face ao uso da tecnologia-Valorização;
A-d-e – Atitudes face ao uso da tecnologia-Desalento-Erros de utilização do Scilab;
C-ac – Configurações da abordagem matricial-Apresentação dos conceitos;
F_m-t/p – Fatores motivados pela abordagem matricial-Resolução de tarefas/problemas;
F_m-s – Fatores motivados pela abordagem matricial-Recurso ao *software*;
F_m-a – Fatores motivados pela abordagem matricial-Aplicação de algoritmos;
F_m-ap – Fatores motivados pela abordagem matricial-Forma de atuação do professor;
F_m-fa – Fatores motivados pela abordagem matricial-*Feedback* dos alunos;
C/T-s – Contexto e aspetos da teoria subjacente-Situação real ou científica;
C/T-cat – Contexto e aspetos da teoria subjacente-Conceitos e aspetos teóricos envolvidos;
C/T-dc – Contexto e aspetos da teoria subjacente-Desenvolvimento conceptual;
E-m-f – Exteriorização da exploração de tarefas e aplicações-Momentos do trabalho do professor-*Feedback*;
Pr-l-tc – Pré-requisitos que encontram a literatura-Teoria de conjuntos;
Pr-l-ga – Pré-requisitos que encontram a literatura-Geometria analítica;
Pr-l-cm – Pré-requisitos que encontram a literatura-Competências matemáticas;
Pr-sel – Outros pré-requisitos sugeridos pelo tipo de abordagem;
Ic_{pr}-p – Interligação dos conceitos desenvolvida pelo professor-Processual;
Ic_{al}-p – Interligação dos conceitos conseguida pelos alunos-Processual;
Ic_{al}-c – Interligação dos conceitos conseguida pelos alunos-Recurso;
Ic_{al}-r – Interligação dos conceitos conseguida pelos alunos-Representacional;
Ic_{al}-dpt – Interligação dos conceitos conseguida pelos alunos-Relacional;
F-e-mi – Estratégias que contornam o formalismo-Motivação de uma ideia por meio da discussão de casos ou abordagem prática;
F-e-fc – Estratégias que contornam o formalismo-Formalização dos conceitos;
F-ofd – Obstáculo do formalismo e outras dificuldades;
L-m-gaf – Conceitos enquadrados em múltiplas linguagens-Geométrica/Algébrica/Formal;
L-m-vr – Conceitos enquadrados em múltiplas linguagens-Versatilidade representacional por parte dos alunos;
L-u – Conceitos enquadrados numa linguagem.

De acordo com a Tabela 6.2, a forma como foram interpretados e concretizados os princípios de Harel (2000), na direção da formalização do conceito de sistema de equações lineares genérico e de um algoritmo para a sua resolução, resultou na identificação de um leque substancial de categorias condizentes com oportunidades para o ensino.

A resolução de sistemas de equações lineares até três equações e três incógnitas conferiu parte da natureza concreta à abordagem inicial. As categorias Pr-l-ga e Pr-sel indiciam que é um pré-requisito que pode ser considerado, face ao conhecimento demonstrado pelos alunos, sobretudo em relação à resolução daquele tipo de sistemas de equações lineares pelos métodos gráfico e de substituição. Como vantagens, um olhar inicial pelo método gráfico permitiu uma primeira discussão dos sistemas de equações lineares, com os alunos a conseguirem com facilidade associar a posição relativa de retas e de planos ao tipo de sistema de equações lineares; pelo método da substituição, conseguiu-se desde cedo destacar como escrever o conjunto solução.

Pelo contrário, o conhecimento revelado pelos alunos sobre o método de adição ordenada era muito vago ou inexistente. No entanto, dado o paralelismo estabelecido entre as operações com equações, intrínsecas a este método, e as operações elementares sobre as linhas de uma matriz, intrínsecas aos métodos de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan, o método de adição ordenada configura-se na abordagem delineada como um pré-requisito a considerar.

Julgamos que este tipo de abordagem é relevante quando os alunos conhecem o método de adição ordenada, inclusive para verem que uma das etapas do método de eliminação de Gauss (e de Gauss-Jordan) assenta ou relaciona-se com algo aprendido anteriormente. Em sala de aula, o professor manteve o plano delineado, embora explorando o exemplo de aplicação deste método, que aparece no texto de álgebra linear, de uma forma superficial, procurando apenas que sobressaísse a possibilidade de se realizarem três tipos de operações com as equações e não ensinar o método em si. Fica a dúvida se, perante alunos que não conheçam o método de adição ordenada, se justifica apostar nesta relação ou, alternativamente, avançar com a apresentação descontextualizada das operações elementares sobre linhas de uma matriz.

O momento introdutório da revisão da resolução de sistemas de equações lineares pode ainda ser uma oportunidade para aferir e garantir que os alunos revelam as competências necessárias ao nível de outro pré-requisito: a manipulação de expressões algébricas. De acordo com a categoria F-ofd, os alunos revelaram a dificuldade de escrever um sistema de equações lineares na forma canónica, perante variáveis "fora do comum" e que normalmente aparecem

na resolução de problemas. Esta dificuldade tinha já sido desvendada por Possani et al. (2010) e por Trigueros e Possani (2013) e ficou ainda a ideia de os alunos estarem formatados e apenas treinados para avançar na resolução de qualquer sistema de equações lineares sempre a partir de equações já escritas na forma canónica.

O início pela parte concreta da resolução de sistemas com duas equações e duas incógnitas e com três equações e três incógnitas foi aproveitado para a introdução de duas novas formas de representação de um sistema de equações lineares, em linha com a abordagem matricial (C-ac). Quanto à representação de um sistema de equações lineares na forma matricial $AX = B$, julgamos que no texto de álgebra linear podia e devia ser destacada a relação desta expressão com a operação de multiplicação de matrizes e com a igualdade de matrizes. A partir dos sistemas de equações lineares concretos e considerados nas subsecções 2.1.1 e 2.1.2, podia aparecer complementarmente o desenvolvimento do produto AX e a discussão das condições para as matrizes de ambos os membros da equação serem iguais.

A representação de um sistema de equações lineares segundo a equação vetorial $t = xu + yv$ permitiu, uma vez mais, mencionar precocemente o conceito de combinação linear de vetores. Para além da possibilidade de os alunos se familiarizarem progressivamente com a expressão algébrica do conceito, o destaque vai provavelmente, nesta fase, para o desvendamento do seu cariz geométrico.

A proposta de resolução da tarefa "Ponte de Wheatstone" integra também o contexto recriado para motivar a generalização de um método para a resolução de sistemas de equações lineares, no âmbito da tentativa de aplicação do princípio de concretização de Harel (2000) e como "resposta" ao formalismo associado aos conceitos (F-e-mi). Mas criticamos o momento em que aparece pela primeira vez no texto de álgebra linear, na medida em que não é aproveitada para conduzir à formalização da definição de um sistema de equações lineares genérico. Como a tarefa conduz os alunos à obtenção de um sistema com um grande número de equações e de incógnitas, se aparecesse no início da secção 2.1.3 (Sistemas de m equações e n incógnitas) justificaria naturalmente a insuficiência de se pensar em termos das variáveis comuns "x, y e z" e a necessidade da apresentação de um sistema de equações lineares mais abrangente e, por conseguinte, segundo a definição formal.

Considerando as categorias F_m-t/p, F_m-s e C/T-s, esta tarefa permitiu enriquecer a abordagem matricial na assunção de Carlson et al. (1993), na medida em que fomenta a

utilização da tecnologia (no caso, o Scilab) e expande o campo das aplicações da álgebra linear, com a particularidade de a situação científica recriada ser coerente com o teor do curso.

Embora se tratasse de um circuito elétrico que não era do conhecimento dos alunos em geral, não se observou qualquer relação (positiva ou negativa) entre o desempenho dos alunos e a linguagem específica da tarefa. Para o não surgimento de obstáculos pode ter contribuído o enunciado bastante descritivo – incluindo a caraterização do circuito elétrico e a revisão da lei de Ohm, da atribuição do sinal em função do sentido das correntes elétricas e das leis de Kirchhoff – e a exploração inicial feita pelo professor de uma situação relacionada e mais simples (destacada pela categoria E-m-p).

O enunciado da tarefa mencionava a possibilidade da utilização do Scilab. Verificou-se que os alunos consideraram este recurso, sendo certo que esta escolha ou iniciativa foi influenciada em grande parte pelo professor. Como aspeto relevante, desvendou-se a primeira oportunidade de os alunos observarem (com manifesto entusiasmo!) como o Scilab facilitava os cálculos a desenvolver, nomeadamente a obtenção da forma canónica reduzida por linhas da matriz ampliada do sistema de equações lineares que modelava a situação.

Sem a utilização de um CAS ter-se-ia que restringir consideravelmente a proposta de resolução de tarefas e de problemas que a abordagem matricial indicia, dada a complexidade de cálculos que as situações normalmente acarretam. Seria uma forma de diminuir o poder da álgebra linear que Carlson et al. (1993) defendem. Em termos do ensino, não é necessário considerar uma matriz da dimensão que esta tarefa pressupunha para se aferir se os alunos sabem ou não encontrar a forma escalonada ou a forma canónica reduzida por linhas, pelo que o recurso ao Scilab justificou-se plenamente. Também perante matrizes de menor dimensão, o uso de um CAS pode ser justificado pela natureza numérica dos seus elementos, como por exemplo, os implicados no problema de produção de enfeites luminosos. Embora o professor tivesse pedido aos alunos para não recorrerem ao Scilab na procura da forma escalonada da matriz ampliada, observou-se que se sentiram desconfortáveis por terem que operar com números na ordem dos milhares.

Os grandes impulsionadores da utilização dos CAS no ensino de álgebra linear, como Carlson et al. (1993), Harel (1997) e Hillel (2001), destacam apenas vantagens, não sugerindo potenciais constrangimentos. Perante a categoria A-d-e, ficou presente como os erros de utilização do Scilab condicionaram os resultados esperados quanto à tarefa "Ponte de Wheatstone" e conduziram ao desânimo dos alunos. No entanto, minimizando o facto, nada

garante que se a iniciativa dos alunos passasse pela resolução integral da tarefa "à mão" não iriam também surgir erros que comprometessem o resultado.

Ainda sobre a tarefa, destaca-se a constatação alcançada, por parte dos alunos, sobre a necessidade de um sistema de equações lineares estar escrito na forma canónica, como meio de avançar para a escrita na forma matricial (C/T-dc). Na abordagem preliminar, o professor introduziu a forma $AX = B$ sempre a partir de sistemas escritos na forma canónica, seguindo os exemplos do texto de álgebra linear. Deduz-se que, embora no texto conste a referência àquela condição para a escrita na forma matricial, ficaria enriquecida a abordagem com exemplos de sistemas que não estivessem escritos na forma canónica.

A discussão das limitações dos métodos conhecidos para a resolução dos sistemas de equações lineares, como forma de fazer emergir o princípio da necessidade de Harel (2000), integrou a ideia engendrada para a formalização dos métodos de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan. Observou-se que esta estratégia serviu mais do que o mero propósito de justificar novas aprendizagens, que por si só já é importante.

Sobre o método gráfico, deve ficar claro que a abordagem delineada não pressupõe que os alunos resolvam sistemas de equações lineares por aplicação deste método ou que recorram para o efeito aos AGD. O que foi possível, dado o desempenho positivo dos alunos, foi desenvolver o sentido de interpretação geométrica da solução de um sistema de equações lineares, não se revelando como entrave para os alunos o aumento do número de equações. Por meio das representações obtidas com recurso à tecnologia e da manipulação das imagens, constataram que a classificação de um sistema de equações lineares continuava a ser definida geometricamente em termos da posição relativa de retas e de planos.

Não ignorando o hipotético constrangimento, já referido anteriormente, sobre o método de adição ordenada poder não ser do conhecimento dos alunos, a referência conjunta a este método e ao método de substituição permitiu ao professor desenvolver a ideia intuitiva de os métodos de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan "aproveitarem o melhor de cada um daqueles métodos": o método de adição ordenada agiliza a determinação de uma das incógnitas, por meio de operações entre as equações (fase descendente); o método de substituição permite a determinação das restantes incógnitas (fase ascendente). Completando a ideia, os métodos de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan não são mais do que a resposta à complexidade algébrica do desenvolvimento das operações entre as equações dos sistemas, substituindo-as pelas operações elementares sobre as linhas da matriz ampliada.

Tal como consta no texto de álgebra linear, o professor começou por se referir ao algoritmo de eliminação de Gauss, articulando cada um dos passos (notação matricial, fase descendente e fase ascendente) com a exploração de um exemplo transversal. Os registos teóricos no quadro foram sintetizados de modo a definirem os diferentes passos do algoritmo e toda a atenção acabou por recair no exemplo de exploração, na tentativa de simplificação da mensagem e do discurso.

Atendendo às categorias Fs-ca-vr, A-i e A-v, o exemplo possibilitou que o professor valorizasse a utilização do Scilab, localizando-o na fase descendente do método e conferindo-lhe o papel de verificação de resultados. Relembramos que os alunos já tinham aprendido a identificar a forma escalonada e a forma canónica reduzida por linhas de uma matriz, inclusive tendo já utilizado o comando *rref* do Scilab para encontrar esta última forma. O avanço na exploração do exemplo foi anunciado como o momento que os alunos *per si* passariam a podê-lo fazer analiticamente.

O professor considerou a relação das operações elementares sobre as linhas de uma matriz com as possíveis operações entre as equações, tornando possível quase reduzir a explicação à escrita simbólica das três operações. Para além da vantagem de se mostrar a relação entre os novos conceitos e o anterior conhecimento dos alunos, esta relação pode fomentar o desenvolvimento de uma conceção própria de ver as operações elementares sobre linhas de uma matriz. Mas no sentido oposto, observou-se pela intervenção de um aluno que também pode conduzir a potenciais confusões, por exemplo, derivado do facto de aqui não "desaparecerem linhas".

Olhando para a forma como aparece no texto de álgebra linear e como o professor procedeu na aula, vemos agora com alguma relutância o enquadramento do algoritmo para a escrita de uma matriz na forma escalonada (ou forma canónica reduzida por linhas) dentro da apresentação do método de eliminação de Gauss (ou de Gauss-Jordan). Por mais que o professor procurasse destacar a natureza algorítmica, com identificação clara dos diferentes passos, os alunos mostraram-se um pouco à deriva quando passaram para a resolução de exercícios, sem terem a noção clara da sequência dos passos a realizar.

Outro motivo de crítica diz respeito à iniciativa do professor de, logo no início, também introduzir um algoritmo para a procura da forma canónica reduzida por linhas de uma matriz. Apelidou-o de alternativo por, ao contrário de primeiro encontrar a forma escalonada e depois proceder da coluna mais à direita para a esquerda até ser encontrada a forma canónica reduzida

por linhas, anular-se logo em cada coluna os elementos acima e abaixo do pivô convertido no elemento 1.

Esta ação do professor deu substância à introdução precoce do método de eliminação de Gauss-Jordan, alargando o espetro da abordagem refletida no texto de álgebra linear. Embora este método apareça referenciado no texto de álgebra linear conjuntamente com o método de eliminação de Gauss, fica confinado à utilização do Scilab até ganhar o seu espaço na aproximação ao algoritmo para a determinação da matriz inversa de uma matriz invertível. No seguimento daquela opção, o professor procurou que os alunos passassem a escolher com critério o método que mais se adequava à situação em mãos ou correspondia à preferência pessoal.

Segundo as categorias Ic_{pr}-p e Ic_{al}-p, tanto o professor, como os alunos, acabaram por estabelecer o método de eliminação de Gauss como o método preferencial para a resolução de sistemas de equações lineares. Embora o professor tenha apelado à ideia intuitiva de "estrada" a percorrer consoante o objetivo de alcançar a forma escalonada ou a forma canónica reduzida por linhas da matriz ampliada do sistema de equações lineares, constatou-se que o método de eliminação de Gauss-Jordan só era considerado quando era viabilizado o recurso ao Scilab. Mesmo assim, conseguiu-se observar a partir da interação do professor com um aluno que este tinha bem presente o efeito da aplicação de cada um dos métodos, quando aludiu às vantagens do método de eliminação de Gauss-Jordan na fase ascendente. Isto é uma manifestação de desenvolvimento conceptual e mostra que a introdução conjunta de ambos os métodos possivelmente levará a que os alunos, de alguma forma, reflitam sobre o proveito da escolha por um dos métodos. Um desses proveitos pode ser o contorno do trabalho de realização da substituição na fase ascendente em sistemas que são possíveis e indeterminados, dadas as dificuldades de manipulação algébrica evidenciadas por grande parte dos alunos.

