

UNIVERSIDADE DE TRÁS-OS-MONTES E ALTO DOURO

**MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA NO 3.º CICLO DO ENSINO
BÁSICO E SECUNDÁRIO**

RELATÓRIO DE ESTÁGIO



**A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E A SEQUÊNCIA DE LUCAS: PROPOSTAS
PRÁTICAS DE EXPLORAÇÃO NO 3.º CICLO DO ENSINO BÁSICO**

Paula Sofia Teixeira Nunes

ORIENTADORA: Professora Doutora Paula Maria Machado Cruz Catarino

Vila Real, 2013

Relatório de Estágio apresentado à Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, elaborado com vista à obtenção do grau de Mestre em Ensino da Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico e Secundário (em conformidade com o Decreto-lei n.º74/2006 de 24 de Março).

SER PROFESSOR É SER MAIS ALTO,
É SER MAIOR DO QUE OS HOMENS!
É SER ETERNIDADE E DESEJO,
REI DO REINO, DAQUI E DÁLEM DOR!

É TER DE MIL DESEJOS O ESPLENDOR,
E NÃO SABER SEQUER, QUE SE DESEJA!
É TER CÁ DENTRO UM ASTRO QUE FLAMEJA,
É TER GARRAS E ASSAS DE CONDOR!

É TER FOME, É TER SEDE DE INFINITO!
POR ELMO, AS MANHÃS DE OURO E DE CETIM...
É CONDENSAR UM MUNDO NUM SÓ GRITO!

E É SER ALMA E SANGUE E VIDA EM MIM
E DIZE-LO CANTANDO,
A TODA A GENTE!

...

(Adaptado do poema “Ser Poeta”, de Florbela Espanca)

Paula Sofia Teixeira Nunes

ORIENTADORA: Professora Doutora Paula Maria Machado Cruz Catarino

Vila Real, 2013

AGRADECIMENTOS

Este Relatório é o resultado de muitas horas de trabalho, de dedicação e estudo. Todo este esforço e trabalho árduo contribuíram para a minha evolução enquanto docente e formadora de jovens que são o garante do futuro de qualquer população.

A realização deste trabalho representa um objetivo académico por mim desejado e no qual participaram várias pessoas, com quem ao longo desta caminhada, pude sempre contar, através do apoio, atenção, dedicação e disponibilidade.

Agradeço à minha orientadora, Professora Doutora Paula Maria Machado Cruz Catarino, a sua enorme competência, dedicação e disponibilidade. Ao longo de todo este trabalho, sempre me orientou, coadjuvou e mostrou disponível para me auxiliar nas dúvidas que foram surgindo. A partilha de saberes foi muito importante para a minha evolução e muito produtiva para o meu aperfeiçoamento enquanto docente de Matemática. Obrigada por ter estimulado a minha mente irrequieta na procura de novos saberes e pela paciência e atenção que me dedicou ao longo de todo este processo. O seu entusiasmo, a sua competência e dedicação à Matemática e ao Ensino, são o exemplo vivo de uma verdadeira Professora.

Agradeço também ao meu companheiro, pela sua compreensão e apoio, ao longo de todas as etapas deste Relatório, pelo grande incentivo que me deu para que eu alcançasse mais uma etapa de conhecimento na minha vida.

Agradeço aos meus pais, irmãs e restante família, pela compreensão que tiveram, pela confiança que sempre depositaram em mim, por estarem sempre dispostos a me ajudarem em qualquer situação, e por compreenderem que, por vezes, não podia estar com eles, porque tinha de trabalhar e estudar.

Muito obrigada a todos, pois sem o vosso apoio e incentivo, este trabalho não teria sido realizado.

RESUMO

De acordo com as novas Metas Curriculares para a Matemática do Ensino Básico, destacam-se três grandes finalidades para o ensino da Matemática: a estruturação do pensamento, a análise do mundo natural e a interpretação da sociedade.

São várias as situações em que os alunos questionam qual a utilidade e aplicabilidade da disciplina de Matemática. Sendo uma disciplina cuja aplicabilidade à realidade é enorme, devemos realizar atividades onde os alunos possam verificar a utilidade desta disciplina para uma melhor compreensão do nosso quotidiano.

Neste trabalho, pretendemos aprofundar conhecimentos relativamente à sequência de Fibonacci, à sequência de Lucas e ao Número de Ouro. Sendo estes temas pouco desenvolvidos nos atuais programas do Ensino Básico e Secundário, achamos interessante estudar a história e relação entre estas duas sequências, por terem características matemáticas muito importantes, que poderão servir de ponto de partida para lecionar outros conteúdos e também pela sua utilidade na demonstração da aplicabilidade da matemática à vida real.

Neste sentido, começamos por fazer um enquadramento histórico relacionado com a sequência de Fibonacci e a sequência de Lucas, mostrando qual a relação entre as duas sequências, como surgiu a sequência de Fibonacci e qual a sua ligação com o problema da reprodução de coelhos. Também abordamos a relação entre a sequência de Fibonacci e o Número de Ouro.

Incluímos a demonstração de algumas propriedades importantes da sequência de Fibonacci e da sequência de Lucas, bem como de algumas propriedades matemáticas que relacionam estas duas sequências. Apresentámos vários exemplos de aplicabilidade da sequência de Fibonacci e do Número de Ouro nas mais variadas situações que nos rodeiam.

Fazemos um enquadramento destas temáticas no atual Programa de Matemática para o Ensino Básico e uma reflexão crítica do novo Programa que entrará em vigor no ano letivo 2013/2014.

Seguem-se um conjunto de tarefas e respetivas planificações, de carácter prático e lúdico, que poderão servir de recursos para aplicação em contexto de sala de aula, e representam uma proposta de inclusão do estudo destes temas no Programa de Matemática para o 3.º Ciclo do Ensino Básico.

Palavras-chave: Sequência de Fibonacci; Sequência de Lucas; Número de Ouro; Proposta de Tarefas; Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico.

ABSTRACT

According to the new goals for the Mathematics Curriculum of Basic Education, there are three main purposes for the teaching of Mathematics: the structuring of thought, the analysis of the natural world and the interpretation of society.

There are several situations in which students question the advantage and applicability of mathematics. Being a subject whose applicability to reality is huge, we should carry out activities/tasks where students can realize the usefulness of this subject for a better understanding of our everyday lives.

In this work, we aim to extend our knowledge about Fibonacci sequence, Lucas sequence and the Golden Number. Since these themes are not developed in current programs of the elementary and secondary education, we found the study of the history and relationship between these two sequences interesting, because they have very important mathematical characteristics that may serve as a starting point to teach other content, and for its usefulness in demonstration of the applicability of mathematics to real life.

In this sense, we begin by making a historical framework of the Fibonacci sequence and the Lucas sequence, showing the relationship between these two sequences, how emerged the Fibonacci sequence and what their connection to the problem of reproduction of rabbits. Also, we show the relationship between the Fibonacci sequence and the Golden Number.

We include the proofs of some important properties of the Fibonacci sequence and the Lucas sequence as well as some mathematical properties that relate these two sequences. We demonstrate/show several examples of the applicability of the Fibonacci sequence and the Golden Number in various situations that surround us.

We outline these issues in the current Mathematics program for Basic Education and a critical reflection of the new program that comes into force in the present academic year 2013/2014.

We present a set of activities/tasks and respective lesson plans, all of them practical and playful, which can serve as resources to apply in the context of the classroom, and represent a proposal to include the study of these topics in Mathematics Program for 3rd Cycle of Basic Education .

Keywords: Fibonacci Sequence, Lucas Sequence, Golden Number, Proposal of tasks, New Mathematics Program for Basic Education.

ÍNDICE GERAL

Agradecimentos.....	VII
Resumo.....	IX
Abstract.....	XI
Índice Geral.....	XIII
Lista de Símbolos.....	XVII
Índice de Figuras.....	XIX
Índice de Tabelas.....	XXI
Introdução.....	1
CAPÍTULO I – A sequência de Fibonacci e a sequência de Lucas.....	5
1.1. Enquadramento teórico e pertinência do estudo.....	5
1.2. Leonardo de Pisa (1170-1250).....	9
1.3. Édouard Lucas (1842-1891).....	11
1.4. O problema dos coelhos e a sequência de Fibonacci.....	12
1.5. Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856).....	14
1.6. O Número de Ouro.....	15
CAPÍTULO II – Propriedades da sequência de Fibonacci e da sequência de Lucas.....	19
2.1. Propriedades da sequência de Fibonacci.....	19
2.2. A sequência de Lucas e propriedades que a relacionam com a sequência de Fibonacci.....	31
CAPÍTULO III – Algumas aplicações da sequência de Fibonacci e do Número de Ouro.....	39
3.1. O Número de Ouro e a sequência de Fibonacci nos conteúdos do currículo de Matemática.....	39
3.2. O Número de Ouro na arquitetura.....	45
3.3. O Número de Ouro na pintura.....	52
3.4. O Número de Ouro na natureza.....	55
3.5. O Número de Ouro no <i>design</i>	57
3.6. O Número de Ouro na música.....	58
3.7. O Número de Ouro na literatura.....	59
CAPÍTULO IV – A sequência de Fibonacci, a sequência de Lucas e o Número de Ouro no 3.º Ciclo do Ensino Básico.....	61

4.1. As orientações oficiais no 3.º Ciclo do Ensino Básico.....	61
4.2. “Reflexão” sobre o programa de Matemática do 3.º Ciclo do Ensino Básico.....	70
CAPÍTULO V – Proposta de tarefas para o 3.º Ciclo do Ensino Básico, envolvendo os números da sequência de Fibonacci, da sequência de Lucas e o Número de Ouro.....	77
5.1. Introdução à Tarefa A.....	77
5.2. Planificação da Tarefa A.....	78
5.3. Tarefa A: “A reprodução dos coelhos”.....	80
5.4. Proposta de resolução da Tarefa A.....	84
5.5. Orientações para a resolução e exploração da Tarefa A.....	89
5.6. Introdução à Tarefa B.....	90
5.7. Planificação da Tarefa B.....	91
5.8. Tarefa B: “À descoberta do Número de Ouro. Os Números irracionais”.....	94
5.9. Proposta de resolução da Tarefa B.....	95
5.10. Orientações para a resolução e exploração da Tarefa B.....	97
5.11. Introdução à Tarefa C.....	98
5.12. Planificação da Tarefa C.....	99
5.13. Tarefa C: “Construção de um retângulo de Ouro”.....	101
5.14. Proposta de resolução da Tarefa C.....	108
5.15. Orientações para a resolução e exploração da Tarefa C.....	110
5.16. Introdução à Tarefa D.....	111
5.17. Planificação da Tarefa D.....	112
5.18. Tarefa D: “Cálculo do valor exato do Número de Ouro”.....	113
5.19. Proposta de resolução da Tarefa D.....	115
5.20. Orientações para a resolução e exploração da Tarefa D.....	116
5.21. Introdução à Tarefa E.....	116
5.22. Planificação da Tarefa E.....	117
5.23. Tarefa E: “Propriedades do Número de Ouro”.....	119
5.24. Proposta de resolução da Tarefa E.....	120
5.25. Orientações para a resolução e exploração da Tarefa E.....	122
5.26. Introdução à Tarefa F.....	123
5.27. Planificação da Tarefa F.....	124
5.28. Tarefa F: “O pentágono áureo”.....	126
5.29. Proposta de resolução da Tarefa F.....	127
5.30. Orientações para a resolução e exploração da Tarefa F.....	131

5.31. Introdução à Tarefa G.....	132
5.32. Planificação da Tarefa G.....	133
5.33. Tarefa G: “Propriedades que relacionam a sequência de Fibonacci e a sequência de Lucas.....	134
5.34. Proposta de resolução da Tarefa G.....	135
5.35. Orientações para a resolução e exploração da Tarefa G.....	138
CAPÍTULO VI – Conclusões e limitações ao estudo.....	139
Bibliografia.....	141
Webgrafia.....	145
Anexo I.....	151
Anexo II.....	153

LISTA DE SÍMBOLOS

F_i	Número de ordem i da sequência de Fibonacci
$\geq$	Maior ou igual que
Φ	Número de Ouro
$[A, B]$	Segmento de reta de extremos A e B
$\overline{AB}$	Medida de comprimento do segmento de reta $[A, B]$
$\Leftrightarrow$	Equivalência
x^n	Potência de ordem n do número x
$\vee$	Disjunção
$\cong$	Aproximadamente igual a
u_n	Termo de ordem n da sucessão $(u_n)_n$
$\mathbb{N}$	Conjunto dos números naturais
$+\infty$	Mais infinito
$x \rightarrow +\infty$	x tende para $+\infty$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$	Limite da função f quando x tende para $+\infty$
$\in$	Pertence a
S_i	Soma dos i primeiros termos da sequência de Fibonacci
$\sum_{i=1}^n x_i$	Somatório de x_i , desde $i = 1$ até $i = n$
$m.d.c. (a, b)$	Máximo divisor comum entre os números a e b
L_i	Número de ordem i da sequência de Lucas
m	Unidade de medida de comprimento-metro
cm	Unidade de medida de comprimento-centímetro
$\mathbb{R}$	Conjunto dos números reais
$\mathbb{Q}$	Conjunto dos números racionais
$[ABCD]$	Retângulo de vértices A , B , C e D
$[ABC]$	Triângulo de vértices A , B e C
$[ABCDE]$	Pentágono de vértices A , B , C , D e E
x^{-1}	Inverso do número x
$\operatorname{sen} \alpha$	Seno do ângulo α
$\operatorname{cos} \alpha$	Cosseno do ângulo α

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1.....	Leonardo de Pisa
Figura 2.....	” <i>Liber Abaci</i> ”
Figura 3.....	Édouard Lucas
Figura 4.....	”La Tour d’Hanoi”
Figura 5.....	“Árvore genealógica” da reprodução dos coelhos até ao 5.º mês
Figura 6.....	Jacques Binet
Figura 7.....	Segmento áureo
Figura 8.....	Gráfico das razões entre os termos consecutivos da sequência de Fibonacci
Figura 9.....	Sólidos platónicos
Figura 10.....	Duais dos sólidos platónicos
Figura 11.....	Pentagrama regular
Figura 12.....	Triângulo de Pascal e a sequência de Fibonacci
Figura 13.....	Pirâmide de Quéops e a proporção áurea
Figura 14.....	Pártenon de Atenas e a proporção áurea
Figura 15.....	Taj Mahal da Índia e a proporção áurea
Figura 16.....	Universidade de Salamanca
Figura 17.....	Papiro de Rhind
Figura 18.....	Edifício sede da ONU, Nova Iorque
Figura 19.....	O <i>Modulor</i>
Figura 20.....	Torre de Tatlin
Figura 21.....	Unidade habitacional de Marselha
Figura 22.....	Ville Saboye
Figura 23.....	”Homem de Vitróvio” de Leonardo da Vinci
Figura 24.....	Homem segundo Leonardo da Vinci
Figura 25.....	Catedral de Notre Dame
Figura 26.....	”Mona Lisa” de Leonardo da Vinci
Figura 27.....	“Última Ceia” de Leonardo da Vinci
Figura 28.....	”A Anunciação” de Leonardo da Vinci
Figura 29.....	”A Sagrada Família” de Miguel Ângelo
Figura 30.....	”Nascimento de Vénus” de Botticelli

Figura 31.....	Retângulo de Ouro
Figura 32.....	Espiral logarítmica
Figura 33.....	Espiral logarítmica no <i>Nautilus</i> marinho
Figura 34.....	Espiral logarítmica na pinha
Figura 35.....	Planta <i>Achillea ptármica</i>
Figura 36.....	”Árvore genealógica” das abelhas
Figura 37.....	Razão áurea no <i>design</i> da marca <i>Aplle</i>
Figura 38.....	Razão áurea no <i>I’phone</i> da <i>Apple</i>
Figura 39.....	Violino de Stradivarius
Figura 40.....	Crescimento da população de coelhos
Figura 41.....	Representação dos dez primeiros termos da sequência de Fibonacci
Figura 42.....	Quadrados perfeitos
Figura 43.....	Mapa da Europa
Figura 44.....	Universidade de Moscovo
Figura 45.....	Arco de Septímio Severo – Roma
Figura 46.....	Arco do Triunfo – Paris
Figura 47.....	Castelo de Buda – Budapeste
Figura 48.....	Museu nacional de Belas Artes – Estocolmo
Figura 49.....	Parlamento alemão – Reichstag
Figura 50.....	Construção de um retângulo de Ouro com recurso ao <i>Geogebra</i>
Figura 51.....	Retângulo de Ouro
Figura 52.....	Pentágono áureo
Figura 53.....	Ambiente de Trabalho do <i>Geogebra</i>
Figura 54.....	Pentágono regular inscrito numa circunferência
Figura 55.....	Estrela pentagonal
Figura 56.....	Construção de um pentágono áureo com recurso ao <i>Geogebra</i>
Figura 57.....	Triângulo retângulo

ÍNDICE DE TABELAS

Tabela 1.....	Relação entre os números de Fibonacci e os triângulos de Pitágoras
Tabela 2.....	Soma de termos da sequência de Fibonacci
Tabela 3.....	Soma de termos de ordem ímpar da sequência de Fibonacci
Tabela 4.....	Soma de termos de ordem par da sequência de Fibonacci
Tabela 5.....	Soma dos quadrados de termos da sequência de Fibonacci
Tabela 6.....	Soma de termos da sequência de Fibonacci
Tabela 7.....	Soma de termos de ordem ímpar da sequência de Fibonacci
Tabela 8.....	Soma de termos de ordem par da sequência de Fibonacci
Tabela 9.....	Soma dos quadrados de termos da sequência de Fibonacci
Tabela 10.....	Relação entre os números da sequência de Fibonacci e o Teorema de Pitágoras
Tabela 11.....	Razão entre termos consecutivos da sequência de Fibonacci
Tabela 12.....	Razão entre a medida do comprimento e a medida da altura de retângulos que formam os edifícios
Tabela 13.....	Razão entre a medida do comprimento e a medida da altura de retângulos que formam os edifícios
Tabela 14.....	Novo Programa de Matemática do 3.º Ciclo do Ensino Básico

INTRODUÇÃO

O processo educativo reveste-se de um significado tão amplo como o próprio desenvolvimento pessoal e social. Educar, atualmente, deve ser mais do que um conjunto de processos que visam a aquisição de saberes. Deverá contribuir para o desenvolvimento integral dos alunos, visando formar cidadãos livres e autônomos, com espírito crítico, responsáveis, solidários, respeitando os outros e a si próprio, aceitando as diferenças ideológicas e culturais, abertos ao diálogo e à tolerância. O professor desempenha, neste processo, um papel fundamental na dinamização e no fortalecimento das competências que visam o crescimento e desenvolvimento harmonioso e integral dos jovens.

Um dos maiores desafios que enfrentamos, enquanto professores de Matemática, é o de mostrar aos alunos a beleza desta ciência, que sempre despertou o nosso interesse, e qual a sua aplicação em tudo o que nos rodeia. São frequentes os alunos que nos questionam qual a aplicação de determinados conteúdos de Matemática à realidade. Com a realização deste Relatório, pretendemos mostrar a aplicação da matemática em várias situações do nosso quotidiano, que tal como Monteiro (2006, p. 1) afirma “(...) o pensamento matemático permite ao aluno fazê-lo compreender o mundo que nos rodeia e perceber quando deve utilizar este ou aquele modelo matemático (...)”.

Consideramos que o desenvolvimento destes temas pode ser bastante rico, uma vez que “(...) permite ao professor rever, ampliar e aprofundar diversos conceitos e procedimentos ligados aos números irracionais, razão, proporção, semelhança de figuras planas, construções geométricas e demonstrações (...)” (Oliveira, 2010, p.13).

O trabalho realizado neste Relatório tem como principais objetivos:

- Mostrar a História da sequência de Fibonacci, desde o surgimento do problema dos coelhos, até à sua ligação com o Número de Ouro;
- Demonstrar algumas relações entre a sequência de Fibonacci e a sequência de Lucas;
- Estudar algumas propriedades matemáticas destas duas sequências;
- Melhorar o ensino-aprendizagem da Matemática, mostrando a relação destas sequências e do Número de Ouro com tudo o que nos rodeia;
- Propor algumas tarefas para desenvolver os temas “sequência de Fibonacci”, “Sequência de Lucas” e “Número de Ouro” no 3.º Ciclo do Ensino Básico;
- Fazer uma proposta de inclusão dos temas “sequência de Fibonacci”, “sequência de Lucas” e “Número de Ouro” nos conteúdos de Matemática do 3.º Ciclo do Ensino Básico;
- Fazer uma reflexão crítica acerca do novo Programa de Matemática do Ensino Básico, que entrará em vigor no ano letivo 2013/2014.

Este Relatório visa aprofundar os conhecimentos acerca da sequência de Fibonacci, visto que é uma temática pouco explorada no atual programa de Matemática do Ensino Básico e do Ensino Secundário. Associar o estudo da sequência de Fibonacci ao ensino da matemática pode tornar determinados conceitos da Matemática, mais claros e atrativos, sendo grande a variedade de conteúdos que podem ser explorados com tal recurso.

É nosso objetivo completar estes tópicos com propostas de atividades, inovadoras e estimulantes, que auxiliem o professor na sua prática letiva. Algumas atividades propostas poderão ser complementadas com recurso ao *software* de geometria dinâmica *Geogebra*, ferramenta que ajudará os alunos a terem uma visão mais interativa no desenvolvimento de tarefas que contemplam o estudo destes tópicos.

Este Relatório encontra-se dividido em seis capítulos. No 1.º capítulo é feito o enquadramento teórico e histórico da sequência de Fibonacci, da sequência de Lucas e do Número de Ouro. Faz-se uma breve referência a alguns dados biográficos de cientistas cujo trabalho esteve relacionado com a sequência de Fibonacci ou a sequência de Lucas. Os dados biográficos referidos são uma súmula de vários documentos, consultados durante a elaboração deste trabalho, que se encontram referenciados na bibliografia apresentada no final.

No 2.º capítulo, apresentamos algumas propriedades da sequência de Fibonacci e da sequência de Lucas, incluímos as respetivas demonstrações, bem como algumas propriedades matemáticas que relacionam estas duas sequências.

No 3.º capítulo, o principal objetivo é mostrar a aplicação destes conteúdos no mundo que nos rodeia. Apresentamos algumas aplicações da sequência de Fibonacci e do Número de Ouro nos conteúdos do currículo de Matemática, na arquitetura, na pintura, na natureza, no *design*, na música e na literatura.

No 4.º capítulo, apresentamos as orientações oficiais do Programa de Matemática do 3.º Ciclo do Ensino Básico, bem como uma reflexão crítica sobre o novo Programa de Matemática para o Ensino Básico, que entrará em vigor a partir do ano letivo 2013/2014.

No 5.º capítulo, propomos a inclusão, mais pormenorizada, do estudo da sequência de Fibonacci, da sequência de Lucas e do Número de Ouro nos conteúdos do currículo de Matemática do Ensino Básico, com um conjunto de tarefas, a realizar em ambiente de sala de aula, que auxiliem os docentes no desenvolvimento desses subtópicos.

Por fim, no 6.º capítulo, apresentamos as conclusões do trabalho desenvolvido, bem como algumas limitações ao estudo destes tópicos.

No final deste trabalho apresentamos uma lista de documentos que serviram de suporte à realização deste trabalho, incluindo referências *online*.

Todas as figuras e tabelas que constam deste trabalho, que não foram elaboradas pelo autor deste texto, estão devidamente referenciadas.

Realçamos ainda que este trabalho contém o anexo I, onde constam os princípios de Indução Matemática usualmente utilizados nas demonstrações de algumas propriedades das sequências de Fibonacci e de Lucas, incluídas neste trabalho e o anexo II, que contém o novo Programa de Matemática para o 3.º Ciclo do Ensino Básico.

CAPÍTULO I – A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E A SEQUÊNCIA DE LUCAS

1.1. Enquadramento teórico e pertinência do estudo

Sobreviver e desvendar a natureza foram as primeiras preocupações do homem. O fascínio pelo desconhecido despertou inquietação e sede de conhecimento, que o levaram à descoberta do mundo e de si mesmo.

O conhecimento matemático nasceu e desenvolveu-se a partir da necessidade e esforço do homem em tentar explicar e entender o mundo à sua volta. As grandes descobertas matemáticas nasceram do estudo aprofundado da natureza e de todo o universo.

A História da Matemática é um tema transversal a todas as temáticas da disciplina de Matemática, desde o 1.º Ciclo do Ensino Básico até ao Ensino Secundário.

Os conhecimentos em História da Matemática permitem compreender melhor as fases pelas quais passaram os nossos antepassados para chegarem aos conhecimentos atualmente ensinados.

Já no antigo Programa de Matemática do Ensino Básico, que estará em vigor até à sua substituição completa pelo novo Programa, se considera que:

“Os alunos devem ser capazes de apreciar a Matemática, isto é, devem ser capazes de mostrar conhecimento da História da Matemática e ter apreço pelo contributo para a cultura e para o desenvolvimento da sociedade contemporânea”.

“(…) a História da Matemática pode evidenciar o desenvolvimento de determinadas ideias matemáticas, apresentando-a como uma ciência viva e em evolução (...)” (Ponte *et al.*, 2007, p. 6).

Apesar das diretrizes evidenciadas neste Programa de Matemática, no sentido de usar a História da Matemática como um recurso, nos manuais escolares recorre-se ainda muito pouco à História da Matemática como forma de clarificar o aparecimento de determinados conceitos matemáticos.

Tendo em atenção as diretrizes do Currículo Nacional do Ensino Básico (2001), a História da Matemática deve ser usada nas aulas, pelos professores, para que os alunos compreendam os pressupostos das teorias que lhes são ensinadas.

Citando um grande teórico da educação matemática, Ubiratan D’ambrosio¹:

¹ Doutor em matemática, é um teórico da educação matemática e um dos pioneiros no estudo da etnomatemática.

“Uma percepção da história da matemática é essencial em qualquer discussão sobre a matemática e o seu ensino. Ter uma ideia, embora imprecisa e incompleta, sobre porque e quando se resolveu levar o ensino da matemática à importância que tem hoje, são elementos fundamentais para se fazer qualquer proposta de inovação em educação matemática e educação em geral. Isso é particularmente notado no que se refere a conteúdos. A maior parte dos programas consiste de coisas acabadas, mortas e absolutamente fora do contexto moderno. Torna-se cada vez mais difícil motivar alunos para uma ciência cristalizada. Não é sem razão que a história vem aparecendo como um elemento motivador de grande importância.” (2003, p. 29)

O tema escolhido para este trabalho foi “A sequência de Fibonacci e a sequência de Lucas: propostas práticas de exploração no 3.º Ciclo do Ensino Básico”. Este tema poder-se-á inserir no tópico, agora denominado por “Funções, sequências e sucessões” (FSS), do novo Programa de Matemática do Ensino Básico. A temática das “Sequências e Regularidades” é introduzida logo no 2.º ano de escolaridade do 1.º Ciclo do Ensino Básico, sendo-lhe dada bastante importância no 2.º e 3.º Ciclos, bem como no Ensino Secundário.

O novo Programa de Matemática para o Ensino Básico baseia-se em cinco grandes temáticas: Números e Operações (NO); Geometria e Medida (GM); Funções, Sequências e Sucessões (FSS); Álgebra (ALG) e Organização e Tratamento de Dados (OTD).

Com o tema escolhido para este trabalho, que foca, principalmente, o estudo da sequência de Fibonacci e a da sequência de Lucas, podemos trabalhar tarefas que envolvam, essencialmente, quatro dos cinco domínios de conteúdos propostos para o 3.º Ciclo do Ensino Básico: “Funções, Sequências e Sucessões”, “Números e Operações”, “Geometria e Medida” e “Álgebra”.

No que diz respeito aos domínios da Álgebra, das Funções, Sequências e Sucessões, estes não aparecem como temas matemáticos individualizados nos conteúdos a lecionar no 1.º Ciclo do Ensino Básico, no entanto, as ideias algébricas estão presentes nos conteúdos a lecionar para este nível de ensino, (...) “no trabalho com sequências, ao estabelecerem-se relações entre números e entre números e operações, e ainda no estudo de propriedades geométricas, como a simetria (...)” (Ponte *et al.*, 2007, p. 7).

De acordo com *National Council of Teachers of Mathematics* (2000, citado por Ponte, 2006, p.7), o pensamento algébrico diz respeito a quatro grandes dimensões, nomeadamente:

“- Compreender padrões, relações e funções (Estudo das estruturas);

- Representar e analisar situações matemáticas e estruturas, usando símbolos algébricos (Simbolização);
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas (Modelação);
- Analisar mudança em diversas situações (Estudo da variação).”

Assim sendo, o desenvolvimento do pensamento algébrico, deve ser trabalhado, desde o 1.º Ciclo do Ensino Básico até ao 12.º ano de escolaridade, envolvendo o estudo de estruturas algébricas, a simbolização, a modelação e o estudo da variação.

A temática das “Sequências e Regularidades” é fundamental para o desenvolvimento do pensamento algébrico, que deve ser desenvolvido, a partir dos primeiros anos de escolaridade, para que os alunos tenham um percurso de aprendizagem prévia no 1.º e 2.º Ciclos, que possibilite um maior sucesso de aprendizagem posterior.

De acordo com Manson, Graham & Wilder (2005, citados por Saraiva *et al.*, 2010, p. 5):

“O pensamento algébrico envolve, por um lado, a capacidade de cálculo e a capacidade de trabalhar com estruturas matemáticas usando os símbolos algébricos na resolução de problemas, e, por outro lado, envolve a capacidade de generalizar. O reconhecimento da generalidade e a sua articulação é uma aptidão ao alcance de todos os alunos e é vital para eles, caso queiram participar completamente na sociedade”.

O processo de generalização de uma sequência requer, segundo Rojano (2002, citado por Saraiva *et al.*, 2010, p. 5) a passagem por quatro fases fundamentais, que vão da simples obtenção de termos de uma sequência, até à obtenção de uma expressão algébrica que a defina, seguindo-se a sua aplicação na resolução de problemas:

- “1.ª Construção mental da regra geradora dos termos dessa sequência – é um processo mental que ocorre, por exemplo, quando o aluno é capaz de obter qualquer termo de uma sequência sem ter necessidade de calcular consecutivamente todos os seus termos até chegar ao termo daquela ordem;
- 2.ª Escrita da regra em linguagem corrente – é a obtenção da regra mental, com recurso à linguagem natural, ou numérica;
- 3.ª Tradução da regra em simbologia algébrica – obtenção da fórmula que corresponde à generalização simbólica;

4.^a Manipulação da generalização – através do seu uso na resolução de problemas que envolvam a sequência em causa.”

Com a entrada em vigor do novo Programa de Matemática do Ensino Básico, uma nova abordagem aos temas torna-se necessária. Neste sentido, pensamos em desenvolver um conjunto de tarefas que auxiliem os professores na sua prática letiva e que visem desenvolver, especialmente, os domínios das “Funções, Sequências e Sucessões” e “Números e Operações”, bem como uma proposta de inclusão da sequência de Fibonacci e nos conteúdos do currículo do Ensino Básico.

Neste trabalho abordamos um pouco da História da sequência de Fibonacci e da sequência de Lucas, que se tornaram muito famosas pelas suas importantes propriedades, pelas suas relações e suas aplicações nas mais diversas áreas.

Atualmente, nos manuais escolares do Ensino Básico, apenas são feitas algumas referências à sequência de Fibonacci, sem indicar a sua origem ou as suas aplicações na vida quotidiana. Os manuais escolares do Ensino Secundário fazem referência a esta sequência, abordando um pouco da sua História, bem como algumas das suas aplicações no dia - a - dia. Não há referências em relação à sequência de Lucas, talvez por ser muito similar à sequência de Fibonacci.

Existem alguns manuais escolares de Matemática do Ensino Básico e do Ensino Secundário que fazem referências à História do Número de Ouro, considerando-o como um número irracional, conteúdo que faz parte do atual Programa de Matemática, no 8.º e 9.º anos de escolaridade, no entanto, não apresentam tarefas pertinentes onde possam utilizar e aplicar este número.

A escolha do tema para este Relatório deve-se a várias razões, nomeadamente: pelo facto da sequência de Fibonacci, da sequência de Lucas e do Número de Ouro serem temáticas muito importantes, pouco desenvolvidas nos atuais manuais escolares do Ensino Oficial; pela grande importância que é dada aos domínios, agora denominados por “Funções, Sequências e Sucessões” e “Números e Operações”, do novo Programa de Matemática para o Ensino Básico; pela forma como podemos observar a aplicação destes conceitos a várias situações da realidade, sendo muito úteis para que os alunos compreendam que a Matemática se aplica na vida real e, pelo facto de serem conceitos que envolvem determinados conteúdos de Matemática fundamentais para o Ensino Básico, como por exemplo, razões, proporções, números irracionais, Teorema de Pitágoras, construções geométricas, etc.. Por todas estas razões justifica-se uma nova abordagem destes temas, bem como a proposta de tarefas para aplicar em ambiente de sala de aula, que poderão servir de recursos para o desenvolvimento destes tópicos.

1.2. Leonardo de Pisa (1170-1250)



Figura 1: Leonardo de Pisa ²

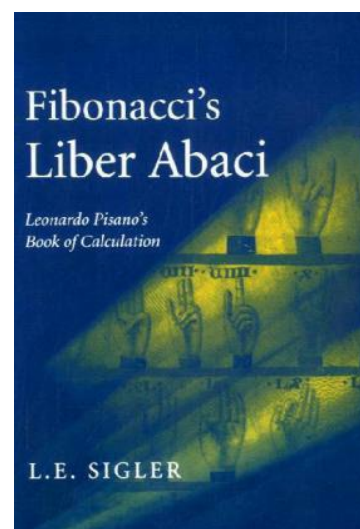


Figura 2: “*Liber Abaci*” ³

Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, nasceu por volta do ano de 1170, em Pisa, Itália. O seu pai chamava-se Guilielmo Bonnacci (apelido que significava “homem de boa natureza”) era um grande mercador, tendo uma ampla rede de negócios comerciais no norte da Costa Africana. O nome Fibonacci significa “filho de Bonacci”.

Ainda jovem, Fibonacci viajou para o Norte de África, onde o seu pai trabalhava como Cônsul da República de Pisa. As funções oficiais de Guilielmo Bonnacci eram ligadas à alfândega, e, portanto, ao comércio internacional. Durante as suas viagens, Leonardo de Pisa estudou com professores muçulmanos e viajou pelo Egito, Síria e Grécia, tendo apreendido conhecimentos profundos de métodos algébricos árabes, inclusive os algarismos indo-arábicos.

Em Pisa, ainda por influência do velho Império Romano, usava-se a notação numérica que hoje conhecemos por “algarismos romanos”, enquanto no Norte da África já se usava o “modus Indorum”, ou “método dos hindus”, a notação trazida da Índia pelos árabes, aquela que por esta razão conhecemos por “algarismos arábicos” e passamos a usar no sistema numérico posicional de base dez, o “sistema decimal”.

Leonardo de Pisa achou a notação numérica usada pelos árabes, tão mais simples e, sobretudo, o uso do seu sistema numérico posicional, tão mais fácil, que dedicou toda a juventude ao seu estudo, viajando pela África e Europa Mediterrânea para manter contacto com os mais eruditos matemáticos

² Fonte: <http://pensamentojovem.blog.terra.com.br/2010/06/18/leonardo-fibonacci/>

³ Fonte: http://www.ebook3000.com/Fibonacci-s-Liber-Abaci_60105.html (Tradução em inglês moderno do livro de Leonardo de Pisa, “Book of Calculation”, por Laurence Sigler, (New York Springer, 2003), ISBN: 0-387-40737-5).

do mundo Árabe e instruir-se nos mistérios da obra de Al-Khwarismi (grande matemático e astrónomo da Idade Média), apenas retornando a Pisa, no ano de 1200.

Quando regressou a Itália, Fibonacci publicou o seu primeiro livro “*Liber Abaci*” (Livro do Ábaco ou Livro do Cálculo), em 1202, sendo um trabalho muito completo sobre métodos e problemas algébricos, onde recomenda vivamente o uso dos números indo-arábicos. O livro tem um nome enganador pois o que Leonardo de Pisa pretendia era demonstrar as vantagens dos algarismos árabes para o cálculo, em detrimento dos antigos métodos romanos, onde os abacistas recorriam ao ábaco e aos números romanos.

O livro “*Liber Abaci*” é composto por quinze capítulos: os primeiros sete são dedicados a explicações sobre a notação indo-arábica e suas aplicações; neles são descritos os novos algarismos, sendo, pela primeira vez, mencionado o zero na literatura científica ocidental, fazendo uso de um conceito totalmente novo que permitia o preenchimento de uma posição decimal “vazia” com o uso deste símbolo, proporcionando a utilização de sistemas numéricos posicionais, e deixando de lado a notação com algarismos romanos, que era empregada até então.

Fazendo uma análise mais pormenorizada aos quinze capítulos, os temas que Fibonacci trata em cada um deles são diversificados. De acordo com Estrada *et al.* (2000, p. 452), no livro “*Liber Abaci*” podemos encontrar os seguintes temas:

- “- numeração de posição, no primeiro capítulo;
- multiplicação, adição, subtração e divisão de inteiros, respetivamente no segundo, terceiro, quarto e quinto capítulos;
- frações, designadamente decomposição em quantésimos, à semelhança dos métodos egípcios, no sexto e sétimo capítulos;
- aplicações comerciais, no oitavo e nono capítulos;
- problemas, no décimo capítulo;
- análise indeterminada do primeiro grau, no décimo primeiro capítulo;
- estudo de problemas de falsa posição, simples e dupla, no décimo segundo e décimo terceiro capítulos;
- cálculos com radicais quadráticos e cúbicos, no décimo quarto capítulo;
- estudo de problemas numéricos de geometria e resolução de equações do segundo grau, no décimo quinto capítulo”.

Esta obra de Fibonacci, contém uma coleção de problemas que, durante séculos, serviu como fonte de pesquisa a autores de textos sobre Aritmética e Álgebra. Foi um desses problemas, sobre a

reprodução dos coelhos, que imortalizou o nome de Fibonacci, pois dele teve origem a sequência de Fibonacci, sendo esta a descoberta que o tornou um dos matemáticos mais populares e talentosos da Idade Média. Esta sequência foi mais tarde estudada e “batizada” pelo matemático François Édouard Anatole Lucas.

A obra “*Liber Abaci*” foi de tal modo famosa que o imperador Frederici II (1194-1250) se deslocou a Pisa, em 1225, para se encontrar com Leonardo de Pisa e organizar um concurso matemático, do qual foi o vencedor.

Fibonacci foi um dos matemáticos mais importantes da Europa Medieval, sendo a maior parte da sua obra demasiado avançada para ser compreendida pelos seus contemporâneos. No entanto, tornou acessível aos sábios da Itália da Renascença, conhecimentos matemáticos dos gregos e dos árabes, contribuindo para estimular fortemente o desenvolvimento da Álgebra da época.

Além de “*Liber Abaci*”, Fibonacci publicou outras obras cujos conteúdos incluem a resolução de equações. São exemplo disso as obras: “*Pratica Geometriae*”, em 1220 e “*Liber Quadratorum*” e “*Flos*”, em 1225.

1.3. Édouard Lucas (1842-1891)



Figura 3: Édouard Lucas ⁴

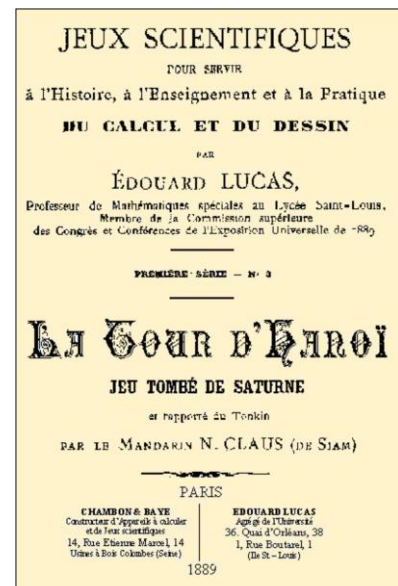


Figura 4: “*La Tour d'Hanoi*” ⁵

⁴ Fonte: http://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%89douard_Lucas

⁵ Fonte: (Costa, 2011, p. 43).

François Edouard Anatole Lucas (1842-1891), estudou na École Normale, em Amiens, em França. Após servir, como oficial de artilharia, durante a guerra Franco-Prussiana, de 1870 a 1871, tornou-se professor de Matemática no Lycée Saint Louis e, seguidamente, no Lycée Charlemagne, ambos localizados em Paris.

Lucas ficou conhecido pelos resultados obtidos com a teoria de números, e particularmente pelos seus estudos sobre a sequência de Fibonacci.

Publicou diversos trabalhos, entre os quais as suas famosas “*Récréations mathématiques*”, hoje um clássico, em diversos volumes publicados de 1882 a 1894. Nas edições destas famosas obras, usava o pseudónimo de Mandarin N. Claus.

O problema das Torres de Hanói apareceu na obra “*Récréations mathématiques – quatrième volume*”, editado em 1883. Posteriormente, este quebra-cabeça foi apresentado de forma específica, mais completa e elaborada em 1889, através da sua publicação “*Jeux Scientifiques pour servir à l’Histoire, à l’Enseignement et à la Pratique du Calcul et du Dessin – la Tour d’Hanoi*”.

O seu trabalho sobre o problema das Torres de Hanói foi tão completo, interessante, divertido, esclarecedor e matematicamente tão bem conseguido, que o tornou conhecido, até aos dias de hoje, como sendo o “inventor” do quebra-cabeças Torres de Hanói.

1.4. O problema dos coelhos e a sequência de Fibonacci

De entre os problemas contidos no livro “*Liber Abaci*”, destaca-se o famoso “Problema dos coelhos”, que pode ser enunciado, de acordo com Corbalán, (2010, p. 33), da seguinte forma: “Quantos casais de coelhos teremos ao fim de um ano, se começarmos com um casal que todos os meses gere outro casal, o qual, por sua vez, comece a procriar aos dois meses de idade?”, admitindo-se que não há mortes de coelhos neste processo.

Para a resolução deste problema, parte-se de um casal de coelhos recém-nascidos que somente após o primeiro mês atingem a maturidade e acasalam. Assim, no final do segundo mês, a fêmea dá à luz o primeiro casal de coelhos. Consequentemente, no terceiro mês há dois casais de coelhos, os adultos e os recém-nascidos. Os casais adultos acasalam, novamente, e ao final do 3.º mês procriam. No 4.º mês, existirão três casais, um que acabou de nascer e mais dois casais aptos a procriarem. No mês seguinte, 5.º mês, os dois casais de coelhos adultos produzem, cada um, um novo casal, ficando com cinco casais. No sexto mês existirão oito casais, sendo cinco casais adultos aptos a procriarem e três novos casais. No sétimo mês, cada um dos cinco casais adultos dará à luz um novo casal e os três novos casais ficam adultos, aptos para procriarem no mês seguinte, perfazendo um total de treze

casais. No oitavo mês existirão vinte e um casais, no nono mês, trinta e quatro casais e assim sucessivamente, obtendo assim, a sequência de Fibonacci.

Observa-se a Figura 5 que mostra a “árvore genealógica” da reprodução dos coelhos até ao quinto mês:

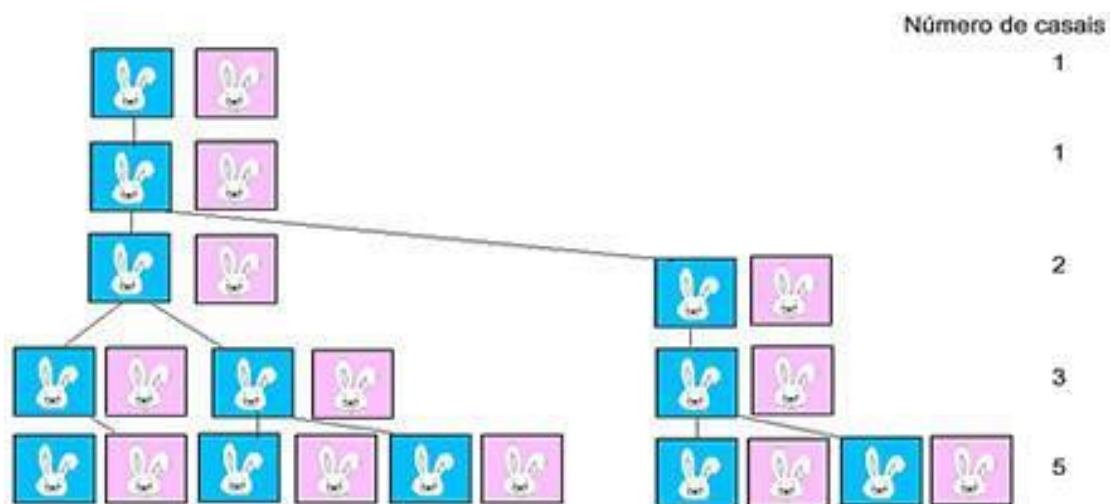


Figura 5: “Árvore genealógica” da reprodução dos coelhos até ao 5.º mês ⁶

Seguindo o mesmo raciocínio para os meses seguintes, Fibonacci observou a seguinte sequência, para a reprodução de coelhos:

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, \dots, F_{n-2}, F_{n-1}, F_n, F_{n+1}, \dots$$

Analisando esta sequência, o primeiro termo é zero, os dois seguintes termos são iguais a 1 e cada um dos restantes é obtido somando os dois termos que o antecedem. Matematicamente, podemos escrever os termos da sequência de Fibonacci, usando a seguinte fórmula:

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ e } F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \text{ para } n \geq 2. \quad (1)$$

Por conveniência, ao longo do texto só nos referiremos ao termo F_0 para nos facilitar algumas demonstrações de propriedades desta sequência, caso contrário, esta sequência será considerada com início em F_1 . Aliás, em muitos artigos de investigação e textos publicados na literatura, a sequência de Fibonacci tem como primeiro termo F_1 , em vez do termo, F_0 .

A sequência de Fibonacci é muito interessante pelas propriedades matemáticas que apresenta e por aparecer em situações variadas do nosso quotidiano, como na natureza, na pintura, na arquitetura, no *design*, no corpo humano, na escultura, na música, etc..

De facto, muitos trabalhos de investigação científica têm sido desenvolvidos, desde a antiguidade, sobre a sequência de Fibonacci e a sequência de Lucas, como por exemplo, é o caso de

⁶ Fonte: <http://www.brasile escola.com/matematica/sequencia-fibonacci.htm>

Hoggatt (1969), de Vorobiov (1974), e mais recentemente, destacamos os trabalhos de Caldwell *et al.* (2010), Marques (2013), Shattuck (2013), Pacci *et al.* (2013), Neto (2013), entre muitos outros.

O estudo dos números de Lucas e dos números de Fibonacci despertaram o interesse para a investigação de outro tipo de números. Muitos trabalhos têm sido desenvolvidos recentemente acerca do estudo das propriedades de vários tipo de números, destacamos por exemplo, os trabalhos de Jhala (2013), Catarino (2013) e de Catarino *et al.* (2013).

1.5. Jacques Philippe Marie Binet (1786-1856)

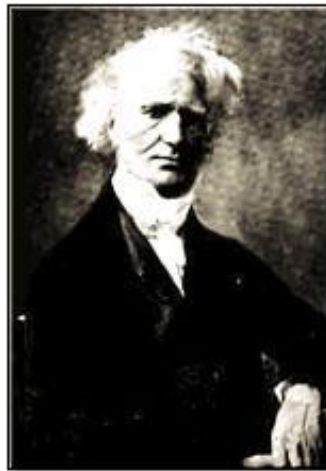


Figura 6: Jacques Binet ⁷

Jacques Binet, matemático e astrónomo francês, nasceu em Rennes, em França, dia 2 de fevereiro de 1786 e morreu em Paris, dia 12 de maio de 1856.

Estudou na famosa École Polytechnique, em Paris, em 1804 e, depois de se formar, trabalhou para o Departamento de Pontes e Estradas do governo francês.

Em 1807, era professor na École Polytechnique, e, um ano depois, foi nomeado assistente do professor de Análise Aplicada e Geometria Descritiva. Em 1814 tornou-se examinador de Geometria Descritiva, sendo, posteriormente, nomeado sucessor de Poisson na cadeira de Mecânica. Em 1816, era inspetor de estudos da École Polytechnique e editor da publicação “Lagrange Mecânica Analítica”, que foi publicada dois anos após a morte de Lagrange. Em 1823, foi nomeado professor para a cadeira de Astronomia, no Collège de France.

Binet era um grande defensor público do rei Charles X. Devido à revolução francesa, de 1830, Charles X teve de abdicar do trono, sendo Louis-Philippe proclamado rei de França. Nessa altura,

⁷ Fonte: http://en.wikipedia.org/wiki/Jacques_Philippe_Marie_Binet

Binet foi demitido do cargo de inspetor de estudos da École Polytechnique, tendo-se mantido como diretor do departamento de Astronomia no Collège de France, durante cerca de trinta anos.

As contribuições de Binet para os campos da Matemática, da Mecânica e da Astronomia são numerosas. Ele pesquisou os fundamentos da teoria das matrizes, descobrindo a regra para multiplicar matrizes. Contribuiu para a teoria de números, escrevendo sobre o algoritmo de Euclides, inclusive, podemos utilizar o algoritmo de Euclides para provar que na sequência de Fibonacci, dois termos consecutivos são primos entre si, isto é, o máximo divisor comum entre esses dois números é igual a um (a demonstração encontra-se no capítulo seguinte).

Binet redescobriu uma fórmula que, aparentemente, já era conhecida, no século XVIII, pelos matemáticos Leonard Euler (1707-1783) e Abraham Moivre (1667-1754), que permite expressar o n -ésimo número da sequência de Fibonacci. A fórmula permite encontrar o valor de qualquer número de Fibonacci, F_n , conhecendo apenas o seu lugar, n , na sequência. Esta fórmula ficou conhecida como “fórmula de Binet”, em sua homenagem.

Pesquisou sobre as equações de diferenças finitas e, junto com o seu compatriota Lucas, foram precursores do grupo “American Mathematical” do século XX, que em 1963, fundou a “Associação Fibonacci” e começou a publicar a revista “The Fibonacci Quarterly”.⁸

Recebeu, em 1821, a Ordem da “Légion d'Honneur” e foi eleito membro da “Académie des Sciences”, em 1843.

1.6. O Número de Ouro

O Número de Ouro, também chamado de proporção áurea, número áureo ou razão áurea, é um dos números irracionais mais misteriosos e enigmáticos que se conhece. Despertou o interesse de muitos matemáticos na Idade Média e no Renascimento. É considerado por muitos como o símbolo da harmonia, da perfeição e da proporcionalidade.

Representa-se pela letra grega Φ (fi), em homenagem a Fídias, escritor e arquiteto grego, construtor da Acrópole *Partenón*, de Atenas. Este número apareceu, inicialmente, na tentativa de dividir um segmento de reta em duas partes, para que a razão entre o comprimento total desse segmento e a sua maior parte fosse igual à razão entre o comprimento da maior parte e o comprimento da menor parte. À razão encontrada chamou-se razão áurea ou Número de Ouro.

O valor exato do Número de Ouro é $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Qualquer obra onde surgisse este número nas suas proporções, era associada a um padrão de beleza artística; assim quando um quadro, uma pintura

⁸ Fonte: www.fq.math.ca

ou uma construção apresentava medidas cuja razão fosse igual ao Número de Ouro, era considerado harmónico, belo e perfeito.

Os retângulos que obedecem à razão áurea ou divina proporção são considerados mais agradáveis aos olhos, e, por essa razão, foram muito utilizados em obras de arquitetura, pintura ou arte de grandes artistas tais como Leonardo da Vinci, Salvador Dali, Miguel Ângelo, Sandro Botticelli e Luca Pacioli, entre outros.

O Número de Ouro foi estudado pelos gregos num contexto geométrico. Aparece na famosa obra “*Elementos de Geometria*”, de Euclides, escrito cerca de 300 anos a.C.. Esta obra é composta por treze livros, onde aparece a razão áurea em várias figuras planas e sólidos.

No livro VI de Euclides, pode-se destacar o seguinte texto, traduzido em português: “Diz-se que uma reta está dividida em média e extrema razão quando o comprimento da linha total está para a parte maior como esta parte maior está para a menor” (Corbalán, 2010, p.23). Isto significa que o todo está para a parte, assim como a parte está para o resto.

Sejam A , B e C três pontos de um segmento de reta $[A, B]$ e $\overline{AB} = x$, $\overline{AC} = 1$ e $\overline{CB} = x - 1$, tal como mostra na seguinte figura :



Figura 7: Segmento áureo

De acordo com a afirmação anterior, obtemos a seguinte proporção:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1} \Leftrightarrow x(x-1) = 1 \times 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0.$$

Aplicando a fórmula resolvente, vem:

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Esta equação tem duas soluções, uma positiva e outra negativa: $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ou $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Como se trata, neste contexto, de medidas de comprimentos de um segmento de reta, só faz sentido considerar a solução positiva, ou seja:

$$x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \cong 1,6180339887 \dots$$

O número que é solução da equação do 2.º grau acima apresentado é o chamado Número de Ouro, denotado por : $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Outro matemático que foi muito importante para a divulgação do Número de Ouro foi Luca Pacioli (1445-1514), que publicou um tratado em 1509, “*De Divina Proportione*”, onde surgem estudos sobre polígonos, poliedros regulares e a razão de Ouro. Este livro é impressionante pelas suas ilustrações, que foram atribuídas a Leonardo da Vinci (1452-1519).

Leonardo da Vinci ficou conhecido como matemático, mas a sua mente irrequieta, característica do Homem do Renascimento, não se ocupava somente de Álgebra, Geometria e Aritmética. Foi também um artista e engenheiro, usando nas suas mais variadas obras de arte, o Número de Ouro.

Podemos encontrar o Número de Ouro em inúmeras situações, como nas pirâmides do Egito, nas obras de Botticelli, de Leonardo Da Vinci e de Salvador Dali, na sequência de Fibonacci, na natureza, no corpo humano, nos fratais, etc..

Existe uma relação muito estreita entre a sequência de Fibonacci e o Número de Ouro. A sequência de Fibonacci não é limitada superiormente, mas se considerarmos a sequência $(u_n)_n$, $n \in \mathbb{N}$ como sendo o quociente entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci, obtemos a sequência $(u_n)_n = \left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)_n$, que tende para a razão áurea quando n cresce, ou seja, as razões que resultam dos termos da sequência $(u_n)_n$ vão-se aproximando do Número de Ouro:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

Podemos verificar que à medida que n tende para mais infinito, os termos da sequência $(u_n)_n = \left(\frac{F_{n+1}}{F_n}\right)_n$, tendem para a razão áurea, tal como podemos observar no seguinte gráfico:

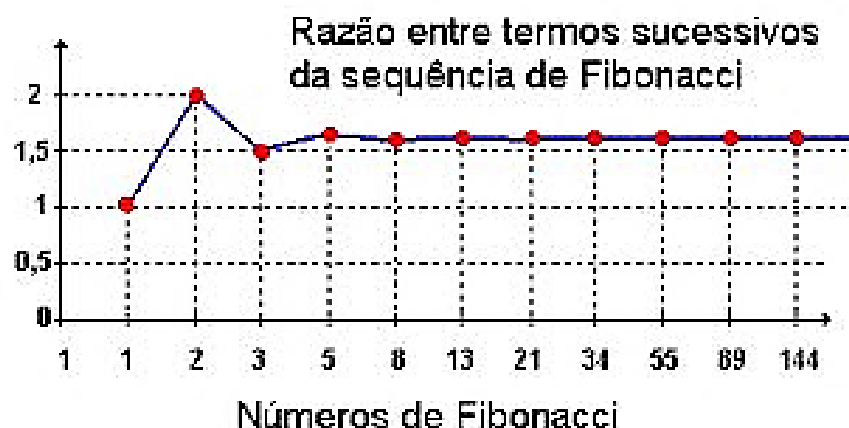


Figura 8: Gráfico das razões entre os termos consecutivos da sequência de Fibonacci. ⁹

⁹ Fonte: <http://www.interaula.com/matweb/alegria/fibon/seqfib1.htm>

CAPÍTULO II: PROPRIEDADES DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E DA SEQUÊNCIA DE LUCAS

2.1. Propriedades da sequência de Fibonacci

É usual, em muitas das demonstrações de propriedades de sequências de números naturais definidas por recorrência, usar-se a indução matemática. Também no caso das sequências de Fibonacci e de Lucas é comum o uso do Princípio de Indução Matemática na demonstração de algumas das suas propriedades. Apenas para relembrar os Princípios de Indução Matemática, ver por exemplo, os que constam do anexo I a este relatório e que estão referenciados em Araújo *et. al* (2011, pp. 2-5), encontrando-se, no entanto, em muita literatura.

Apresentamos, de seguida, algumas propriedades referentes aos números de Fibonacci e aos números de Lucas e respectivas demonstrações. Tal como já foi referido, estas duas sequências numéricas são muito similares e relacionam-se entre si, o que é visível em algumas propriedades que evidenciam a relação entre estas duas sequências.

Propriedade 1.

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Já sabemos que os termos da sequência de Fibonacci podem ser definidos como em (1). Temos:

$$F_0 = 0, F_1 = 1 \text{ e } F_{n-2} = F_n - F_{n-1} \text{ para } n \geq 2.$$

Sendo assim, podemos escrever cada termo da sequência da seguinte forma:

$$F_1 = F_3 - F_2;$$

$$F_2 = F_4 - F_3;$$

$$F_3 = F_5 - F_4;$$

... ..

$$F_{n-1} = F_{n+1} - F_n;$$

$$F_n = F_{n+2} - F_{n+1}.$$

Somando membro a membro, obtemos

$$F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_{n-1} + F_n = (F_3 - F_2) + (F_4 - F_3) + (F_5 - F_4) + \cdots + (F_{n+1} - F_n) + (F_{n+2} - F_{n+1}).$$

Simplificando a expressão anterior, notemos que se anulam todos os termos, exceto $-F_2$ e F_{n+2} . A soma dos primeiros n termos da sequência traduz-se pela seguinte expressão:

$$F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1} + F_n = -F_2 + F_{n+2}.$$

Como $F_2 = 1$ obtemos:

$$\begin{aligned} F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1} + F_n &= -1 + F_{n+2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1} + F_n &= F_{n+2} - 1, \end{aligned}$$

que é o resultado pretendido. □

Exemplo: À semelhança do que é feito em Pereira *et. al.*, (2008, p.70), apresentamos um exemplo, para ilustrar a propriedade 1. Se $n = 10$, sabemos que

$$F_1 + \cdots + F_9 + F_{10} = 1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13 + 21 + 34 + 55 = 143.$$

A propriedade 1 permite-nos efetuar a soma dos dez primeiros termos da sequência de Fibonacci, sem termos de recorrer a todos os termos. De acordo com a propriedade citada, basta conhecer o termo relativo a dois índices acima do n (número de parcela a somar) e subtrair uma unidade. Neste caso concreto, $F_{12} - 1$, e a soma dos dez primeiros termos da sequência de Fibonacci fica igual a :

$$F_{10+2} - 1 = F_{12} - 1 = 144 - 1 = 143,$$

verificando os cálculos acima efetuados.

Propriedade 2.

$$F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: É conhecido que os termos da sequência de Fibonacci satisfazem, pela definição (1), a igualdade: $F_{2n} = F_{2n-2} + F_{2n-1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

É nosso objetivo considerar os termos de índice ímpar para os somar de seguida. Por conveniência, vamos tentar obter expressões desses termos, como sendo a diferença entre dois termos da sequência.

Assim temos que para: $n = 1$	$F_2 = F_0 + F_1 \Leftrightarrow F_1 = F_2 - F_0;$
$n = 2$	$F_4 = F_2 + F_3 \Leftrightarrow F_3 = F_4 - F_2;$
$n = 3$	$F_6 = F_4 + F_5 \Leftrightarrow F_5 = F_6 - F_4;$

$$n = 4 \quad F_8 = F_6 + F_7 \Leftrightarrow F_7 = F_8 - F_6;$$

... ..

Substituindo os valores anteriores na expressão seguinte, obtemos:

$$F_1 + F_3 + F_5 \dots + F_{2n-1} = (F_2 - F_0) + (F_4 - F_2) + (F_6 - F_4) + \dots + (F_{2n} - F_{2n-2}).$$

Simplificando os termos da expressão anterior, verificamos que se anulam todos os termos, exceto os termos $-F_0$ e F_{2n} . Como $F_0 = 0$, o resultado que se obtém é

$$F_1 + F_3 + F_5 \dots + F_{2n-1} = -F_0 + F_{2n} \Leftrightarrow F_1 + F_3 + F_5 \dots + F_{2n-1} = F_{2n},$$

como pretendíamos mostrar.

□

Propriedade 3.

$$F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Na sequência de Fibonacci, sabemos que $F_0 = 0, F_1 = F_2 = 1$. Os termos da sequência de Fibonacci obedecem, por (1), à igualdade seguinte:

$$F_{2n+1} = F_{2n-1} + F_{2n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Assim sendo, temos que, para

$$n = 1 \quad F_3 = F_1 + F_2 \Leftrightarrow F_2 = F_3 - F_1;$$

$$n = 2 \quad F_5 = F_3 + F_4 \Leftrightarrow F_4 = F_5 - F_3;$$

$$n = 3 \quad F_7 = F_5 + F_6 \Leftrightarrow F_6 = F_7 - F_5;$$

... ..

Logo podemos concluir que para $n \geq 1$, obtemos:

$$F_{2n+1} = F_{2n-1} + F_{2n} \Leftrightarrow F_{2n} = F_{2n+1} - F_{2n-1}.$$

Substituindo os valores anteriores na expressão que representa a soma dos termos de índice par, resulta

$$F_2 + F_4 + F_6 \dots + F_{2n} = (F_3 - F_1) + (F_5 - F_3) + (F_7 - F_5) + \dots + (F_{2n+1} - F_{2n-1}).$$

Simplificando os termos da expressão anterior, anulam-se todos os termos, exceto os termos $-F_1$, e F_{2n+1} . Como $F_1 = 1$, temos que:

$$F_2 + F_4 + F_6 \dots + F_{2n} = -F_1 + F_{2n+1} = F_{2n+1} - 1,$$

como queríamos demonstrar.