O modo alternativo de encontrar a forma canónica reduzida por linhas pode conduzir a uma potencial desvantagem, como indicia a categoria Ic_{al}-dpt, por poder esconder a relação entre os conceitos de matriz escalonada e de matriz na forma canónica reduzida por linhas. A introdução destas definições foi feita anteriormente à luz de critérios, vincando-se como os conceitos se relacionavam. Se primeiro se obtiver, por meio das operações elementares sobre linhas, a forma escalonada e só depois se avançar, da direita para a esquerda, para a procura da forma canónica reduzida por linhas, esta relação continua a estar bem vincada, o que não acontece no modo alternativo.

Uma relação entre conceitos facilmente descortinada pelos alunos foi a de a resolução de sistemas de equações lineares funcionar como um recurso para o estudo da combinação linear entre vetores (Ic_{al}-c), potenciado pela utilização do Scilab (Fs-ca-et e A-i). Na altura da exploração de um procedimento para o estudo da combinação linear entre vetores, os alunos observaram que a descoberta dos escalares teria que passar pela resolução de um sistema de equações lineares.

Todavia, é inconclusivo se a opção de introduzir precocemente o conceito de combinação linear de vetores, também em articulação com a resolução de sistemas até três equações e três incógnitas referida anteriormente, contribuiu para a prontidão da conexão estabelecida. O destaque dado pelo professor à relação dos métodos de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan com este e outros conceitos de álgebra linear, objetivado pela categoria Ic_{pr}-p, constituiu-se como uma forma de consubstanciar o ensino segundo uma vertente mais prática defendido por alguns investigadores em didática da álgebra linear. Só que também poderemos estar a proporcionar a visão criticada por Dorier et al. (2000b) e por Hillel (2000) de parecer que na aprendizagem da álgebra linear tudo se resume ou concentra na resolução de sistemas de equações lineares.

O texto de álgebra linear e o trabalho do professor refletem a atenção atribuída ao tópico classificação de sistemas de equações lineares, inclusive desde a revisão dos sistemas de equações lineares que os alunos já resolviam antes e o olhar pelas limitações dos métodos conhecidos. Mesmo antes de os alunos aprenderem um novo método para a resolução de qualquer sistema de equações lineares, as categorias Fs-cl-nv, Fs-cl-nn e Fs-a sugerem que se conseguiu aprofundar a interpretação geométrica e a distinção entre solução geral e solução particular, pelo aproveitamento da função de antecipação propiciada pela utilização dos diferentes *softwares*. Esta pode ser uma via para os alunos desenvolverem o sentido de solução de um sistema de equações lineares que Trigueros et al. (2007) estabelecem como não estando completamente desenvolvido.

A discussão de sistemas de equações lineares percorreu as diferentes linguagens. Começou por ser fomentada segundo a linguagem geométrica, depois segundo a linguagem algébrica, essencialmente aquando da discussão de sistemas de equações lineares em função de parâmetros, e, por último, segundo a linguagem formal, de acordo com a assunção de Sierpinska (2000), por aparecer ligada a conceitos formais como combinação linear de vetores e subespaço vetorial gerado.

A nossa valorização da relação entre as diferentes linguagens é refletida, em parte, nos exemplos de concretização do algoritmo de eliminação de Gauss. Apela-se que antes dos sistemas de equações lineares serem resolvidos se preveja a sua classificação a partir de indícios algébricos e geométricos. No entanto, os dados recolhidos sugerem que há um obstáculo a contornar. Pelas dificuldades observadas mais à frente, no estudo dos subespaços vetoriais e sobre a representação algébrica e geométrica de planos, concluímos que a revisão do método gráfico deveria (e poderia) também apontar ao suprimento desta lacuna, até porque é uma dificuldade bastante salientada na literatura (Dogan-Dunlap, 2010; Dorier & Sierpinska, 2001; Sierpinska, 2000). Por sua vez, se a competência do reconhecimento do tipo de sistema de equações lineares que os alunos têm pela frente for desenvolvida, entendemos que, em articulação com a ajuda proporcionada pelo Scilab na procura da forma canónica reduzida por linhas de uma matriz, torna-se mais fácil o desenvolvimento dos procedimentos associados a muitos dos conceitos da teoria dos espaços vetoriais. Isto porque, em muitos casos, basta concluir se o sistema de equações lineares que têm que resolver é ou não possível, a partir da matriz na forma escalonada ou na forma canónica reduzida por linhas encontrada.

Nos exercícios relacionados com a discussão de sistemas de equações lineares em função de parâmetros, os alunos materializaram o trabalho em possíveis concretizações dos parâmetros nas equações obtidas a partir das formas escalonada/reduzida por linhas da matriz ampliada. Pelos conhecimentos que tinham sobre teoria de conjuntos, facilmente conseguiram associar as condições aos conjuntos (Pr-l-tc), pelo que a dificuldade apontada por Dogan-Dunlap (2006) do reconhecimento de diferentes representações do mesmo conjunto não sobressaiu.

No entanto, aquela opção revelou-se não ser a melhor, dado o obstáculo que emergiu. Observou-se que os alunos passaram a memorizar que condições conduziam aos diferentes tipos de sistema de equações lineares, não refletindo sobre as variáveis ficarem ou não determinadas. Por este facto, há uma dificuldade a colmatar na passagem da matriz ampliada para a escrita do sistema de equações lineares correspondente ou na passagem para a fase ascendente nos métodos de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan (Ic_{al}-r). Uma estratégia que se pode considerar é aproveitar o conhecimento dos alunos sobre teoria de conjuntos, mostrando a interseção dos conjuntos associados a cada uma das condições resultantes e justificando que a interseção com o conjunto universo não tem qualquer efeito.

A alternativa para contornar as dificuldades suprarreferidas pode passar pela aposta na resolução de exercícios sobre a discussão de sistemas de equações lineares em função de

parâmetros com base no conceito de caraterística e, por isso, levando a discussão para o mundo de uma linguagem mais formal e menos algébrica.

A resolução de exercícios e de problemas relacionados com os sistemas de equações lineares fez sobressair a dificuldade dos alunos com a escrita do conjunto solução quando são possíveis e indeterminados. Como contramedida, pode ser alargado o leque de propósitos a alcançar com a revisão dos sistemas de equações lineares que os alunos já conseguiam resolver pelos métodos que conheciam. Para além da diferenciação entre solução particular e solução geral de um sistema de equações lineares e da correspondência entre a representação algébrica e geométrica de objetos como retas e planos, sugere-se que também no início se procure desenvolver as competências matemáticas dos alunos ao nível da escrita do conjunto solução de um sistema de equações lineares possível e indeterminado, insistindo-se em exemplos de sistemas desta natureza.

A abordagem matricial aproximou-nos da possibilidade de propor a resolução de problemas de cariz real, parte deles relacionados com o teor de formação dos alunos. Tal como desafia Day (1997), pensamos que conseguimos dotar os alunos de maior experiência com as aplicações da álgebra linear. Os dados recolhidos mostram que grande parte desses problemas, incluindo também algumas das tarefas, implicaram a resolução de sistemas de equações lineares. Tendo-se dirigido o texto de álgebra linear para alunos do curso de engenharia elétrica, constatamos que poderia ter sido incluído um número maior de aplicações que enfatizassem ainda mais o campo de aplicação da álgebra linear no curso que frequentavam. Ainda assim, fica presente que, para qualquer que seja o público-alvo, facilmente se encontra uma vasto leque de situações práticas que invoquem a resolução de sistemas de equações lineares.

Em alguns casos, os alunos tiveram que encontrar as equações lineares que modelavam a situação apresentada. Não foi uma tarefa relativamente difícil para os alunos, ficando a maior dificuldade, como já referimos atrás, confinada ao desconforto de trabalharem com variáveis fora do comum. Como vantagens, os alunos foram naturalmente colocados frente a frente com situações que os exercícios "rotineiros" normalmente não proporcionam. A categoria C/T-dc deu-nos a conhecer que neste tipo de contexto os alunos podem atribuir significados aos conceitos aprendidos que muitas vezes damos por adquirido. Destacamos o significado que os alunos tiveram que atribuir ao surgimento de linhas nulas. Como em muitos casos resultaram sistemas possíveis e indeterminados, foi possível aprofundar, num contexto concreto para os alunos, alguns significados: o de solução particular, justificando a importância de

conhecimentos sobre teoria de conjuntos e apelando à capacidade de manipulação algébrica, de modo a encontrar uma solução que responda ao problema colocado; o da escrita do conjunto solução de um sistema possível e indeterminado.

Por sua vez, a categoria E-m-f desvenda a utilidade ou o aproveitamento que o professor pode fazer da resolução de problemas relacionados com contextos da realidade. Para clarificar o trabalho que se espera que os alunos desenvolvam em determinado exercício ou problema, o professor pode evocar uma situação similar já tratada, que facilmente os alunos recordam, como uma janela que desvenda uma possível forma de progredir na resolução.

No acompanhamento do trabalho dos alunos em torno da resolução dos exercícios e problemas, o professor insistiu na natureza algorítmica dos métodos introduzidos para a resolução de sistemas de equações lineares. Intuímos que algumas das dificuldades reveladas sobre a aplicação dos métodos derivaram do facto de o professor introduzir simultaneamente ambos os métodos. Quanto ao desempenho dos alunos, foi melhorando com a prática, particularmente ao nível da capacidade para encontrar a forma escalonada de uma matriz, vindo ao de cima a capacidade dos alunos ao nível do desenvolvimento de cálculos numéricos.

O professor acabou por não dar seguimento à resolução de exercícios que continham definições novas, como por exemplo, de sistema homogéneo. Continuamos a acreditar que esta estratégia possibilita a simplificação da mensagem e é uma forma de mitigar o problema que Dorier et al. (2000a) colocam sobre a quantidade de novas definições que os alunos dizem ter que aprender. No entanto, colocar exercícios com definições de novos conceitos coloca o desafio ao professor de não esquecer que exercícios deve propor ou resolver em sala de aula se pretende, no futuro, considerar tais definições. Dado não ter resolvido o exercício que apresentava os sistemas homogéneos (Exercício 2.11), o professor apenas se referiu pontualmente a este conceito em situações posteriores. Questionamo-nos agora se foi uma definição retida pelos alunos.

6.3 Determinação da matriz inversa de uma matriz invertível

Esta parte da análise centra-se na formalização e aplicação de um algoritmo para a determinação da matriz inversa de uma matriz invertível, com base no método de eliminação

de Gauss-Jordan. Este tópico enquadra-se no subcapítulo 2.3 do texto de álgebra linear (Apêndice B) e o relato de parte do trabalho realizado pelo professor em sala de aula aparece na narração multimodal NM4 (Apêndice C). Os pré-requisitos considerados são conteúdos específicos de álgebra linear e abordados anteriormente, o que leva a um olhar retrospetivo pelos dados: Aula 3 (definição de matriz inversa de uma matriz invertível) e NM2 (método de eliminação de Gauss-Jordan).

Tabela 6.3: Relação entre os dados quanto ao ensino de uma forma de determinar a matriz inversa de uma matriz invertível

<table>
<tr><th colspan="4">Determinação da matriz inversa de uma matriz invertível</th></tr>
<tr><td colspan="3">Fontes de dados</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Texto de álgebra linear; Fundamentação do texto.</td><td colspan="2">Análise da implementação didática</td><td rowspan="2">Dados periféricos</td></tr>
<tr><td>Oportunidades</td><td>Dificuldades</td></tr>
<tr><td>• Pré-requisitos:
Definição de matriz inversa de uma matriz invertível;
Método de eliminação de Gauss-Jordan;</td><td>C-p/s.</td><td></td><td>Relação com a multiplicação de matrizes e recurso à função inv do Scilab.</td></tr>
<tr><td>• Formalização de um algoritmo para a inversão de matrizes invertíveis;</td><td>A-v; F_m-a; Ic_{pr}-p.</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>• Relação com outros conceitos:
Caraterística de uma matriz;
Resolução de sistemas de equações lineares;</td><td>Pr-l-lg; L-m-af.</td><td>Ic_{al}-p.</td><td>Determinação da matriz inversa de uma matriz invertível como resolução simultânea de sistemas de equações lineares.</td></tr>
<tr><td>• Resolução de exercícios e de problemas (incluindo aplicações da matriz inversa de uma matriz invertível).</td><td>Fs-ca-vr; F_m-fa; C/T-s; C/T-cat; Pr-l-cm.</td><td>L-m-af.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="3"></td><td colspan="2">Opções didáticas exteriores ao texto de álgebra linear e seguidas pelo professor</td><td rowspan="3"></td></tr>
<tr><td colspan="2">Construção de um mapa conceptual, relacionando os métodos de eliminação de Gauss/Gauss-Jordan com os conceitos de sistema de equações lineares, caraterística de uma matriz e matriz invertível.</td></tr>
<tr><td>F_m-ap; Ic_{pr}-dpt.</td><td>F_m-fa.</td></tr>
<tr><td colspan="4">Legenda:
Fs-ca-vr – Função do software-Calcular-Verificação de resultados;
A-v – Atitudes face ao uso da tecnologia-Valorização;
C-p/s – Configurações da abordagem matricial-Programa/Sequência dos assuntos;
F_m-a – Fatores motivados pela abordagem matricial-Aplicação de algoritmos;
F_m-ap – Fatores motivados pela abordagem matricial-Forma de atuação do professor;
F_m-fa – Fatores motivados pela abordagem matricial-Feedback dos alunos;
C/T-s – Contexto e aspetos da teoria subjacente-Situação real ou científica;
C/T-cat – Contexto e aspetos da teoria subjacente-Conceitos e aspetos teóricos envolvidos;
Pr-l-lg – Pré-requisitos que encontram a literatura-Lógica;
Pr-l-cm – Pré-requisitos que encontram a literatura-Competências matemáticas;
Ic_{pr}-p – Interligação dos conceitos desenvolvida pelo professor-Processual;
Ic_{al}-p – Interligação dos conceitos conseguida pelos alunos-Processual;
Ic_{pr}-dpt – Interligação dos conceitos desenvolvida pelo professor-Relacional;
L-m-af – Conceitos enquadrados em múltiplas linguagens-Geométrica/Algébrica/Formal.</td></tr>
</table>

Ainda no capítulo referente ao estudo das matrizes, e após o estudo da multiplicação de matrizes, foram introduzidas duas novas definições: matriz ortogonal e matriz inversa de uma matriz invertível. Valorizando a utilização do Scilab e atribuindo-lhe a função de antecipação,

o professor desvendou a primeira forma de encontrar a matriz inversa de uma matriz invertível (comando *inv*) e converteu em exercícios rotineiros de aplicação da multiplicação de matrizes a verificação de o produto de ambas as matrizes (a matriz original e a respetiva matriz inversa) ser a matriz identidade. Uma das consequências da estratégia adotada para a introdução da definição de matriz inversa de uma matriz invertível ganhou forma com a curiosidade suscitada, levando um aluno a colocar a questão: "Professor, como é que se faz B^{-1} à mão? Vamos aprender?".

Pela configuração da abordagem matricial implementada, sucedeu ao estudo das matrizes o estudo dos sistemas de equações lineares. Embora o método de eliminação de Gauss-Jordan fosse introduzido logo no início e em simultâneo com o método de eliminação de Gauss, como um algoritmo para a resolução de qualquer sistema de equações lineares, o primeiro teve essencialmente a funcionalidade de abrir caminho (precoce) para a inversão de matrizes invertíveis.

A definição de matriz inversa de uma matriz invertível e o método de eliminação de Gauss-Jordan constituíram-se como os pré-requisitos necessários para a introdução do algoritmo relativo à determinação da matriz inversa de uma matriz invertível. Uma vez mais, sobressaiu a valorização dos procedimentos algorítmicos preconizada pela abordagem matricial (F_m-a) e refletida constantemente pela forma de atuação do professor em sala de aula.