□

Propriedade 4.

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + \cdots + F_n^2 = F_n \times F_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: A sequência de Fibonacci é definida por (1), obtendo-se então que:

$$F_1^2 = F_1 \times F_1 = F_1 \times F_2;$$

$$F_2^2 = F_2 \times F_2 = F_2 \times (F_3 - F_1) = F_2 \times F_3 - F_2 \times F_1;$$

$$F_3^2 = F_3 \times F_3 = F_3 \times (F_4 - F_2) = F_3 \times F_4 - F_3 \times F_2;$$

$$F_4^2 = F_4 \times F_4 = F_4 \times (F_5 - F_3) = F_4 \times F_5 - F_4 \times F_3;$$

... ..

$$F_n^2 = F_n \times F_n = F_n \times (F_{n+1} - F_{n-1}) = F_n \times F_{n+1} - F_n \times F_{n-1}.$$

Então vem: $F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + \cdots + F_n^2 = (F_1 \times F_2) + (F_2 \times F_3 - F_2 \times F_1) + (F_3 \times F_4 - F_3 \times F_2) + (F_4 \times F_5 - F_4 \times F_3) + \cdots + (F_n \times F_{n+1} - F_n \times F_{n-1})$.

Efetuada as simplificações necessárias obtemos que:

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + \cdots + F_n^2 = F_n \times F_{n+1},$$

mostrando assim o que pretendíamos. □

Tal como fizemos anteriormente para a propriedade 1, apresentamos de seguida, um exemplo, para ilustrar a propriedade 4.

Exemplo: Para $n = 9$, temos que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^9 F_i^2 &= F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 + F_6^2 + F_7^2 + F_8^2 + F_9^2 = \\ &= 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2 + 13^2 + 21^2 + 34^2 = 1870. \end{aligned}$$

Usando a propriedade 4 acima demonstrada, para calcular a soma dos quadrados dos nove primeiros termos da sequência de Fibonacci basta calcular $F_9 \times F_{10} = 34 \times 55 = 1870$, verificando os cálculos acima efetuados.

Propriedade 5. Se $m \geq 1$ e $n > 1$, então

$$F_{m+n} = F_{n-1} \times F_m + F_n \times F_{m+1}.$$

Demonstração: Fixemos $n > 1$ e provemos a propriedade usando o princípio de indução sobre m .

Para $m = 1$ e atendendo a que $F_1 = F_2 = 1$, obtemos

$$F_{n+1} = F_{n-1} \times F_1 + F_n \times F_2 = F_{n-1} + F_n ,$$

que é verdadeira, por (1).

Para $m = 2$ e atendendo a que $F_2 = 1$ e $F_3 = 2$, obtemos

$$F_{n+2} = F_{n-1} \times F_2 + F_n \times F_3 = F_{n-1} + 2F_n = F_{n-1} + F_n + F_n .$$

Como $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n \Leftrightarrow F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$, obtemos que

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n ,$$

que é verdadeira.

Suponhamos agora que a igualdade é verdadeira para m e $m + 1$. Mostraremos que a igualdade é verdadeira para $m + 2$. Consideremos então que

$$F_{n+m} = F_{n-1} \times F_m + F_n \times F_{m+1} ;$$

$$F_{n+(m+1)} = F_{n-1} \times F_{m+1} + F_n \times F_{m+2} .$$

Adicionando as duas igualdades anteriores, obtemos,

$$\begin{aligned} F_{n+m} + F_{n+(m+1)} &= F_{n-1} \times F_m + F_n \times F_{m+1} + F_{n-1} \times F_{m+1} + F_n \times F_{m+2} \\ &= F_{n-1}(F_m + F_{m+1}) + F_n(F_{m+1} + F_{m+2}) \end{aligned}$$

Atendendo à relação de recorrência a que satisfaz a sequência de Fibonacci, obtemos ainda que,

$$F_{n+(m+2)} = F_{n-1} \times F_{m+2} + F_n \times F_{m+3} ,$$

como queríamos mostrar.

□

Propriedade 6.

$$F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 = F_{2n} , \quad \forall n \in \mathbb{N} .$$

Demonstração: Consideremos a igualdade da propriedade anterior para o caso particular de $m = n$, ou seja:

$$F_{2n} = F_{n-1} \times F_n + F_n \times F_{n+1} \Leftrightarrow F_{2n} = F_n \times (F_{n-1} + F_{n+1}) \quad (2)$$

Sabendo que

$$F_n = F_{n+1} - F_{n-1} , \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e, atendendo a (2) obtemos que:

$$F_{2n} = (F_{n+1} - F_{n-1})(F_{n-1} + F_{n+1}) \Leftrightarrow F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 ,$$

como queríamos provar.

□

Propriedade 7. (Identidade de Cassini)

$$F_{n+1}^2 = F_n \times F_{n+2} + (-1)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Para provar esta propriedade, usaremos o método da indução em n .

Para $n = 1$ e atendendo a que $F_1 = F_2 = 1$ e $F_3 = 2$ vem,

$$F_2^2 = F_{1+1}^2 = F_1 \times F_3 + (-1)^1 \Leftrightarrow F_2^2 = 1 \times 2 - 1 \Leftrightarrow 1^2 = 1 \times 2 - 1 \Leftrightarrow 1 = 1,$$

que é verdadeiro.

Agora vamos supor que a propriedade é válida para n e vamos mostrar que continua verdadeira para $n + 1$.

Suponhamos então que

$$F_{n+1}^2 = F_n \times F_{n+2} + (-1)^n, \quad (3)$$

é verdadeira. Então temos:

$$F_{n+1} \times F_{n+3} + (-1)^{n+1} = F_{n+1}(F_{n+1} + F_{n+2}) + (-1)^{n+1} = F_{n+1}^2 + (F_{n+1} \times F_{n+2}) + (-1)^{n+1}.$$

Atendendo à expressão (3), obtemos que

$$\begin{aligned} F_{n+1} \times F_{n+3} + (-1)^{n+1} &= (F_n \times F_{n+2} + (-1)^n) + (F_{n+1} \times F_{n+2}) + (-1)^{n+1} \\ &= F_{n+2}(F_n + F_{n+1}) + (-1)^n(1 - 1) = F_{n+2} \times F_{n+2} = F_{n+2}^2, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.

□

Propriedade.8.

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \dots + (-1)^{n+1}F_n = (-1)^{n+1}F_{n-1} + 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Demonstração por indução em n .

Para $n = 1$, $F_1 = (-1)^2F_0 + 1 \Leftrightarrow F_1 = 1$, que é verdadeiro.

Também para $n = 2$:

$$F_1 - F_2 = (-1)^3 \times F_1 + 1 \Leftrightarrow F_1 - F_2 = -1 \times 1 + 1,$$

que também é verdadeiro.

Suponhamos agora que a afirmação é verdadeira para n , ou seja,

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \dots + (-1)^{n+1}F_n = (-1)^{n+1}F_{n-1} + 1. \quad (4)$$

Pretendemos demonstrar que a propriedade continua válida para $n + 1$, isto é

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \dots + (-1)^{n+1}F_n + (-1)^{n+2}F_{n+1} = (-1)^{n+2}F_n + 1.$$

Somando $(-1)^{n+2}F_{n+1}$ a ambos os membros de (4), obtemos

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \dots + (-1)^{n+1}F_n + (-1)^{n+2}F_{n+1} = (-1)^{n+1}F_{n-1} + 1 + (-1)^{n+2}F_{n+1}.$$

Como $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, vem que:

$$\begin{aligned} F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \cdots + (-1)^{n+1}F_n + (-1)^{n+2}F_{n+1} &= (-1)^{n+1}F_{n-1} + 1 + (-1)^{n+2}(F_n + F_{n-1}) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \cdots + (-1)^{n+1}F_n + (-1)^{n+2}F_{n+1} \\ &= (-1)^{n+1}F_{n-1} + 1 + (-1)^{n+2}F_n + (-1)^{n+2}F_{n-1}. \end{aligned}$$

Como $(-1)^{n+1}F_{n-1} + (-1)^{n+2}F_{n-1} = F_{n-1}[(-1)^{n+1}(1 - 1)] = 0$, vem que:

$$F_1 - F_2 + F_3 - F_4 + \cdots + (-1)^{n+1}F_n + (-1)^{n+2}F_{n+1} = 1 + (-1)^{n+2}F_n,$$

como pretendíamos demonstrar. □

Propriedade 9.

Na sequência de Fibonacci, dois termos consecutivos são primos entre si, isto é, $m. d. c. (F_{n+1}, F_n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Para $n = 1$:

$$m. d. c. (F_2, F_1) = m. d. c. (1, 1) = 1,$$

e para $n = 2$:

$$m. d. c. (F_3, F_2) = m. d. c. (2, 1) = 1.$$

Logo as igualdades são verdadeiras.

Para $n \geq 3$, vamos supor, por contradição, que

$$m. d. c. (F_{n+1}, F_n) = d,$$

onde d é um inteiro maior do que 1. Neste caso, d divide F_n e divide F_{n+1} .

Como

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \Leftrightarrow F_{n-1} = F_{n+1} - F_n,$$

para $n \geq 3$, então d divide F_{n-1} (porque d divide F_n e divide F_{n+1}).

Como

$$F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \Leftrightarrow F_{n-2} = F_n - F_{n-1},$$

então d divide F_{n-2} .

Sucessivamente, utilizando este processo, vamos ter que d divide F_{n-3}, F_{n-4} , etc., e finalmente F_1 vai ser divisível por d . Ou seja, 1 vai ser divisível por d , o que é absurdo, porque $d > 1$. Logo o $m. d. c. (F_{n+1}, F_n) = 1$, para $\forall n \in \mathbb{N}$. □

Propriedade 10.

Todo o número natural N pode ser escrito como uma soma finita de números de Fibonacci distintos e não consecutivos.

Demonstração: Vamos fazer a prova por indução em N . Para $N = 1, 2, 3, 4, 5$ temos:

$$1 = F_1; 2 = F_3; 3 = F_1 + F_3; 4 = F_1 + F_4; 5 = F_5.$$

Suponhamos que a afirmação é verdadeira para todo o número natural inferior a F_n . Isto é, cada um dos números naturais $1, 2, 3, 4, \dots, k$, com $k = F_n - 1$, pode ser escrito como uma soma finita de números de Fibonacci distintos e não consecutivos do conjunto $\{F_1, F_2, F_3, \dots, F_{n-1}\}$.

Vamos mostrar que a afirmação é verdadeira para todos os números naturais inferiores a F_{n+1} .

Seja N tal que $F_n \leq N < F_{n+1}$ e F_n o maior termo na representação de N como soma de números de Fibonacci. Quando $N > F_n$, podemos escrever $N = F_n + r$. Neste caso

$$r = N - F_n < F_{n+1} - F_n = F_{n-1} \Leftrightarrow r < F_{n-1}.$$

Por hipótese de indução, r pode ser representado como uma soma de números de Fibonacci distintos e não consecutivos pertencentes ao conjunto $\{F_1, F_2, F_3, \dots, F_{n-1}\}$. Deste modo, N e, como consequência, cada um dos inteiros $F_1, F_2, F_3, \dots, F_{n+1} - 1$ pode ser expresso como uma soma de números, distintos e não consecutivos, do conjunto $\{F_1, F_2, F_3, \dots, F_{n-1}, F_n\}$, pois na representação de N não existirá mais o termo F_{n-1} de entre os termos da representação de r e o termo F_n . O que completa a indução e a prova.

□

Propriedade 11.

$$F_3 + F_6 + F_9 + \dots + F_{3n} = \frac{F_{3n+2}-1}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Vamos fazer a demonstração por indução em n .

Para $n = 1$:

$$F_3 = \frac{F_{3+2}-1}{2} \Leftrightarrow 2 = \frac{5-1}{2} \Leftrightarrow 2 = 2,$$

que é verdadeira.

Suponhamos agora que a propriedade é verdadeira para n , ou seja,

$$F_3 + F_6 + F_9 + \dots + F_{3n} = \frac{F_{3n+2}-1}{2} \tag{5}$$

Vamos provar que também é verdadeira para $n + 1$, isto é, mostraremos que

$$F_3 + F_6 + F_9 + \cdots + F_{3n} + F_{3(n+1)} = \frac{F_{3(n+1)+2} - 1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_3 + F_6 + F_9 + \cdots + F_{3n} + F_{3(n+1)} = \frac{F_{3n+5} - 1}{2}$$

Adicionando F_{3n+3} em ambos os membros de (5), obtemos que

$$F_3 + F_6 + F_9 + \cdots + F_{3n} + F_{3n+3} = \frac{F_{3n+2} - 1}{2} + F_{3n+3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_3 + F_6 + F_9 + \cdots + F_{3n} + F_{3n+3} = \frac{F_{3n+2} - 1 + 2F_{3n+3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_3 + F_6 + F_9 + \cdots + F_{3n} + F_{3n+3} = \frac{F_{3n+2} + F_{3n+3} - 1 + F_{3n+3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_3 + F_6 + F_9 + \cdots + F_{3n} + F_{3n+3} = \frac{F_{3n+4} - 1 + F_{3n+3}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow F_3 + F_6 + F_9 + \cdots + F_{3n} + F_{3n+3} = \frac{F_{3n+5} - 1}{2},$$

como queríamos provar. □

Propriedade 12.

$$F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 = F_{2n+3}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Vamos provar a propriedade por indução em n .

Para $n = 1$, obtemos:

$$F_{1+1}^2 + F_{1+2}^2 = F_{2 \times 1 + 3} \Leftrightarrow F_2^2 + F_3^2 = F_5 \Leftrightarrow 1^2 + 2^2 = 5,$$

que é verdadeiro.

Vamos supor que a propriedade é válida para n , ou seja,

$$F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 = F_{2n+3}. \tag{6}$$

Mostraremos que a propriedade continua válida para $n + 1$, isto é,

$$F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2 = F_{2n+5}.$$

Tendo em conta a propriedade 6, anteriormente demonstrada, sabemos que

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2.$$

Vamos somar $F_{n+3}^2 - F_{n+1}^2 = F_{2n+4}$, membro a membro, na expressão (6):

$$F_{n+1}^2 + F_{n+2}^2 + (F_{n+3}^2 - F_{n+1}^2) = F_{2n+3} + F_{2n+4} \Leftrightarrow F_{n+2}^2 + F_{n+3}^2 = F_{2n+5},$$

como queríamos provar. □

De acordo com Gusmão (2003, pp. 52-53) e atendendo ao Lema 1 e Teorema 2 aí mencionados, facilmente encontramos a fórmula de Binet para a sequência de Fibonacci. Assim, recordamos apenas os resultados acima mencionados, cujas demonstrações se encontram nos artigos referidos.

Lema 1 (Gusmão, 2003, p. 52): A equação em diferença linear dada por

$$x_n + px_{n-1} + qx_{n-2} = 0$$

com $x_1 = b_1$ e $x_2 = b_2$, $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$, possui uma única solução.

Teorema 2 (Gusmão, 2003, p. 53): Se a equação $r^2 + pr + q = 0$ possui raízes r_1 e r_2 distintas, a sequência $a_n = c_1(r_1)^n + c_2(r_2)^n$, onde $n \in \mathbb{N}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, é a solução de

$$x_n + px_{n-1} + qx_{n-2} = 0, \quad \forall n > 2, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Usando estes dois resultados, consideremos a equação do 2.º grau

$$r^2 - r - 1 = 0$$

cujas raízes são $r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. De acordo com o Lema 1, a equação

$$F_n - F_{n-1} - F_{n-2} = 0 \tag{7}$$

tem uma única solução e atendendo ao Teorema 2, $F_n = c_1(r_1)^n + c_2(r_2)^n$, $n \in \mathbb{N}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ é solução de (7), ou seja, temos que

$$F_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n. \tag{8}$$

Atendendo a que $F_1 = F_2 = 1$, vamos resolver um sistema com duas equações e duas incógnitas, que é possível determinado, isto é, com uma única solução, permitindo determinar c_1 e c_2 . Temos:

$$\begin{cases} F_1 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 \\ F_2 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 \\ 1 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \end{cases}$$

A matriz simples deste sistema é:

$$A = \begin{bmatrix} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^1 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^1 \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^2 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^2 \end{bmatrix}$$

cujos determinante é não nulo, visto que

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \det(A) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2} - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right] \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \det(A) = \left(\frac{1-5}{4}\right) \left(\frac{-2\sqrt{5}}{2}\right) \Leftrightarrow \det(A) = \sqrt{5}.
\end{aligned}$$

Assim, utilizando a regra de Cramer,

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{\sqrt{5}} = \frac{1-2\sqrt{5}+2\sqrt{5}+5-2}{\sqrt{5}} = \frac{4}{4} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

De forma análoga:

$$\begin{aligned}
c_2 &= \frac{\begin{vmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 & 1 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \left(1 - \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} \\
&= \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} = \frac{1-5}{4\sqrt{5}} = -\frac{4}{4} \times \frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}.
\end{aligned}$$

Substituindo c_1 e c_2 em (8), obtemos a fórmula de Binet para a sequência de Fibonacci, ou seja,

Propriedade 13. (Fórmula de Binet)

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right] = \frac{1}{\sqrt{5}} [\Phi^n - (-\Phi)^{-n}]$$

onde $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

□

Propriedade 14.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \Phi, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Usando a fórmula de Binet temos:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right],$$

$$F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right].$$

Então:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right]}{\frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \left[1 - \frac{\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}}{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1}} \right]}{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n \left[1 - \frac{\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n}{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n} \right]} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \right)^n}. \end{aligned}$$

Como $-1 < \frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} < 1$, temos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{1 + \sqrt{5}} \right)^{n+1} = 0.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \Phi.$$

□

2.2. A sequência de Lucas e propriedades que a relacionam com a sequência de Fibonacci

François Édouard Anatole Lucas, popularizou a sequência estudada por Leonardo de Pisa, dando-lhe o nome de “sequência de Fibonacci”. Este matemático francês estudou, uma sequência muito similar à sequência de Fibonacci, ficando conhecida como “sequência de Lucas”, em sua homenagem.

A sequência de Lucas, é formada pela seguinte sequência de números:

$$2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, \dots$$

À semelhança dos números da sequência de Fibonacci, os números da sequência de Lucas, podem ser definidos por recorrência. O primeiro termo é o 2, o segundo termo é o 1 e, a partir do 3.º termo, cada número seguinte é obtido como a soma dos dois termos que o antecedem. Assim sendo, a definição para a sequência de Lucas, cujo termo geral iremos denotar por L_n , é a seguinte:

$$L_0 = 2, \quad L_1 = 1, \quad \text{e} \quad L_n = L_{n-2} + L_{n-1}, \quad \text{para } n \geq 2. \quad (9)$$

Para esta sequência de Lucas, iremos verificar algumas propriedades e a sua relação com a sequência de Fibonacci.

Propriedade 1.

$$L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n = L_{n+2} - 3, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Vamos provar por indução em n . Para $n = 1$:

$$L_1 = L_{1+2} - 3 \Leftrightarrow 1 = 4 - 3 \Leftrightarrow 1 = 1,$$

que é verdadeira.

Suponhamos que a propriedade é verdadeira para n , ou seja,

$$L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n = L_{n+2} - 3. \quad (10)$$

Provaremos que continua a ser verdadeira para $n + 1$, isto é,

$$L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_{n+1} = L_{n+3} - 3.$$

Somando a ambos os membros da expressão (10), L_{n+1} , obtemos:

$$L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n + L_{n+1} = L_{n+2} - 3 + L_{n+1}.$$

Pela definição (9) da sequência de Lucas, sabemos que $L_{n+1} + L_{n+2} = L_{n+3}$, vem que

$$L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_n + L_{n+1} = L_{n+3} - 3.$$

□

Propriedade 2. (Fórmula de Binet)

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \Phi^n + (-\Phi)^{-n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Sabemos, pela definição (9), que

$$L_n = L_{n-2} + L_{n-1} \Leftrightarrow L_n - L_{n-1} - L_{n-2} = 0, \text{ onde } L_1 = 1 \text{ e } L_2 = 3.$$

De acordo com o Lema 1 em Gusmão (2003, p. 52), a equação $L_n - L_{n-1} - L_{n-2} = 0$, tem uma única solução. Esta equação do 2.º grau pode ser traduzida pela equação $r^2 - r - 1 = 0$, cujas raízes são:

$$r_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{e} \quad r_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

Atendendo ao Teorema 2 em Gusmão (2003, p.53) anteriormente mencionado,

$$L_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n. \quad (11)$$

Como $L_1 = 1$ e $L_2 = 3$, de forma análoga ao que efetuamos para a propriedade 13 da sequência de Fibonacci, temos que:

$$\begin{cases} 1 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^1 \\ 3 = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{cases}$$

sendo A a matriz simples do sistema anterior e $\det(A) = \sqrt{5}$.

Como $\det(A) \neq 0$, permite concluir que o sistema tem uma única solução e, utilizando a regra de Cramer, vem que,

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 3 & \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 - 3\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{1-2\sqrt{5}+5-6+6\sqrt{5}}{4}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = 1.$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{1+\sqrt{5}}{2} & 1 \\ \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 & 3 \end{vmatrix}}{\det(A)} = \frac{3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) - \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2}{\sqrt{5}} = \frac{\frac{6+6\sqrt{5}-1-2\sqrt{5}-5}{4}}{\sqrt{5}} = \frac{4\sqrt{5}}{4\sqrt{5}} = 1.$$

Substituindo $c_1 = c_2 = 1$ na expressão (11), obtemos que,

$$L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n = \Phi^n + (-\Phi)^{-n}.$$

□

Propriedade 3.

$$\Phi^n = \frac{L_n + \sqrt{5}F_n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Sabendo que

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[\Phi^n - (-\Phi)^{-n}] \Leftrightarrow \sqrt{5}F_n = \Phi^n - (-\Phi)^{-n}.$$

Então basta mostrar que

$$\sqrt{5}F_n = 2\Phi^n - L_n.$$

Pela propriedade anterior

$$L_n = \Phi^n + (-\Phi)^{-n} \Leftrightarrow L_n - \Phi^n = (-\Phi)^{-n}.$$

Temos então que:

$$\sqrt{5}F_n = \Phi^n - (-\Phi)^{-n} = \Phi^n - (L_n - \Phi^n) = 2\Phi^n - L_n.$$

□

Propriedade 4.

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Vamos provar esta propriedade por indução em n .

Para $n = 1$, sabemos que $L_1 = 1$, $F_0 = 0$ e $F_2 = 1$, então $L_1 = F_2 + F_0 \Leftrightarrow 1 = 1 + 0$, sendo a propriedade verdadeira.

Para $n = 2$, sabemos que $L_2 = 3$, $F_1 = 1$ e $F_3 = 2$, então $L_2 = F_3 + F_1 \Leftrightarrow 3 = 2 + 1$, a propriedade também é verdadeira.

Suponhamos que a propriedade é válida para n e $n - 1$ maiores ou iguais a 3 (ver principio de indução em anexo), isto é,

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}$$

$$L_{n-1} = F_n + F_{n-2}$$

Então, usando as duas igualdades anteriores e a definição (1), obtemos:

$$\begin{aligned} L_{n+1} &= L_n + L_{n-1} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow L_{n+1} &= (F_{n+1} + F_{n-1}) + (F_n + F_{n-2}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow L_{n+1} &= (F_{n-2} + F_{n-1}) + (F_n + F_{n+1}) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow L_{n+1} &= F_n + F_{n+2}. \end{aligned}$$

□

Propriedade 5.

$$5 \times F_n = L_{n-1} + L_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Pela propriedade anterior, sabemos que

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

então

$$L_{n-1} = F_n + F_{n-2};$$

$$L_{n+1} = F_{n+2} + F_n.$$

Adicionando as duas igualdades anteriores, vem que

$$L_{n-1} + L_{n+1} = (F_n + F_{n-2}) + (F_{n+2} + F_n) \Leftrightarrow L_{n-1} + L_{n+1} = 2F_n + F_{n-2} + F_{n+2}.$$

Como $F_n = F_{n-2} + F_{n-1} \Leftrightarrow F_{n-2} = F_n - F_{n-1}$, obtemos:

$$L_{n-1} + L_{n+1} = 2F_n + (F_n - F_{n-1}) + F_{n+2} \Leftrightarrow L_{n-1} + L_{n+1} = 3F_n + F_{n+2} - F_{n-1}.$$

Como $F_{n+2} = F_n + F_{n+1}$, vem:

$$L_{n-1} + L_{n+1} = 3F_n + (F_n + F_{n+1}) - F_{n-1} \Leftrightarrow L_{n-1} + L_{n+1} = 4F_n + F_{n+1} - F_{n-1}.$$

Como $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$, então:

$$L_{n-1} + L_{n+1} = 4F_n + (F_n + F_{n-1}) - F_{n-1} \Leftrightarrow L_{n-1} + L_{n+1} = 5F_n,$$

como queríamos demonstrar.

□

Propriedade 6.

$$F_{2n} = F_n \times L_n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Reparemos que para $n = 1$ temos que $F_2 = F_1 \times L_1 \Leftrightarrow 1 = 1 \times 1$, que é verdadeira.

Usando a propriedade 5 anteriormente demonstrada, para a sequência de Fibonacci, temos que para $m = n > 1$,

$$F_{2n} = F_{n+n} = F_{n-1} \times F_n + F_n \times F_{n+1} \Leftrightarrow F_{2n} = F_n(F_{n-1} + F_{n+1})$$

Usando a propriedade 4 da sequência de Lucas, vem que

$$F_{2n} = F_n \times L_n,$$

ficando a propriedade demonstrada.

□

Propriedade 7.

$$L_n = F_{n+2} - F_{n-2}, \quad \forall n > 1.$$

Demonstração: Pela propriedade 4 da sequência de Lucas, sabemos que:

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Também sabemos que:

$$F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \text{ e } F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Então vem que

$$\begin{aligned} L_n = F_{n+1} + F_{n-1} &\Leftrightarrow L_n = (F_{n+2} - F_n) + F_{n-1} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow L_n = F_{n+2} - F_n + (F_n - F_{n-2}) \Leftrightarrow L_n = F_{n+2} - F_{n-2}, \end{aligned}$$

ficando a propriedade demonstrada. □

Propriedade 8.

$$L_n = F_n + 2F_{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Calculemos uma nova expressão para $F_{n+1} + F_{n-1}$, ou seja,

$$F_{n+1} + F_{n-1} = (F_{n-1} + F_n) + F_{n-1} = F_n + 2F_{n-1}.$$

Pela propriedade 4 da sequência de Lucas, temos que

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}.$$

Então

$$L_n = F_n + 2F_{n-1},$$

como pretendíamos mostrar. □

Propriedade 9.

$$L_n^2 = 5F_n^2 + 4(-1)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Usando a propriedade anterior obtemos:

$$L_n^2 = (F_n + 2F_{n-1})^2 = F_n^2 + 4F_nF_{n-1} + 4F_{n-1}^2 = F_n^2 + 4(F_nF_{n-1} + F_{n-1}^2) \quad (12)$$

Pela propriedade 7 (*Identidade de Cassini*), da sequência de Fibonacci, temos que $F_{n-1}^2 = F_{n-2} \times F_n + (-1)^n$ e pela definição (1), a expressão (12) fica da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
L_n^2 &= F_n^2 + 4(F_n F_{n-1} + F_{n-2} \times F_n + (-1)^n) \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow L_n^2 &= F_n^2 + 4F_n F_{n-1} + 4F_{n-2} \times F_n + 4(-1)^n \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow L_n^2 &= F_n^2 + 4F_n(F_{n-1} + F_{n-2}) + 4(-1)^n \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow L_n^2 &= F_n^2 + 4F_n \times F_n + 4(-1)^n \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow L_n^2 &= 5F_n^2 + 4(-1)^n,
\end{aligned}$$

provando assim o pretendido. □

Propriedade 10.

$$L_{m+n} = L_{m+1}F_n + L_m F_{n-1}, \quad m \geq 1, n > 1.$$

Demonstração: Usando a propriedade 8 da sequência de Lucas, atrás demonstrada, vem que:

$$\begin{aligned}
L_{m+1}F_n + L_m F_{n-1} &= (F_{m+1} + 2F_m)F_n + (F_m + 2F_{m-1})F_{n-1} \\
&= F_{m+1}F_n + 2F_m F_n + F_m F_{n-1} + 2F_{m-1}F_{n-1}.
\end{aligned}$$

Usando a propriedade 5 da sequência de Fibonacci, obtemos

$$L_{m+1}F_n + L_m F_{n-1} = F_{m+n} + 2(F_m F_n + F_{m-1} F_{n-1}) = F_{m+n} + 2F_{(m-1)+n} = F_{m+n} + 2F_{(m+n)-1}.$$

Pela propriedade 8 da sequência de Lucas, temos que,

$$L_{m+1}F_n + L_m F_{n-1} = L_{m+n},$$

como pretendíamos mostrar. □

Propriedade 11.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_n}{F_n} = \sqrt{5}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Demonstração: Pela propriedade 14 da sequência de Fibonacci, sabemos que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Logo,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\frac{F_{n+1}}{F_n}} \right) = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n+1}}{F_n}} = \frac{1}{\frac{1 + \sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Usando a propriedade 8 da sequência de Lucas, temos que:

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{L_n}{F_n} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_n + 2F_{n-1}}{F_n} = \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_n}{F_n} \right) + 2 \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} \right) = 1 + 2 \left(\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n-1}}{F_n} \right) \\ &= 1 + 2 \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right) = 1 + \sqrt{5} - 1 = \sqrt{5}.\end{aligned}$$

□

Observação: Apresentamos de seguida, um outro processo para obtenção da fórmula de Binet, para a sequência de Fibonacci. Atendendo a propriedades lineares das sequências de Fibonacci (entenda-se neste contexto, como sendo sequências numéricas que satisfazem a condição (1)), nomeadamente, soma de sequências de Fibonacci, multiplicação de uma sequência de Fibonacci por um escalar e combinação linear de sequências de Fibonacci (Barcelos, A., 2004)¹⁰, a fórmula de Binet pode também ser obtida usando progressões geométricas.

A fórmula de Binet permite-nos encontrar o valor do termo de ordem n da sequência de Fibonacci, F_n , conhecendo apenas o valor de n .

Recordemos que:

$$F_{n+1} = F_{n-1} + F_n \quad \text{para } n \geq 1.$$

Para obter todas as soluções da combinação linear anterior, basta obter quaisquer duas soluções não proporcionais. Assim, pela propriedade linear da multiplicação por um escalar, podemos escolher uma sequência de Fibonacci, cujo primeiro termo seja igual a um. Vamos considerar então uma sequência de Fibonacci cujo termo de ordem n é igual a $w_n = r^{n-1}$, que seja uma progressão geométrica, com $w_1 = 1$ e razão não nula r , isto é,

$$w_n = 1 \times r^{n-1} \Leftrightarrow w_n = r^{n-1}.$$

Para que esta sequência seja de Fibonacci, deve ser de tal modo que:

$$w_{n+1} = w_{n-1} + w_n.$$

Assim sendo, temos que:

$$r^n = r^{n-2} + r^{n-1}.$$

Dividindo ambos os membros da equação anterior por r^{n-2} , obtemos:

$$r^2 = 1 + r \Leftrightarrow r^2 - r - 1 = 0.$$

Aplicando a fórmula resolvente nesta equação do 2.º grau:

$$r = \frac{1 \mp \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow r = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}$$

¹⁰ Fonte: http://www.geocities.ws/ailton_barcelos/naitalia.htm

Obtemos as duas raízes:

$$r_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \vee r_2 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$$

Notemos que:

$$r_1 + r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} + \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = 1$$

$$r_1 \times r_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \times \frac{1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{1 - 5}{2} = \frac{-4}{2} = -2$$

Para cada raiz, obtemos uma sequência de Fibonacci, logo podemos construir outras duas sequências:

$$v_n = r_1^{n-1} \text{ e } w_n = r_2^{n-1}$$

Consideremos uma sucessão $(u_n)_n$ que resulta da combinação linear de $(v_n)_n$ e $(w_n)_n$, isto é,

$$u_n = av_n + bw_n = a \cdot \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + b \cdot \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

Se tomarmos, em particular, $a + b = 1$ e $ar_1 + br_2 = 1$, teremos que:

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}} \text{ e } b = -\frac{(1 - \sqrt{5})}{2\sqrt{5}}.$$

Substituindo os valores de a e b na expressão de (u_n) obtemos:

$$\begin{aligned} u_n &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + \left(-\frac{(1 - \sqrt{5})}{2\sqrt{5}}\right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} \Leftrightarrow \\ u_n &= \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2\sqrt{5}}\right) \left(\frac{2}{1 + \sqrt{5}}\right) \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(-\frac{(1 - \sqrt{5})}{2\sqrt{5}}\right) \left(\frac{2}{1 - \sqrt{5}}\right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow u_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n \right], \end{aligned}$$

obtendo assim a fórmula de Binet. Esta fórmula permite-nos calcular qualquer termo da sequência de Fibonacci, conhecendo apenas a sua ordem.

CAPÍTULO III: ALGUMAS APLICAÇÕES DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI E DO NÚMERO DE OURO

O Número de Ouro não é um número meramente matemático, sem aplicação à realidade, ele pode ser encontrado no nosso cotidiano, em várias áreas, nomeadamente, em monumentos históricos, na natureza, na arte, na arquitetura, na música, na literatura, no *design* e nos seres humanos.

Fibonacci deu uma grande contribuição para a geometria com a descoberta do Número de Ouro, o qual está relacionado com a solução do problema dos coelhos.

Neste trabalho, apontaremos vários exemplos onde se pode aplicar o Número de Ouro, mostrando a grande importância deste número na antiguidade e na atualidade, que por este motivo, foi chamado de “Ouro”.

“A ubiquidade desse número fica evidente não apenas por ter sido usado por Pitágoras, Euclides, Fibonacci, Kepler e outros matemáticos, físicos e astrónomos do passado e do presente, mas sim por ser estudado e usado por biólogos, arquitetos, artistas em geral e profissionais das mais diversas áreas que buscam nesse número a fonte de toda a beleza e harmonia” (Ramos, 2013, p. 32).

3.1. O Número de Ouro e a sequência de Fibonacci nos conteúdos do currículo de Matemática

A. Os números de Fibonacci e o Teorema de Pitágoras

Segundo o matemático Kepler (citado por Boyer, 1996, p. 35):

“A Geometria tem dois grandes tesouros: um é o teorema de Pitágoras; o outro, a divisão de um segmento em média e extrema razão. O primeiro pode ser comparado a uma medida de ouro; o segundo podemos chamar de jóia preciosa.”

O triângulo de Pitágoras é um triângulo retângulo que obedece ao Teorema de Pitágoras, em que se designa o lado maior por hipotenusa (h) e os dois lados menores por catetos (c_1 e c_2).

De acordo com o Teorema de Pitágoras podemos afirmar que:

“Num triângulo retângulo, o quadrado da medida do comprimento da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos comprimentos dos catetos”, isto é, $h^2 = c_1^2 + c_2^2$.

Na tabela seguinte, encontra-se uma lista que contém alguns dos possíveis triângulos de Pitágoras:

c_1	c_2	h	
3	4	5	*
6	8	10	$2 \times (3, 4, 5)$
5	12	13	*
9	12	15	$3 \times (3, 4, 5)$
8	15	17	*
12	16	20	$4 \times (3, 4, 5)$
7	24	25	*
15	20	25	$5 \times (3, 4, 5)$
10	24	26	$2 \times (5, 12, 13)$
20	25	29	*

Tabela 1: Relação entre os números de Fibonacci e os triângulos de Pitágoras

Como podemos verificar na tabela anterior, alguns dos triângulos são ampliações dos triângulos assinalados com *, na quarta coluna da tabela. Estes triângulos assinalados com * designam-se triângulos de Pitágoras primitivos.

Sejam a e b dois números consecutivos da sequência de Fibonacci. Podemos usar os números de Fibonacci para obtermos triângulos de Pitágoras, da seguinte forma:

- 1.º Multiplicar b por $a + b$, obtendo $b \times (a + b) = c$;
- 2.º Duplicar o resultado da operação anterior, obtendo $2c$;
- 3.º Multiplicar a por $a + 2b$, obtendo $a \times (a + 2b) = d$;
- 4.º Somar o quadrado de b com o quadrado de $a + b$, obtemos $b^2 + (a + b)^2 = e$.

Com este procedimento obtemos um triângulo de Pitágoras cujos catetos são $2c$, d e a hipotenusa e .

Usaremos o procedimento anterior para obter um triângulo de Pitágoras. Consideremos, por exemplo, os seguintes números consecutivos da sequência de Fibonacci, $a = 5$ e $b = 8$.

- 1.º $c = 8 \times (5 + 8) = 104$
- 2.º $2c = 2 \times 104 = 208$
- 3.º $d = 5 \times (5 + 2 \times 8) = 105$
- 4.º $e = 8^2 + (5 + 8)^2 = 233$

Deste modo, obtemos um triângulo de Pitágoras cujos lados tem comprimentos 233, 208, 105, satisfazendo a: $233^2 = 208^2 + 105^2 \Leftrightarrow 54289 = 54289$.

B. O Número de Ouro e os sólidos platónicos

Diz-se que um poliedro convexo é regular quando as suas faces são polígonos regulares iguais entre si, e em cada vértice concorre o mesmo número de faces. Fazem parte da História da Matemática cinco poliedros regulares identificados pelos gregos. Estes poliedros ficaram conhecidos por sólidos platónicos.

Os gregos acreditavam que o sagrado mistério da ciência tem o seu centro na Matemática, no estudo do número, cuja lei domina todas as coisas, nomeadamente: nos astros, cujas distâncias, grandezas e movimentos são regulados por meio de relações matemáticas, geométricas e numéricas; nos sons, cujas relações de harmonia obedecem a leis numéricas fixas; na vida e na saúde, que são proporções numéricas e harmónicas de elementos. Eles entendiam que o “número dirige o universo”, e que a essência de todas as coisas que existem na natureza pode ser explicada através dos números.

De acordo com Neves *et al.* (2004, p. 51), no livro de Timeu, escrito por volta do ano 350 a.C., Platão apresentava a teoria segundo a qual os quatro “elementos” admitidos como constituintes do Mundo – o fogo, o ar, a água e a terra – eram todos agregados de sólidos minúsculos. Além disso, defendia ele, uma vez que o Mundo só poderia ter sido feito a partir de corpos perfeitos, estes elementos só poderiam ter a forma de sólidos regulares.

Associou a cada um destes sólidos um elemento da natureza: sendo o mais leve e o mais violento dos elementos, o fogo deveria ser um tetraedro; como é o mais estável dos elementos, a terra deveria ser constituída por cubos; como sendo a mais inconstante e fluida, a água teria de ser um icosaedro, o sólido regular capaz de rolar mais facilmente; quanto ao ar, Platão observou que “... o ar é para a água o que a água é para a terra” e concluiu de forma algo misteriosa, que o ar deveria ser o octaedro; finalmente, atribuiu ao dodecaedro a representação da forma de todo o Universo.

Platão admitia que, por intervenção inteligente, uns se transformavam nos outros, à exceção da Terra, que se transformava em si própria.

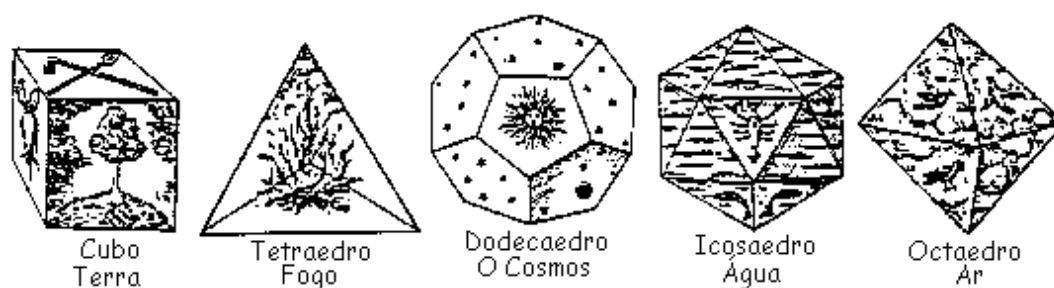


Figura 9: Sólidos platónicos ¹¹

¹¹ Fonte: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/sol_plat.htm

Se unirmos os centros das faces consecutivas de cada poliedro, obtemos um novo poliedro, que se designa por dual do primeiro. O dual de um poliedro regular é ainda um poliedro regular.

Assim sendo, o dual do tetraedro é um tetraedro, o dual do octaedro é um cubo, o dual do icosaedro é um dodecaedro, o dual do cubo é um octaedro e o dual do dodecaedro é um icosaedro.

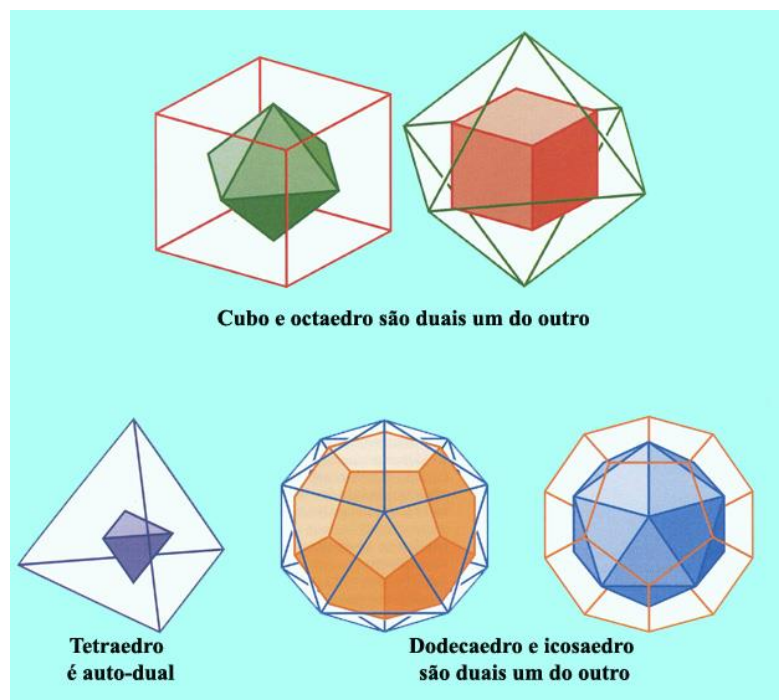


Figura 10: Duais dos sólidos platônicos ¹²

Os pitagóricos tentavam explicar a estrutura da matéria usando os cinco sólidos regulares. O último sólido convexo regular descoberto pelos pitagóricos, o dodecaedro, tem as suas faces pentagonais que se relacionam fortemente com a razão áurea. Talvez por isto, os pitagóricos o consideravam muito especial.

No entanto, nem todos os poliedros têm a mesma relação com o Número de Ouro. Os que se encontram mais próximos do Número de Ouro são o dodecaedro e o seu dual, o icosaedro. O Número de Ouro, Φ , manifesta-se nas expressões da área e do volume destes sólidos regulares, considerando a medida de comprimento do lado igual a uma unidade, da seguinte forma:

✓ Área do dodecaedro:

$$A = \frac{15\Phi}{\sqrt{3-\Phi}} = 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}} \cong 20.65;$$

¹² Fonte: <http://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/Manhas/Modulo3PolidrosEuler.html>

✓ Volume do dodecaedro:

$$V = \frac{5\Phi^2}{6 - 2\Phi} = \frac{1}{4}(10 + 4\sqrt{5}) \cong 4.74;$$

✓ Volume do icosaedro:

$$V = \frac{5\Phi^2}{6} = \frac{5}{12}(3 + \sqrt{5}) \cong 2.18.$$

Um pentagrama regular é obtido traçando-se as diagonais do pentágono regular $[ABCDE]$, como mostra a figura 11, abaixo representada.

O pentágono menor, $[FGHIJ]$, formado pelas interseções das diagonais, está em proporção com o pentágono $[ABCDE]$. A razão entre as medidas dos lados dos dois pentágonos é igual ao quadrado do Número de Ouro. A razão entre a área do pentágono maior e a do pentágono menor $[FGHIJ]$ é igual à quarta potência do Número de Ouro. No triângulo isósceles $[ABD]$ os seus lados maiores, $[AD]$ e $[BD]$ estão relacionados com a medida da base, da seguinte forma, $\frac{\overline{AD}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{BD}}{\overline{AB}} = \Phi$. De onde se conclui que a razão entre a diagonal de um pentágono regular e um lado desse pentágono é igual ao Número de Ouro.

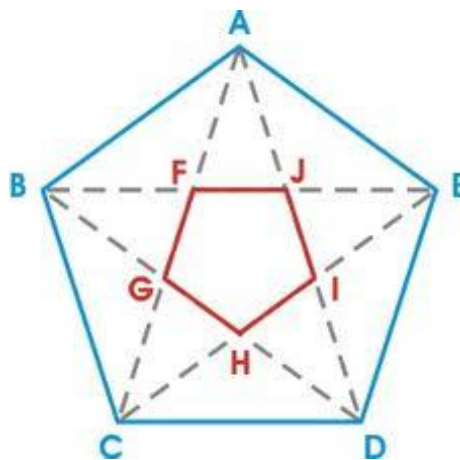


Figura 11: Pentagrama regular¹³

Assim sendo, num pentagrama regular, as medidas das diagonais estão em razão áurea com as medidas dos lados do pentágono regular. Quando Pitágoras descobriu que as proporções no pentagrama eram a proporção áurea, tornou este símbolo estrelado como a representação da Irmandade Pitagórica. Este era um dos motivos que levava Pitágoras a dizer que tudo é número, ou seja, que a natureza segue padrões matemáticos, acreditavam que os números eram a essência de todas as coisas.

¹³ Fonte: <http://www.republicaeditorial.com.br/?p=663>

A estrela pentagonal é uma figura extremamente comum à nossa volta, como uma imagem gráfica que tem os mais diversos significados: aparece no passeio da fama de Los Angeles; é símbolo de muitos partidos revolucionários; aparece numa infinidade de bandeiras, como por exemplo, na bandeira de Marrocos, onde representa os cinco mandamentos do Islão; são também pentagonais as estrelas que representam cada um dos estados da união na bandeira dos Estados Unidos da América; quando combinada com a cor vermelha, significa sofrimento dos oprimidos na sua luta pela emancipação e o sangue derramado para a conquistar, etc..

C. A sequência de Fibonacci e o triângulo de Pascal

O triângulo de Pascal é um triângulo aritmético formado por números que têm diversas relações entre si. Muitas dessas relações foram descobertas pelo próprio Pascal, o que justifica o nome que lhe é dado.

O triângulo de Pascal constrói-se da seguinte forma:

- em cada linha, o primeiro elemento e o último é 1;
- em cada linha, os termos equidistantes dos extremos são iguais;
- a soma de dois números consecutivos de uma linha é igual ao número colocado abaixo, na linha seguinte.
- a soma dos números de cada linha é igual a 2^n , sendo n o número da linha.

Ao examinar o triângulo de Pascal, observa-se que a sequência de Fibonacci aparece através da soma dos números em diagonal, conforme mostra a figura:

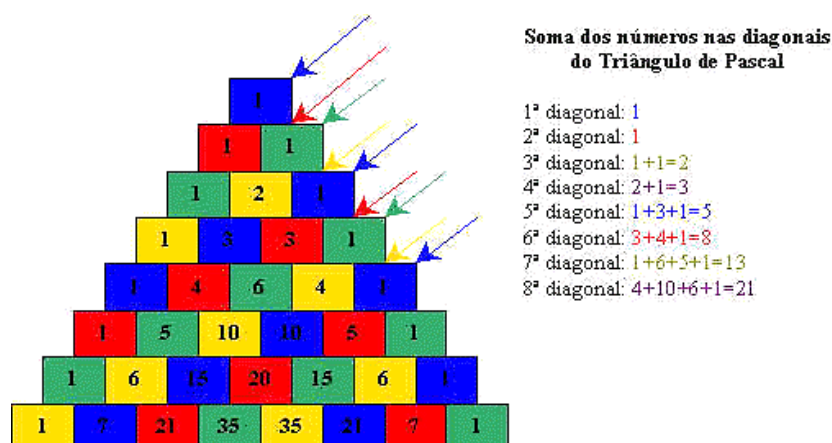


Figura 12: Triângulo de Pascal e a sequência de Fibonacci ¹⁴

¹⁴ Fonte: <http://drikamath.wordpress.com/2012/03/04/algumas-curiosidades-sobre-os-numeros-de-fibonacci/>

3.2. O Número de Ouro na arquitetura

Existem vários exemplos sobre o modo como o retângulo áureo se ajusta à construção de vários edifícios importantes. Neste ponto, daremos exemplos de alguns edifícios atuais e outros da antiguidade, onde aparece o Número de Ouro.

A história deste enigmático número perde-se na antiguidade. Como afirma Costa *et al.* (2010, p. 72), “(...) A proporção que este Número traduz é considerada como a mais bela para a Arquitetura e a Arte (...)”.

No Egito as pirâmides de Gizé foram construídas tendo em conta a razão áurea: a razão entre a altura de uma face e a metade do lado da base da grande pirâmide é igual ao Número de Ouro. A altura da pirâmide, a sua base e a altura de cada uma das faces desta grande pirâmide de Quéops, mantêm entre si, uma íntima relação por meio de Φ , tal como mostra na figura abaixo.

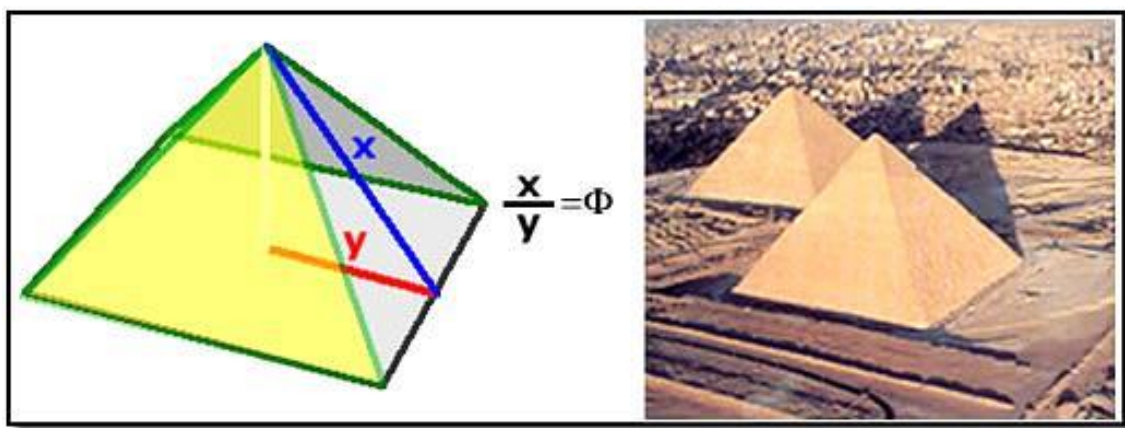


Figura 13: Pirâmide de Quéops e a proporção áurea ¹⁵

Outro exemplo da arquitetura onde podemos encontrar o Número de Ouro é no templo Pártenon de Atenas. Hoje em dia, no entanto, este ponto é objeto de estudo e discussão, pois existem alguns vídeos documentários e trabalhos de investigação que afirmam que as proporções do retângulo presente na fachada deste templo, não são as da razão áurea.

Construído há muitas centenas de anos, este monumento, agora em ruínas, é um dos famosos templos religiosos que foi construído em Atenas, por volta dos anos 430-440 a.C. e, segundo os autores da Antiguidade e na opinião da maioria dos atuais, nele podemos observar a proporção áurea. A planta do Pártenon mostra que o templo foi construído tendo por base um retângulo com

¹⁵ Fonte: <http://www.bpiropo.com.br/fpc20070226.htm>

comprimento igual à raiz quadrada de cinco mais um e e largura igual a um, o que revela a preocupação de realizar uma obra bela e harmoniosa, o qual pode ser observado na seguinte figura:

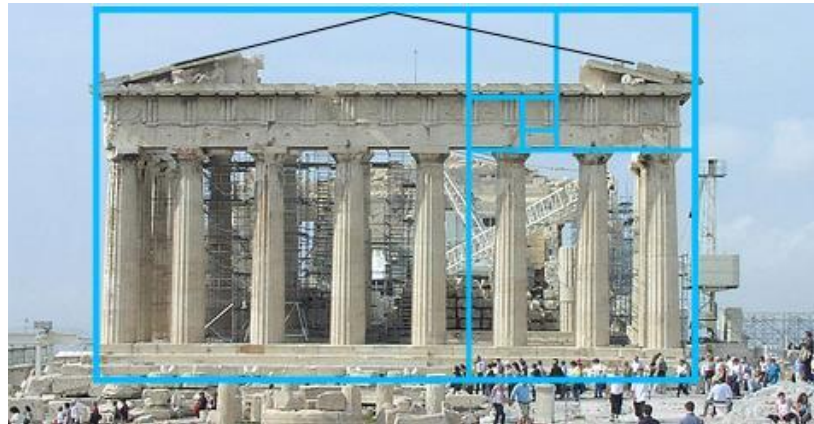


Figura 14: Pártenon de Atenas e a proporção áurea ¹⁶

Outro monumento que possui a razão áurea na sua construção é o Taj Mahal. Construído pelo imperador Shah Jahan, entre 1630 e 1652, todo em mármore branco sobre o túmulo de Aryumand Banu Began, sua esposa, a quem chamava “A jóia do palácio”, que faleceu após o parto do seu 14.º filho. Localizado em Agra, na Índia, foi reconhecido como património da humanidade pela UNESCO e, recentemente, reconhecido como uma das sete maravilhas do mundo. Edificação maravilhosa, construída baseada na razão áurea, objeto de estudo de vários cientistas, matemáticos e arquitetos. Em toda a parte frontal podemos localizar a razão áurea como mostra na figura 15:

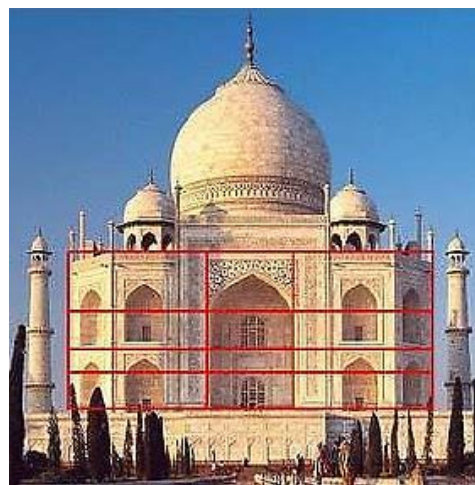


Figura 15: Taj Mahal da Índia e a proporção áurea ¹⁷

¹⁶Fonte: <http://www.montfort.org.br/a-beleza-no-mundo-no-homem-e-em-deus-a-filosofia-da-arte-a-sabedoria-de-deus-na-criacao-e-a-vida-espiritual-parte-7/>

A universidade de Salamanca é a mais antiga de Espanha, construída em 1218 e foi a primeira na Europa, a ter o título de universidade. Na construção da fachada desta universidade, a relação de Ouro está presente na sua construção.



Figura 16: Universidade de Salamanca ¹⁸

Outro exemplo da proporção áurea na Antiguidade é o papiro de Rhind ou de Ahmes, datado aproximadamente no ano 1650 a.C.. Foi escrito por Ahmes, tem cerca de 6m de comprimento e 33 cm de largura. Representa a melhor fonte de informações sobre a matemática egípcia conhecida. Escrito em hierático, é composto por 87 problemas e suas resoluções. Estes problemas são, na sua maioria, problemas ligados ao quotidiano da época e que procuravam apresentar métodos e fórmulas que permitissem resolver assuntos que surgiam diariamente, tais como o preço do pão, a armazenagem de grãos de trigo, a alimentação do gado, etc. Dão-nos informações básicas sobre aritmética, frações, cálculo de áreas, volumes, progressões, repartições proporcionais, regras de três simples, equações lineares e trigonometria básica.

Muito pouco se sabe sobre a finalidade do papiro. Poderia ser um documento com intenções pedagógicas ou um simples caderno de notas de um aluno. Os papiros contêm alguns erros importantes, provavelmente devido ao facto de terem sido copiados a partir de textos anteriores. Os papiros referem-se a uma “razão sagrada” que se crê ser o Número de Ouro.

O papiro de Rhind pode ser observado, na figura 17, a seguir representado:

¹⁷ Fonte: <http://razaoaureaifsc.blogspot.pt/2012/09/aplicacoes-da-razao-aurea.html>

¹⁸ Fonte: http://jabarata.blogspot.pt/2012/06/as-mais-belas-bibliotecas-do-mundo_25.html



Figura 17: Papiro de Rhind ¹⁹

Na arquitetura contemporânea, também podemos encontrar inúmeros edifícios de arquitetos famosos, que usaram a razão áurea na construção das suas obras.

O arquiteto Le Corbusier (1887-1965) participou na comissão internacional para a criação do edifício das Nações Unidas, situado na cidade de Nova Iorque. O seu projeto acabou por se realizar, com algumas modificações do arquiteto brasileiro Niemeyer, seu discípulo. Esta organização internacional foi criada ao finalizar a segunda guerra mundial, com o objetivo de evitar os conflitos bélicos entre as nações que dela fazem parte. Este edifício apresenta três retângulos de Ouro na fachada do monumental edifício.



Figura 18: Edifício sede da ONU, Nova Iorque ²⁰

¹⁹ Fonte: <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/rhind/inicio.htm>

²⁰ Fonte: : <http://www.bpiropo.com.br/fpc20070226.htm>

Le Corbusier construiu muitos edifícios, onde utilizou o Número de Ouro nas suas construções.

Foi nos anos de 1942 a 1948 que Le Corbusier desenvolveu um sistema único de medição denominado de *Modulor*, que era uma espécie de tabela, com medidas padrão, a ser utilizada nas obras arquitetônicas. Este novo sistema é baseado no que este arquiteto absorveu da cultura da Grécia Antiga e do que mais o impressionou, é baseado na razão de Ouro, bem como nos números da sequência de Fibonacci e nas dimensões médias humanas, que idealizou como altura *standard*, 183 cm.

O *Modulor* é uma sequência de medidas que Le Corbusier usou para encontrar harmonia nas suas composições arquiteturais. Este sistema foi publicado em 1950 e depois do grande sucesso, cinco anos mais tarde, foi publicado o *Modulor 2*.

O *Modulor*, era uma estátua realizada a partir das medidas ideais, sugeridas por Le Corbusier, no seu livro homónimo. Era um homem com mão levantada, mede 226 cm e a metade da altura, a 113 cm, encontra-se o umbigo. Os valores que aparecem nos retângulos de Ouro desenhados na estátua do *Modulor*, quando são multiplicados ou divididos por Φ , geram uma sequência de números de Fibonacci.

Podemos observar o *Modulor* na figura que se segue:

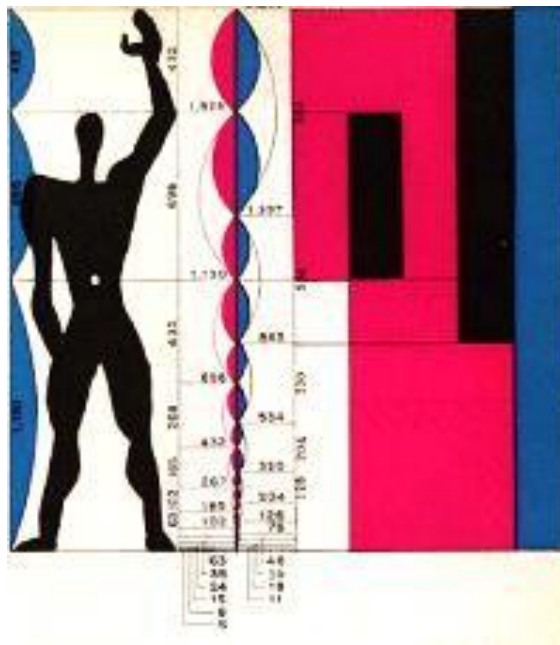


Figura 19: O *Modulor* ²¹

²¹ Fonte: <http://giorgiaferlin.com/2012/12/13/modulor/>

São várias as obras de arquitetura de Le Corbusier onde podemos encontrar a razão áurea, como por exemplo: a Ville Saboye, nos arredores de Paris e o exterior e interior da unidade habitacional de Marselha, a Torre de Tatlin, entre muitas outras.



Figura 20: Torre de Tatlin ²²



Figura 21: Unidade habitacional de Marselha ²³



Figura 22: Ville Saboye ²⁴

²² Fonte: <http://gutierrezcabrero.dpa-etsam.com/page/15/>

²³ Fonte: <http://www.maisnet.net/2011/03/unidade-habitacional-de-marselha-le-corbusier/>

²⁴ Fonte: http://www.usjt.br/biblioteca/mono_disser/mono_diss/097.pdf

No século I a.C., o engenheiro e arquiteto romano, Marcos Vitruvius publicou, em 10 volumes, um grande manual de engenharia e arquitetura, denominado “De Architectura”. Nesta obra desenha o homem vitruviano, que consiste numa figura humana de braços abertos, mostrando a proporção áurea no corpo humano. A influência de Vitruvius foi muito grande entre os arquitetos medievais.

Durante o Renascimento, muitos artistas, arquitetos e tratadistas²⁵, estudaram e interpretaram os textos vitruvianos, para fazer novas representações gráficas, mas nenhum deles conseguiu combinar de forma harmoniosa e matemática, as proporcionalidades do corpo humano e a solução da quadratura do círculo, conforme propunha Vitruvius. De entre os desenhos que foram feitos, o de Leonardo da Vinci (1452-1519) tornou-se o mais famoso e o mais difundido.

Leonardo da Vinci foi o responsável pelo encaixe perfeito do corpo humano, dentro dos padrões matemáticos esperados. O seu desenho faz parte da coleção da Gallerie dell’Accademia em Veneza, Itália. O redescobrimento das proporções matemáticas do corpo humano, no século XV, por Leonardo da Vinci e os outros, é considerado como uma das grandes realizações que levam ao Renascimento italiano.