Para a formalização de um algoritmo que possibilitasse a determinação da matriz inversa de uma matriz invertível, o professor seguiu a abordagem apresentada no texto de álgebra linear. Tal como no Exemplo 2.14, mas com outros sistemas de equações lineares, o professor colocou os alunos perante os desafios de reconhecerem as semelhanças e diferenças entre os dois casos apresentados (os mesmos coeficientes das incógnitas e diferentes termos independentes) e de inferirem a possibilidade da resolução simultânea de ambos os sistemas de equações lineares, com a aplicação, uma única vez, do método de eliminação de Gauss-Jordan. Começou-se a desvendar, desta forma, a relação deste método com a inversão de matrizes invertíveis.

A perspicácia de um aluno de achar que teria que ser possível, "*senão o professor não se lembrava disso!*", levou-o à proposta de ampliar a matriz simples, comum a ambos os sistemas de equações lineares, não com uma, mas com as duas colunas referentes aos termos independentes (Figura 6.1).

A dúvida sobre a exequibilidade da proposta lançada despertou a curiosidade e a concentração dos alunos, tornando relevante a abordagem e facilitando o trabalho do professor.

Por meio do Scilab, o professor conduziu os alunos à observação de as soluções obtidas isoladamente poderem aparecer simultaneamente, retificando, em termos de escrita, não ser necessário incluir a nova barra que o aluno sugeria.

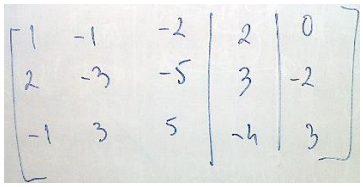


Figura 6.1: Captação do registo no quadro da proposta do Fernando para a resolução simultânea de dois sistemas de equações lineares

Pelo comportamento dos alunos, concluímos que esta abordagem tem traços das atividades que Hillel (2001) associa à utilização de um CAS com o propósito de surpreender, função quanto à qual ainda não tínhamos encontrado evidências acopladas à utilização que fizemos do Scilab.

A resolução simultânea de sistemas de equações lineares, com os termos independentes a formarem a matriz identidade com a mesma ordem da matriz simples, conduziu à rápida e fácil constatação, por parte dos alunos, que "do outro lado estaria a inversa", face à definição de matriz inversa de uma matriz invertível e à aplicação do método de eliminação de Gauss-Jordan (por ser necessário encontrar a forma canónica reduzida por linhas da matriz ampliada).

Entendemos que esta forma de abordar o algoritmo para a inversão de matrizes invertíveis secundariza a sua formalização. Foi nesse enquadramento que o professor procedeu, avançando imediatamente para um exemplo de concretização e parecendo mais estar a rever a informação, aludindo a cada um dos passos já observados na abordagem anterior, do que a acrescentar informação nova. A própria simbolização $[A|I_n] \rightarrow [I_n|A^{-1}]$ acabou por ser registada pelo professor na aula seguinte, apenas como forma de rever o assunto do momento e não como auge da abordagem que implementou.

Segundo a categoria Ic_{pr}-p, o professor acabou por estabelecer essencialmente o método de eliminação de Gauss como o método preferencial para a resolução de qualquer sistema de equações lineares e o método de eliminação de Gauss-Jordan para a determinação da matriz inversa de uma matriz invertível. No entanto, esta diferenciação da aplicação dos métodos consoante os temas não invalidou que alguns alunos, *a posteriori*, revelassem não ter a completa noção do efeito da aplicação de cada um, como sugerem as categorias F_m-fa e Ic_{al}-p. Anteriormente, como descrito no subcapítulo anterior, os alunos davam a entender estar bem

demarcado quando resolver um sistema de equações lineares pelo método de eliminação Gauss ou pelo método de eliminação de Gauss-Jordan; agora, paradoxalmente, emergia a sensação de os alunos arriscarem acriticamente a aplicação de um dos métodos quando deparados com questões sobre a resolução de sistemas de equações lineares ou a determinação da matriz inversa de uma matriz invertível. Eventualmente, podemos arriscar que o Scilab pode ter ajudado a definir quando aplicar o método de eliminação Gauss ou o método de eliminação de Gauss-Jordan na resolução de sistemas de equações lineares. No entanto, há fatores a montante que podem estar na génese do problema que agora relatamos, mas que não conseguimos identificar nem fundamentar.

A construção de um mapa conceptual, para destacar a relação dos métodos de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan com a resolução de sistemas de equações lineares e a determinação da caraterística e da matriz inversa de uma matriz invertível, ganhou relevo por ser o mecanismo que informou o professor, em primeira mão, sobre a dificuldade relatada acima. Com esta opção, aproximámo-nos da caraterística dos mapas conceptuais, apontada por Lapp et al. (2010), de fazer sobressair as relações (no nosso caso, não conseguidas) entre conceitos. Consequentemente, o professor procurou reforçar o modo como os procedimentos e os conceitos se interligavam (situação que evocou linguagem específica da lógica), segundo a discussão natural que a construção do próprio mapa conceptual exigia. Contudo, não invalidou que a dificuldade não voltasse a surgir (por exemplo, aquando da resolução do problema de produção).

O mapa conceptual possibilitou ainda que o professor aprofundasse a relação entre os próprios conceitos, motivado por anteriormente ter observado que os alunos não conseguiram estabelecer que a determinação dos valores dos parâmetros de uma matriz, de modo que fosse invertível, passava pela consideração do conceito de caraterística de uma matriz. Mas, por si só, não pode ser considerado suficiente para que os alunos consigam lidar com o conceito de matriz invertível segundo uma linguagem de cariz mais formal (e não apenas sob o domínio algébrico), pelas relações criadas com outros conceitos (Sierpinska, 2000; Tall, 2004). Desta forma, criticamos o facto de o professor ter apenas proposto um exercício a apelar à relação entre aqueles conceitos, como parece manifestamente reduzido o número de exercícios deste tipo incluídos no texto de álgebra linear.

Inferimos ainda que a dificuldade dos alunos de associar corretamente um método à resolução de sistemas de equações lineares ou à determinação da matriz inversa de uma matriz

invertível é uma dificuldade local. Observou-se que, uma vez enveredados pelo método correto, os alunos tornavam-se cada vez mais autónomos e conseguiam avançar na resolução dos exercícios e problemas relacionados, guiados essencialmente pelas competências reveladas ao nível do cálculo numérico.

Na parte de resolução de exercícios e de problemas, a utilização do *software* Scilab foi menos valorizada pelo professor, justificada pela pretensão de os alunos consolidarem a determinação da matriz inversa de uma matriz invertível pela via "papel e lápis". Tal facto vai ao encontro de o Scilab ser associado essencialmente à função relacionada com a verificação de resultados (Fs-ca-vr), circunstâncias estas que o professor aproveitou recorrentemente para sugerir este CAS como um "amigo" que, dentro e fora da sala de aula, valida o trabalho realizado.

As categorias C/T-s e C/T-cat dão nota de este ser um tema que facilmente reflete as aplicações da álgebra linear, embora os dados sejam escassos quanto ao trabalho realizado pelo professor neste âmbito. Isto porque o trabalho em torno da resolução de dois exercícios desta natureza não foi captado pelas narrações multimodais.

Aparece ainda no texto de álgebra linear uma tarefa que relaciona a matriz inversa de uma matriz invertível com assuntos do teor do curso dos alunos que participaram na experiência (Teoria de sinais), mas fica o desafio de serem incluídas ainda mais aplicações práticas deste tópico, não faltando boas referências (como por exemplo, as obras de Lay (1997) e de Williams (2001)).

6.4 Definição e validação dos axiomas de subespaço vetorial de um espaço vetorial

Nesta parte da análise considera-se o processo de exploração algébrica e geométrica do conceito de subespaço vetorial de um espaço vetorial. É alusiva ao subcapítulo 4.2 do texto de álgebra linear (Apêndice B), embora em atenção aos dados periféricos se olhe também para o subcapítulo anterior, sobre a formalização do conceito de espaço vetorial. O trabalho realizado pelo professor em torno deste item é apresentado por meio da narração multimodal NM5 (Apêndice C).

Tabela 6.4: Relação entre os dados quanto ao ensino da definição e formas de validação dos axiomas de subespaço vetorial de um espaço vetorial

Definição e validação dos axiomas de subespaço vetorial de um espaço vetorial			
Fontes de dados			
Texto de álgebra linear; Fundamentação do texto.	Análise da implementação didática		Dados periféricos
	Oportunidades	Dificuldades	
• Relação com outros conceitos: Espaço vetorial.	Ic_{pr}-dpt.		Formalização do conceito de espaço vetorial como conceito unificador e generalizador; dedução dos axiomas de subespaço vetorial como parte dos axiomas de espaço vetorial.
• Definição de subespaço vetorial de um espaço vetorial;	C-p/s; C-ac; L-m-gaf.	F-ofd.	
• Exploração de exemplos e resolução de exercícios: representação cartesiana e paramétrica; interpretação algébrica e geométrica.	Fs-cl-nv; C-ac; Pr-l-tc; L-m-gaf; L-m-vr.	A-v; A-d-di; Pr-l-lg; Pr-l-tc; Pr-l-ga; Pr-l-cm; F-ofd.	
	Opções didáticas exteriores ao texto de álgebra linear e seguidas pelo professor		

Legenda:

Fs-cl-nv – Função do *software*-Clarificar aspetos teóricos- Natureza visual;
A-v – Atitudes face ao uso da tecnologia-Valorização;
A-d-di – Atitudes face ao uso da tecnologia-Desalento-Dificuldades de implementação;
C-p/s – Configurações da abordagem matricial-Programa/Sequência dos assuntos;
C-ac – Configurações da abordagem matricial-Apresentação dos conceitos;
Pr-l-lg – Pré-requisitos que encontram a literatura-Lógica;
Pr-l-tc – Pré-requisitos que encontram a literatura-Teoria de conjuntos;
Pr-l-ga – Pré-requisitos que encontram a literatura-Geometria analítica;
Pr-l-cm – Pré-requisitos que encontram a literatura-Competências matemáticas;
Ic_{pr}-dpt – Interligação dos conceitos desenvolvida pelo professor-Relacional;
F-ofd – Obstáculo do formalismo e outras dificuldades;
L-m-gaf – Conceitos enquadrados em múltiplas linguagens-Geométrica/Algébrica/Formal;
L-m-vr – Conceitos enquadrados em múltiplas linguagens-Versatilidade representacional por parte dos alunos.

Considerando os dados periféricos, procurou-se introduzir o conceito de espaço vetorial como um conceito unificador e generalizador (Dorier, 1995). Acima de tudo, não deixa de ser uma tentativa que reflete a nossa interpretação e concretização de um resultado da literatura e é passível de ser objeto de crítica.

Na procura de uma abordagem inovadora, teríamos dado um passo seguro e sem correr riscos se optássemos, por exemplo, pela implementação da proposta de Dorier et al. (2000c), onde "a ideia principal era introduzir um espaço vetorial como uma espécie de grupo aditivo no qual é «fácil» resolver equações lineares" (p. 158). No entanto, face aos dados recolhidos, a eficácia da proposta seria bastante questionável no nosso caso, dadas as limitações observadas nos alunos ao nível do desenvolvimento de raciocínios abstratos e manipulação de expressões algébricas.

O que fizemos foi não dar razão a Carlson (1993), quando contesta a forma como os conceitos de álgebra linear são normalmente ensinados, sem ligação ao que os alunos aprenderam em ciclos de ensino anteriores, e respeitar a chamada de atenção de Dorier e

Sierpinska (2001), de não nos limitarmos a deduzir os axiomas de espaço vetorial a partir das propriedades de $\mathbb{R}^n$.

De acordo com a proposta apresentada no texto de álgebra linear, o professor orientou o processo de agrupamento numa "estrutura" única de alguns conjuntos de entes matemáticos já familiares para os alunos (inclusive o conjunto das matrizes de dimensão $m \times n$), com o denominador comum de verificarem as mesmas propriedades. Como aspetos potencialmente relevantes para o ensino, foram emergindo naturalmente ao longo do processo conceitos como operação bem definida, elemento neutro ou vetor nulo, elemento simétrico, entre outros, assim como a exemplificação das propriedades com diferentes tipos de "vetores". Esta exemplificação constituiu-se como uma alternativa às demonstrações formais dos axiomas, numa espécie de concretização de casos particulares, como sugerem Carlson (1993) e Day (1997).

No campo oposto, a nossa própria crítica quanto a esta forma de abordar o conceito de espaço vetorial incide em dois aspetos: ser o professor a antecipar todas as ideias, o que leva a que, segundo Dubinsky (1997), não diminuam necessariamente as dificuldades dos alunos em torno do conceito; (e relacionada) não cumprir um dos requisitos das atividades de nível meta que Dorier (1995) relaciona com os conceitos unificadores generalizadores, por não incutir o envolvimento dos alunos numa atividade matemática autónoma.

A redução da lista dos axiomas de espaço vetorial a apenas três axiomas passou a ser o objetivo seguinte e caraterizou a forma de o professor introduzir o conceito de subespaço vetorial de um espaço vetorial (C-p/s; Ic_{pr}-dpt). Esta forma de relacionar os conceitos ditou a apresentação inicial dos subespaços vetoriais de um espaço vetorial em termos da linguagem formal (L-m-gaf). Embora o foco fosse a exploração algébrica e geométrica do conceito, eliminámos desde logo a generalização do conceito a partir da geometria, posta em causa por Dorier e Sierpinska (2001), Gueudet-Chartier (2006) e Harel (2000).

Pareceu-nos adequado, pelo tipo de alunos implicados na experiência, quase circunscrever a exploração do conceito de subespaço vetorial ao espaço vetorial $\mathbb{R}^n$, por consideração de uma das recomendações do LACSG (Carlson et al., 1993), e muito em particular aos espaços vetoriais $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, para potenciar a interpretação geométrica do conceito. Mesmo no contexto destes espaços vetoriais, os alunos evidenciaram grandes dificuldades em lidar com a simbologia associada (F-ofd), facto que porventura se agudizaria perante espaços vetoriais de natureza mais abstrata.

Em termos da linguagem algébrica, foram permanentemente consideradas as representações cartesiana e paramétrica dos subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$ e com a adoção da linguagem das matrizes. Optámos por sugerir a verificação algébrica dos axiomas sempre a partir da representação paramétrica do conjunto, por entendermos que os alunos conseguiriam escolher mais facilmente os vetores genéricos que o procedimento algébrico requeria.

Deste modo, a conversão de uma representação noutra apenas era no sentido representação cartesiana/representação paramétrica. Os alunos não revelaram dificuldades neste trabalho, ficando a dúvida se seriam capazes de lidar com as diferentes representações do mesmo conjunto no sentido inverso. Pelo menos, contrariámos a dificuldade reportada por Dogan-Dunlap (2006) de os alunos não reconhecerem as várias representações do mesmo conjunto. Acrescentamos que neste contexto podia ser uma oportunidade destacar-se o facto de o mesmo conjunto poder representar o conjunto solução de um sistema possível e indeterminado e parametricamente um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Para além de ser uma forma de estabelecer relações entre conceitos, o maior conhecimento num dos tópicos poderia contribuir para melhorar no outro.

Não sabemos também, à luz da falta de flexibilidade cognitiva entre estas representações que Alves-Dias e Artigue (1995) reportam, se a opção de validar os axiomas a partir da representação paramétrica foi a melhor. O que constatámos foi que algumas das dificuldades já reportadas na literatura voltaram a estar presentes (Britton & Henderson, 2009; Wawro et al., 2011): verificação dos axiomas de fecho das operações; propensão para a consideração de vetores particulares.

Os AGD fizeram sobressair a sua importância na interpretação geométrica dos subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$ (Fs-cl-nv). A dependência quanto à utilização deste tipo de recurso foi maior no caso dos subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^3$ pelas dificuldades de representar objetos geométricos neste espaço vetorial, tendo-se recorrido para o efeito ao Mathematica. Olhando para as categorias A-v e A-d-di, e ao contrário do Scilab, fica o vazio de os alunos não terem usado o Mathematica, devido ao facto de não ser um *software* livre e a instituição não possuir licenças de utilização para os alunos.