O "homem de Leonardo da Vinci" é aquela figura que traz um homem de braços abertos, presente nos manuais de arquitetura modernos, na qual é mostrada a proporção áurea no corpo inteiro, no rosto, nos membros superiores, nos membros inferiores, nos dedos, nos artelhos²⁶, etc..

As figuras 23 e 24 são baseadas no “Homem de Leonardo da Vinci”. Nelas podemos observar como a razão áurea aparece no corpo humano.

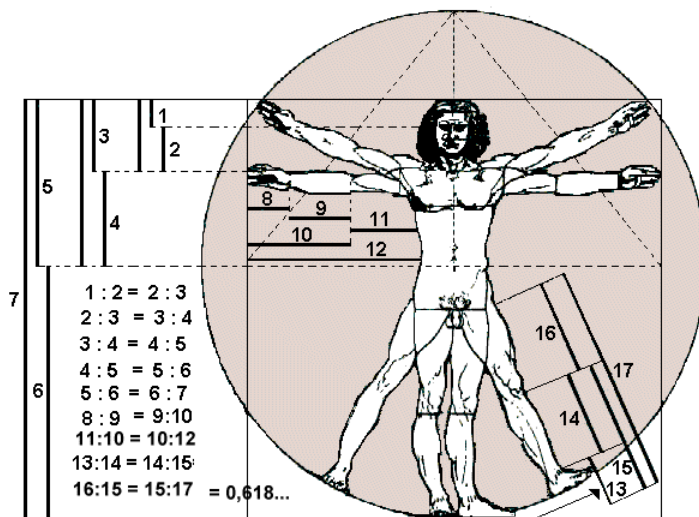


Figura 23: “Homem de Vitruvius” de Leonardo da Vinci²⁷

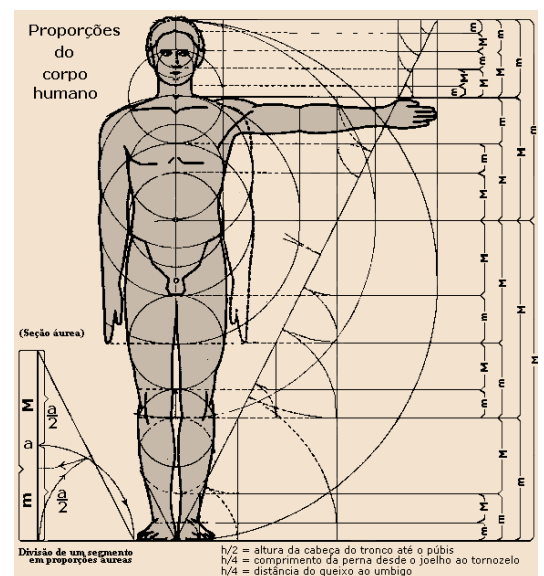


Figura 24: Homem segundo Leonardo da Vinci²⁸

²⁵ Aquele que escreveu um ou mais tratados sobre temas científicos.

²⁶ Termo técnico utilizado em anatomia para os dedos dos pés dos vertebrados terrestres.

²⁷ Fonte: <http://www.designontherocks.xpg.com.br/a-perfeicao-divina-aplicada-a-arte-e-ao-design/>

O homem vitruviano de Leonardo da Vinci é usado como referência estética de simetria e proporção em todo o mundo.

Também a famosa catedral Notre Dame, de Paris, é mais um dos monumentos onde podemos verificar a divisão áurea apresentada na sua fachada frontal tal como podemos observar na figura que se segue:

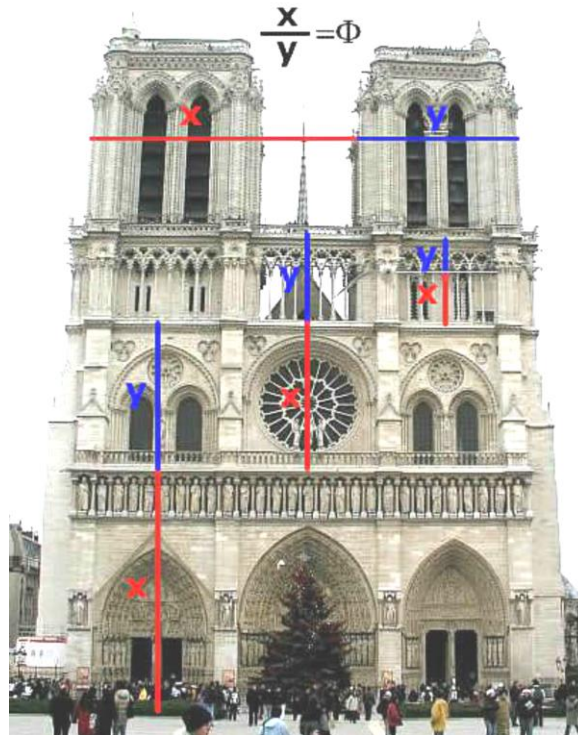


Figura 25: Catedral Notre Dame ²⁹

3.3. O Número de Ouro na pintura

Nas pinturas do renascimento destaca-se um dos quadros mais célebres de Leonardo da Vinci, a “Mona Lisa”, que apresenta o retângulo de Ouro em múltiplos locais da obra.

“Podemos verificar um rectângulo de Ouro quando: desenharmos um retângulo em torno de seu rosto, veremos que este é um retângulo de Ouro; dividirmos este retângulo por uma linha que passe nos olhos, o novo retângulo obtido também é de Ouro; as dimensões do quadro também representam a razão de Ouro” (Oliveira, 2010, p. 33).

²⁸ Adaptado de: <http://serluminoso.blogspot.pt/2013/06/a-criacao-e-o-numero-phi.html>

²⁹ Fonte : <http://www.bpiropo.com.br/fpc20070226.htm>

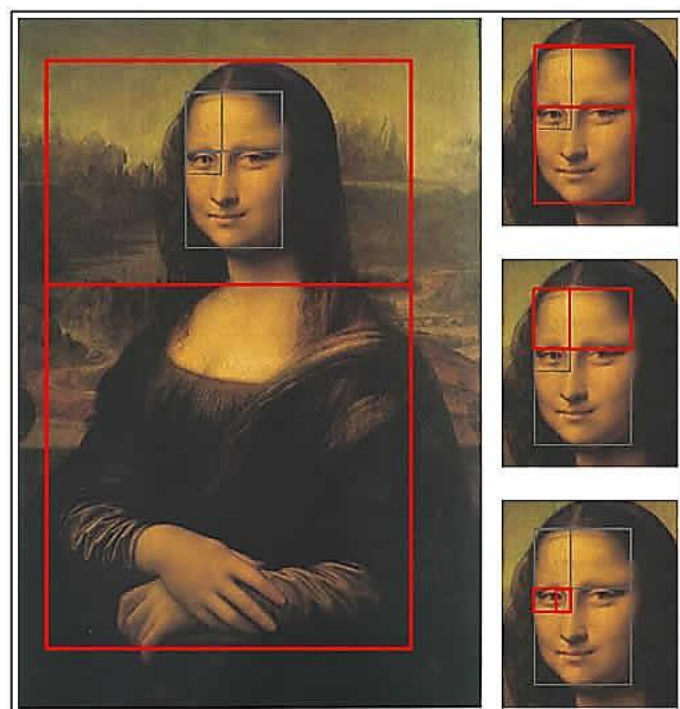


Figura 26: “Mona Lisa” de Leonardo da Vinci ³⁰

A excelência dos desenhos de Leonardo da Vinci, revela os seus conhecimentos matemáticos, bem como a utilização da razão áurea como garante de uma perfeição, beleza e harmonia únicas. Leonardo da Vinci foi um génio de pensamento original que usou exaustivamente os seus conhecimentos de matemática, nomeadamente o Número de Ouro, nas suas obras de arte.

São várias as obras famosas de Leonardo da Vinci onde podemos encontrar a proporção áurea, como por exemplo: “A Última Ceia”; “A Anunciação”, abaixo representadas, entre outras.

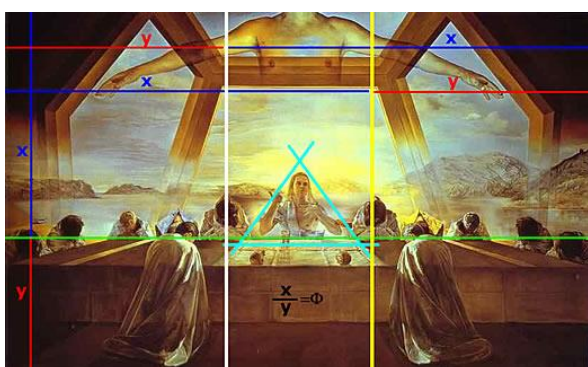


Figura 27: “Última Ceia” de Leonardo da Vinci ²⁷

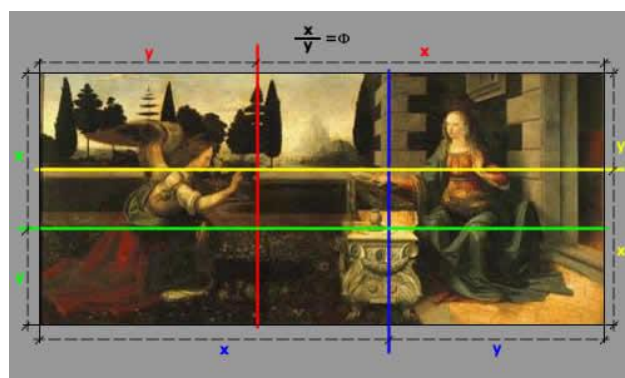


Figura 28: “A Anunciação” de Leonardo da Vinci ²⁷

³⁰ Fonte: <http://www.bpiropo.com.br/fpc20070226.htm>

Na obra “A Anunciação”, decompondo a figura num quadrado e num retângulo, o retângulo obtido tem as proporções de Ouro. Curiosamente esta divisão permite que o retângulo de Ouro enquadre as partes mais importantes da figura: o anjo e a jovem, se o quadrado for construído no lado direito ou no lado esquerdo, respetivamente.

Na obra “A Última Ceia”, Leonardo da Vinci revela, de forma assombrosa, diversas figuras áureas, em especial o retângulo. Nesta obra, o retângulo de Ouro define tanto as dimensões da mesa, como a disposição de Cristo e dos seus discípulos à sua volta. Podemos constatar que as paredes da sala e as janelas do fundo também respeitam a proporção áurea.

Em termos gerais, os pintores renascentistas foram influenciados, ainda que consciente ou inconscientemente, pela proporção áurea nas suas obras. São vários os pintores famosos que deixaram obras muito importantes onde se evidencia a razão áurea. Exemplo disso são as seguintes obras: “Sagrada Família” de Miguel Ângelo; “A Flagelação” de Piero della Francesca; “Nascimento de Vénus” de Sandro Botticelli e a “Melancolia I” de Albrecht Durer.

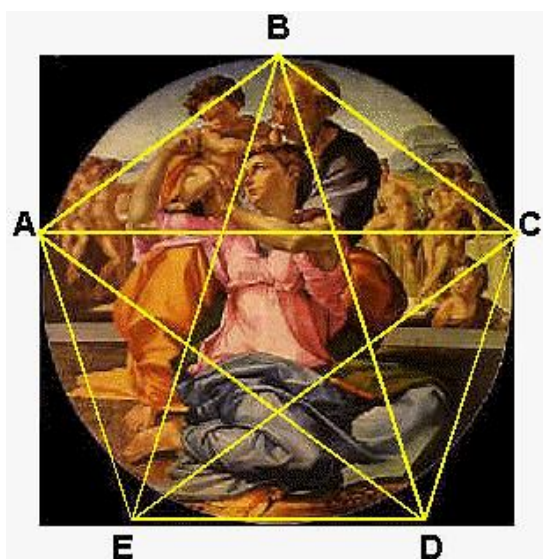


Figura 29: “A Sagrada Família” de Miguel Ângelo ³¹

Na obra “A Sagrada Família” de Miguel Ângelo, foi utilizada a estrela pentagonal na organização das suas personagens.

³¹ Fonte: http://www.dav.sceu.frba.utn.edu.ar/homovidens/MirtaDiaz/Proyectorfinal/ver_mas.htm



Figura 30: “Nascimento de Vénus” de Botticelli ³²

3.4 . O Número de Ouro na natureza

Juntando dois quadrados com lado igual a 1, obteremos um retângulo de lados 2×1 , sendo o lado maior igual à soma dos lados dos quadrados anteriores. Anexamos agora outro quadrado com lado igual a 2 obteremos um novo retângulo, cujos lados medem 3×2 . Continuamos a anexar quadrados com lados iguais ao maior dos comprimentos dos retângulos obtidos no passo anterior, obteremos uma sequência em que os lados dos quadrados têm os seguintes comprimentos: 1, 1, 3, 5, 8, 13, ... , que é a sequência de Fibonacci.

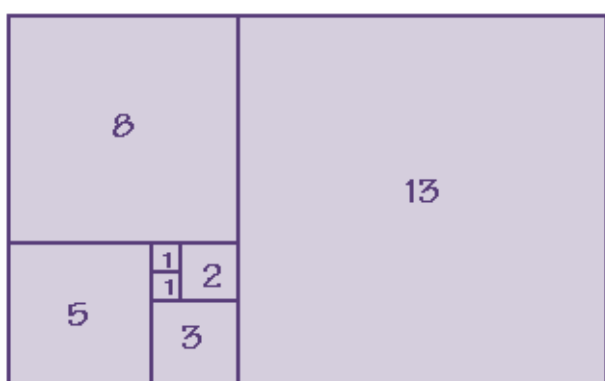


Figura 31: Retângulo de Ouro ³³

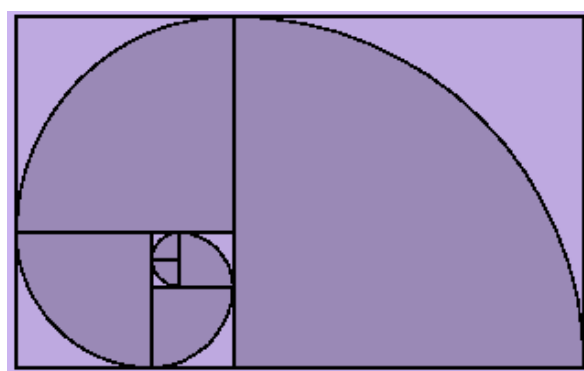


Figura 32: Espiral logarítmica ³⁰

³² Fonte: <http://luisaefelipe77.blogspot.pt/2010/10/pintura-o-nascimento-de-venus.html>

³³ Adaptado de: <http://charlezine.com.br/sequencia-de-fibonacci/>

Se unirmos os quartos de circunferência de todos os quadrados vamos obter uma espiral, chamada espiral dourada ou logarítmica.

Na natureza encontramos facilmente espirais como esta, relacionadas com o Número de Ouro, como, por exemplo, nos moluscos marinhos, numa simples couve-flor, nas sementes de girassol, nas conchas dos moluscos, no abacaxi, nas pinhas, nas estrelas-do-mar, etc..



Figura 33: Espiral logarítmica no *Nautilus* marinho ³⁴

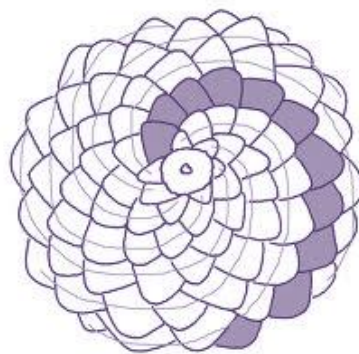


Figura 34: Espiral logarítmica na pinha ³⁵

Os ramos das árvores não nascem uns sobre os outros, mas segundo uma espiral. O tamanho da árvore vai variando ao longo do tempo, mas o seu aspeto exterior é sempre o mesmo: as proporções, entre a sua altura e o comprimento dos ramos, mantêm-se, assim como as respetivas formas. Por essa razão, podemos distinguir as várias espécies umas das outras, sem ser necessário observar ao pormenor as folhas e a casca.

A planta representada na figura 35, é um dos vários exemplos, em que a disposição dos ramos e das folhas, seguem o padrão da sequência de Fibonacci.

Como podemos observar, o número de ramos desta planta é dado por: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ..., que são os números de Fibonacci. O número de folhas da planta também é dado pelos números da sequência de Fibonacci.

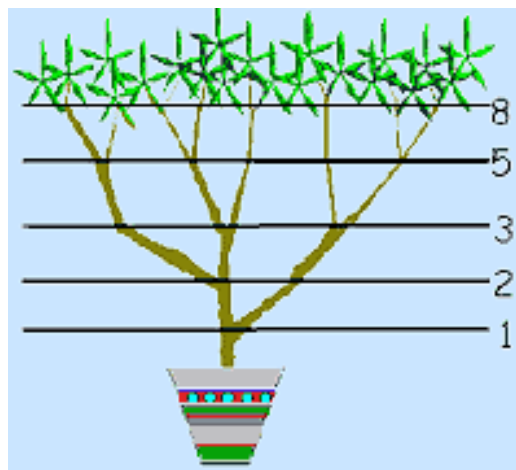


Figura 35: Planta *Achillea ptármica* ³¹

³⁴ Fonte: <http://www.didaxis.org/matematicaonline/index.php?url=historiamatematica>

³⁵ Adaptado de: <http://horamatematica.blogspot.pt/2010/11/o-numero-de-ouro-e-sequencia-de.html>

Existe, também, uma relação entre a “árvore genealógica” das abelhas e a sequência de Fibonacci. Na reprodução das abelhas, quando um óvulo não é fertilizado, gera uma abelha macho, e quando ocorre a fertilização, gera uma abelha fêmea. Assim sendo, uma abelha macho tem como pais apenas uma abelha fêmea. Uma abelha fêmea tem como pais um casal de abelhas.

Como podemos observar na figura 36, nas várias gerações, o número de abelhas segue o padrão da sequência de Fibonacci.

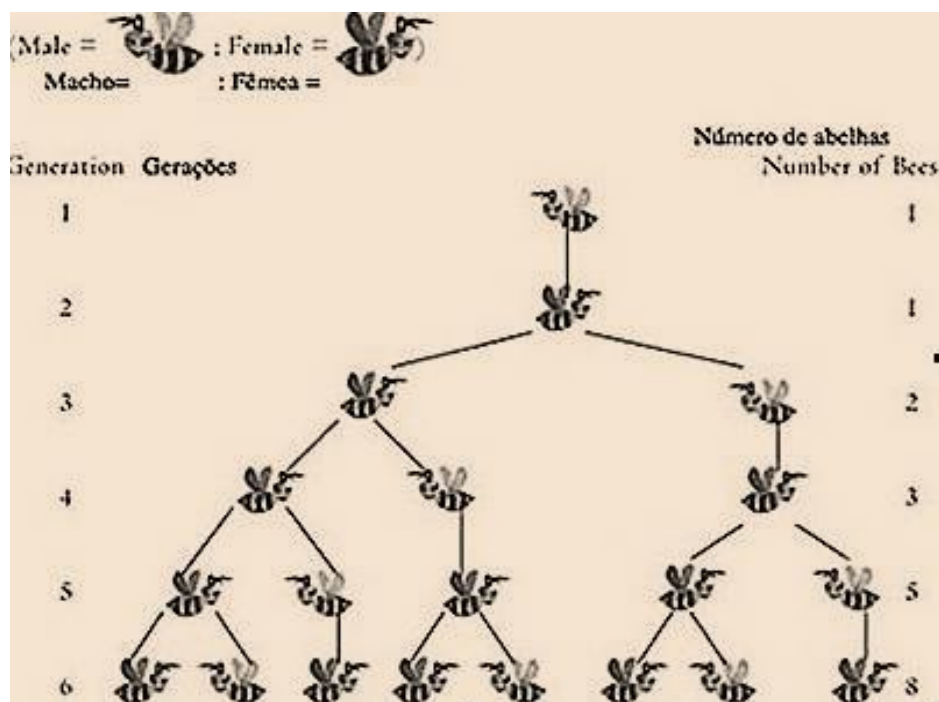


Figura 36: “Árvore genealógica” das abelhas ³⁶

Encontraremos, com certeza, inúmeras aplicações da sequência de Fibonacci e do Número de Ouro na natureza, no entanto, ficaremos com estes exemplos mencionados neste trabalho.

3.5. O Número de Ouro no *design*

Atualmente a proporção áurea é muito usada no *design* dos objetos do nosso dia-a-dia. Ao padronizar internacionalmente algumas medidas de determinados objetos, os projetistas procuram respeitar a proporção divina. Algumas das correntes místicas acreditam que os objetos cujas dimensões estejam relacionadas com o Número de Ouro, são mais agradáveis à vista e estimulam uma sensação de beleza e harmonia no ser humano.

³⁶ Adaptado de: <http://www.chabad.org.br/biblioteca/artigos/codigo/home.html>

O *marketing* e o *design* foram buscar o Número de Ouro para conceber alguns dos objetos do cotidiano, tais como: nos cartões multibanco, nas caixas de cereais, nas caixas dos DVDs, no formato dos livros, no leitor de ficheiros MP3 da *Apple*, nas embalagens de cigarros, etc..

No vestuário há utilizações da proporção áurea numa empresa norte americana que desenha *jeans* com o Número de Ouro a surgir na curva do bolso da frente, nas proporções do bolso de trás e na relação entre o pesponto³⁷ dos bolsos e a costura interior das calças.

O campo de Futebol do Clube de Futebol Real Madrid, com medidas de $106\text{ m} \times 66\text{ m}$, é praticamente um retângulo de Ouro.

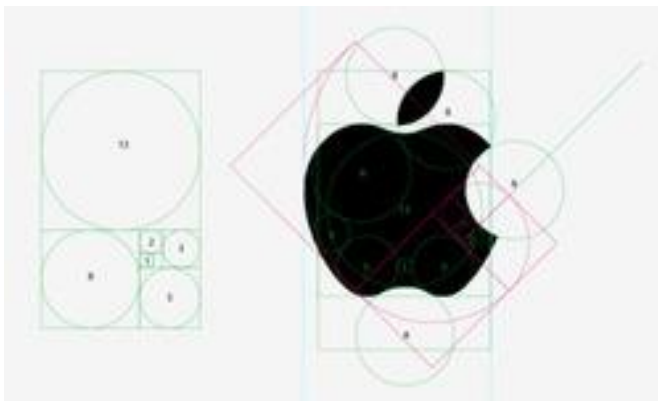


Figura 37: Razão áurea no *design* da marca *Apple* ³⁸



Figura 38: Razão áurea no *I'phone* da *Apple* ³⁷

3.6. O Número de Ouro na música

Stradivarius, produziu na Itália renascentista vários violinos e violoncelos. Segundo comprovações, mais de mil violinos foram criados, mas apenas 650 ainda existem. O mais famoso é chamado de "O Messias", de 1716, é um dos mais famosos instrumentos de corda, e encontra-se no Ashmolean Museum, de Oxford. Stradivarius utilizava o Número de Ouro na construção dos seus famosos violinos.

³⁷ Ponto da costura em que uma agulha torna sucessivamente um entrar um pouco atrás do lugar em que saiu o ponto anterior.

³⁸ Fonte: <http://pappagallodifermat.blogspot.pt/2012/07/apple-e-il-rapporto-aureo.html>



Figura 39: Violino de Stradivarius ³⁹

O Número de Ouro está presente também nas famosas sinfonias número 5 e número 9 de Beethoven.

O baterista de jazz Max Roach usou a razão áurea num dos seus solos.

Há treze notas em cada oitava no piano. Uma escala compreende 8 notas, das quais a 1.^a, 3.^a e 5.^a são a base dos acordes. No piano, são 8 teclas brancas e 5 pretas separadas em grupos de 3 e de 2.

3.7. O Número de Ouro na literatura

Na literatura, o Número de Ouro encontra a sua aplicação mais notável no poema épico grego “Ilíada”, escrito por volta do século VIII a.C., por Homero, que narra acontecimentos dos últimos dias da guerra de Tróia. Nesta obra, a proporção entre as estrofes maiores e as menores, dá um número próximo ao 1,618, que como sabemos, é um valor aproximado do Número de Ouro.

Luís Vaz de Camões (1572) na sua obra “Os Lusíadas”, colocou a chegada à Índia no ponto que divide a obra na razão de Ouro.

Virgílio na sua obra “Eneida”, escrita no século I a.C., construiu a razão áurea com as estrofes maiores e menores.

O poeta, tradutor e escritor português, Moura (1994), escreveu na sua obra “Camões e a Divina Proporção” um poema que demonstra a curiosidade de um número que desde a antiguidade encanta cientistas e curiosos. Apresentámos de seguida o referido poema:

³⁹ Fonte: http://violinoacustico.blogspot.pt/2012_03_01_archive.html

“O misterioso Número de Ouro

Do número nasce a proporção

Da proporção se segue à consonância

A consonância causa deleitação

A nenhum sentido apraz a dissonância.

Unidade, igualdade e semelhança

São princípios do contentamento

Em todos os sentidos o experimento

A alma na unidade glória alcança.

Em todas as quantidades a igualdade

E a perfeição remota ou a mais chegada

Segundo a natural autoridade

E assim esta nas qualidades assentada.

Da mesma maneira a semelhança

Diva de ser sentida e contemplada.”⁴⁰

A sequência de Fibonacci e o Número de Ouro surgiram, mais recentemente, na literatura e no cinema, através do livro e do filme “O Código da Vinci”.

A razão áurea surge, inesperadamente, em diferentes contextos transmitindo sempre a sensação de estética e beleza, por isto ela é surpreendente. Não podemos deixar de admirar a beleza do girassol, da concha marinha, do retângulo áureo, do segmento áureo, da pirâmide, do pentagrama, do pentágono, do decágono, das proporções harmônicas no nosso corpo, da pintura e da arquitetura. Sabemos da sua importância no passado: na arte, arquitetura, pintura; e também da sua importância no presente: na arquitetura, arte, natureza, estética, formato de cartões de crédito e documentos, aparelhos eletrônicos (televisão, computador), cadernos e livros. Tudo isto nos leva a perceber a importância desta razão e o motivo pelo qual foi chamada de razão de Ouro.

⁴⁰ Fonte: <http://cmup.fc.up.pt/cmup/mecs/O%20Misterioso%20Numero%20de%20Ouro.pdf>.

CAPÍTULO IV – A SEQUÊNCIA DE FIBONACCI, A SEQUÊNCIA DE LUCAS E O NÚMERO DE OURO NO 3.º CICLO DO ENSINO BÁSICO

4.1. As orientações oficiais no 3.º Ciclo do Ensino Básico

As competências essenciais que os alunos devem desenvolver, ao longo de toda a educação básica, no que diz respeito à disciplina de Matemática, de acordo com as orientações que constam no Currículo Nacional do Ensino Básico (2001), são:

- “A predisposição para raciocinar matematicamente, isto é, para explorar situações problemáticas, procurar regularidades, fazer e testar conjecturas, formular generalizações, pensar de maneira lógica;
- Gosto e a confiança pessoal em realizar atividades intelectuais que envolvem raciocínio matemático e a conceção de que a validade de uma afirmação está relacionada com a consistência da argumentação lógica, e não com alguma autoridade exterior;
- A aptidão para discutir com outros e comunicar descobertas e ideias matemáticas através do uso de uma linguagem, escrita e oral, não ambígua adequada à situação;
- A compreensão das noções de conjectura, teorema e demonstração, assim como das consequências do uso de diferentes definições;
- A predisposição para procurar entender a estrutura de um problema e a aptidão para desenvolver processos de resolução, assim como para analisar os erros cometidos e ensaiar estratégias alternativas;
- A aptidão para decidir sobre a razoabilidade de um resultado e usar, consoante os casos, o cálculo mental, os algoritmos de papel e lápis ou os instrumentos tecnológicos;
- A tendência para procurar ver e apreciar a estrutura abstrata que está presente numa situação, seja ela relativa a problemas do dia-a-dia, à natureza ou à arte, envolva ela elementos numéricos, geométricos ou ambos;
- A tendência para usar a matemática, em combinação com outros saberes, na compreensão de situações da realidade, bem como o sentido crítico relativamente à utilização de procedimentos e resultados de matemática”.

(Ministério da Educação, 2001, p. 57).

De acordo com o novo Programa de Matemática do Ensino Básico, homologado em 17 de junho de 2013, destacam-se três finalidades para o ensino da Matemática, bem distintas do programa de Matemática que esteve em vigor, desde 2007:

1. “A estruturação do pensamento - A apreensão e hierarquização de conceitos matemáticos, o estudo sistemático das suas propriedades e a argumentação clara e precisa, própria desta disciplina, têm um papel primordial na organização do pensamento, constituindo-se como uma gramática basilar do raciocínio hipotético-dedutivo. O trabalho desta gramática contribui para alicerçar a capacidade de elaborar análises objetivas, coerentes e comunicáveis. Contribui ainda para melhorar a capacidade de argumentar, de justificar adequadamente uma dada posição e de detetar falácias e raciocínios falsos em geral.

2. A análise do mundo natural – A Matemática é indispensável a uma compreensão adequada de grande parte dos fenómenos do mundo que nos rodeia, isto é, a uma modelação dos sistemas naturais que permita prever o seu comportamento e evolução. Em particular, o domínio de certos instrumentos matemáticos revela-se essencial ao estudo de fenómenos que constituem objeto de atenção em outras disciplinas do currículo do Ensino Básico (Física, Química, Ciências da Terra e da Vida, Ciências Naturais, Geografia...).

3. A interpretação da sociedade – Ainda que a aplicabilidade da Matemática ao quotidiano dos alunos se concentre, em larga medida, em utilizações simples das quatro operações, da proporcionalidade e, esporadicamente, no cálculo de algumas medidas de grandezas (comprimento, área, volume, capacidade,...) associadas em geral a figuras geométricas elementares, o método matemático constitui-se como um instrumento de eleição para a análise e compreensão do funcionamento da sociedade. É indispensável ao estudo de diversas áreas da atividade humana, como sejam os mecanismos da economia global ou da evolução demográfica, os sistemas eleitorais que presidem à Democracia, ou mesmo campanhas de venda e promoção de produtos de consumo. O Ensino da Matemática contribui assim para o exercício de uma cidadania plena, informada e responsável.” (Bivar *et al.*, 2013, p. 2)

Para atingir as finalidades enunciadas, estabeleceram-se objetivos gerais que os alunos deverão evidenciar no final dos três ciclos do Ensino Básico. Estes objetivos traduzem desempenhos fundamentais, que são explicitados por verbos, que têm significados específicos em cada ciclo. As

Metas Curriculares de Matemática organizam-se em: “domínios”, que se dividem em “subdomínios”, para os quais são definidos “objetivos gerais”, que são completados por “descritores de desempenho”. Estes descritores precisam de forma objetiva e rigorosa o que os alunos devem atingir dentro de cada objetivo geral.~

Os objetivos a atingir para o 3.º Ciclo do Ensino Básico, de acordo com o novo Programa de Matemática para o Ensino Básico, são os seguintes:

- (1) “Identificar/designar: O aluno deve utilizar corretamente a designação referida, sabendo definir o conceito apresentado como se indica ou de forma equivalente.
- (2) Reconhecer: O aluno deve apresentar uma argumentação coerente ainda que eventualmente mais informal do que a explicação fornecida pelo professor. Deve, no entanto, saber justificar isoladamente os diversos passos utilizados nessa explicação.
- (3) Reconhecer, dado...: O aluno deve justificar o enunciado em casos concretos, sem que se exija que o prove com toda a generalidade.
- (4) Saber: O aluno deve conhecer o resultado, mas sem que lhe seja exigida qualquer justificação ou verificação concreta.
- (5) Provar/Demonstrar: O aluno deve apresentar uma demonstração matemática tão rigorosa quanto possível.
- (6) Estender: Este verbo é utilizado em duas situações distintas:
 - (a) Para estender a um conjunto mais vasto uma definição já conhecida. O aluno deve definir o conceito como se indica, ou de forma equivalente, reconhecendo que se trata de uma generalização.
 - (b) Para estender uma propriedade a um universo mais alargado. O aluno deve reconhecer a propriedade, podendo por vezes esse reconhecimento ser restrito a casos concretos.
- (7) Justificar: O aluno deve justificar de forma simples o enunciado, evocando uma propriedade já conhecida.” (Bivar *et al.*, 2013, pp. 3-4)

No Programa de Matemática do Ensino Básico que esteve em vigor até ao presente ano letivo e também no Programa que entrará em vigor, pretende-se, desde o 1.º Ciclo do Ensino Básico, desenvolver nos alunos, o pensamento algébrico, através da capacidade de representar, com simbologia adequada, situações matemáticas, bem como situações do dia-a-dia, e resolver problemas nos mais variados contextos.