Acreditamos que a utilização do GeoGebra e do Mathematica, por parte do professor, permitiu estabelecer uma "pausa" na articulação entre as abordagens geométrica e algébrica, demarcando os diferentes momentos. Lembramos que Hillel (2000) dá nota que muitas vezes os professores mudam de linguagem, sem que os alunos se apercebam, o que leva a que as

relações entre as linguagens fiquem numa zona cinzenta. No caso dos subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, a recorrente consideração dos AGD permitiu balizar muitos dos momentos em que o professor apontava à abordagem geométrica do conceito e o desenvolvimento do procedimento analítico de validação dos axiomas vincar a abordagem algébrica.

Os alunos demonstraram compreender cabalmente o significado geométrico de cada um dos três axiomas, fruto das diversas representações exploradas decorrentes dos exemplos e exercícios propostos. Pareceu também os alunos serem capazes de associar o significado geométrico quando se sabe que um determinado axioma se verifica ou não, o que demonstra a capacidade de compreender o conceito numa linguagem e convertê-lo noutra (L-m-vr). Resta concluir que as dificuldades dos alunos com o conceito residem no campo da abordagem algébrica, mais concretamente na incapacidade de desenvolverem o procedimento analítico de validação dos axiomas. Urge encontrar uma forma que lute contra a tendência dos alunos para decorar os passos do procedimento e não atribuir qualquer significado ao que estão a fazer.

Pela Tabela 6.4 observa-se que este é um tema em que sobressaiu, quer a importância do conhecimento de quase todos os pré-requisitos que considerámos na investigação, como as manifestas dificuldades dos alunos, em sintonia com o que a literatura já referia. Primeiro, não demos a necessária atenção à decomposição genética do conceito de espaço vetorial proposta por Parraguez e Oktaç (2010), onde a compreensão do significado de axioma aparece à cabeça. O estudo da lógica na parte da unidade curricular referente à matemática discreta foi uma oportunidade perdida pelo professor para desenvolver o sentido da designação, não evitando que aquando do estudo dos espaços e subespaços vetoriais alguém ainda questionasse se eram condições que o professor impunha.

Sobre o procedimento de verificação analítica dos axiomas, verificámos que dois potenciais obstáculos resultam de lacunas ao nível do conhecimento de pré-requisitos: a dificuldade de reconhecerem, no último passo da verificação dos axiomas de fecho, se é um elemento que pertence ou não ao conjunto, a par das dificuldades de manipulação algébrica. Por exemplo, para alguns alunos $a^2 + c^2$ significava o quadrado de $a + c$.

Por último, a dificuldade ao nível de conhecimentos de geometria analítica que observámos foi relativa ao reconhecimento da equação algébrica, sobretudo de planos. Como já referimos anteriormente, a dificuldade de reconhecimento da equação algébrica de um objeto geométrico (Dorier et al., 2000a) poderia ter sido colmatada em momentos como a revisão do método gráfico para a resolução de sistemas de equações lineares.

6.5 Conceito de combinação linear de vetores

Esta parte da análise começa por revisitar dois momentos anteriores, referentes ao primeiro e segundo capítulos do texto de álgebra linear, onde o conceito de combinação linear foi introduzido precocemente. Em termos da sua formalização, localiza-se no subcapítulo 4.3 do texto de álgebra linear (Apêndice B), sendo que ainda há uma pequena incursão no subcapítulo seguinte, com a aproximação ao conceito de subespaço vetorial gerado. O trabalho realizado pelo professor em torno do conceito aparece por inteiro na narração multimodal NM5 (Apêndice C).

Tabela 6.5: Relação entre os dados quanto ao ensino do conceito de combinação linear de vetores

Conceito de combinação linear de vetores		
Fontes de dados		
Texto de álgebra linear; Fundamentação do texto.	Análise da implementação didática	Dados periféricos
	Oportunidades / Dificuldades	
• Recapitulação da relação com outros conceitos: Operações com matrizes;	C-ac; L-m-ga; Ic_{pr}-c; Ic_{al}-c.	
• Recapitulação da relação com outros conceitos: Resolução de sistemas de equações lineares;	Fs-d-nv; C-ac; F_m-s; Ic_{pr}-c; Ic_{al}-c; L-m-ga.	
• Interpretação geométrica e exploração algébrica do conceito de combinação linear de vetores pela via prática;	Fs-d-nv; F_m-a; F_m-ap; L-m-ga. / F_m-a.	
• Definição formal de combinação linear de vetores;	C-p/s.	
• Aplicação do conceito na resolução dos diferentes tipos de tarefas;	Fs-ca-et; A-i; F_m-t/p; F_m-s; C/T-s; C/T-cat; C/T-dc. / E-pc.	
• Relação com outros conceitos da teoria dos espaços vetoriais: Subespaço vetorial gerado.	C-ac; Ic_{pr}-dpt; L-m-gaf.	
	Opções didáticas exteriores ao texto de álgebra linear e seguidas pelo professor	
	Atenção na definição formal de combinação linear de vetores:	
	F-e-mi; F-e-fc.	

Legenda:

Fs-d-nv – Função do *software*-Descobrir novos conceitos- Natureza visual;
Fs-ca-et – Função do *software*-Calcular-Economia de tempo;
A-i – Atitudes face ao uso da tecnologia-Iniciativa;
C-p/s – Configurações da abordagem matricial-Programa/Sequência dos assuntos;
C-ac – Configurações da abordagem matricial-Apresentação dos conceitos;
F_m-t/p – Fatores motivados pela abordagem matricial-Resolução de tarefas/problemas;
F_m-s – Fatores motivados pela abordagem matricial-Recurso ao *software*;
F_m-a – Fatores motivados pela abordagem matricial-Aplicação de algoritmos;
F_m-ap – Fatores motivados pela abordagem matricial-Forma de atuação do professor;
C/T-s – Contexto e aspetos da teoria subjacente-Situação real ou científica;
C/T-cat – Contexto e aspetos da teoria subjacente-Conceitos e aspetos teóricos envolvidos;
C/T-dc – Contexto e aspetos da teoria subjacente-Desenvolvimento conceptual;
E-pc – Exteriorização da exploração de tarefas e aplicações-Potenciais condicionantes da exploração de tarefas e aplicações
Ic_{pr}-c – Interligação dos conceitos desenvolvida pelo professor-Recurso;
Ic_{al}-c – Interligação dos conceitos conseguida pelos alunos-Recurso;
Ic_{pr}-dpt – Interligação dos conceitos desenvolvida pelo professor-Relacional;
F-e-mi – Estratégias que contornam o formalismo-Motivação de uma ideia por meio da discussão de casos ou abordagem prática;
F-e-fc – Estratégias que contornam o formalismo-Formalização dos conceitos;
L-m-ga – Conceitos enquadrados em múltiplas linguagens-Geométrica/Algébrica;
L-m-gaf – Conceitos enquadrados em múltiplas linguagens-Geométrica/Algébrica/Formal.

Antes do desenvolvimento do processo de formalização do conceito de combinação linear de vetores, relacionou-se precocemente este conceito com as operações com matrizes, em particular a multiplicação de matrizes, e também com a resolução de sistemas de equações lineares.

Urge esclarecer a forma como analisámos a relação entre estes conceitos: no subcapítulo 6.2 analisámos a relação entre a resolução de sistemas de equações lineares e o conceito de combinação linear de vetores, com o primeiro a funcionar como um "prestador de serviços" que permite estudar a combinação linear entre vetores e que é parte integrante do procedimento analítico; agora, olhamos para o conceito de combinação linear de vetores como um conceito que em momentos anteriores permitiu mostrar uma forma diferente de multiplicar matrizes e uma forma alternativa de representar um sistema de equações lineares, também incluindo a linguagem das matrizes. As categorias Ic_{pr}-c e Ic_{al}-c concretizam esta perspetiva do ponto de vista do trabalho realizado pelo professor e sugerem que esta relação foi assimilada e demonstrada pelos alunos.

Para além de termos sido influenciados pela obra de Lay (1997), concernente com a introdução precoce de conceitos da teoria dos espaços vetoriais, entendíamos à partida que a ligação do conceito de combinação linear de vetores a outros conceitos enriquecia a abordagem a vários níveis: destacava a sua importância, porque queríamos colocá-lo como conceito central e nuclear para a aprendizagem dos restantes conceitos da teoria dos espaços vetoriais; tirava o conceito do isolamento ao qual estão confinados normalmente os assuntos de natureza mais abstrata da álgebra linear e quebrávamos a tendência reportada por Lapp et al. (2010) de os alunos apenas estabelecerem relações "intra-clump" deste conceito (isto é, apenas dentro da teoria dos espaços vetoriais); contribuía para atenuar a dificuldade dos alunos na interpretação de conceitos mais formais, quando relacionados com contextos mais intuitivos (Dorier et al., 2000a; Dubinsky, 1997).

Há sempre a questão de ser dificilmente mensurável o que é que fica presente na mente dos alunos quando se introduz um novo conceito ou uma mera nova designação no meio da abordagem de outros, sobre o qual o professor refere que é um conceito que se estudará no futuro. Conseguiremos, por momentos, desviar a atenção dos alunos para um novo conceito, estando presente que não é o assunto central? Face a esta preocupação, parece justificar-se a aproximação ao conceito formal de combinação linear de vetores a partir da revisão das situações relacionadas, anteriormente abordadas.

Segundo a categoria L-m-ga, a exploração do conceito de combinação linear de vetores, centrada nas linguagens algébrica e geométrica, começou a ganhar corpo desde a abordagem preliminar: o produto AX como combinação linear das colunas de A começou a desvendar a forma de abordar algebricamente o conceito e constituiu-se como o primeiro passo para tornar a expressão num *proceito* (Gray & Tall, 1994), com os vetores a aparecerem escritos como matrizes coluna; a procura dos escalares que tornassem possível a adição geométrica dos vetores representantes dos coeficientes das incógnitas, de modo a resultar o vetor representante dos termos independentes de um sistema de equações lineares, induziu a possibilidade de se explorar geometricamente o conceito de combinação linear de vetores.

Entendemos que o trabalho do professor em termos da primeira interpretação geométrica do conceito de combinação linear de vetores, relacionado com a resolução de sistemas de equações lineares até três equações e três incógnitas, ficou incompleto. Não foi feita a exploração dinâmica do conceito no GeoGebra e no Mathematica, reduzindo a função destes *softwares* à apresentação como se duma imagem se tratasse (páginas 50, 54 e 193 – Apêndice B). Mais facilmente a partir do GeoGebra, a possibilidade poderia ter passado por mudar os vetores u e v de forma dinâmica – arrastando-os – e mostrar uma série de situações em que se descortinaria como é que o vetor resultante t era obtido a partir daqueles, ou seja, qual a combinação linear do vetor t à custa dos vetores u e v (coadjuvado com o facto de estarem visíveis as coordenadas dos vetores, o que levava à facilidade de identificação dos escalares).

Aparecendo a utilização do GeoGebra e do Mathematica antes da formalização do conceito de combinação linear de vetores, reconhecemos o papel de um AGD pela função de descoberta de um conceito, segundo a natureza visual, que lhe conseguimos atribuir (categoria Fs-d-nv). Mostrámos que, pelo caráter cinestésico, os AGD permitem tornar mais concretas algumas relações com objetos da teoria mais abstrata (Sierpinska et al., 1999b). Aliás, a natureza visual associada às funções de descoberta e de clarificação dos conceitos segundo a utilização de *software* sobrepôs-se à natureza numérica, o que, para além da casualidade de ter sido uma mera escolha nossa, reflete o potencial de explorar muitos dos conceitos de álgebra linear por aquela via.

Ainda no campo da utilização da tecnologia, note-se que o procedimento analítico que aparece associado à investigação da possibilidade de um vetor poder ser escrito como combinação linear de outros pressupõe a resolução de sistemas de equações lineares, a qual é facilmente conseguida pela ajuda proporcionada pelo Scilab. Desta forma, as categorias

Fs-ca-et, A-i e F_m-s justificam e reforçam a consideração deste recurso, visando-o, uma vez mais, como uma oportunidade para o ensino.

Decalcamos a distância a que nos colocámos de explorar os conceitos segundo a opção *definição-teorema-demonstração-lema-exercícios* (Day, 1997; Uhlig, 2002), que a abordagem matricial, por si só, também parece contrariar. Em contraposição, ainda antes da formalização do conceito, seguiu-se a exploração de três questões que foram delineadas para serem transversais à aplicação dos principais conceitos da teoria dos espaços vetoriais e reforçar a posição central do conceito de combinação linear de vetores.

Com este trabalho, voltou a emergir a importância atribuída pelo professor aos procedimentos algorítmicos (categorias F_m-a e F_m-ap), concretizando a investigação da combinação linear entre vetores numa sequência de passos a percorrer. Assumimos que esta ação do professor, que o texto de álgebra linear também reflete, pode ter o efeito perverso de se tornar na reprodução mecânica daquilo que o professor ensinou (Vinner, 1997) e de levar os alunos a pensarem apenas em termos práticos (Dorier & Sierpinska, 2001; Sierpinska, 2000). No entanto, entendemos que a restrição ao espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ e a interpretação do conceito fomentada pela abordagem geométrica tornaram-se suficientes para os alunos conceptualizarem, neste caso, o conceito de combinação linear de vetores. Pelo contrário, a opção seria muito mais discutível se incorrêssemos por espaços vetoriais de natureza mais abstrata, embora sem termos dados para corroborar esta opinião.

A exploração em sala de aula das três questões acima referidas levou o professor a entender não ser necessário apresentar a definição formal de combinação linear de vetores de um espaço vetorial genérico. Acabou por ser mais uma forma de simplificação da mensagem a transmitir aos alunos, em atenção à questão do formalismo abordada na literatura. A expressão algébrica associada ao conceito era agora conhecida (primeiro passo do procedimento analítico) e os alunos sabiam que tinham pela frente a investigação sobre o sistema de equações lineares construído para determinar a existência dos escalares ser possível, ou mesmo determinar esses escalares. Pelas categorias F-e-mi e F-e-fc, aquelas questões constituíram-se como uma forma possível de contornar a questão do formalismo associada a este e outros conceitos da teoria dos espaços vetoriais.

Com a tarefa "A caminho das capitais de distrito" recriámos uma situação que mostra a possibilidade de aplicar também o conceito de combinação linear de vetores (e outros da teoria dos espaços vetoriais) em casos concretos e reais (categorias F_m-t/p, C/T-s e C/T-cat). O

propósito desta tarefa revelou-se ainda concomitante com as questões que referimos atrás, no sentido de uma vez mais colocar o conceito de combinação linear em relação com os conceitos de subespaço vetorial gerado, dependência e independência linear, base e dimensão de um espaço vetorial.

No caso do conceito de combinação linear de vetores, esta tarefa aparecia como momento de aplicação do conceito. Uma das vantagens que decorreu da resolução da tarefa foi a de também fomentar o desenvolvimento conceptual (C/T-dc). Dá razão a que se proporcione que os alunos se deparem com situações de cálculo que normalmente os exemplos ou exercícios propostos não abarcam. No caso desta tarefa, surgiu a necessidade de se resolver um sistema com duas equações e uma incógnita, levando os alunos a ficarem na dúvida sobre se se seguia o "protocolo", e aplicava o método de eliminação de Gauss ou de Gauss/Jordan, ou se se justificava pensar numa forma alternativa.

Esta tarefa foi ainda um exemplo que deu corpo a potenciais condicionantes (E-pc) que podem advir da proposta, em sala de aula, de trabalho de natureza prática. Pelas circunstâncias da demora dos alunos na resolução e pelo tempo que o professor teve que despender para explicar o teor do trabalho a realizar, alertamos para a possibilidade de não se conseguir retirar o proveito esperado. No nosso caso, o professor acabou por antecipar muito do trabalho a realizar e em algumas das questões associadas às diferentes subtarefas apenas esperou que os alunos alinhavassem uma possível forma de encontrar a resposta.

Com base na proposta de Dorier (1998), quanto à ordem de explorar os principais conceitos da teoria dos espaços vetoriais, sucede-se a aproximação ao conceito de subespaço vetorial gerado. Pelas categorias Ic_{pr}-dpt e L-m-gaf, este conceito surge fortemente associado ao conceito de combinação linear de vetores, mostrando a possibilidade de se começar a pensar naquele conceito em termos da linguagem formal. Tornando-se um conceito quase complementar ao de combinação linear de vetores, a abordagem geométrica e algébrica surge naturalmente nos mesmos termos, pelo que a nossa proposta reflete a possibilidade de este conceito ser explorado em termos das diferentes linguagens da álgebra linear.

7 Conclusão

Experience without theory is blind, but theory without experience is mere intellectual play.

Immanuel Kant (1724-1804)

Este estudo insere-se no campo da educação matemática do ensino superior, mais concretamente na didática da álgebra linear.

A investigação sobre os processos de ensino e de aprendizagem da álgebra linear tem atualmente um histórico de sensivelmente três décadas e foi percorrendo diferentes etapas: no início procurou-se identificar e compreender as principais dificuldades ligadas ao insucesso dos alunos a que se assistia na aprendizagem da álgebra linear; seguiu-se a concretização de propostas que possibilitassem a melhoria de formas de ensinar os conteúdos de álgebra linear, fortemente impulsionadas pelo trabalho do LACSG (Carlson et al., 1993); para além de complementarem e enriquecerem a perspetiva inicial da investigação, os trabalhos mais recentes incidiram na análise das dificuldades identificadas e na análise epistemológica dos conceitos, como desafiou Dubinsky (1997), com uma das tendências de investigação a passar pelo cruzamento de teorias da educação matemática (Lapp et al., 2010; Maracci, 2008; Possani et al., 2010; Stewart & Thomas, 2007, 2009, 2010; Trigueros & Possani, 2013; etc.).

Significa que temos atualmente um corpo extenso de literatura na área da didática da álgebra linear. Alguns livros, essencialmente do panorama da bibliografia internacional, mostraram uma possibilidade de tirar estes resultados de investigação do isolamento e das trincheiras do mundo académico, desvendando possíveis formas de os interpretar e aplicar. O presente estudo considera também esta via disseminadora, mas acrescenta a tentativa de ligação dos resultados de investigação às práticas de ensino. Revisitando Latorre (2003), "não há uma

prática docente de qualidade que não se apoie nos resultados de investigação, nem investigação que não encontre na prática o canal e o espaço natural para indagar, analisar e aplicar os seus resultados" (p. 13).

Este estudo incide também no propósito de responder ao desafio de Speer et al. (2010), quando afirmam que as práticas dos professores de matemática do ensino superior ainda são pouco investigadas, de trazer para os ditames do mundo académico a reflexão de um professor sobre a própria prática.

Como consequência, formalizámos o seguinte problema de investigação e orientámos a investigação por meio de uma questão:

Problema de investigação:

Que práticas de ensino concorrem com as orientações do movimento internacional em didática da álgebra linear?

Questão de investigação:

Como é que um professor de álgebra linear pode desenvolver um desenho de ensino que incorpore extensivamente as recomendações didáticas conhecidas? Que dificuldades e oportunidades estão subjacentes à ação de implementação do desenho de ensino na sala de aula?

Nos subcapítulos seguintes apresentamos as principais conclusões que resultaram da procura de uma resposta à questão de investigação colocada, bem como algumas limitações com que nos deparámos e possíveis direções que poderemos considerar no futuro para o avanço da investigação.

7.1 Principais conclusões e contribuições do estudo

Pela janela de oportunidade aberta por Cohen et al. (2011) e Latorre (2003), quanto ao desenvolvimento de um estudo pelo método de investigação-ação, as três primeiras conclusões, que listamos e fundamentamos a seguir, entroncam as implicações e os contributos da investigação para a prática pessoal e profissional, no que concerne ao ensino de álgebra linear.

1. **O estudo revela uma forma pessoal, particular e possível de serem interpretados os resultados de investigação recolhidos na literatura da área, subentendendo a clareza de alguns e as dificuldades de contornar a subjetividade de outros.**

Intuitivamente, a nossa interpretação dos resultados de investigação na área da didática da álgebra linear foi feita por camadas. Em primeiro lugar, avançámos com uma possível identificação e agrupamento das recomendações didáticas que encontrámos na literatura. Segundo atribuições nossas – que passámos a designar por indicadores do estudo – são elas: uso da tecnologia; abordagem matricial; exploração de tarefas e aplicações da álgebra linear; conhecimento dos pré-requisitos; interligação dos conceitos de álgebra linear; alcance do formalismo; atenção nas linguagens e múltiplas representações dos conceitos.

Neste processo de listagem, o principal contributo derivou das propostas do LACSG (Carlson et al., 1993). Complementarmente, a obra *Resources for Teaching Linear Algebra* (Carlson et al., eds. 1997) acrescenta a discussão ampla levada a cabo pelo grupo e por outros investigadores em torno daquelas propostas, permitindo-nos conhecer em maior detalhe o intuito e alcance de cada uma. O que por si só não foi suficiente! Por exemplo, Dubinsky (1997) critica o facto de ser pouca a informação sobre o que o grupo efetivamente pretende ao nível da abordagem geométrica dos conceitos. Isso levou-nos a percorrer uma via alternativa e olhar para um dos livros de álgebra linear, cujo autor era um dos membros do LACSG. Neste caso, é assumido o foco na interpretação geométrica dos principais conceitos de álgebra linear, contribuindo, na nossa opinião, para o esclarecimento daquela proposta.

Adicionalmente, considerámos a possibilidade demonstrada de ensinar novos conceitos de álgebra linear a partir da resolução de problemas em contextos da realidade (Possani et al., 2010; Trigueros & Possani, 2013), que coabita com a importância dada pelo LACSG às aplicações da álgebra linear (Carlson et al., 1993), e da atenção dada pelos investigadores ao ensino dos assuntos de natureza mais abstrata (amplamente retratada na obra *On the Teaching of Linear Algebra* (Dorier, ed. 2000)).

Segundo uma lente mais fina, olhámos para as propostas mais concretas e específicas apresentadas nos diversos trabalhos publicados. O estudo reflete os dois desafios a que nos propusemos: optar pela objetividade e seguir os passos seguros da aplicação ou da adaptação de algumas das propostas; aceitar a subjetividade e o risco de desenvolver versões alternativas de outras propostas.

No primeiro caso, são exemplos, entre outros: a inclusão numa subtarefa de uma possível forma de multiplicar matrizes proposta por Carlson (1993); a adaptação na tarefa "Ponte de Wheatstone" do problema colocado por Possani et al. (2010) no âmbito da modelação de uma situação por meio de equações lineares; a ordem sugerida por Dorier (1998) para a exploração dos principais conceitos da teoria dos espaços vetoriais ou como considerar os conceitos de dependência e independência linear de vetores segundo um conceito unificador e generalizador (Dorier, 1995, 1998). Há ainda a influência dos livros, nomeadamente: quanto à forma de introduzir um algoritmo para a determinação da matriz inversa de uma matriz invertível (Williams, 2001); sobre a atenção inicial nas propriedades dos determinantes e ilustração com matrizes de segunda ordem (Lima, 2010; Strang, 2006); sobre as aplicações dos determinantes no cálculo de áreas e de volumes; etc.

No segundo caso, a questão central é se a nossa interpretação das propostas é correta e aceitável. O exemplo maior passou pela tentativa de introduzir e explorar alguns dos conceitos segundo as diretrizes de quadros teóricos: a resolução de sistemas de equações lineares em proximidade com os princípios de Harel (2000); a introdução do conceito de espaço vetorial como um conceito unificador e generalizador (Dorier, 1995). Quanto ao primeiro, a relação das categorias na Tabela 6.2 configura a abordagem delineada para a resolução de sistemas de equações lineares com bastantes oportunidades para o ensino e inclinamo-nos para a aceitabilidade da proposta. Quanto ao segundo, é mais discutível, por termos observado que levou o professor a antecipar quase toda a informação e que reduziu a atividade dos alunos, comparativamente com a proposta de Dorier (1995) para a introdução deste conceito.

2. **O estudo conduziu à possibilidade de serem criados materiais pedagógicos (um texto original de álgebra linear, uma adenda a este texto e cinco narrações multimodais), refletindo o seu significado e contributo para a comunidade profissional.**

A nossa conceção de incorporar extensivamente num desenho de ensino os resultados de investigação em didática da álgebra linear foi para além da estreita reprodução das propostas dos investigadores. Não significou reproduzir integralmente uma questão, um problema ou uma situação que os investigadores colocaram aos alunos e acreditar no sucesso relatado para a aprendizagem dos diferentes conceitos de álgebra linear. Presumivelmente, tal nem seria possível, por a atenção dos investigadores recair muito na parte mais abstrata da álgebra linear,

e restar a transferibilidade de muitos dos resultados para assuntos mais concretos, como matrizes e sistemas de equações lineares.

Para "contar a história e desvendar o enredo" da apresentação dos diversos conceitos sobre matrizes, sistemas de equações lineares, determinantes e espaços vetoriais, seguimos a via da elaboração de um texto de álgebra linear. Com a publicação deste novo texto (Gonçalves, 2015), contribuímos para o enriquecimento da bibliografia de álgebra linear de autores nacionais, continuando a dinâmica de refletir as mudanças no ensino de álgebra linear, iniciada por Magalhães (1989), e alargando o espetro da aplicação dos principais resultados de investigação.

Outras razões justificaram a elaboração de um novo texto de álgebra linear. Primeiro, permitiu-nos desenvolver um texto direcionado para o tipo de alunos com que sabíamos que iríamos trabalhar. Como consequência, e embora houvesse a preocupação de as aplicações da álgebra linear refletirem o teor do curso destes alunos (engenharia elétrica), entendemos que é um texto que serve essencialmente as necessidades de um primeiro curso de álgebra linear de alunos de cursos de engenharia. Segundo, permitiu transformar numa marca pessoal outras considerações condizentes com informação proveniente da literatura e da influência de algumas obras de referência: formas de simplificação da mensagem, reduzindo as definições e os teoremas aos estritamente necessários, substituindo as demonstrações por ilustrações de casos e passando alguma terminologia para os exercícios; resolução dos exemplos como forma de destacar os processos; apresentação das soluções, incluindo resoluções sucintas; inclusão da informação técnica necessária para a utilização independente dos *softwares* Scilab e Mathematica.

O estudo conduziu-nos à necessidade de complementar a nossa interpretação dos resultados de investigação e de dar a conhecer, com maior detalhe, uma forma de os corporizar. No âmbito do método de investigação-ação, foi uma forma de nos isentar e de clarificar a fase de planeamento. Para tal, redigimos um texto descritivo para funcionar como adenda ao texto de álgebra linear, resultando um segundo material pedagógico.

Para mostrar a implementação do desenho de ensino no terreno, procedemos à elaboração das narrações multimodais de algumas aulas (Lopes et al., 2010, 2014). Este instrumento de recolha de dados, no qual assenta toda a análise da investigação e extensivamente a reflexão sobre os resultados obtidos, é também ele um recurso que poderá ser considerado pelos profissionais. Permite a cada um adquirir ideias mais concretas – naquelas em que se reveja ou

concorde – sobre possíveis formas de abordar os conceitos de álgebra linear e refletir sobre se as nossas propostas, face às suas necessidades, são passíveis de serem incluídas, reformuladas ou rejeitadas na sua prática.

3. **O estudo teve implicação na prática pessoal do professor-investigador no ensino de álgebra linear.**

No cenário inicial da investigação encontrava-se um professor na eminência de lecionar álgebra linear pela primeira vez. Tal como o fez no ensino de outras unidades curriculares, poderia ter seguido as orientações vigentes e, neste caso, ensinar álgebra linear segundo uma abordagem mais clássica.

Os resultados de investigação revelaram-se como possibilidade e um ponto de partida para o desenvolvimento profissional do professor no ensino de álgebra linear. O desconhecimento profissional do professor era contrastado com o conhecimento académico – derivado da realização de uma tese de mestrado na área (Gonçalves, 2005) – sendo conhecedor da dinâmica inicial de investigação em didática da álgebra linear.

No desenvolvimento da investigação, o professor-investigador desenvolveu um desenho de enino baseado nos resultados de investigação, permitindo avançar para o ensino de álgebra linear com base em estratégias fundamentadas e autênticas. Da reflexão sobre a própria prática resultou um conjunto de novas informações sobre como a proposta pode ser melhorada, bem como o professor pode melhorar a sua ação no terreno.

O estudo teve ainda o efeito colateral da valorização pessoal do professor-investigador, passando a integrar a comunidade dos autores de livros de álgebra linear, e também o efeito colateral do impacto que teve a nível organizacional, passando o desenho de ensino a ser o referencial considerado pelos colegas da instituição que também ensinam álgebra linear.

As conclusões seguintes, para além do significado que têm para a comunidade profissional, destacam também o interesse que têm para a comunidade académica.

4. **O estudo destaca a importância da dualidade de papéis desempenhados pelo mesmo sujeito, ora como professor e com a função de aplicar conhecimento, ora como investigador e com a função de produzir conhecimento.**

Alarcão (2001) defende que todo o professor tem que ser um investigador e Ponte (2002) afirma que a investigação sobre a própria prática tem tanto mais a ganhar quanto mais se

aproximar das investigações de cariz académico. Cumprindo estes dois critérios, o estudo destaca e justifica a interdependência das duas "personalidades" e conduz à constatação de que a perspetiva enquanto investigador é mais abrangente do que a perspetiva enquanto professor. Como exemplificação, apresentamos a seguir dois casos que mostram os papéis enquanto professor e enquanto investigador.

Num caso, a replicação quatro vezes do desenho de ensino permitiu, enquanto professor, "afinar" alguns aspetos ou reconhecer algumas limitações, mas com traços de reflexão mais em termos informais ou tácitos. Por exemplo: a gestão do tempo em função dos conteúdos programáticos; a inclusão do uso do Scilab nas avaliações escritas; o reconhecimento do grau de dificuldade da tarefa "Sistemas LTI de tempo contínuo", depois das experiências da sua resolução em sala de aula ou da integração na avaliação (como trabalho realizado fora da aula); a falta de representatividade dos exercícios em alguns temas; a aposta quase nula no estudo das bases de subespaços vetoriais.

Por sua vez, só com o desenvolvimento da reflexão sobre a ação de implementação do desenho de ensino é que se identificaram aspetos que até aí não tinham sido ponderados. A mesma pessoa reconhece a importância de estar como investigador e não apenas como professor, reforçando o estatuto da realização de trabalhos de natureza académica ou científica. Entre alguns exemplos, destacamos três: sobressaiu a perceção de a fonte de algumas das dificuldades dos alunos em relação à aplicação do métodos de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan poder estar na introdução simultânea de ambos os métodos ou no facto de o algoritmo para encontrar a forma escalonada ou a forma canónica reduzida por linhas de uma matriz aparecer inscrito naqueles dois métodos; alargou-se o leque de oportunidades que a revisão dos métodos conhecidos para a resolução de sistemas de equações lineares pode possibilitar; passou-se a questionar se a validação dos três axiomas de subespaço vetorial de um espaço vetorial a partir da representação paramétrica do conjunto é efetivamente a melhor opção.

Noutro caso, novamente enquanto professor, uma caraterística muito própria foi a de apresentar formas de os alunos conseguirem resolver os exercícios mais facilmente, por via de métodos muito objetivos e claros. Neste enquadramento e a título de exemplo, o professor conseguiu, também ao longo dos diferentes anos, afinar uma estratégia de destacar a relação entre os principais conceitos da teoria dos espaços vetoriais e a sobreposição dos procedimentos algorítmicos associados (Figura 7.1).