O ensino da Álgebra, aparece como tema programático individualizado no 2.º e 3.º Ciclos do Ensino Básico, embora haja uma iniciação ao pensamento algébrico já no 1.º Ciclo do Ensino Básico, tal como estava definido no Programa anterior.

“As ideias algébricas aparecem logo no 1.º ciclo no trabalho com sequências, ao estabelecerem-se relações entre números e entre números e operações, e ainda no estudo de propriedades geométricas como a simetria. No 2.º ciclo, a Álgebra já aparece como um tema matemático individualizado, aprofundando-se o estudo de relações e regularidades e da proporcionalidade direta como igualdade entre duas razões. Finalmente, no 3.º ciclo, institucionaliza-se o uso da linguagem algébrica, trabalha-se com expressões, equações, inequações e funções, procurando desenvolver no aluno a capacidade de lidar com diversos tipos de relações matemáticas e estudar situações de variação em contextos significativos. A alteração mais significativa em relação ao programa anterior é o estabelecimento de um percurso de aprendizagem prévio no 1.º e 2.º ciclos que possibilite um maior sucesso na aprendizagem posterior, com a consideração da Álgebra como forma de pensamento matemático, desde os primeiros anos.” (Ponte *et al.*, 2007, p. 7)

Na aplicação do novo Programa de Matemática do Ensino Básico, aos alunos devem ser apresentadas diferentes tipos de experiências matemáticas, resultando daí uma diversidade de tarefas a propor na sala de aula. Essas tarefas devem ser preparadas e selecionadas, cuidadosamente, pelos professores, de forma a atingirem os objetivos propostos, quer a nível de conteúdos, quer a nível de atitudes dos alunos, face aos desafios apresentados. Todas as tarefas elaboradas devem pressupor uma atitude ativa dos alunos na procura de novos conhecimentos.

Segundo Ponte (2004, p.8), as tarefas podem-se dividir em quatro tipos, tendo em conta as suas propriedades:

- Exercício: tarefa fechada e de desafio reduzido;
- Problema: tarefa fechada e com elevado desafio;
- Investigação: tarefa aberta e com grau de desafio elevado;
- Exploração: tarefa aberta e de desafio reduzido.,

Relativamente à duração da tarefa, segundo Ponte (2004, p. 10), podemos classificar as tarefas como sendo de curta duração – os exercícios; de média duração – os problemas, as tarefas de exploração e as tarefas de investigação; e tarefas de longa duração – os projetos.

Os alunos devem desenvolver uma predisposição para usar a Matemática em contexto escolar e não escolar. As tarefas de carácter problemático apresentadas devem ser estimulantes e desafiantes, permitindo compreender a sua aplicabilidade na vida real. O recurso à História da Matemática, permite que os alunos compreendam que a Matemática é uma ciência viva e em evolução, bem como a utilidade da Matemática para grandes descobertas noutras ciências.

A resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática para além de constituírem objetivos de aprendizagem, constituem orientações metodológicas importantes para o professor estruturar as atividades a desenvolver na aula. No novo Programa de Matemática do Ensino Básico podemos verificar que:

“ Os temas transversais referidos no programa de 2007, como a Comunicação ou o Raciocínio matemático, referem-se a capacidades estruturais indispensáveis ao cumprimento dos objetivos elencados, estando contemplados neste documento de forma explícita ou implícita em todos os descritores”. (Bivar *et al.*, 2012, p. 2)

O professor tem um papel muito importante na gestão do currículo na sala de aula. A forma como o concretiza, as estratégias que utiliza, permite aos alunos, a construção dos conceitos fundamentais em jogo, a compreensão dos procedimentos, o domínio da linguagem matemática e das representações relevantes, o estabelecimento de conexões.

Assim, o professor, sujeito reflexivo e atuante, será um dos elementos fundamentais no processo de ensino e aprendizagem, pelo seu papel determinante na seleção cuidada de tarefas a propor na sala de aula, na implementação de meios que otimizem a sua exploração e na reflexão acerca do tipo de questões, intervenções e estímulos que poderá utilizar para desafiar, confrontar e questionar os alunos.

Os docentes devem vivenciar e participar em momentos de discussão, partilha, trabalho colaborativo e práticas de reflexão conjunta o que permitirá um enriquecimento ainda maior em termos de formação profissional.

De acordo com os autores do novo Programa de Matemática para o Ensino Básico, tornou-se necessário clarificar e definir quais os conhecimentos e capacidades fundamentais que os alunos devem desenvolver no domínio da Matemática ao longo do Ensino Básico.

Desta forma, adota-se uma estrutura curricular sequencial, na qual se caminha por etapas, respeitando uma estrutura própria de uma disciplina cumulativa, como a Matemática. Consideram também que a abstração tem um papel fundamental na atividade matemática e que, nos primeiros anos, se deve partir do concreto para, progressivamente, passar para um pensamento mais abstrato.

As Metas Curriculares pretendem, conjuntamente com o novo Programa de Matemática, constituir as referências fundamentais para o desenvolvimento do ensino da Matemática, clarificando o que se deve eleger como prioridade no ensino. Neste sentido, este novo Programa de Matemática do Ensino Básico, tem por objetivo principal potenciar e aprofundar a compreensão da Matemática.

Definir os conhecimentos a adquirir e as capacidades a desenvolver pelos alunos, é pois o objetivo das Metas Curriculares, sendo também um meio de apoio às planificações dos professores, constituindo-se como referencial para a avaliação interna e externa.

O novo Programa de Matemática para o Ensino Básico, baseia-se em cinco grandes temas matemáticos, para o 3.º Ciclo do Ensino Básico, nomeadamente: Números e Operações (NO); Geometria e Medida (GM); Funções, Sequências e Sucessões (FSS); Álgebra (ALG) e Organização e Tratamento de Dados (OTD).

Relativamente ao tema que apresentamos neste trabalho, “ A sequência de Fibonacci e a sequência de Lucas”, este pode-se inserir, essencialmente, em quatro das cinco grandes temáticas do novo Programa de Matemática para o Ensino Básico: Álgebra; Funções, Sequências e Sucessões; Geometria e Medida, e Números e Operações.

O tema escolhido para este trabalho, não se encontra muito desenvolvido nos manuais escolares utilizados para o ensino da Matemática do 3.º Ciclo do Ensino Básico. No tópico agora designado por “Funções, Sequências e Sucessões” e também na temática “Números e Operações”, podemos encontrar algumas atividades relacionadas com a sequência de Fibonacci nos manuais escolares atuais, inclusive, algumas referências à vida e obra de Leonardo de Pisa, autor desta famosa sequência, bem como algumas atividades e referências ao Número de Ouro. Relativamente à sequência de Lucas, não encontramos nenhuma referência nos manuais escolares de Matemática do Ensino Básico. Por estas razões e, também pela importância e aplicação na vida real da sequência de Fibonacci e da sequência de Lucas, achamos interessante propor algumas atividades relativas a estas sequências, que permitam atingir as Metas Curriculares propostas para esta temática, de acordo com o novo Programa de Matemática, que entrará em vigor no próximo ano letivo 2013/2014 e que poderão enriquecer o ensino destes tópicos no Ensino Básico. Propomos, também uma possível inclusão de determinados conteúdos relativos a estas sequências no currículo de Matemática do Ensino Básico.

O 3.º Ciclo do Ensino Básico constitui uma etapa muito importante na formação matemática dos alunos. É uma fase de consolidação de conhecimentos e capacidades a desenvolver no Ensino Básico, sendo também, uma preparação para o Ensino Secundário.

Relativamente aos domínios e conteúdos que constam no novo Programa de Matemática do Ensino Básico, podemos encontrá-los no anexo II , no que diz respeito ao 3.º Ciclo do Ensino Básico.

Embora existam aspetos gerais e comuns a desenvolver nos alunos, ao longo dos três ciclos do Ensino Básico, há ainda a considerar competências específicas que os alunos deverão adquirir no 3.º Ciclo do Ensino Básico, no que diz respeito aos temas da Álgebra e Funções (e, considerando o novo Programa, também às Sequências e Sucessões), de acordo com o Currículo Nacional do Ensino Básico, designadamente:

- “O reconhecimento do significado de fórmulas no contexto de situações concretas e a aptidão para usá-las na resolução de problemas de representar;
- A aptidão para usar equações e inequações como meio de representar situações problemáticas e para resolver equações, inequações e sistemas, assim como para realizar procedimentos algébricos simples;
- A compreensão do conceito de função e das facetas que pode apresentar, como correspondência entre conjuntos e como relação entre variáveis;
- A aptidão para representar relações funcionais de vários modos e passar de uns tipos de representação para outros, usando regras verbais, tabelas, gráficos e expressões algébricas e recorrendo, nomeadamente, à tecnologia gráfica;
- A sensibilidade para entender o uso de funções como modelos matemáticos de situações do mundo real, em particular nos casos em que traduzem relações de proporcionalidade direta e inversa” (Ministério da Educação, 2001, p. 67).

De acordo com o Currículo Nacional do Ensino Básico (2001, p. 68), todos os alunos devem, ao longo do Ensino Básico, ter a oportunidade de se envolverem em vários tipos de experiências, designadamente:

- A resolução de problemas: permitem o desenvolvimento do raciocínio e da comunicação matemática;
- Atividades de investigação: permitem explorar novas situações, procurar regularidades, testar e formular conjecturas;
- A realização de projetos: permitem a partilha de saberes em trabalho de grupo fora e dentro da sala de aula, o desenvolvimento do trabalho interdisciplinar e a apresentação de resultados;
- Jogos: são atividades que envolvem o raciocínio, a estratégia, a reflexão, a competição de uma forma lúdica muito rica.

Os alunos devem também ter a oportunidade de contactar com aspetos da História, do desenvolvimento e da utilização da matemática através de:

- Reconhecimento da Matemática na tecnologia e nas técnicas: é importante que os alunos percebam que a matemática tem contribuído para o desenvolvimento de muitas tecnologias ao longo da história;
- Realização de trabalhos sobre a Matemática: permitem que os alunos conheçam a História da Matemática, através de pesquisa, recolha, organização de informação, escrita e sua apresentação.

Os alunos devem também, ter a oportunidade de utilizar as tecnologias na aprendizagem da Matemática, tais como, a folha de cálculo, diversos programas educativos, a *internet*, a calculadora, programas de geometria dinâmica, os quadros interativos, etc.; bem como a utilização de materiais manipuláveis.

De acordo com o novo Programa de Matemática do Ensino Básico, as aprendizagens deverão partir de um nível de conhecimentos elementar, intuitivo, aumentando progressivamente, para o conhecimento de factos e procedimentos, usando o raciocínio matemático e a comunicação matemática na resolução de problemas, em vários contextos. Os alunos deverão ter uma visão da matemática como um todo articulado e coerente, de forma a compreenderem as suas aplicações no nosso quotidiano.

Todos os alunos deverão adquirir, ao longo dos três ciclos do Ensino Básico, determinadas capacidades transversais, que se encontram enunciadas no novo Programa de Matemática, que são a seguir indicadas:

- **“Conhecimento de factos e de procedimentos** – O domínio de procedimentos padronizados, como por exemplo algoritmos e regras de cálculo, deverá ser objeto de particular atenção no ensino desta disciplina. As rotinas e automatismos são essenciais ao trabalho matemático, uma vez que permitem libertar a memória de trabalho, por forma a que esta se possa dedicar, com maior exclusividade, a tarefas que exigem funções cognitivas superiores. Por outro lado permitem determinar, *a priori*, que outra informação se poderia obter sem esforço a partir dos dados de um problema, abrindo assim novas portas e estratégias à sua resolução. A memorização de alguns factos tem igualmente um papel fundamental na aprendizagem da Matemática, sendo incorreto opô-la à compreensão. Memorização e compreensão, sendo complementares,

reforçam-se mutuamente. Conhecer as tabuadas básicas, e outros factos elementares, de memória, permite também poupar recursos cognitivos que poderão ser direccionados para a execução de tarefas mais complexas.

• **Raciocínio matemático** – O raciocínio matemático é por excelência o raciocínio hipotético-dedutivo, embora o raciocínio indutivo desempenhe também um papel fundamental, uma vez que preside, em Matemática, à formulação de conjecturas. Os alunos devem ser capazes de estabelecer conjecturas, em alguns casos, após a análise de um conjunto de situações particulares. Deverão saber, no entanto, que o raciocínio indutivo não é apropriado para justificar propriedades, e, contrariamente ao raciocínio dedutivo, pode levar a conclusões erradas a partir de hipóteses verdadeiras, razão pela qual as conjecturas formuladas mas não demonstradas têm um interesse limitado, devendo os alunos ser alertados para este facto e incentivados a justificá-las *a posteriori*. Os desempenhos requeridos para o cumprimento dos descritores nos vários ciclos apontam para uma progressiva proficiência na utilização do raciocínio hipotético-dedutivo e da argumentação matemática. Espera-se pois que no 3.º ciclo, os alunos sejam capazes de elaborar, com algum rigor, pequenas demonstrações.

• **Comunicação matemática** – Oralmente, deve-se trabalhar com os alunos a capacidade de compreender os enunciados dos problemas matemáticos, identificando as questões que levantam, explicando-as de modo claro, conciso e coerente, discutindo, do mesmo modo, estratégias que conduzam à sua resolução. Os alunos devem ser incentivados a expor as suas ideias, a comentar as afirmações dos seus colegas e do professor e a colocar as suas dúvidas. Sendo, igualmente, a redação escrita parte integrante da atividade matemática, os alunos, devem também ser incentivados a redigir convenientemente as suas respostas, explicando adequadamente o seu raciocínio e apresentando as suas conclusões de forma clara, escrevendo em português correto e evitando a utilização de símbolos matemáticos como abreviaturas estenográficas.

• **Resolução de problemas** – A resolução de problemas envolve, da parte dos alunos, a leitura e interpretação de enunciados, a mobilização de conhecimentos de factos, conceitos e relações, a seleção e aplicação adequada de regras e procedimentos, previamente estudados e treinados, a revisão, sempre que necessária, da estratégia preconizada e a interpretação dos resultados finais. Assim, a resolução de problemas não deve confundir-se com atividades vagas de exploração e de descoberta que, podendo constituir estratégias de motivação, não se revelam adequadas à

concretização efetiva de uma finalidade tão exigente. Embora os alunos possam começar por apresentar estratégias de resolução mais informais, recorrendo a esquemas, diagramas, tabelas ou outras representações, devem ser incentivados a recorrer progressivamente a métodos mais sistemáticos e formalizados.

Em particular, no 1.º ciclo, solicita-se explicitamente que o número de passos necessários à resolução dos problemas vá aumentando de ano para ano. É fundamental que os alunos não terminem este ciclo de ensino conseguindo responder corretamente apenas a questões de resposta imediata. Estudos nacionais e internacionais recentes, como o *Trends in International Mathematics and Science Study* (TIMSS), mostram que, em 2011, 60% dos alunos portugueses do 4.º ano não conseguem ultrapassar esse patamar (*Intermediate International Benchmark*).

• **A Matemática como um todo coerente** – Vários objetivos gerais e respetivos descritores das Metas Curriculares foram concebidos de forma a estabelecer ligações entre conteúdos sem relação evidente entre si. É o caso, por exemplo, da relação entre a irracionalidade da raiz quadrada dos números naturais (que não sejam quadrados perfeitos) e o Teorema Fundamental da Aritmética ou entre a semelhança de triângulos e o Teorema de Pitágoras. Para além das situações que se encontram explicitamente ilustradas nas Metas Curriculares, outras podem ser trabalhadas no âmbito de exercícios e problemas. Estas atividades são propícias ao entendimento de que a Matemática é constituída por uma complexa rede de relações que lhe confere uma unidade muito particular.” (Bivar *et al.*, 2013, pp. 4-5)

4.2. “Reflexão” sobre o Programa de Matemática do 3.º Ciclo do Ensino Básico

A recente homologação do novo Programa de Matemática para o Ensino Básico, no dia 17 de junho de 2013, originou um conjunto de reações contraditórias em várias entidades, entre as quais se destacam as opiniões da Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM), da Associação de Professores de Matemática (APM), dos autores do Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007 e da Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática (SPIEM), por serem as mais importantes associações no âmbito da disciplina de Matemática.

De acordo com a opinião publicada em *site* próprio pela SPM, o novo Programa de Matemática para os diferentes ciclos do Ensino Básico representa um passo enorme na direção correta, considerando que este documento se apresenta de forma muito clara, bem organizado, constituído em

torno de objetivos e conteúdos muito explícitos e deixa ao professor a liberdade de implementar as estratégias mais adequadas a cada grupo de alunos. No entanto, a sua correta implementação, terá de envolver, necessariamente, um abrangente plano de formação de professores para que se atinja um patamar de exigência mais elevado, cujas consequências se sentirão no Ensino Secundário e no Ensino Superior.

Ao nível dos conteúdos, a SPM congratula-se com a adoção de propostas que visam:

“o controlo no uso da calculadora, o reforço na prática de algoritmos e da memorização incluindo, por exemplo, estudo da tabuada, a introdução cuidada e consistente das frações, o desenho de uma estratégia coerente para o ensino da Geometria ao longo de todo o nível do Ensino Básico, e o tratamento das dízimas e suas relações com as aproximações” (SPM, 23 de maio de 2013, p. 3).

Mas nem todos têm opinião unânime relativamente ao novo Programa de Matemática para o Ensino Básico, podendo-se até considerar um Programa que tem originado alguma polémica, uma vez que as várias associações de Matemática têm opiniões contraditórias, não se aproximando em praticamente nenhum ponto de vista relativamente aos conteúdos, objetivos, competências e metodologias que nele constam.

A APM considera que, no seu entender, o novo Programa “irá conduzir a um sério retrocesso no ensino da Matemática com prejuízo nas aprendizagens dos alunos”, manifestando o seu total desacordo com esta alteração inoportuna e inapropriada do Programa em vigor e com as consequências que daí advirão.

“O Conselho Nacional da Associação de Professores de Matemática (APM) considera assim que, não tendo ainda terminado a generalização do atual programa de Matemática, introduzir um documento que lhe é antagónico vai ter consequências negativas para o normal funcionamento nas escolas, perturbando o trabalho que os professores vêm realizando e, naturalmente também as aprendizagens dos alunos e a sua relação com a Matemática” (APM, 23 de julho de 2012, p. 4).

A APM considera ainda que, o novo Programa de Matemática, contraria as orientações curriculares atuais para o ensino da Matemática a nível internacional, não tendo em conta a investigação desenvolvida neste domínio, quer em Portugal, quer nos países de referência nesta matéria.

“Reafirma que este programa vai pouco além do enunciar de uma lista de tópicos e subtópicos matemáticos e com as Metas Curriculares, de que decorre, estabelece um vasto conjunto de objetivos muito específicos numa formulação de cariz prescritivo, condicionando assim fortemente a liberdade e autonomia dos professores na determinação das suas opções metodológicas e sublinha que, para além da discordância com este documento que várias vezes deu a conhecer, continuam a persistir incorreções na versão agora homologada” (Direção da APM, 25 de junho de 2013, p. 1).

De acordo com a APM, este novo Programa de Matemática para o Ensino Básico, culmina um processo apressado que vem desprezar o trabalho dos professores e dos alunos no âmbito do atual Programa, desprezando o investimento feito na aplicação do Programa iniciado em 2008/2009 e cujos resultados obtidos até então, foram considerados cada vez mais positivos.

Outra opinião relevante, relativamente a este novo Programa homologado em junho de 2013, é a dos autores do Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007, afirmando que este novo Programa estreita a autonomia de escolas e professores. Ao contrário do que foi dito pelos responsáveis do Ministério da Educação, entre o novo Programa e o anterior, existem diferenças significativas ou alterações de fundo. Consideram, ainda que:

“- O programa que agora se estabelece, para entrar em vigência a partir do próximo ano letivo, é profundamente díspar do atual programa, na sua estrutura e lógica global, e contraria muitos dos seus aspetos e componentes fundamentais, nomeadamente no que se refere à perspetiva pedagógica e didática e à ênfase no ensino e aprendizagens subjacentes, comportando também discrepâncias importantes no conteúdo matemático a ensinar – introduz assuntos matemáticos que não constam no atual programa e exclui outros, alterando ainda, relativamente a este programa, a localização na escolaridade do estudo de determinados conceitos e procedimentos.

- O programa agora homologado não contempla, ou minoriza fortemente, as capacidades matemáticas que o atual programa considera fundamental desenvolver nos alunos para uma aprendizagem com compreensão - a resolução de problemas, o raciocínio matemático e a comunicação matemática, e, igualmente, o cálculo mental e a capacidade de lidar com as representações e conexões matemáticas” (Os autores do Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007, 22 de junho de 2013, p. 1).

Os autores do Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007, escreveram ainda, em comunicado, que consideram que existem grandes diferenças entre os dois Programas, representando uma grande mudança, tanto na sua estrutura lógica global, como em aspetos importantes dos conteúdos matemáticos.

Resumidamente, os autores do Programa de 2007 referem que este novo Programa de Matemática para o Ensino Básico reduz significativamente a autonomia de escolas e dos professores, prejudicando uma aprendizagem matemática integrada e articulada; introduz conceitos, conteúdos e procedimentos em determinados ciclos e anos de escolaridade e excluem, indevidamente, conceitos e procedimentos do Programa em vigor; utiliza linguagem desadequada e acentua o esvaziamento de capacidades matemáticas que fomentam a compreensão, como a resolução de problemas, o raciocínio matemático, a comunicação matemática, o cálculo mental e, a capacidade de lidar com as representações e conexões matemáticas.

A SPIEM, recomenda ao Ministério da Educação e da Ciência, a retirada deste novo Programa e respetivas Metas Curriculares para o Ensino Básico da Matemática. Considera que as metas propostas refletem, na sua generalidade, uma conceção pobre e redutora da Matemática, bem como do que os alunos deverão aprender na disciplina de Matemática. Argumentam ainda que:

“retorna orientações curriculares já ultrapassadas e que estiveram na base do baixo rendimento dos alunos portugueses revelado nas décadas anteriores mas que tem vindo a melhorar nos últimos anos. Uma eventual concretização da proposta de metas agora apresentada pelo MEC seria muito grave para o país, pois corresponderia a um retrocesso significativo nas aprendizagens matemáticas dos alunos portugueses”

(SPIEM, 23 de julho de 2012, p. 1).

Muitas opiniões divergentes existem acerca da entrada em vigor deste novo Programa de Matemática para o Ensino Básico, relativo ao qual não houve ainda formação adequada aos professores para a sua implementação, e muitos afirmam, que não deveria entrar em vigor um novo Programa pois ainda se encontra em fase de experimentação o Programa anterior, sobre o qual não existe qualquer tipo de avaliação

De acordo com o Ministério da Educação e Ciência, este novo Programa de Matemática para o Ensino Básico, que vai entrar em vigor no ano letivo 2013/2014, visa dar uma maior liberdade pedagógica aos professores, sendo muito sucinto relativamente às orientações metodológicas a usar. Pretende que os professores usem livremente a sua experiência para definir os métodos e estratégias adequados a cada turma em particular. Consideram que, estas novas orientações, remetem para uma

maior autonomia do professor nos métodos a aplicar na sala de aula, para atingirem as metas curriculares apresentadas, contrariando assim, muitas opiniões manifestadas por várias entidades.

No entanto, o antigo Programa de Matemática do Ensino Básico esteve em vigor durante pouco tempo, apenas desde o ano letivo de 2008/2009, por isso há muitas opiniões que indicam que não faz sentido alterá-lo. Para a entrada em vigor do antigo Programa, a maioria dos professores teve a formação e acompanhamento adequados, de forma a aplicá-lo com as ideologias preconizadas pelo Ministério da Educação.

Relativamente a este novo Programa de Matemática, não houve formação para a grande maioria dos professores para a sua aplicação, no entanto, os conhecimentos e capacidades fundamentais que os alunos devem adquirir e desenvolver nos três ciclos do Ensino Básico mantêm-se, alterando alguns conteúdos, acrescentando outros, e retirando indicações metodológicas, dando maior liberdade aos professores na sua aplicação.

Alguns coordenadores da disciplina de Matemática são da opinião que este novo Programa de Matemática do Ensino Básico, é desadequado à idade dos alunos e poderá afastá-los da disciplina, uma vez que nem todos os alunos terão a capacidade de perceber o que lhes é pedido.

Muitos são os que consideram que a homologação agora anunciada, vem desprezar o trabalho que os professores têm estado a desenvolver nas escolas, com os seus alunos, no âmbito do Programa anterior, e faz tábua rasa de todo o investimento realizado no acompanhamento da aplicação desse mesmo programa iniciado em 2008/09 e na formação de professores desenvolvida no âmbito do Programa de Formação Contínua.

Em setembro, os alunos de 1.º, 3.º, 5.º e 7.º anos, iniciarão um Programa mais que novo, com manuais velhos e novas Metas Curriculares, o que vai permitir que determinados alunos, em menos de meia dúzia de anos, sejam alvo de três programas diferentes de uma única disciplina.

No ensino da Matemática, todos os alunos devem ter a oportunidade de desenvolver competências através de experiência ricas, desafiantes e motivadoras. Neste sentido, os professores devem planificar e preparar, adequadamente as aulas e os conteúdos a lecionar, organizando atividades interessantes, que permitam aos alunos o envolvimento em vários problemas que desenvolvam o seu raciocínio e a comunicação.

Neste sentido, sugerimos várias tarefas e respetivas planificações para uma possível inclusão do estudo da sequência de Fibonacci, de forma mais pormenorizada, nos conteúdos do 3.º Ciclo do Ensino Básico. As propostas de planificações das tarefas estão de acordo com o Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico e respetivas Metas Curriculares, que entrará em vigor no ano letivo 2013/2014 (Bivar *et al.*, 2013), bem como com as diretrizes enunciadas no Currículo Nacional do 3.º Ciclo do Ensino Básico (Ministério da Educação, 2001).

Nos *Principles and Standards for School Mathematics*, o NCTM (2000, citado por Ponte, 2003, capítulo 7) sublinha a importância de os alunos aprenderem a Matemática com compreensão. Considera ainda que as tarefas matemáticas deverão ser bem escolhidas para atrair os alunos e desafiá-los intelectualmente, de forma a incentivá-los para o estudo da Matemática.

Como opinião pessoal acerca do novo Programa de Matemática para o Ensino Básico, considero que os documentos que apresentam o Programa e as respetivas Metas Curriculares, estão apresentados de forma confusa, com uma linguagem relativamente difícil de compreender. Tal como a maioria das opiniões que analisei, considero que o novo Programa defende a utilização de metodologias já ultrapassadas que apelam à memorização em detrimento da compreensão dos conteúdos e da comunicação matemática. Nele estão preconizadas determinadas estratégias ou metodologias que o professor deve seguir ao lecionar determinado conteúdo, condicionando a autonomia dos professores em relação à preparação e realização das suas aulas. Retira conteúdos e acrescenta outros completamente diferentes, sendo que as maiores alterações se verificam no 9.º ano de escolaridade. Não houve até ao momento, formação adequada dos professores acerca deste novo Programa, que já entrou em vigor. Considero que a formação dos professores é essencial para a compreensão de toda a ideologia que está por trás deste novo Programa.

CAPÍTULO V – PROPOSTA DE TAREFAS PARA O 3.º CICLO DO ENSINO BÁSICO ENVOLVENDO OS NÚMEROS DA SEQUÊNCIA DE FIBONACCI, DA SEQUÊNCIA DE LUCAS E O NÚMERO DE OURO

As tarefas apresentadas neste trabalho seguem a seguinte sequência: introdução à tarefa, planificação da tarefa, a tarefa, proposta de resolução da tarefa e ainda, orientações para a resolução e a exploração da tarefa.

A sequência adotada para a apresentação das tarefas que constam desta seção está relacionada com o conhecimento progressivo da sequência de Fibonacci, do Número de Ouro, da sequência de Lucas e propriedades relacionadas com estes conteúdos. Começando na tarefa A, com a exploração da sequência de Fibonacci e de algumas das suas propriedades, passando pela exploração de outros conteúdos relacionados com a sequência de Fibonacci (por exemplo, retângulo de Ouro, pentágono áureo e Número de Ouro) e terminando com a tarefa G, com o estudo de algumas conexões entre a sequência de Fibonacci, a sequência de Lucas e o Número de Ouro.

5.1. Introdução à Tarefa A

O estudo da temática “Sequências e Regularidades”, é iniciado no 1.º Ciclo, mais precisamente no 2.º ano de escolaridade, de acordo com o novo Programa de Matemática para o Ensino Básico, onde os alunos trabalham com problemas envolvendo a determinação de termos de uma sequência, dada a lei de formação, e a determinação de uma lei de formação compatível com a sequência parcialmente conhecida. No 2.º Ciclo alarga-se o estudo deste tema, no 6.º ano de escolaridade, onde os alunos calculam termos de sequências, determinam expressões geradoras de sequências e trabalham com problemas, envolvendo a determinação de uma lei de formação de determinada sequência. No 3.º Ciclo, aprofunda-se o estudo das “Sequências e Sucessões”, no 7.º ano de escolaridade, através do estudo das sequências e sucessões como funções, da representação gráfica de sequências numéricas e da resolução de problemas envolvendo sequências e sucessões.

A realização da tarefa A, corresponde a uma proposta de inclusão do estudo das propriedades da sequência de Fibonacci nos conteúdos do 7.º ano de escolaridade, uma vez que o tópico das “Sequências e Sucessões” faz parte do novo Programa de Matemática para este nível de ensino, e esta sequência, tem características muito importantes que poderão ser exploradas e desenvolvidas neste ano de escolaridade.

Tendo em conta as características desta tarefa, e considerando a classificação de tarefas, proposta por Ponte (2004, p. 8), podemos considerar que se trata de uma tarefa de investigação, isto é, de desafio elevado e estrutura aberta. Relativamente à duração, podemos considerar que tem uma duração média, que surge num contexto de semi-realidade, uma vez que as duas primeiras questões surgem através de um problema do nosso quotidiano.