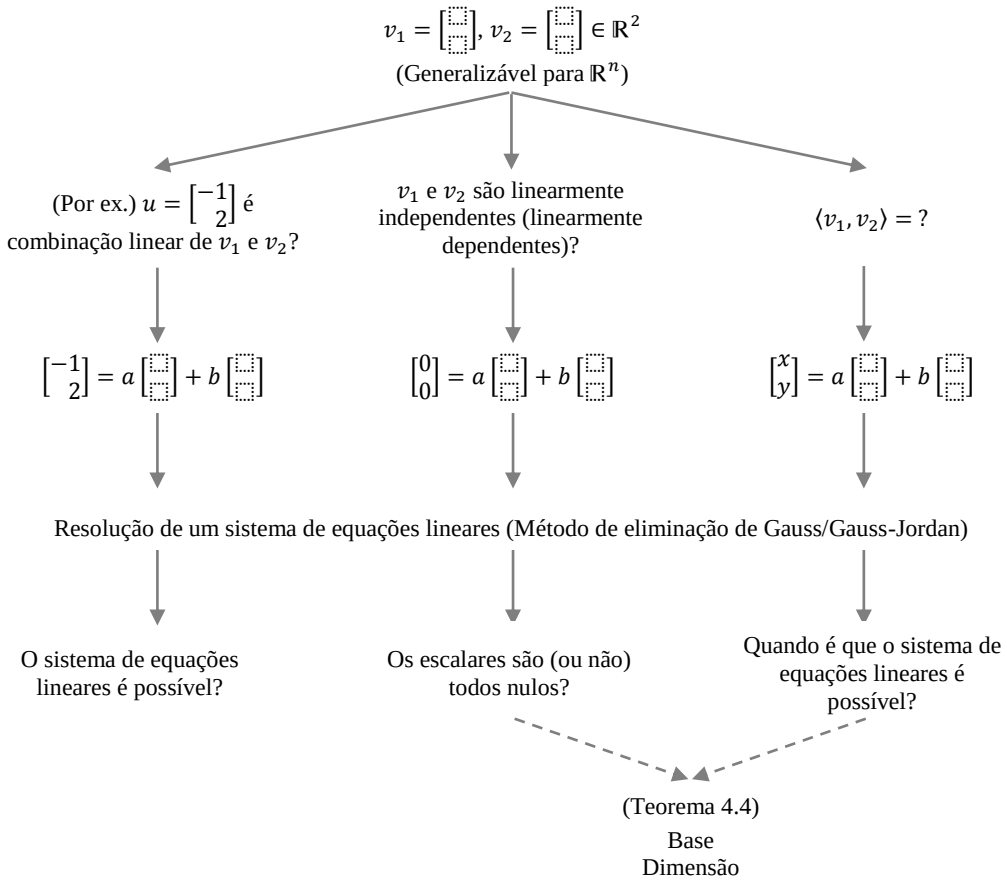


Figura 7.1: Procedimentos algorítmicos relacionados e associados a alguns conceitos da teoria dos espaços vetoriais

Mas aqui, o investigador diz que é importante que os alunos desenvolvam o sentido de como encontrar mais rapidamente a resposta. Se articularem o conhecimento adquirido em torno da discussão de sistemas de equações lineares com a ajuda proporcionada pelo Scilab na obtenção da forma canónica reduzida por linhas de uma matriz, então perceberão que nalguns casos não é necessário resolver completamente o sistema de equações lineares envolvido, nem seguir liminarmente a "receita".

5. **A construção de mapas conceptuais revelou-se uma das estratégias abordadas na literatura que permite melhorar o ensino de álgebra linear, constituindo-se como uma forma preponderante de potenciar a relação entre os conceitos e como um possível mecanismo regulador das aprendizagens.**

Uma das dificuldades de aprendizagem da álgebra linear amplamente explanada na literatura tem a ver com as relações entre os diversos conceitos. A multiplicidade de conexões

que se podem estabelecer entre os conceitos e a diversidade de sequências possíveis para os abordar levou Harel (1997) a referir-se às múltiplas perspetivas da álgebra linear.

O trabalho dos investigadores reflete a atenção nesta questão, desde as recomendações do LACSG (Carlson et al., 1993) até aos estudos assentes na teoria APOE (Dubinsky & McDonald, 2001), com destaque para a construção de decomposições genéticas (Parraguez & Oktaç, 2010; Stewart & Thomas, 2007, 2009, 2010; Trigueros & Possani, 2013), e mais em particular, o estudo de Lapp et al. (2010). As decomposições genéticas dos conceitos são esquemas que desmontam os conceitos, estabelecendo relações hierárquicas e patamares de construção do conhecimento, sendo elas próprias também mapas conceptuais.

Em sala de aula, o professor procurou estabelecer a relação entre os conceitos gizada e ditada pelo texto de álgebra linear. Neste contexto, a análise das narrações multimodais mostrou a coerência com o resultado de Lapp et al. (2010). Os alunos estabeleceram mais facilmente as relações quando estas são segundo procedimentos ou conceitos que permitem obter ou chegar a outros conceitos. Pelo contrário, revelaram dificuldades em estabelecer relações do tipo representacional e relacional, isto é, quando se trata de diferentes representações do mesmo conceito e quando a relação entre os conceitos é estabelecida por meio de definições, teoremas ou propriedades. Mas é também importante acrescentar que as relações que o professor fomentou caem no grupo de relações que os alunos revelaram maior facilidade em estabelecer. Este é um dado novo, não reportado por Lapp et al. (2010), sobre como a ação do professor pode ter impacto na maior ou menor capacidade dos alunos para estabelecer as diferentes relações entre os conceitos.

Foi a construção de um mapa conceptual que permitiu ao professor detetar a confusão criada por alguns alunos relativa ao algoritmo a aplicar na resolução de sistemas de equações lineares e na determinação da matriz inversa de uma matriz invertível. Por exemplo, depois de estabelecer a relação entre o conceito de sistema de equações lineares e o método de eliminação de Gauss e acrescentar a etiqueta $[A|B]$ (Figura 5.2), o professor ficou surpreendido com a questão de um aluno "- *Porque é que não põe A barra I*?". Neste caso, a construção do mapa conceptual funcionou como um mecanismo regulador, permitindo ao professor constatar a evolução das aprendizagens, com o efeito de o levar a sentir a necessidade de rever estes conteúdos e de vincar o modo como se articulavam.

A única ocorrência da "esquematização" da relação entre conceitos no texto de álgebra linear é entre o conceito de caraterística de uma matriz e a classificação dos sistemas de

equações lineares (Apêndice B, página 87). O repto que fica aponta para a possibilidade de uma das alterações a fazer ser a inclusão de mapas conceptuais distribuídos pelo texto de álgebra linear, de modo a destacar e a tornar mais efetivas as relações possíveis entre os conceitos que vão sendo abordados.

6. **As dificuldades intrínsecas à implementação do uso da tecnologia em sala de aula são ultrapassáveis e não invalidam o aproveitamento e a relevância de muitas das funções que facultam para o ensino e para a aprendizagem da álgebra linear.**

Um dos pilares em que assentam as propostas do LACSG para a reformulação do ensino de álgebra linear diz respeito ao uso da tecnologia, sobretudo do computador (Carlson et al., 1993). Investigadores como Carlson (1993), Dubinsky (1997), Harel (1997) e LaTorre (1994) contribuíram para a reflexão sobre a consistência do uso da tecnologia, enquanto outros procuraram desenvolver experiências de ensino baseadas na utilização dos CAS e dos AGD (Dogan-Dunlap, 2004; Hillel, 2001; Klasa, 2010; Sierpinska et al., 1999b; Todorova, 2012; Uicab & Oktaç, 2006). Refletindo a importância da tecnologia, também alguns livros subsequentes passaram a integrar exercícios e problemas para serem resolvidos com o apoio de um *software*.

Acrescentamos à discussão possíveis dificuldades de implementação da tecnologia nas aulas de álgebra linear, com as quais nos deparámos, mas sem nos demover. É uma questão que apenas vimos ligeiramente abordada no trabalho de Hillel (2001). Observámos que tais dificuldades podem resultar de restrições de diversa ordem, como licenças de utilização dos *softwares* e falta de salas equipadas com computadores. No nosso caso, o Mathematica era um recurso que dispensava o GeoGebra e o Scilab, mas a falta de licenças de utilização para os alunos levou-nos a procurar alternativas que fossem de livre utilização. A inexistência de salas com computadores foi contornada pelo pedido aos alunos para usarem os seus computadores portáteis, mas condicionada pela disponibilidade de os trazerem para as aulas. Consideramos que uma solução de recurso podia passar pelo uso da calculadora gráfica, como sugere LaTorre (1994), com o benefício da familiaridade dos alunos com este recurso, mas com a limitação das representações no espaço tridimensional.

As dificuldades de utilização do computador em sala de aula podem ainda estar relacionadas com o dispêndio de tempo e a distorção dos resultados obtidos. Embora tivéssemos colocado no texto todos os comandos necessários e exemplos de utilização do Scilab, o professor teve que despender tempo não previsto a apoiar os alunos na utilização deste recurso.

Adicionalmente, observámos situações em que os erros aparentemente insignificantes de transcrição para o Scilab condicionaram o trabalho programado.

Num estudo nosso (Gonçalves & Costa, 2015), identificámos alguns padrões do uso da tecnologia por parte dos professores portugueses de álgebra linear em cursos de engenharia. Entre outros, os recursos considerados nas práticas não acompanhavam os avanços tecnológicos e os professores que usavam o computador em sala de aula (normalmente professores até dez anos de experiência) nem sempre implicavam os alunos na sua utilização.

Este estudo procura contribuir para a alteração daqueles padrões e, para além de termos implicado fortemente os alunos na utilização do computador, entendemos que o desafio podia ser maior: colocar os alunos a utilizar um AGD que possibilitasse a obtenção de representações tridimensionais; que a iniciativa dos alunos fosse alargada à investigação ou comprovação de aspetos teóricos que o professor ia apresentando e não só na resolução dos exercícios; que os alunos construíssem outras funções como as que apresentámos para contornar as limitações do Scilab, nomeadamente para o cálculo da matriz adjunta e aplicação da regra de Cramer, respondendo desta forma ao desafio de Harel (1997).

A análise das narrações multimodais destacou o leque de funções que conseguimos associar aos diferentes *softwares* utilizados, muitas delas já antecipadas na literatura (Carlson et al., 1993; Dubinsky, 1997; Hillel, 2001; Sierpinska et al., 1999b). Por sua vez, a reflexão acrescentou que as funções de cálculo (pela complexidade, por economia de tempo e para verificação de resultados), surpresa, antecipação, descoberta e clarificação de conceitos constituem-se amplamente como oportunidades para o ensino. Há ainda uma função que não foi captada nas narrações multimodais, mas cujo enquadramento é o mesmo. No texto de álgebra linear é proposto um número significativo de exercícios que apela à utilização do Scilab e indicia outra possível função deste *software* – dedução e ilustração de propriedades.

7. **A resolução de tarefas e a exploração das aplicações que se podem associar a muitos dos conceitos de álgebra linear criam novas oportunidades para o desenvolvimento conceptual, embora coloque também novos desafios ao professor, quanto à forma de atuar em sala de aula.**

Segundo Carlson et al. (1993), a exploração das aplicações da álgebra linear coabita com a abordagem matricial e com o uso da tecnologia. Para trabalhar com esta vertente mais prática da álgebra linear, seguimos a via da resolução de algumas tarefas (maioritariamente como

trabalho de grupo), de problemas e de exercícios incluídos no texto de álgebra linear, com alguns a irem ao encontro do teor do curso. O desenho de ensino refletiu que é possível associar a grande parte dos conceitos algumas das aplicações da álgebra linear, embora sobressaia não o termos conseguido no caso dos conceitos de espaço e subespaço vetorial.

Como potencialidades mais próximas dos relatos dos investigadores, observámos, por um lado, que a tarefa "Ponte de Wheatstone" constituiu-se como um exemplo em que os conceitos implícitos – conceito e resolução de sistemas de equações lineares – surgiram como ferramentas necessárias para a resolução da situação problemática colocada (Sierpinska, 2000). Por outro, a exploração de aplicações da álgebra linear pode ser uma oportunidade única de satisfazer a curiosidade natural dos alunos. No nosso caso, o sentido foi um pouco diferente! A questão "- Para que é que isto serve?" colocada por um aluno, aquando do estudo das matrizes invertíveis, criou a oportunidade para o professor abordar algumas das aplicações deste tipo de matrizes (e como consequência, não seguir na íntegra o plano da aula).

Outra potencialidade da exploração das aplicações da álgebra linear, à qual damos maior destaque, é a oportunidade para o desenvolvimento conceptual dos alunos sobre alguns conceitos, por via de acontecimentos que podem inclusive surpreender o professor e também por uma via que normalmente os exercícios "rotineiros" não proporcionam. Atendendo à categoria C/T-dc (Tabela 5.26), assinalamos três factos que induziram o desenvolvimento conceptual e que resultaram da exploração das tarefas "Ponte de Wheatstone" e "A caminho das capitais de distrito", bem como da resolução do problema sobre a produção de enfeites luminosos: perceção da necessidade de o sistema que integra as equações que modelam uma situação ser escrito na forma canónica; desenvolvimento do significado a atribuir ao surgimento de linhas nulas na matriz na forma escalonada ou na forma canónica reduzida por linhas, no contexto da situação problemática; tomada de decisões, face a situações atípicas (por exemplo, resolver um sistema com duas equações e uma incógnita pelo novo método que o professor ensinou ou por outro mais simples, já conhecido).

Quanto aos novos desafios para o professor, observámos que se contextualizam essencialmente na resolução de tarefas em sala de aula, segundo a modalidade de trabalho de grupo. Os alunos revelaram a surpresa inicial face à proposta do professor para a resolução de tarefas em grupo e a entrega de folhas para a resposta soou a um "teste". Uma das estratégias adotadas foi tornar este trabalho o mais natural possível e informar antecipadamente (aula anterior) sobre o tipo de trabalho a realizar. Durante a resposta às tarefas, os alunos procuraram

exageradamente a ajuda do professor, o que levou a que este lhes reduzisse a autonomia. Como consequência, as tarefas nunca foram resolvidas no tempo previsto e no tempo solicitado, e como alternativa, o professor passou a dar o *feedback* mais à distância (por meio da correção das produções dos alunos) do que no momento.

8. **Pela relação entre as oportunidades e as dificuldades elencadas, poder-se-á concluir que o desenho de ensino ganha consistência como uma forma a considerar no ensino de álgebra linear, sem, no entanto, se ter conseguido atenuar algumas das dificuldades já apontadas na literatura.**

Para contrariar a observação de Carlson (1993), estabeleceram-se no desenho de ensino algumas ligações evidentes dos novos conceitos de álgebra linear aos que os alunos estudaram anteriormente. Mas a questão que ganha relevo é sobre o que efetivamente os alunos aprenderam nos ciclos de ensino anteriores, problema este que também foi incluído na agenda dos investigadores. Na perspetiva de Dorier et al. (2000a), o obstáculo do formalismo é um fenómeno que resulta essencialmente do conhecimento insuficiente dos alunos sobre lógica e teoria de conjuntos e das limitações ao nível da manipulação de expressões algébricas.

A partir da reflexão sobre os contributos do desenho para o ensino de alguns conceitos de álgebra linear, sobressaiu que o problema do conhecimento dos pré-requisitos continuou a ser factual no contexto da definição e validação dos axiomas de subespaço vetorial de um espaço vetorial e também, mas de uma forma mais ténue, no contexto da forma de definir e de introduzir um método para a resolução de sistemas de equações lineares. Para corroborar esta observação, foi em torno destes dois conceitos que emergiu unicamente a categoria F-ofd, relacionada com o obstáculo do formalismo.

No caso particular do estudo dos sistemas de equações lineares, também se verificou que no desenho de ensino apela-se a um conjunto alargado de pré-requisitos, mas que, pelo *feedback* dos nossos alunos, serão à partida conhecidos pelos alunos em geral. Para além dos pré-requisitos referenciados na literatura, a nossa proposta acrescentou um novo: resolução de sistemas até três equações e três incógnitas, segundo os métodos gráfico, de substituição e de adição ordenada. Apenas sobre este último não há garantias de todos os alunos o terem estudado anteriormente. Por esta razão, fica para decisão futura se se justifica ensinar este método (caso os alunos demonstrem não o conhecer) para o aproveitamento, à luz da abordagem matricial, da possibilidade de relacionar as operações possíveis entre as equações de um sistema de equações lineares e as operações elementares sobre as linhas de uma matriz.

No confronto com a literatura, o contexto em que envolvemos os alunos na exploração dos diferentes assuntos da álgebra linear tornou menos denso o problema relatado por Dorier (1998) quanto ao conhecimento anterior dos alunos sobre geometria analítica. Mas pelo contrário, e embora os alunos tenham revelado grandes competências ao nível do cálculo numérico, observámos algumas condicionantes derivadas das limitações dos alunos ao nível do cálculo algébrico e da dificuldade de lidarem com expressões de natureza mais abstrata, nomeadamente: a exploração da forma alternativa de multiplicar matrizes proposta por Carlson (1993); a discussão de sistemas de equações lineares e da caraterística de uma matriz em função de parâmetros; a validação dos axiomas de subespaço vetorial de um espaço vetorial a partir da representação paramétrica de um conjunto.

Uma consequência natural desta última dificuldade é a incapacidade de muitos alunos lidarem com o "formalismo" ou acompanharem a exploração dos assuntos segundo a linguagem formal. No entanto, as categorias F-e-mi e F-e-fc eliciaram que o desenho de ensino dá uma resposta satisfatória no auxílio para se contornar a questão do formalismo, com a apresentação de algumas estratégias e com a criação de novas oportunidades para os momentos e formas de formalização de alguns conceitos.

Pela informação recolhida por meio da análise e da reflexão, também se constatou que a exploração dos conceitos guiada pelo desenho de ensino não ficou isolada na linguagem formal. Aliás, embora apenas alguns conceitos apareçam ligados às três linguagens da álgebra linear (geométrica, algébrica e formal, segundo Hillel (2000)), revelou-se como caraterística própria a exploração dos conceitos segundo mais do que uma linguagem. E um pouco distante do que referiam Dorier e Sierpinska (2001), conseguiu-se substancialmente que os alunos articulassem as linguagens algébrica e geométrica, sem, em algum momento, transparecer que a generalização dos conceitos decorria da linguagem geométrica.

7.2 Limitações do estudo

Os três casos que apontamos como limitações do estudo realizado estão relacionados com as escolhas metodológicas.

O primeiro diz respeito ao desenvolvimento da investigação segundo o método de investigação-ação. As diversas modalidades conhecidas assentam no modelo espiralado proposto por Lewin (Cohen et al., 2011), em torno de ciclos que alternam sistematicamente entre a ação e a reflexão. No nosso caso, a extensão do estudo levou a que apenas fosse viável a realização de um único ciclo, perdendo-se a oportunidade de concretizar e de investigar sucessivamente as sugestões para a melhoria do desenho de ensino.

O segundo caso, também intrínseco ao método de investigação-ação, diz respeito à duplicidade de papéis que o mesmo sujeito desempenhou (como professor e como investigador) e como os tornar o mais isentos possível. Embora sem garantir a isenção e o poder de observação de quem "está de fora", procurámos implementar estratégias de salvaguarda: na fase de planeamento, antecipámos objetivamente todas as intenções, com a elaboração do texto de álgebra linear e a respetiva fundamentação; na fase da ação, demos a conhecer tudo o que se passou em sala de aula, com a construção das narrações multimodais, instrumento este que confere a autenticidade de todos os factos por carecer da validação pelos pares.

Por último, por não ter sido viável a construção das narrações multimodais das dezasseis aulas referentes à implementação do desenho de ensino, as fases de observação e de reflexão do estudo apenas incidem em parte dos conceitos, embora tenhamos recorrido a algumas visões periféricas dos dados para alargar os segmentos investigados.

Agora, à distância, pensamos também que a escolha das aulas sobre as quais foram contruídas as narrações multimodais poderia ter sido outra. Na escolha inicial e segundo um dos critérios estabelecidos, atribuímos um grande peso ao enquadramento do trabalho envolvendo a resolução das tarefas. Esta circunstância alargou a visão em torno de conceitos adstritos aos sistemas de equações lineares, mas reduziu a possibilidade de um olhar sobre conceitos relacionados com os determinantes e estreitou o leque de conceitos sobre a teoria dos espaços vetoriais.

7.3 Sugestões para trabalho futuro

Na sequência das limitações do estudo, uma direção a considerar futuramente, é a realização de novos ciclos de investigação-ação. A partir das hipóteses que apresentámos para

melhorar o desenho de ensino e da identificação dos momentos em que o desempenho dos alunos não correspondeu às expectativas, justifica-se indagar com rigor científico (e não como o próprio professor já o fez, mas de forma informal ou tácita) todas as novas sugestões. A construção de narrações multimodais de outras aulas acrescentará novas informações sobre como o desenho de ensino poderá ser melhorado mais no seu todo.

Para considerar na próxima fase de planeamento, apresentamos mais dois casos que entendemos merecer interesse no desenvolvimento da investigação. Um caso diz respeito à investigação mais aprofundada sobre a génese das dificuldades reveladas pelos alunos na resolução de algumas das tarefas que propusemos. Entendemos que há algo mais do que as dificuldades ao nível do cálculo algébrico em contextos como os que recriámos para a multiplicação alternativa de matrizes (Tarefa "Algoritmo para a multiplicação de matrizes") e para a consolidação dos conceitos de matriz invertível, de caraterística de uma matriz e de determinante de uma matriz quadrada (Tarefa "Sistemas LTI de tempo contínuo").

Outro caso relaciona-se com o momento da introdução dos métodos de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan e com a possível forma de mitigar os "ruídos" que observámos após serem relacionados com a determinação da matriz inversa de uma matriz invertível. Note-se que não encontrámos investigações a relatar como introduzir os métodos de eliminação de Gauss e de Gauss-Jordan, facto porventura justificado por a atenção dos investigadores recair sobre a parte da álgebra linear de natureza mais abstrata.

Outra possível linha de investigação é alargar o campo de aplicação dos resultados apresentados na literatura. Voltando ao programa sugerido pelo LACSG (Carlson et al., 1993), entendemos que podíamos também abraçar o estudo das aplicações lineares e dos valores próprios e vetores próprios. Como enquadramento, podíamos avançar, na instituição, para a reformulação do ensino da unidade curricular Elementos Matemáticos para a Computação, cujo programa engloba estes novos tópicos e os aqui já abordados. Como consequência, poderia resultar um segundo volume do livro que publicámos ou a possibilidade de alargar o texto deste livro numa futura revisão da atual edição.

Bibliografia

Agudo, F. R. D. (1978). *Introdução à álgebra linear e geometria analítica* (3rd ed.). Lisboa: Escolar Editora.

Alarcão, I. (2001). Professor-investigador: Que sentido? Que função?. In B. P. Campos (Org.), *Formação profissional de professores no ensino superior* (Vol. 1, pp. 21-31). Porto: Porto Editora.

Alves-Dias, M., & Artigue, M. (1995). Articulation problems between different systems of symbolic representations in linear algebra. In L. Meira & D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the Nineteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 34-41). Pernambuco, Brazil: Program Committee.

Anton, H., & Rorres, C. (2010). *Elementary linear algebra* (10th ed.). Hoboken, NJ: John Wiley & Sons.

Antsaklis, P. J., & Michel, A. N. (2007). *A linear systems primer*. New York, NY: Birkhaüser.

Aranda, C., & Callejo, M. L. (2010). Construcción del concepto de dependencia lineal en un contexto de geometría dinámica: un estudio de casos. *Relime, 13*, 129-158. Retirado de https://www.dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3719234

Artigue, M., Gueudet-Chartier, G., & Dorier, J.-L. (2000). Presentation of other research works. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 247-264). Dordrecht: Kluwer Academic.

Bardin, L. (1995). *Análise de conteúdo* (L. A. Reto & A. Pinheiro, Trad.). Lisboa: Edições 70. (Publicação original 1977)

Blum, W. (2002). ICMI study 14: applications and modelling in mathematics education – discussion document. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, *34*, 229-239. doi: 10.1023/A:1022435827400

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. (M. J. Alvarez, S. B. Santos, & T. M. Baptista, Trad.). Porto: Porto Editora. (Publicação original 1991)

Britton, S., & Henderson, J. (2009). Linear algebra revisited: an attempt to understand students' conceptual difficulties. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *40*, 963-974. doi: 10.1080/00207390903206114

Cabral, I., Perdigão, C., & Saiago, C. (2009). *Álgebra linear*. Lisboa: Escolar Editora.

Carlson, D. (1993). Teaching linear algebra: must the fog always roll in?. *The College Mathematics Journal*, *24*, 29-40. Retirado de http://www.jstor.org/stable/2686429

Carlson, D., Johnson, C. R., Lay, D. C., & Porter, A. D. (1993). The Linear Algebra Curriculum Study Group recommendations for the first course in linear algebra. *The College Mathematics Journal*, *24*, 41-46. Retirado de http://www.jstor.org/stable/2686430

Carlson, D., Johnson, C. R., Lay, D. C., Porter, A. D., Watkins, A. E., & Watkins, W. (Eds.). (1997). *Resources for teaching linear algebra* (Vol.42). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Carr, W., & Kemmis, S. (1986). *Becoming critical: education, knowledge and action research*. London: Falmer Press.

Chang, R. E. (1997). The undergraduate linear algebra curriculum: a view from a client discipline, computer graphics. In D. Carlson, C. R. Johnson, D. Lay, A. D. Porter, A. E. Watkins, & W. Watkins (Eds.), *Resources for teaching linear algebra* (Vol.42, pp. 21-26). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Chang, J.-M. (2011). A practical approach to inquiry-based learning in linear Algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *42*, 245-259. doi: 10.1080/0020739X.2010.519795

Cochran-Smith, M., & Lytle, S. L. (1993). *Inside-outside: teacher research and knowledge*. New York, NY: Teacher's College Press.

Cochran-Smith, M., & Lytle, S. L. (1999). The teacher research movement: a decade later. *Educational Researcher*, *28* (7), 15-25. doi: 10.3102/0013189X028007015

Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research methods in education* (7th ed.). Oxfordshire: Routledge.

Coutinho, C. P. (2014). *Metodologias de investigação em ciências sociais e humanas* (2ª ed.). Coimbra: Almedina.

Coutinho, C. P., Sousa, A., Dias, A., Bessa, F., Ferreira, M. J., & Vieira, S. (2009). Investigação-acção: metodologia preferencial nas práticas educativas. *Psicologia, Educação e Cultura*, 13, 355-379. Retirado de http://repositorium.sdum.uminho.pt /handle/1822/10148

Creswell, J. W. (2009). *Research design* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Day, J. M. (1997). Teaching linear algebra new ways. In D. Carlson, C. R. Johnson, D. Lay, A. D. Porter, A. E. Watkins, & W. Watkins (Eds.), *Resources for teaching linear algebra* (Vol.42, pp. 71-83). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Day, J. M., & Kalman, D. (2001). Teaching linear algebra: issues and resources. *The College Mathematics Journal*, *32*, 162-168. doi: 10.1080/07468342.2001.11921870

Dogan-Dunlap, H. (2004). Computers and linear algebra. *WSEAS Transactions on Mathematics*, *3*, 537-542. Retirado de http://www.worldses.org/journals/mathematics/ old.htm

Dogan-Dunlap, H. (2006). Lack of set theory relevant prerequisite knowledge. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *37*, 401-410. doi: 10.1080/00207390600594853

Dogan-Dunlap, H. (2010). Linear algebra students' mode of reasoning: geometric representations. *Linear Algebra and its Applications*, *432*, 2141-2158. doi: 10.1016/j.laa.2009.08.037

Dorier, J.-L. (1995). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *29*, 175-197. doi: 10.1007/ BF01274212

Dorier, J.-L. (1998). The role of formalism in the teaching of the theory of vector spaces. *Linear Algebra and its Applications*, *275/276*, 141-160. doi: 10.1016/S0024-3795(97)10061-1

Dorier, J.-L. (Ed.) (2000). *On the teaching of linear algebra*. Dordrecht: Kluwer Academic.

Dorier, J.-L. (2000). Epistemological analysis of the genesis of the theory of vector spaces. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 3-81). Dordrecht: Kluwer Academic.

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000a). The obstacle of formalism in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 85-124). Dordrecht: Kluwer Academic.

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000b). On a research programme concerning the teaching and learning of linear algebra in the first-year of a French science university. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *31*, 27-35. doi: 10.1080/002073900287354

Dorier, J.-L., Robert, A., Robinet, J., & Rogalski, M. (2000c). The meta lever. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 151-176). Dordrecht: Kluwer Academic.

Dorier, J.-L., & Sierpinska, A. (2001). Research into the teaching and learning of linear algebra. In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI study*. (pp. 255-273). Dordrecht: Kluwer Academic.

Dubinsky, E. (1997). Some thoughts on a first course in linear algebra at the college level. In D. Carlson, C. R. Johnson, D. Lay, A. D. Porter, A. E. Watkins, & W. Watkins (Eds.), *Resources for teaching linear algebra* (Vol. 42, pp. 85-105). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Dubinsky, E., & McDonald, M. A. (2001). APOS: a constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI study*. (pp. 275-282). Dordrecht: Kluwer Academic.

Elliott, J. (1991). *Action research for educational change*. Milton Keynes: Open University Press.

Ertekin, E., Solak, S., & Yazici, E. (2010). The effects of formalism on teacher trainees' algebraic and geometric interpretation of the notions of linear dependency/ independency. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *41*, 1015-1035. doi: 10.1080/0020739X.2010.500689

Geertz, C. (1973). *The interpretation of cultures*. New York, NY: Basic Books.

Giraldes, E., Fernandes, V. H., & Smith, M. (1995). *Álgebra linear e geometria analítica*. Lisboa: McGraw-Hill.

Goetz, J. P., & LeCompte, M. D. (1984). *Ethnography and qualitative design in educational research*. New York, NY: Academic Press.

Gonçalves, R. (2005). *Três estudos sobre o ensino e a aprendizagem dos conceitos de subespaço gerado e conjunto de vetores geradores* (Tese de mestrado não publicada). Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Portugal.

Gonçalves, R. (2015). *Álgebra linear: Teoria e prática*. Lisboa: Sílabo.

Gonçalves, R., & Costa, C. (2015). O ensino da álgebra linear em Portugal: padrões no uso da tecnologia em cursos de engenharia. In I. P. Garcia & M. L. Nistal (Ed.), *TICAI 2013-2014: TICs para el Aprendizaje de la Ingeniería* (pp. 25-34). Vigo: IEEE, Sociedad de Educación: Capítulos Español y Portugués.

Gray, E. M., & Tall, D. O. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. *The Journal of Research in Mathematics Education, 26*, 115-141. doi: 10.2307/749505

Guba, E. G. (1990). *The paradigm dialog*. Thousand Oaks, CA: Sage.

Gueudet-Chartier, G. (2004). Should we teach linear algebra through geometry?. *Linear Algebra and its Applications, 379*, 491-501. doi: 10.1016/S0024-3795(03)00481-6

Gueudet-Chartier, G. (2006). Using geometry to teach and learn linear algebra. In F. Hitt, G. Harel, & A. Selden (Eds.), *CBMS Issues in Mathematics Education* (Vol.13, pp. 171-195. Providence, RI: American Mathematical Society.

Guimarães, A. A. (1964). *Lições de álgebra linear*. Porto: Centro Universitário.

Hannah, J., Stewart, S., & Thomas, M. (2013). Emphasizing language and visualization in teaching linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 44*, 475-489. doi: 10.1080/0020739X.2012.756545

Harel, G. (1985). Teaching linear algebra in high school (Unpublished doctoral dissertation). Ben-Gurion University of the Negev, Beer-Sheva, Israel.

Harel, G. (1987). Variations in linear algebra content presentations. *For the Learning of Mathematics, 7* (3), 29-32. Retirado de http://flm-journal.org

Harel, G. (1989). Applying the principle of multiple embodiments in teaching linear algebra: aspects of familiarity and mode of representation. *School Science and Mathematics*, *89*, 49-57. doi 10.1111/j.1949-8594.1989.tb11889.x

Harel, G. (1997). The Linear Algebra Curriculum Study Group recommendations: moving beyond concept definition. In D. Carlson, C. R. Johnson, D. Lay, A. D. Porter, A. E. Watkins, & W. Watkins (Eds.), *Resources for teaching linear algebra* (Vol.42, pp. 107-126). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Harel, G. (1999). Students' understanding of proofs: a historical analysis and implications for the teaching of geometry and linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, *302-303*, 601-613. doi:10.1016/S0024-3795(99)00139-1

Harel, G. (2000). Three principles of learning and teachings mathematics. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 177-189). Dordrecht: Kluwer Academic.