As questões estão formuladas de forma a orientar o aluno para os objetivos inicialmente definidos. Esta tarefa tem um tempo de duração proposta para dois blocos de noventa minutos. Sugere-se ainda que seja realizada em pares ou em grupos de composição reduzida, de 3 ou 4 pessoas, tendo em vista a troca de ideias e de raciocínios de forma a atingirem os objetivos propostos.

5.2. Planificação da Tarefa A

Domínios matemáticos: Funções, sequências e sucessões; Álgebra.

Tópicos matemáticos: Funções; Expressões algébricas.

Subtópicos matemáticos: Sequências e sucessões; Potenciação e propriedades das operações.

Conhecimentos prévios:

- Determinar termos de uma sequência definida por uma lei de formação recorrente ou por uma expressão geradora;
- Determinar expressões geradoras de sequências definidas por uma lei de formação recorrente;
- Resolver problemas envolvendo a determinação de uma lei de formação compatível com uma sequência parcialmente conhecida;
- Saber as prioridades convencionadas das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão;
- Propriedades associativa e comutativa da adição e da multiplicação e propriedades distributivas da multiplicação em relação à adição e subtração;
- Saber os elementos neutros e os elementos absorventes da multiplicação e da adição;
- Calcular o valor de expressões numéricas envolvendo as quatro operações aritméticas e utilizar parêntesis;
- Transformar linguagem natural em linguagem simbólica e vice-versa;
- Calcular o quadrado de números naturais.

Objetivos específicos:

- Identificar, dado um número natural n , uma “sequência de n elementos” como uma função de domínio $\{1, 2, \dots, n\}$ e utilizar corretamente a expressão “termo de ordem n da sequência” e “termo geral da sequência”;
- Identificar uma “sucessão” como uma função de domínio $\mathbb{N}$, designando por u_n a imagem do número natural n por u e utilizar corretamente a expressão “termo de ordem n da sucessão” e “termo geral da sucessão”;
- Determinar um termo geral de uma sequência numérica e termos de várias ordens a partir do termo geral;
- Identificar uma sequência como uma função cujo domínio é um subconjunto de $\mathbb{N}$ e o contradomínio, um subconjunto de $\mathbb{R}$;
- Compreender o conceito de função como relação entre variáveis e como correspondência entre dois conjuntos, e utilizar as várias notações;
- Identificar e assinalar pares ordenados no plano cartesiano;
- Representar, num plano munido de um referencial cartesiano, gráficos de sequências;
- Somar termos da sequência de Fibonacci (termos de ordem par e termos de ordem ímpar);
- Deduzir fórmulas relativas às propriedades da sequência de Fibonacci: soma de n termos, soma de termos de ordem par, soma de termos de ordem ímpar e soma dos quadrados de termos da sequência;
- Determinar a relação entre os números de Fibonacci e os ternos pitagóricos;
- Reconhecer que a divisão entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci se aproxima do Número de Ouro;
- Resolver problemas envolvendo sequências e sucessões e os respectivos termos gerais;
- Simplificar e calcular o valor de expressões numéricas envolvendo as quatro operações aritméticas, a potenciação e a utilização de parêntesis;
- Estender dos racionais não negativos a todos os racionais a definição e as propriedades previamente estudadas das potências de expoente natural de um número;
- Simplificar e calcular o valor de expressões numéricas envolvendo as quatro operações aritméticas, a potenciação e a utilização de parêntesis.;
- Descobrir uma fórmula que permita calcular a soma dos quadrados dos termos da sequência de Fibonacci;
- Compreender os diferentes papéis dos símbolos em Álgebra.

Desenvolvimento da aula:

- Trabalho de pares ou grupos no máximo de 4 elementos.
- Duração total da tarefa - 180 minutos, sendo:
 - Apresentação da tarefa: 10 minutos;
 - Trabalho autónomo dos alunos: 120 minutos;
 - Apresentação e discussão de resultados à turma: 30 minutos;
 - Síntese final e registos: 20 minutos.

Recursos utilizados:

- Tarefa A, manual escolar, caderno diário e material de escrita.

Avaliação:

- Observação direta (empenho, interesse, sociabilidade no grupo);
- Diálogo com os alunos (qualidade da participação);
- Realização e apresentação das tarefas propostas;
- Grelha de observação do trabalho dos alunos.

Capacidades transversais a desenvolver:

- Expressar ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, usando notação, simbologia e vocabulários próprios;
- Raciocínio matemático;
- Resolução de problemas;
- Discutir ideias e resultados;
- Formular e testar conjecturas e generalizações.
-

5.3. Tarefa A: “A reprodução dos coelhos”

⁴¹A sucessão de números 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... deve-se ao matemático italiano Leonardo de Pisa, mais conhecido por **Fibonacci** (filho de Bonacci) e resultou como resposta ao “problema dos coelhos”, que pode ser enunciado da seguinte forma:

⁴¹ Nesta tarefa, relembramos (tal como já foi referido no texto) que vamos considerar como primeiro termo da sucessão o termo F_1 e não o termo F_0 .

“Quantos casais de coelhos teremos ao fim de um ano, se começarmos com um casal que todos os meses gere outro casal, o qual, por sua vez, comece a procriar aos dois meses de idade?”, admitindo-se que não há mortes de coelhos neste processo.

Observe a figura seguinte que traduz o problema da reprodução dos coelhos, segundo Fibonacci:

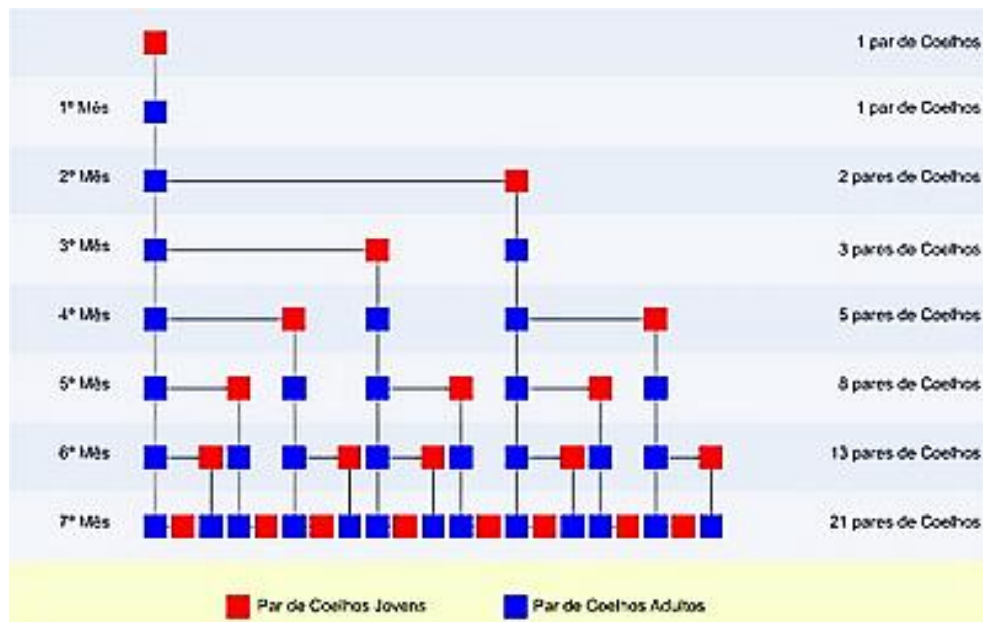


Figura 40: Crescimento da população de coelhos ⁴²

Observe a sequência da reprodução dos coelhos e responda às seguintes questões:

A.1. Determine os dez primeiros termos da sucessão e represente-os, num referencial cartesiano. Justifique o processo que utilizou.

A.2. Consegue observar alguma regularidade entre os vários termos da sequência? Como se obtém um termo à custa dos anteriores?

A.3. Considere que cada termo desta sequência se representa por $F_1, F_2, \dots, F_n$ e a soma dos n primeiros termos da sequência se representa por $S_1, S_2, \dots, S_n$.

Complete a seguinte tabela:

⁴² Fonte: <http://fibonaccihmt.blogspot.pt/>

Valores de n	Termos da sequência $F_1, F_2, \dots, F_n$	Soma dos termos da sequência	Termo da sequência F_{n+2}	Relação entre os resultados da coluna 3 e da coluna 4
3	1, 1, 2	$S_3 = 4$	$F_{3+2} = F_5 = 5$	
6	1, 1, 2, 3, 5, 8			
9	1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34			
11	1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89			
12	1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144			

Tabela 2: Soma de termos da sequência de Fibonacci

A.4. Tendo em conta os resultados da alínea anterior, consegue deduzir uma fórmula que sirva para efetuar a soma dos n primeiros termos da sequência de Fibonacci considerados?

A.5. Faça agora a soma de termos consecutivos, de **ordem ímpar**, da sequência de Fibonacci, completando a seguinte tabela:

Valores de n	Termos da sequência $F_1, F_3, \dots, F_{2n-1}$	Soma dos termos da sequência	Termo da sequência F_{2n}	Relação entre os resultados da coluna 3 e da coluna 4
3	F_1, F_3, F_5			
4	F_1, F_3, F_5, F_7	$F_1 + F_3 + F_5 + F_7 = 21$	$F_{2 \times 4} = F_8 = 21$	
5	F_1, F_3, F_5, F_7, F_9			
6	$F_1, F_3, F_5, F_7, F_9, F_{11}$			
7	$F_1, F_3, F_5, F_7, F_9, F_{11}, F_{13}$			

Tabela 3 : Soma de termos de ordem ímpar da sequência de Fibonacci

A.6. Tendo em conta os resultados da alínea anterior, consegue deduzir uma fórmula que sirva para determinar a soma dos termos de ordem ímpar da sequência de Fibonacci?

A.7. Faça agora a soma de termos consecutivos, de **ordem par**, da sequência de Fibonacci, completando a seguinte tabela:

Valores de n	Termos da sequência $F_2, F_4, F_6, \dots, F_{2n}$	Soma dos termos da sequência	Termo da sequência F_{2n+1}	Relação entre os resultados da coluna 3 e da coluna 4
2	F_2, F_4	$F_2 + F_4 = 1 + 3 = 4$	$F_{2 \times 2 + 1} = F_5 = 5$	$F_2 + F_4 = F_{2 \times 2 + 1} - 1$
3	F_2, F_4, F_6			
4	F_2, F_4, F_6, F_8			
5	$F_2, F_4, F_6, F_8, F_{10}$			
6	$F_2, F_4, F_6, F_8, F_{10}, F_{12}$			

Tabela 4: Soma dos termos de ordem par da sequência de Fibonacci

A.8. Tendo em conta os resultados da alínea anterior, consegue deduzir uma fórmula que sirva para calcular a soma dos termos de ordem par da sequência de Fibonacci?

A.9. Calcule, agora, a **soma dos quadrados** de alguns termos da sequência de Fibonacci:

Valores de n	Termos da sequência $F_1^2, F_2^2, \dots, F_n^2$	Soma dos quadrados dos termos da sequência	Termo da sequência $F_n \times F_{n+1}$	Relação entre os resultados da coluna 3 e da coluna 4
2	F_1^2, F_2^2			
3	F_1^2, F_2^2, F_3^2	$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 6$	$F_3 \times F_4 = 6$	$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = F_3 \times F_4$
4	$F_1^2, F_2^2, F_3^2, F_4^2$			
5	$F_1^2, F_2^2, F_3^2, F_4^2, F_5^2$			
6	$F_1^2, F_2^2, F_3^2, F_4^2, F_5^2, F_6^2$			

Tabela 5: Soma dos quadrados de termos da sequência de Fibonacci

A.10. Tendo em conta os resultados da alínea anterior, consegue deduzir uma fórmula que sirva para determinar a soma dos quadrados dos termos da sequência de Fibonacci?

A.11. Considere agora quatro termos consecutivos da sequência de Fibonacci. Siga os seguintes passos:

A.11.1. Faça o produto dos dois números dos extremos do quádruplo de números que considerou;

A.11.2. Calcule o dobro do produto dos dois números do meio;

A.11.3. Some os quadrados dos dois números do meio.

Que relação existe entre os números que resultam das três alíneas anteriores? Justifique convenientemente a sua resposta.

A.12. Calcule o valor do quociente entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci, como por exemplo, $\frac{F_2}{F_1}, \frac{F_5}{F_4}, \frac{F_{10}}{F_9}, \frac{F_{11}}{F_{10}}, \frac{F_{12}}{F_{11}}, \frac{F_{15}}{F_{14}}, \dots, \frac{F_{50}}{F_{49}}, \dots$

Encontre, usando a resposta à questão A.2., vários termos da sequência de Fibonacci e utilize a calculadora para determinar o quociente entre dois termos consecutivos desta sequência. Que conclusão pode tirar? Explique o seu raciocínio.

5.4. Proposta de resolução da Tarefa A

A.1. Observando o esquema da reprodução dos coelhos, e continuando com o esquema, concluímos que os dez primeiros termos da sucessão são: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55.

A representação dos dez termos da sequência, encontra-se ilustrada na seguinte figura:

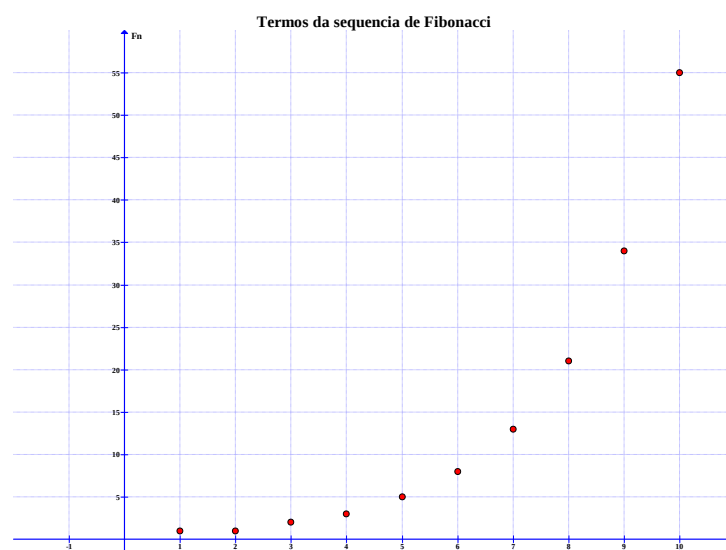


Figura 41: Representação dos dez primeiros termos da sequência de Fibonacci

A.2. Por observação dos termos da sequência, verifica-se que, a partir do 3.º termo (inclusive), cada termo seguinte obtém-se somando os dois termos imediatamente anteriores.

A.3.

Valor de n	Termos da sequência $F_1, F_2, \dots, F_n$	Soma dos termos da sequência	Termo da sequência F_{n+2}	Relação entre os resultados da coluna 3 e os da coluna 4
3	1, 1, 2	$S_3 = 4$	$F_{3+2} = F_5 = 5$	$S_3 = F_5 - 1$
6	1, 1, 2, 3, 5, 8	$S_6 = 20$	$F_{6+2} = F_8 = 21$	$S_6 = F_8 - 1$
9	1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34	$S_9 = 88$	$F_{9+2} = F_{11} = 89$	$S_9 = F_{11} - 1$
11	1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89	$S_{11} = 232$	$F_{11+2} = F_{13} = 233$	$S_{11} = F_{13} - 1$
12	1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144	$S_{12} = 376$	$F_{12+2} = F_{14} = 377$	$S_{12} = F_{14} - 1$

Tabela 6: Soma de termos da sequência de Fibonacci

A.4. A soma dos seguintes n termos da sequência de Fibonacci é igual a:

$$F_1 + F_2 + F_3 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

A.5.

Valor de n	Termos da sequência $F_1, F_3, F_5, \dots, F_{2n-1}$	Soma dos termos da sequência	Termo da sequência F_{2n}	Relação entre os resultados da coluna 3 e os da coluna 4
3	F_1, F_3, F_5	$F_1 + F_3 + F_5 = 8$	$F_{2 \times 3} = F_6 = 8$	$F_1 + F_3 + F_5 = F_6$
4	F_1, F_3, F_5, F_7	$F_1 + F_3 + F_5 + F_7 = 21$	$F_{2 \times 4} = F_8 = 21$	$F_1 + F_3 + F_5 + F_7 = F_8$
5	F_1, F_3, F_5, F_7, F_9	$F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + F_9 = 55$	$F_{2 \times 5} = F_{10} = 55$	$F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + F_9 = F_{10}$

6	$F_1, F_3, F_5, F_7, F_9, F_{11}$	$F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + F_9 + F_{11} = 144$	$F_{2 \times 6} = F_{12} = 144$	$F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + F_9 + F_{11} = F_{12}$
7	$F_1, F_3, F_5, F_7, F_9, F_{11}, F_{13}$	$F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + F_9 + F_{11} + F_{13} = 377$	$F_{2 \times 7} = F_{14} = 377$	$F_1 + F_3 + F_5 + F_7 + F_9 + F_{11} + F_{13} = F_{14}$

Tabela 7: Soma de termos de ordem ímpar da sequência de Fibonacci

A.6. A soma dos seguintes termos da sequência de Fibonacci de índices ímpares pode ser dada por:

$$F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

A.7.

Valor de n	Termos da sequência $F_2, F_4, \dots, F_{2n}$	Soma dos termos da sequência	Termo da sequência F_{2n+1}	Relação entre os resultados da coluna 3 e os da coluna 4
2	F_2, F_4	$F_2 + F_4 = 1 + 3 = 4$	$F_{2 \times 2 + 1} = F_5 = 5$	$F_2 + F_4 = F_5 - 1$
3	F_2, F_4, F_6	$F_2 + F_4 + F_6 = 12$	$F_{2 \times 3 + 1} = F_7 = 13$	$F_2 + F_4 + F_6 = F_7 - 1$
4	F_2, F_4, F_6, F_8	$F_2 + F_4 + F_6 + F_8 = 33$	$F_{2 \times 4 + 1} = F_9 = 34$	$F_2 + F_4 + F_6 + F_8 = F_9 - 1$
5	$F_2, F_4, F_6, F_8, F_{10}$	$F_2 + F_4 + F_6 + F_8 + F_{10} = 88$	$F_{2 \times 5 + 1} = F_{11} = 89$	$F_2 + F_4 + F_6 + F_8 + F_{10} = F_{11} - 1$
6	$F_2, F_4, F_6, F_8, F_{10}, F_{12}$	$F_2 + F_4 + F_6 + F_8 + F_{10} + F_{12} = 232$	$F_{2 \times 6 + 1} = F_{13} = 233$	$F_2 + F_4 + F_6 + F_8 + F_{10} + F_{12} = F_{13} - 1$

Tabela 8: Soma dos termos de ordem par da sequência de Fibonacci

A.8. A soma dos termos da sequência de índices pares pode ser dada por:

$$F_2 + F_4 + \dots + F_{2n} = F_{2n+1} - 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

A.9.

Valor de n	Termos da sequência $F_1, F_2, \dots, F_n$	Soma dos termos da sequência	Termo da sequência $F_n \times F_{n+1}$	Relação entre os resultados da coluna 3 e os da coluna 4
2	F_1^2, F_2^2	$F_1^2 + F_2^2 = 2$	$F_2 \times F_3 = 1 \times 2 = 2$	$F_1^2 + F_2^2 = F_2 \times F_3$
3	F_1^2, F_2^2, F_3^2	$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = 6$	$F_3 \times F_4 = 2 \times 3 = 6$	$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 = F_3 \times F_4$
4	$F_1^2, F_2^2, F_3^2, F_4^2$	$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 = 15$	$F_4 \times F_5 = 3 \times 5 = 15$	$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 = F_4 \times F_5$
5	$F_1^2, F_2^2, F_3^2, F_4^2, F_5^2$	$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 = 40$	$F_5 \times F_6 = 5 \times 8 = 40$	$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 = F_5 \times F_6$
6	$F_1^2, F_2^2, F_3^2, F_4^2, F_5^2, F_6^2$	$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 + F_6^2 = 104$	$F_6 \times F_7 = 8 \times 13 = 104$	$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + F_5^2 + F_6^2 = F_6 \times F_7$

Tabela 9: Soma dos quadrados de termos da sequência de Fibonacci

A.10. A soma dos quadrados dos seguintes primeiros termos da sequência de Fibonacci é dada por:

$$F_1^2 + F_2^2 + F_3^2 + F_4^2 + \dots + F_n^2 = F_n \times F_{n+1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

A.11.

Quatro termos consecutivos da sequência de Fibonacci	A.11.1. Produto dos números dos extremos	A.11.2. Dobro do produto dos dois números do meio	A.11.3. Soma dos quadrados dos dois termos do meio	Relação entre os números resultantes de 1., 2. e 3. da questão A.11.
1, 1, 2, 3	$1 \times 3 = 3$	$2 \times (1 \times 2) = 4$	$1^2 + 2^2 = 5$	$5^2 = 4^2 + 3^2$
5, 8, 13, 21	$5 \times 21 = 105$	$2 \times (8 \times 13) = 208$	$8^2 + 13^2 = 233$	$233^2 = 208^2 + 105^2$
8, 13, 21, 34	$8 \times 34 = 272$	$2 \times (13 \times 21) = 546$	$13^2 + 21^2 = 610$	$610^2 = 546^2 + 272^2$
89, 144, 233, 377	$89 \times 377 = 33553$	$2 \times (144 \times 233) = 67104$	$144^2 + 233^2 = 75025$	$75025^2 = 67104^2 + 33553^2$

Tabela 10: Relação entre os números da sequência de Fibonacci e o Teorema de Pitágoras

Através de vários exemplos, que poderíamos acrescentar na tabela anterior, podemos concluir que o quadrado do número resultante da questão A.11.3. é igual à soma dos quadrados dos números que resultam das questões A.11.1., A.11.2., ou seja, cada trio de números verifica o Teorema de Pitágoras, ou seja, formam um terno pitagórico.

A.12. Calculando o quociente entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci, obtemos os seguintes resultados:

Razão entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci	Resultado
$\frac{F_2}{F_1} = \frac{1}{1}$	1
$\frac{F_5}{F_4} = \frac{5}{3}$	1,666666667
$\frac{F_{10}}{F_9} = \frac{55}{34}$	1,617647059
$\frac{F_{11}}{F_{10}} = \frac{89}{55}$	1,618181818
$\frac{F_{12}}{F_{11}} = \frac{144}{89}$	1,617977528
$\frac{F_{15}}{F_{14}} = \frac{610}{377}$	1,6180371353
$\frac{F_{20}}{F_{19}} = \frac{6765}{4181}$	1,6180339632
...	...

Tabela 11: Razão entre termos consecutivos da sequência de Fibonacci

Continuando a determinar as razões entre dois números consecutivos da sequência de Fibonacci, conclui-se que à medida que vamos aumentando as ordens dos números que estão nesse quociente, o resultado aproxima-se de uma dízima infinita não periódica, 1,618, com três casas decimais, que é aproximadamente, o Número de Ouro.

5.5. Orientações para a resolução e exploração da Tarefa A

Com a resolução desta tarefa, pretende-se atingir dois grandes objetivos: o primeiro refere-se à revisão dos conteúdos dados sobre a temática das “Sequências e Regularidades” em anos anteriores, bem como exploração os novos conteúdos propostos no novo Programa de Matemática para o 7.º ano de escolaridade, e o segundo, refere-se a uma proposta de inclusão das propriedades da sequência de Fibonacci no 3.º Ciclo do Ensino Básico, por se tratar de uma sequência com propriedades muito interessantes que poderão ser exploradas por alunos neste nível de ensino.

Relativamente ao desenvolvimento da tarefa, pretende-se, na pergunta A.1. que os alunos deduzam a lei de formação da sequência de Fibonacci, por observação direta de vários termos da sequência ou por interpretação do esquema da reprodução de coelhos que é apresentado.

Na questão A.2. pretende-se que os alunos representem os dez primeiros termos da sequência de Fibonacci no referencial cartesiano. Este conteúdo aparece como novo relativamente ao Programa anterior. Os alunos devem concluir, nesta questão, que uma sequência não é nada mais do que uma função cujo domínio são os números naturais e o contradomínio, está contido nos números reais. Deverão, também, utilizar a simbologia e o vocabulário próprio para as sequências, como por exemplo, “termo geral da sequência”, “termo de ordem n da sequência”, etc..

Nas questões A.3. até à A.10. pretende-se que os alunos investiguem as propriedades da sequência de Fibonacci. Nestas questões são apresentadas tabelas, onde aparece um exemplo resolvido, em cada tabela, relativamente às questões colocadas. Os alunos deverão preencher as tabelas, que contêm expressões colocadas propositadamente para que, analisando os resultados obtidos em cada coluna, possam encontrar uma relação matemática entre a coluna 3 e a coluna 4. Partindo de casos particulares e, usando o raciocínio matemático e a inferência matemática, os alunos deverão descobrir qual a fórmula que nos permite calcular a soma de termos da sequência de Fibonacci, bem como a fórmula da soma dos termos de ordem par, a fórmula da soma de termos de ordem ímpar e a fórmula da soma dos quadrados de termos desta sequência.

Pretende-se ainda, que os alunos deduzam, na questão A.11, seguindo os passos nela enumerados, a relação entre os números da sequência de Fibonacci e os ternos pitagóricos. O Teorema de Pitágoras só é lecionado no 8.º ano de escolaridade, no entanto, não necessitam de saber este Teorema para concluir o pretendido. Os alunos deverão concluir, através dos resultados obtidos na tabela, que o quadrado do número resultante de A.11.3. é igual à soma dos quadrados dos números resultantes de A.11.1. e A.11.2. Esta questão poderá servir de introdução ao Teorema de Pitágoras, que será mais desenvolvido no 8.º ano de escolaridade.

Por fim, na questão A.12, partindo da divisão de termos consecutivos da sequência de Fibonacci, pretende-se que os alunos concluam que estes quocientes se vão aproximando do Número de Ouro (previamente abordado em sala de aula), à medida que aumentamos os índices dos termos da sequência de Fibonacci.

5.6. Introdução à Tarefa B

Existem muitos números que não podem ser representados por dízimas finitas nem por dízimas infinitas periódicas. Esses números designam-se por números irracionais e são representados por dízimas infinitas não periódicas. São exemplos disso, os números: $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$, π , e , Φ , etc..

O Número de Ouro é um número irracional considerado por muitos como o símbolo da harmonia. Tornou-se célebre pela utilização que pintores e arquitetos da Antiguidade fizeram dele nas suas obras. Foi utilizado ao longo da História em variados contextos, tais como: na arte, na arquitetura, na música, na matemática, na pintura, etc.. O seu valor aproximado é de:

1,6180339887498948482045868343656381177203091798057 ...

A tarefa B, que propomos para o estudo do domínio “Números e Operações”, do 9.º ano de escolaridade (no antigo Programa), que passará a fazer parte dos conteúdos do 8.º ano de escolaridade, de acordo com o novo Programa de Matemática, encontra-se subdividida em três partes: a primeira corresponde a uma pesquisa, na *Internet* sobre a História do Número de Ouro e a sua aplicação na realidade; a segunda corresponde a uma demonstração da irracionalidade do número $\sqrt{2}$; e a terceira, corresponde à utilização do Teorema de Pitágoras para construir, geometricamente, radicais de números naturais.

O estudo do tópico “Números e Operações” inicia-se no 1.º ano de escolaridade, onde os alunos trabalham com os números naturais e a numeração decimal, passando progressivamente, ao estudo dos números racionais não negativos. No 2.º Ciclo, alarga-se e aprofunda-se o estudo dos números naturais, passando ao estudo dos números racionais positivos e negativos e suas propriedades. No 3.º Ciclo, os alunos aprofundam conhecimentos sobre os números racionais e, estendem o estudo, aos números reais, fazendo parte do atual Programa, as dízimas finitas, infinitas periódicas e infinitas não periódicas.

Através da realização da tarefa B, pretende-se atingir os conteúdos propostos no novo Programa de Matemática para o Ensino Básico, mas também, representa uma proposta de inclusão do estudo do Número de Ouro e suas propriedades nos conteúdos do 8.º ano de escolaridade (de acordo

com o novo Programa de Matemática), por se tratar de um número irracional, com propriedades muito interessantes e com uma grande aplicabilidade na vida real.

Tendo em conta as características desta tarefa, e classificando-a, de acordo com Ponte (2004, p. 8), podemos considerar a primeira parte, uma tarefa de exploração, de dificuldade reduzida e aberta; a segunda e terceira partes, podem-se considerar como um problema, isto é, de desafio elevado e resposta fechada. Relativamente à duração da tarefa, podemos considerá-la de duração média, que surge em contexto de semi - realidade, uma vez que existem questões onde podemos aplicar a Matemática ao contexto real.

As questões estão formuladas de forma a orientar o aluno para os objetivos pretendidos com esta tarefa. Tem um tempo de duração média, proposta para dois blocos de noventa minutos, e sugere-se ainda, que seja realizada em pares, tendo em vista a partilha de ideias e de raciocínios de forma a atingirem os objetivos pretendidos.

5.7. Planificação da Tarefa B

Domínios matemáticos: Números e Operações; Geometria e Medida.

Tópicos matemáticos: Dízimas infinitas não periódicas e números reais. Teorema de Pitágoras.

Subtópicos matemáticos: Completar a reta numérica; Ordenar números reais; Resolver problemas com o Teorema de Pitágoras.

Conhecimentos prévios:

- Identificar conjuntos numéricos;
- Representar números racionais através de dízimas finitas ou dízimas infinitas periódicas, utilizando o algoritmo da divisão; período e comprimento do período de uma dízima;
- Compreender e usar um número racional como quociente, relação parte-todo, razão, medida e operador;
- Problemas envolvendo o cálculo de números racionais representados na forma de frações, dízimas, percentagens e numerais mistos;
- Simétrico e valor absoluto de um número racional;
- Conhecer as propriedades e as regras das operações em $\mathbb{Q}$ e usá-las no cálculo;
- Calcular o valor de expressões numéricas que envolvam números racionais;
- Classificar dízimas;
- Representar sob a forma de fração um número racional não negativo dado por uma dízima;

- Teorema de Pitágoras.

Objetivos específicos:

- Pesquisar a História do Número de Ouro e a sua aplicação à realidade;
- Reconhecer que um ponto da reta numérica à distância da origem igual ao comprimento da diagonal de um quadrado de lado 1 não pode corresponder a um número racional e designar os pontos com esta propriedade por “pontos irracionais”;
- Reconhecer que a cada ponto irracional da semirreta numérica positiva está associado a uma dízima infinita não periódica e interpretá-la como representação de um número, dito “número irracional”, medida de distância entre o ponto e a origem;
- Identificar um número real (racional ou irracional) como um número cuja representação decimal é uma dízima infinita não periódica;
- Reconhecer que o simétrico relativamente à origem de um ponto irracional A da semirreta numérica positiva, de abscissa $a_0, a_1, a_2, \dots$ é um ponto irracional e representá-lo pelo “número irracional negativo” $-a_0, a_1, a_2, \dots$;
- Ordenar dois números reais representados na forma de dízima comparando sequencialmente os algarismos da maior para a menor ordem;
- Usar os números reais com aproximações e arredondamentos apropriados aos contextos;
- Designar por “conjunto de números reais” a união do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais e designá-lo por $\mathbb{R}$;
- Saber que as quatro operações definidas sobre os números racionais, a potenciação de expoente inteiro e raiz cúbica se podem estender aos reais, assim como a raiz quadrada a todos os reais não negativos, preservando as respetivas propriedades algébricas, assim como as propriedades envolvendo proporções entre medidas de segmentos;
- Reconhecer que existem números irracionais;
- Reconhecer que $\sqrt{2}$ é um número irracional e saber que $\sqrt{n}$ (sendo n um número natural) é um número irracional se n não for um quadrado perfeito;
- Analisar uma demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$;
- Utilizar o Teorema de Pitágoras para construir geometricamente radicais de números naturais e representá-los na reta numérica;
- Operar com números reais;
- Verificar que o produto das raízes é a raiz do produto;
- Relacionar potências e raízes.