Hillel, J. (2000). Modes of description and the problem of representation in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 191-207). Dordrecht: Kluwer Academic.

Hillel, J. (2001). Computer Algebra Systems in the learning and teaching of linear algebra: some examples. In D. Holton (Ed.), *The teaching and learning of mathematics at university level: an ICMI study*. (Vol.7, pp. 371-380). Dordrecht: Kluwer Academic.

Hillel, J., & Sierpinska, A. (1994). On one persistent mistake in linear algebra. In J. P. Ponte & J. F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 65-72). Lisbon, Portugal: Program Committee.

Klasa, J. (2010). A few pedagogical designs in linear algebra with Cabri and Maple. *Linear Algebra and its Applications*, *432*, 2100-2111. doi: 10.1016/j.laa.2009.08.039

Kleiner, I. (2007). *A history of abstract algebra*. Boston, MA: Birkhäuser.

LaTorre, D. R. (1994). Teaching linear algebra in the presence of supercalculators. In John G. Lewis (Ed.), *Proceedings of the fifth SIAM Conference on Applied Linear Algebra* (pp. 19-21). Snowbird, Utah: Society for Industrial and Applied Mathematics.

Latorre, A. (2003). *La investigación-acción*. Barcelona: Graó.

Lapp, D. A., Nyman, M. A., & Berry, J. S. (2010). Student connections of linear algebra concepts: an analysis of concept maps. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*, 1-18. doi: 10.1080/00207390903236665

Lay, D.C. (1997). *Linear algebra and its applications* (2nd ed.). Boston, MA: Addison Wesley.

Lesh, R., & Doerr, H. M. (Eds.). (2003). *Beyond constructivism: models and modelling perspectives on mathematics problem solving, learning and teaching*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Lima, T. P. (2010). *Lições de álgebra linear*. Coimbra: Imprensa da Universidade de Coimbra.

Lopes, J. B., Silva, A. A., Cravino, J. P., Viegas, C., Cunha, E., Saraiva, E. Branco, M. J., Pinto, A., Silva, A., & Santos, C. A. (2010). *Investigação sobre a mediação de professores de ciências físicas em sala de aula*. Vila Real: Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro.

Lopes, J. B., Silva, A. A., Cravino, J. P., Santos, C. A., Cunha, A., Pinto, A., Silva, A., Viegas, C., Saraiva, E., & Branco, M. J. (2014). Constructing and using multimodal narratives to research in science education: contributions based on practical classroom. *Research in Science Education, 44*, 415-438. doi 10.1007/s11165-013-9381-y

Lüdke, M., & André, M. (1986). *Pesquisa em educação: abordagens qualitativas*. São Paulo: EPU.

Maracci, M. (2008). Combining different theoretical perspectives for analysing student's difficulties in vector spaces theory. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education, 40*, 265-276. doi: 10.1007/s11858-008-0078-z

Martin, W., Loch, S., Cooley, L., Dexter, S., & Vidakovic, D. (2010). Integrating learning theories and application-based modules in teaching linear algebra. *Linear Algebra and its Applications, 432*, 2089-2099. doi: 10.1016/j.laa.2009.08.030

Máximo-Esteves, L. (2008). *Visão panorâmica da investigação-acção*. Porto: Porto Editora.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education*. San Francisco, CA: Jossey-Bass.

Miles, M. B., Huberman, A. M., & Saldaña, J. (2014). *Qualitative data analysis: a methods sourcebook* (3rd ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

Monteiro, A. (2011a). *Álgebra linear: Espaços vetoriais e transformações lineares*. Lisboa: Verlag Dashöfer.

Monteiro, A. (2011b). *Matrizes*. Lisboa: Verlag Dashöfer.

Neves, M. A. F., Guerreiro, L., Leite, A., & Silva, J. N. (2010). *Matemática A, 10º Ano – Geometria I*. Porto: Porto Editora.

Parraguez, M., & Oktaç, A. (2010). Construction of the vector space concept from the viewpoint of APOS theory. *Linear Algebra and its Applications*, *432*, 2112-2124. doi: 10.1016/j.laa.2009.06.034

Pecuch-Herrero, M. (2000). Strategies and computer projects for teaching linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *31*, 181-186. doi: 10.1080/002073900287237

Pirie, S. & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, *26*, 165-190. doi: 10.1007/BF01273662

Ponte, J. P. (2002). Investigar a nossa própria prática. In GTI (Org.), *Reflectir e investigar sobre a prática profissional* (pp. 5-28). Lisboa: APM.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 461-494). Rotterdam: Sense.

Poole, D. (2011). *Linear algebra: a modern introduction* (3rd ed.). Boston, MA: Brooks/Cole.

Possani, E., Trigueros, M., Preciado, J. G., & Lozano, M. D. (2010). Use of models in the teaching of linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, *432*, 2125-2140. doi: 10.1016/j.laa.2009.05.004

Rogalski, M. (2000). The teaching experiment in Lille. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 133-149). Dordrecht: Kluwer Academic.

Santana, A. P., & Queiró, J. F. (2010). *Introdução à Álgebra Linear*. Lisboa: Gradiva.

Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students' thinking in linear algebra. In J.-L. Dorier (Ed.), *On the teaching of linear algebra* (pp. 209-246). Dordrecht: Kluwer Academic.

Sierpinska, A., Dreyfus, T., & Hillel, J. (1999a). Evaluations of a teaching design in linear algebra: the case of linear transformations. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19*, 7-40. Retirado de http://rdm.penseesauvage.com

Sierpinska, A., Nnadozie, A., & Oktaç, A. (2002). *A study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra*. Montreal: Concordia University.

Sierpinska, A., Trgalová, J., Hillel, J., & Dreyfus, T. (1999b). Teaching and learning linear algebra with Cabri. In O. Zaslavsky (Ed.), *Proceedings of the 23rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp 119-134). Haifa, Israel: Program Committee.

Soveral, A. A., & Silva, C. V. (2004). *Matemática A, 11º Ano* (Vol. 1). Lisboa: Texto Editores.

Speer, N., Smith, J., & Horvath, A. (2010). Collegiate mathematics teaching: an unexamined practice. *Journal of Mathematical Behavior*, *29*, 99-114. doi:10.1016/j.jmathb. 2010.02.001

Stewart, S., & Thomas, O. J. (2007). Embodied, symbolic and formal thinking in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *38*, 927-937. doi: 10.1080/00207390701573335

Stewart, S., & Thomas, O. J. (2009). A framework for mathematical thinking; the case of linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 40*, 951-961. doi: 10.1080/00207390903200984

Stewart, S., & Thomas, O. J. (2010). Student learning of basis, span and linear independence in linear algebra. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 41*, 173-188. doi: 10.1080/00207390903399620

Strang, G. (1988). *Linear algebra and its applications* (3rd ed.). San Diego, CA: Harcourt Brace Jovanich.

Strang, G. (2006). *Linear algebra and its applications* (4th ed.). Belmont, CA: Thomson Brooks/Cole.

Tall, D. (2004). Building theories: the three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics, 24* (1), 29-32. Retirado de http://flm-journal.org

Todorova, A. D. (2012). Developing the concept of determinant using DGS. *The Electronic Journal of Mathematics and Technology*, *6*, 115-125. Retirado de https://php.radford. edu/~ejmt/

Trigueros, M., Oktaç, A., & Manzanero, L. (2007). Understanding of systems of equations in linear algebra. In D. Pitta-Pantazi & G. Philippou (Eds.), *Proceedings of the 5th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2359-2368). Larnaca: University of Cyprus.

Trigueros, M., & Possani, E. (2013). Using an economics model for teaching linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, *438*, 1779-1792. doi:10.1016/j.laa.2011.04.009

Tucker, A. (1993). The growing importance of linear algebra in undergraduate mathematics. *The College Mathematics Journal*, *24*, 3-9. Retirado de http://www.jstor.org/stable/ i326560

Uicab, R., & Oktaç, A. (2006). Transformaciones lineales en un ambiente de geometría dinámica. *Relime*, *9*, 459-490. Retirado de http://www.redalyc.org/revista.oa?id=335

Uhlig, F. (2002). The role of proof in comprehending and teaching elementary linear algebra. *Educational Studies in Mathematics*, *50*, 335-346. doi: 10.1023/A:1021245213997

Uhlig, F. (2003). A new unified, balanced and conceptual approach to teaching linear algebra. *Linear Algebra and its Applications*, *361*, 147-159. doi: 10.1016/S0024-3795(02)00319-1

Vernaud, G. (1996). The theory of conceptual fields. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, & B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 219-240). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (Ed.), *Advances mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer Academic.

Vinner, S. (1997). Scenes from linear algebra classes. In D. Carlson, C. R. Johnson, D. Lay, A. D. Porter, A. E. Watkins, & W. Watkins (Eds.), *Resources for teaching linear algebra* (Vol.42, pp. 155-171). Washington, DC: Mathematical Association of America.

Wadsworth, Y. (1998). What is participatory action research? *Action Research International*, Paper 2. Retirado de http://www.aral.com.au/ari/p-ywadsworth98.html

Wawro, M., Sweeney, G. F., & Rabin, J. M. (2011). Subspace in linear algebra: investigating students' concept images and interactions with the formal definition. *Educational Studies of Mathematics, 78*, 1-19. doi: 10.1007/s10649-011-9307-4

Williams, G. (2001). *Linear algebra with applications* (4th ed.). Sudbury, MA: Jones and Bartlett.

Zuber-Skerritt, O. (1996). Introduction: new directions in action research. In O. Zuber-Skerritt (Ed.), *New Directions in Action Research* (pp. 2-7). London: Falmer Press.

Anexo 1

Extracto da Acta n.º 96

Ao sexto dia do mês de outubro de dois mil e onze, pelas treze horas, reuniram em reunião extraordinária os membros do Conselho Técnico e Científico da [redacted] do [redacted] nas instalações da [redacted] do mesmo Instituto. "...".

A reunião tinha como ordem de trabalhos:

"...".

9. Outros Assuntos

No ponto nove, "..." A Doutora [redacted] apresentou um pedido de colaboração ao Departamento de Ciências para implementação de uma proposta didática solicitada pelo Mestre Ricardo Gonçalves, suportada pelo ofício DEST-0497/2011. A proposta foi aprovada por unanimidade pelo órgão"...".

[redacted], 24 de fevereiro de 2016

O Presidente do CTC,

[redacted]

(Doutor [redacted])

Apêndice A

PLANO DE AULA: Nº 2 (1h 45m)	
Capítulo	1. Matrizes
Conteúdos	1.1. A linguagem das matrizes 1.2. Operações com matrizes
Sumário	*Definição de matriz na forma escalonada e matriz na forma canónica reduzida por linhas. Resolução dos exercícios 1.2, 1.5 e 1.6. Operações com matrizes: adição de matrizes; multiplicação de uma matriz por um escalar; multiplicação de matrizes. Desenvolvimento em pares da Tarefa 1. Exemplos de aplicação e recurso ao Scilab 5.3.0. Resolução dos exercícios 1.7 e 1.10.*

Objetivos

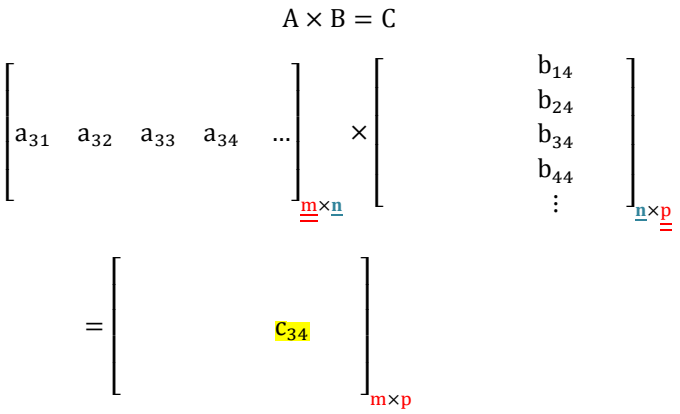
- ✓ Aferir o potencial do uso de *software* de cálculo simbólico e de geometria dinâmica como ferramenta de aprendizagem;
- ✓ Desenvolver a linguagem das matrizes com o conhecimento de algumas noções básicas;
- ✓ Operar com matrizes.

Material

Quadro
Marcadores
Texto de apoio
Computadores
Videoprojetor

Recursos	Desenvolvimento da aula
Scilab 5.3.0	• Revisão das definições sobre matrizes com a construção de um mapa conceptual. • Resolução do **Exercício1.2** e do **Exercício 1.5**. o Verificação da propriedade do Exercício 1.5 analiticamente e com recurso ao Scilab 5.3.0.
Scilab 5.3.0	• Definição de matriz na forma escalonada e de matriz na forma canónica reduzida por linhas. o Caracterização de matrizes escritas na forma escalonada e na forma canónica reduzida por linhas e diferenças com matrizes triangulares superiores. o Exploração do **Exemplo 1.9**. o Escrita de uma matriz na forma canónica reduzida por linhas usando o Scilab 5.3.0. (Não existe um comando para a escrita de uma matriz na forma escalonada!). *Comunicação não verbal*: Usar a representação de degraus para comprovar ou refutar se a matriz está na forma escalonada ou na forma canónica reduzida por linhas. • Resolução do **Exercício1.6**.

GeoGebra	◦ Reforço das diferenças entre uma matriz estar escrita na forma escalonada e na forma canónica reduzida por linhas. • Abordagem da adição de matrizes. ◦ Construção geométrica, com recurso ao GeoGebra, para a revisão da regra do paralelogramo relativa à adição dos vetores de $\mathbb{R}^2$: $u = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$; $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$. Link: Adição de vetores - regra do paralelogramo.ggb ◦ Revisão da adição de vetores em termos das coordenadas, usando a linguagem das matrizes. ◦ Formalização do procedimento da adição de matrizes, realçando a dimensão das matrizes e a operacionalização pelos termos homólogos.
GeoGebra	• Abordagem da multiplicação de uma matriz por um escalar. ◦ Construção geométrica, com recurso ao GeoGebra, do triplo do vetor de $\mathbb{R}^2$: $u = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. Link: Multiplicação de um vetor por um escalar.ggb ◦ Revisão da multiplicação de um vetor por um escalar em termos das coordenadas, usando a linguagem das matrizes. ◦ Formalização do procedimento da multiplicação de uma matriz por um escalar.
Scilab 5.3.0	• Exploração do **Exemplo 1.10**, com recurso ao Scilab 5.3.0. • Desenvolvimento, em dinâmica de pares, da **Tarefa 1**. ◦ Tempo concedido para a realização de ambas as tarefas: 10 minutos. ◦ Apresentação e discussão, em grande grupo, dos resultados obtidos no contexto do desenvolvimento da subtarefa 1. ◦ Apresentação e discussão em grande grupo dos resultados obtidos no contexto do desenvolvimento da subtarefa 2. ◦ Discussão final em termos de um procedimento preferencial para a multiplicação de matrizes. • Como consequência do desenvolvimento da **Tarefa 1**, concretização de um algoritmo para a multiplicação de matrizes. ◦ Requisitos para a multiplicação de duas matrizes em termos da sua dimensão.

	○ Apresentação, com recurso a um esquema, de um algoritmo para a multiplicação de matrizes:  *Comunicação não verbal*: Usar a sinalética de multiplicação de matrizes com as mãos, percorrendo com uma mão cada elemento da linha da matriz à esquerda e com a outra mão os elementos correspondentes da coluna a operar. • Exploração do **Exemplo 1.11**. ○ Realce da dimensão de cada uma das matrizes e a impossibilidade da multiplicação caso o número de colunas da primeira matriz não seja igual ao número de linhas da segunda matriz. • Exploração do **Exemplo 1.12**., relacionando-o com algumas das principais propriedades sobre multiplicação de matrizes. • Resolução do **Exercício 1.7** e do **Exercício 1.10**.