Desenvolvimento da aula:

- Trabalho de pares.
- Duração total da tarefa- 180 minutos, sendo:
 - Apresentação da tarefa: 10 minutos;
 - Trabalho autónomo dos alunos: 120 minutos;
 - Apresentação e discussão de resultados à turma: 30 minutos;
 - Síntese final e registos: 20 minutos.

Recursos utilizados:

- Tarefa B, manual escolar, caderno diário, material de escrita e computador com *Internet*.

Avaliação:

A avaliação dos alunos será baseada nos seguintes aspetos;

- Respeito pelas normas de trabalho e convivência;
- Capacidade de filtrar a informação recolhida na *Internet*;
- Cooperação no trabalho de grupo;
- Interesse e empenho demonstrado durante a aula;
- Aplicação de conhecimentos matemáticos adquiridos anteriormente;
- Comportamento na sala de aula;
- Grelha de observação do trabalho dos alunos.

Capacidades transversais a desenvolver:

- Expressar ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, usando notação, simbologia e vocabulários próprios;
- Raciocínio matemático;
- Comunicação matemática;
- Resolução de problemas;
- Averiguar a possibilidade de abordagens diversificadas para a resolução de um problema;
- Discutir ideias e resultados;
- Formular e testar conjecturas e generalizações.

5.8. Tarefa B: “À descoberta do Número de Ouro. Os números irracionais”

B.1. Utilizando a *Internet*, esta tarefa tem por objetivo dar a conhecer o Número de Ouro, respondendo às seguintes questões:

B.1.1. O que é o Número de Ouro? Qual é o seu valor exato e qual o seu valor aproximado às milésimas?

B.1.2. A que se deve esta designação? Qual é o símbolo que o representa?

B.1.3. Quem o descobriu? Como?

B.1.4. Este número é apenas uma quantidade ou existe na vida real? Faça uma pesquisa para encontrar exemplos da presença do Número de Ouro na arte, na arquitetura ou na música.

B.1.5. Indique, um número racional anterior ao Número de Ouro e outro posterior.

B.1.6. Classifique a dízima que representa o Número de Ouro, bem como o seu simétrico.

B.2. Como sabe, nem todos os números podem ser escritos sob a forma $\frac{a}{b}$, com a e b inteiros e b não nulo, ou seja, há números que não são racionais. Esses números designam-se por números irracionais. De seguida, por redução ao absurdo, vai provar que $\sqrt{2}$ é um exemplo de um número irracional. Complete a seguinte demonstração:

Suponhamos que $\sqrt{2}$ é _____, ou seja, que se pode escrever na forma $\frac{a}{b}$, com a e b _____, sendo $\frac{a}{b}$ uma fração irredutível. Se assim for, a e b são _____.

Então, $\frac{a}{b} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Leftrightarrow a^2 = 2b^2$. Sendo assim, $a^2 = a \times a$ é par, donde se pode concluir que _____ é par, ou seja, $a = 2k$, para algum k inteiro. Deste modo, $(2k)^2 = 2b^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2b^2 \Leftrightarrow 2k^2 = b^2$. Daqui, conclui-se que $b^2 = b \times b$ é par, logo b também é par.

Mas então a e b são simultaneamente _____, donde se pode concluir que a fração $\frac{a}{b}$ não é _____, o que contradiz a hipótese.

Este absurdo resulta de _____, logo $\sqrt{2}$ é um número irracional.

B.3. Considere a sequência dos seguintes quadrados:

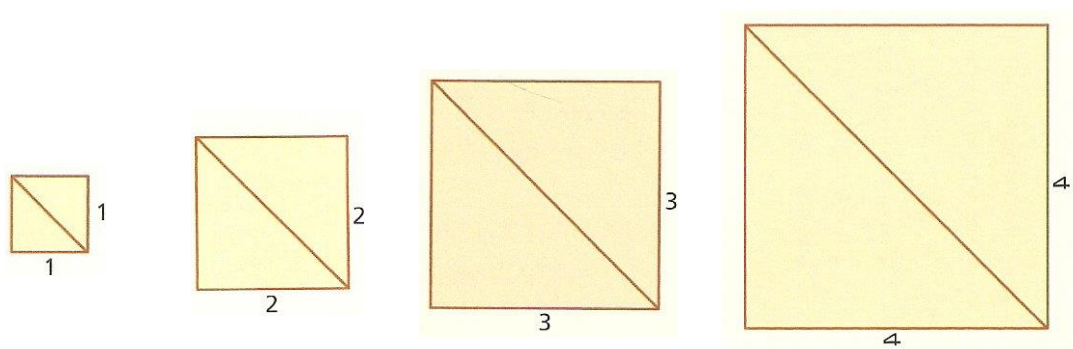


Figura 42: Quadrados perfeitos ⁴³

B.3.1. Escreva a sequência das medidas exatas das diagonais correspondentes a cada um destes quadrados.

B.3.2. Mostre que a medida da diagonal, d , de um quadrado de lado l , é dada por $l\sqrt{2}$.

B.3.3. Escreva os valores que obteve em B.3.1. na forma $l\sqrt{2}$.

5.9. Proposta de resolução da Tarefa B

B.1.1 até **B.1.4.** O Número de Ouro, também chamado de proporção áurea, número áureo ou razão de Ouro, é o número irracional mais misterioso e enigmático que se conhece. Despertou o interesse de muitos matemáticos na Idade Média e no Renascimento. É considerado por muitos como símbolo da harmonia, da perfeição e da proporcionalidade. O seu valor exato é de $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Representa-se pela letra grega Φ (fi), em homenagem a Fídias, escritor e arquiteto grego, construtor da Acrópole *Partenón* de Atenas.

O Número de Ouro foi estudado pelos gregos num contexto geométrico. Aparece na famosa obra “Elementos de Geometria” de Euclides, escrito cerca de 300 anos a.C. Esta obra é composta por treze livros, onde aparece a razão áurea em várias figuras planas e sólidas.

O Número de Ouro existe na vida real, podemos encontrá-lo nas pirâmides do Egito, nas obras de Botticelli, de Leonardo Da Vinci e de Salvador Dali, na sucessão de Fibonacci, na natureza, no corpo humano, nos fractais, na música, na literatura, no *design*, etc..

⁴³ Fonte: (Conceição *et. al.*, 2012, p. 138).

B.1.5. O Número de Ouro está compreendido, por exemplo, entre: $\frac{8}{5} < \Phi < \frac{17}{10}$.

B.1.6. Tanto o Número de Ouro, como o seu simétrico, representam dízimas infinitas não periódicas, por serem números irracionais.

B.2. Demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$:

Suponhamos que $\sqrt{2}$ é racional, ou seja, que se pode escrever na forma $\frac{a}{b}$, com a e b naturais, sendo $\frac{a}{b}$ uma fração irredutível. Se assim for, a e b são primos entre si. Então, $\frac{a}{b} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^2 = (\sqrt{2})^2 \Leftrightarrow \frac{a^2}{b^2} = 2 \Leftrightarrow a^2 = 2b^2$. Sendo assim, $a^2 = a \times a$ é par, donde se pode concluir que a é par, ou seja, $a = 2k$, para algum k inteiro. Deste modo, $(2k)^2 = 2b^2 \Leftrightarrow 4k^2 = 2b^2 \Leftrightarrow 2k^2 = b^2$. Daqui, conclui-se que $b^2 = b \times b$ é par, logo b também é par.

Mas então a e b são simultaneamente pares, donde se pode concluir que a fração $\frac{a}{b}$ não é irredutível, o que contradiz a hipótese.

Este absurdo resulta de se ter considerado que $\sqrt{2}$ é um número racional, logo $\sqrt{2}$ é um número irracional.

B.3.1. A sequência das medidas exatas das diagonais correspondentes a cada um dos quadrados representados é: $\sqrt{2}, \sqrt{8}, \sqrt{18}, \sqrt{32}$.

B.3.2. Dado um quadrado de lado l , a medida da sua diagonal, d , usando o Teorema de Pitágoras, é dada por:

$$d^2 = l^2 + l^2 \Leftrightarrow d^2 = 2l^2 \Leftrightarrow d = -\sqrt{2l^2} \vee d = \sqrt{2l^2}$$

Como $d > 0$ e $l > 0$, então $d = l\sqrt{2}$.

B.3.3. As diagonais dos quadrados representados podem ser escritas na forma $d = l\sqrt{2}$:

$$\sqrt{8} = \sqrt{2^2 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 2\sqrt{2};$$

$$\sqrt{18} = \sqrt{2 \times 3^2} = \sqrt{2} \times \sqrt{9} = 3\sqrt{2};$$

$$\sqrt{32} = \sqrt{2^2 \times 2^2 \times 2} = \sqrt{4} \times \sqrt{4} \times \sqrt{2} = 4\sqrt{2}.$$

5.10. Orientações para a resolução e exploração da Tarefa B

Com a resolução desta Tarefa B pretende-se incluir a História e propriedades do Número de Ouro na planificação dos conteúdos a lecionar no 8.º ano de escolaridade (de acordo com o novo Programa de Matemática), por ser um número irracional com características muito importantes e pela sua importante aplicação na vida real. Pretende-se, também, explorar os conteúdos propostos, no novo Programa de Matemática para o Ensino Básico, para a temática das dízimas infinitas não periódicas e números reais.

Relativamente ao desenvolvimento da Tarefa B, nas perguntas B.1. pretende-se que os alunos explorem a História do Número de Ouro, qual a sua origem, qual o seu valor exato, quem o descobriu, qual a letra que o representa, e quais as suas aplicações na vida real, com recurso à *Internet*. Esta é uma questão aberta, que abre caminho a um trabalho de grupo/projeto. Tal como se refere no Programa de Matemática (Ponte *et al.*, 2007) que esteve em vigor e estará ainda durante alguns anos, até ser substituído completamente pelo novo Programa, a “História da Matemática pode evidenciar o desenvolvimento de determinadas ideias matemáticas, apresentando-a como uma ciência viva e em evolução”.

Nas questões B.2. pretende-se fazer uma demonstração da irracionalidade da $\sqrt{2}$, seguindo os passos referidos no enunciado, os alunos devem concluir, por redução ao absurdo, que os números irracionais não se podem escrever como uma fração irredutível de dois números inteiros. Apresenta um grau de dificuldade elevado, devendo-se explicar pormenorizadamente a demonstração.

Esta questão vai ao encontro das novas Metas Curriculares apresentadas para o Ensino de Matemática no 3.º Ciclo, onde se pretende evidenciar, de forma mais explícita, o vocabulário referente ao método axiomático e a realização de pequenas demonstrações.

A questão B.3. tem por objetivo calcular o valor das diagonais de alguns quadrados, utilizando o Teorema de Pitágoras. Pretende-se, também concluir que, de forma genérica, dado um quadrado cuja medida do comprimento do lado é l , a medida de comprimento da sua diagonal, d , usando o Teorema de Pitágoras, é dada por, $d = l\sqrt{2}$.

5.11. Introdução à Tarefa C

Com a realização da tarefa C, pretende-se atingir, essencialmente, dois grandes objetivos: verificar a existência do Número de Ouro na vida real, nomeadamente em vários edifícios famosos existentes em várias cidades europeias; construir um retângulo de Ouro e verificar algumas das suas propriedades, usando o Teorema de Pitágoras.

O estudo do Teorema de Pitágoras inicia-se no 8.º ano de escolaridade, sendo um tópico fundamental para ser utilizado na aprendizagem de matemática, em anos escolares posteriores.

Na construção de um retângulo de Ouro, os alunos deverão usar material de desenho, no entanto, esta atividade poderá ser resolvida recorrendo a programas de geometria dinâmica, como é o caso do *Geogebra*.

Na resolução desta tarefa C os alunos trabalham, ainda, com monómios e polinómios, nomeadamente com casos notáveis, cujos conteúdos são lecionados no domínio da Álgebra, no 8.º ano de escolaridade.

Ainda trabalhamos, nesta tarefa, com a fórmula resolvente, tópico lecionado no 9.º ano de escolaridade, também no domínio da Álgebra.

Por ser uma tarefa que engloba conteúdos dos três anos de escolaridade do 3.º Ciclo do Ensino Básico, será proposta para o 9.º ano de escolaridade. Sendo muito rica em conteúdos, servirá para rever matérias lecionadas em anos anteriores, bem como para aplicar a fórmula resolvente, lecionada no 9.º ano de escolaridade.

Tendo em conta as características desta tarefa, e classificando-a, de acordo com Ponte (2004, p. 8), podemos dividi-la em três partes: a primeira parte, medição dos retângulos dos vários edifícios e preenchimento da tabela, pode ser considerada como um exercício, isto é, uma tarefa fechada e de desafio reduzido; a construção de um retângulo de Ouro, pode ser considerada como uma tarefa de exploração, de dificuldade reduzida e aberta e as questões relativas ao estudo das propriedades do retângulo de Ouro podemos considerá-las um problema, isto é, tarefa de desafio elevado e de resposta fechada. Relativamente à duração, pode-se considerar uma tarefa de duração média, que surge em contexto de semi - realidade, uma vez que nela existem questões onde podemos aplicar a matemática ao contexto real.

As questões estão formuladas de forma a orientar o aluno para os objetivos deste problema. Esta tarefa C tem um tempo de duração média, proposta para dois blocos de noventa minutos. Sugere-se ainda que seja realizada de forma individual, tendo em consideração que é necessário efetuar a construção de um retângulo de Ouro, onde cada aluno deverá construir o seu e compará-lo com os dos outros colegas, com o objetivo de concluir que existem inúmeros retângulos de Ouro.

5.12. Planificação da Tarefa C

Domínios matemáticos: Números e Operações; Geometria e Medida.

Tópicos matemáticos: Dízimas infinitas não periódicas e números reais; Teorema de Pitágoras.

Subtópicos matemáticos: Dízimas; Teorema de Pitágoras; Fórmula resolvente.

Conhecimentos prévios:

- Representar, comparar e ordenar números racionais;
- Aproximações e arredondamentos de números racionais;
- Problemas envolvendo o cálculo de números racionais representados na forma de frações, dízimas, percentagens e numerais mistos;
- Dízimas finitas e infinitas periódicas;
- Teorema de Pitágoras;
- Operações com monómios e polinómios;
- Casos notáveis da multiplicação.

Objetivos específicos:

- Efetuar medições;
- Fazer divisões de números reais;
- Relações de ordem dos números reais;
- Fazer aproximações de números reais;
- Identificar uma dízima infinita não periódica como a representação decimal de um número inteiro seguido de uma vírgula e de uma sucessão de algarismos que não corresponde a uma dízima infinita periódica;
- Reconhecer os casos notáveis da multiplicação como igualdades entre polinómios;
- Efetuar operações com polinómios, determinar formas reduzidas e os respetivos graus;
- Resolver problemas geométricos envolvendo a utilização do Teorema de Pitágoras;
- Saber, de memória, a fórmula resolvente e aplicá-la à resolução de equações completas do 2.º grau.

Desenvolvimento da aula:

- Trabalho individual.
- Duração total da tarefa- 180 minutos, sendo:

- Apresentação da tarefa: 10 minutos;
- Trabalho autónomo dos alunos: 120 minutos;
- Apresentação e discussão de resultados à turma: 30 minutos;
- Síntese final e registos: 20 minutos.

Recursos utilizados:

- Tarefa C, manual escolar, caderno diário, material de escrita, compasso, régua e esquadro.

Avaliação:

- Respeito pelas normas de trabalho e convivência;
- Domínio de conceitos e procedimentos matemáticos;
- Empenho e interesse na realização das tarefas propostas;
- Qualidade da participação na aula;
- Grelha de observação do trabalho dos alunos.

Capacidades transversais a desenvolver:

- Expressar ideias e processos matemáticos, oralmente e por escrito, usando notação, simbologia e vocabulários próprios;
- Raciocínio matemático;
- Resolução de problemas;
- Comunicação matemática;
- Averiguar a possibilidade de abordagens diversificadas para a resolução de um problema;
- Discutir ideias e resultados.

5.13. Tarefa C: “Construção de um retângulo de Ouro”

No mapa que se segue destacam-se algumas cidades europeias onde podemos encontrar variados edifícios, em cuja arquitetura se destacam retângulos especiais relacionados com a razão áurea.

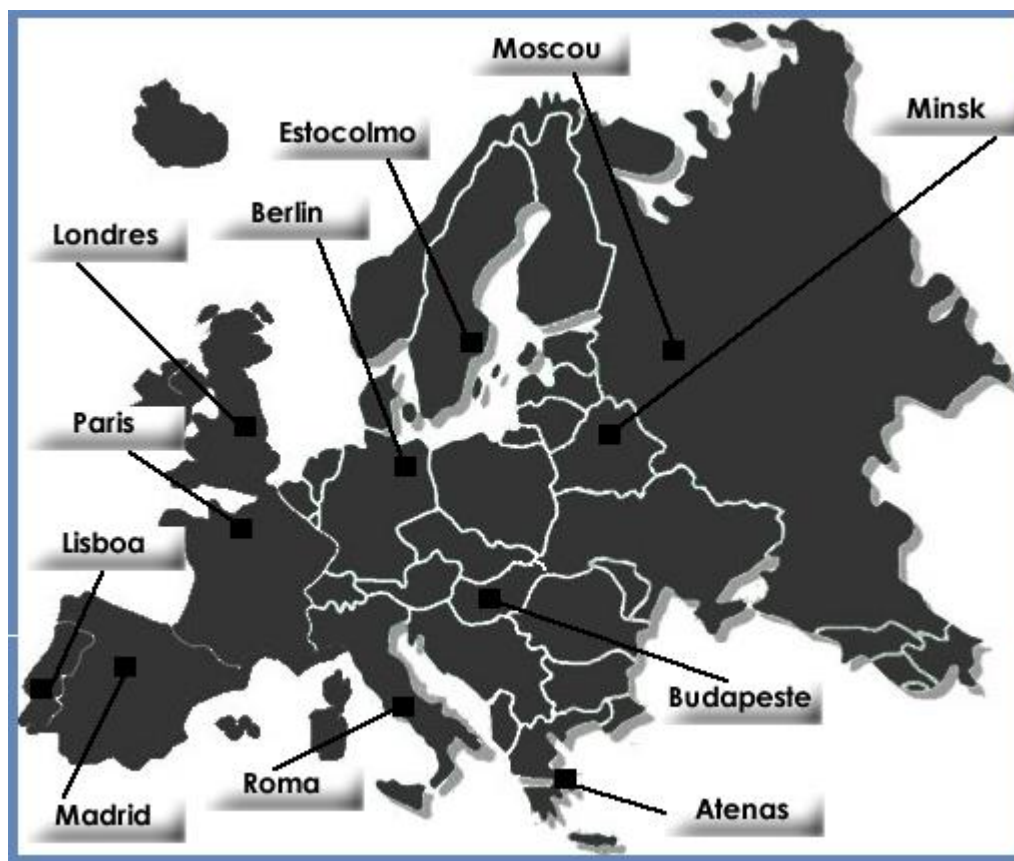


Figura 43: Mapa da Europa ⁴⁴

A coleção de figuras que se seguem são imagens de edifícios onde podemos encontrar o retângulo de Ouro na sua arquitetura e que se encontra representado em cada uma delas.

Os povos antigos acreditavam numa noção de perfeição, que era traduzida por uma razão, chamada “razão áurea”. As pessoas que possuíssem esta razão entre algumas das suas medidas, eram consideradas símbolos de beleza e harmonia. Da mesma forma, eles utilizavam este padrão em edifícios, pinturas e arquitetura. Escolhemos alguns destes edifícios para desenvolvermos esta atividade.

⁴⁴Fonte: (Garcia *et. al.*, 2006, p. 44).

Esta atividade consiste em procurar nestes edifícios históricos, retângulos que possuam aproximadamente esta razão, ou seja, quando dividirmos o comprimento de um lado pelo outro encontraremos o Número de Ouro, $\Phi = 1,681$

Comecemos pelo edifício da Universidade de Moscovo que, naturalmente, se situa na cidade de Moscovo.

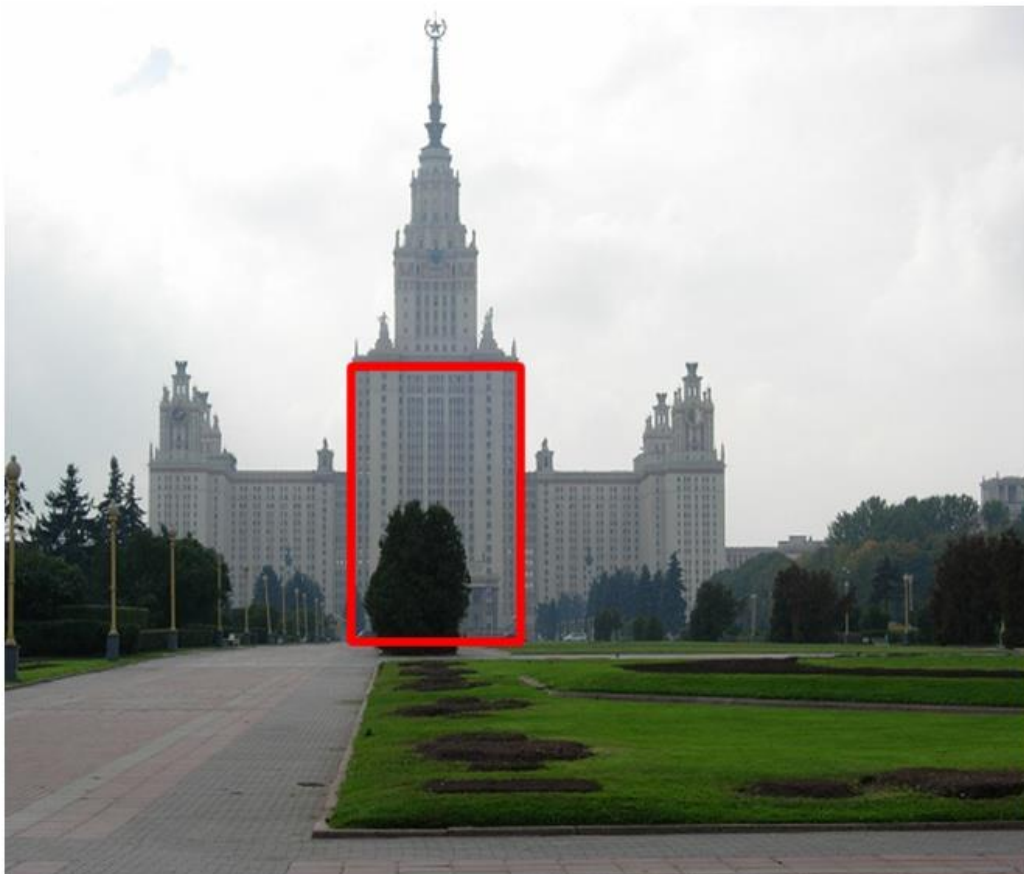


Figura 44: Universidade de Moscovo ⁴⁵

Cidade muito antiga tornou-se sede do Grão-Ducado de Moscovo e mais tarde capital russa. Foi ocupada pela Polónia de 1572 a 1612. Deixou de ser capital do Império em 1712, quando a corte foi transferida para São Petersburgo. Em 14 de setembro de 1812, quando Napoleão entrou na cidade, encontrou-a vazia. No dia seguinte, três quartos de Moscovo estavam em chamas.

Segue-se o Arco de Septímio Severo, de Roma:

⁴⁵Fonte: (Garcia *et. al.*, 2006, p. 45).

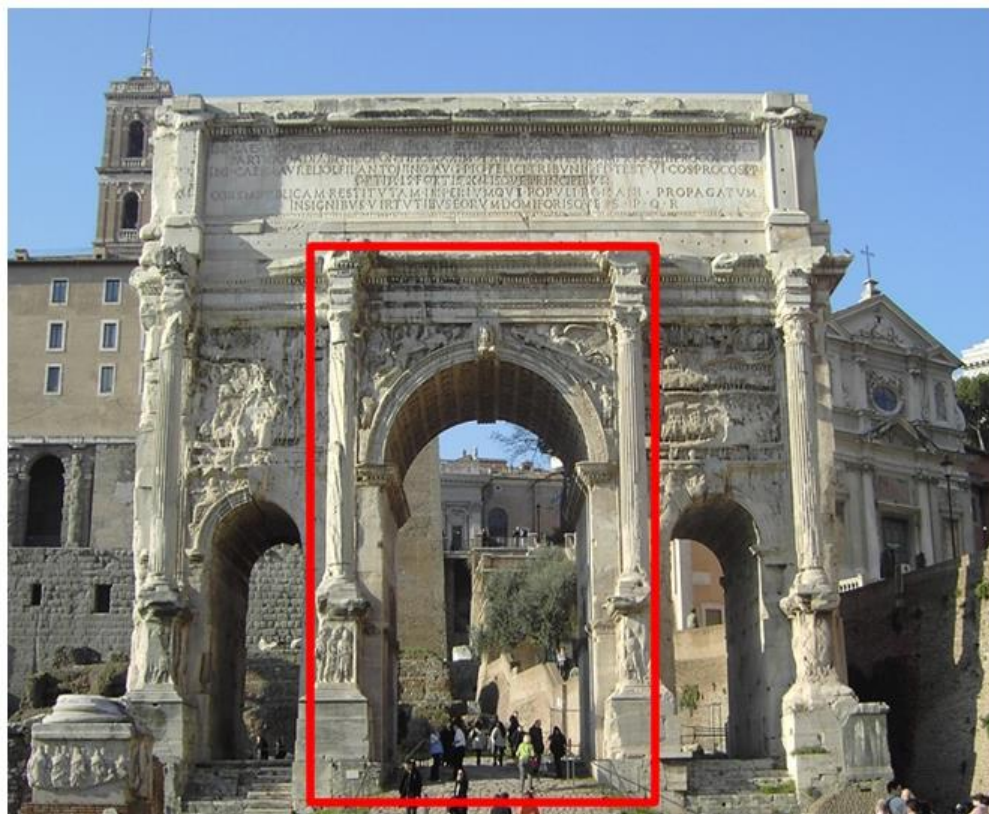


Figura 45- Arco de Septímio Severo – Roma ⁴⁶

O arco de Septímio Severo é um arco triunfal construído a noroeste do Fórum romano, em Roma, próximo ao templo de Saturno, com uma passagem central ladeada por duas outras mais estreitas. Foi dedicado, em 203 d.C., pelo Senado, ao imperador Septímio Severo e aos seus dois filhos, Caracala e Geta, para celebrar a vitória com os Partas, conseguida com duas campanhas militares que concluíram, respetivamente, em 195 d.C. e no ano da dedicação.

Também é interessante considerar o Arco do Triunfo de Paris. O Arco do Triunfo é um monumento da cidade de Paris construído para comemorar as vitórias militares de Napoleão Bonaparte, que ordenou a sua construção, em 1806, ao arquiteto Chalgrin. Foi inaugurado em 1836. Tem gravado os nomes de 128 batalhas e 558 generais. Na sua base situa-se o Túmulo do Soldado Desconhecido, construído em 1920. Situa-se na Praça Charles de Gaulle, onde termina a mais famosa Avenida de Paris, a Champs-Élysées.

⁴⁶Fonte: (Garcia *et. al.*, 2006, p. 46)

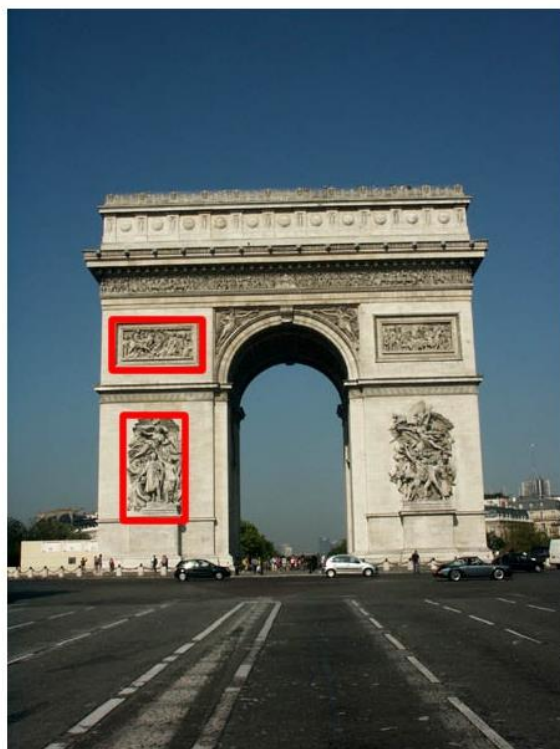


Figura 46: Arco do Triunfo – Paris ⁴⁷

Consideremos agora o Castelo de Buda, de Budapeste:



Figura 47: Castelo de Buda – Budapeste ⁴⁶

⁴⁷Fonte: (Garcia *et. al.*, 2006, pp. 47-48)

Budapeste tem nove pontes, sendo a mais conhecida a Széchenyi Lánchíd. Os edifícios mais característicos e importantes são o Castelo de Buda, o Parlamento e o Teatro Nacional, divulgados nos mais conhecidos cartões-postais da cidade, que tem como o turismo, uma fonte de rendimento de crescente importância.

Também no Museu Nacional de Belas Artes, de Estocolmo, podemos encontrar o retângulo de Ouro, tal como podemos verificar na figura seguinte:



Figura 48: Museu nacional de Belas Artes – Estocolmo ⁴⁸

O Museu Nacional de Belas Artes é um dos mais importantes museus de arte da Suécia. Localizado em Estocolmo, a capital do país, este museu alberga impressionantes coleções de arte, não só sueca, mas também de outros países, doadas, primeiramente, pelos reis Gustavo III e Carl Gustaf Tessin.

O museu foi fundado em 1792, todavia, o edifício que hoje o alberga, somente foi construído em 1866. O edifício, imponente e robusto, conserva traços da arquitetura florentina e veneziana renascentista.

O museu, atualmente, conta com mais de 1.000.000 de desenhos e pinturas, uma enorme e riquíssima coleção de porcelanas, com especial destaque para as porcelanas chinesas, esculturas e uma ótima coleção de arte moderna. Além disso, o Museu Nacional alberga uma boa livraria de arte.

⁴⁸Fonte: (Garcia *et. al.*, 2006, p. 49).

Finalmente, temos o parlamento alemão – Reichstag de Berlim:



Figura 49: Parlamento alemão – Reichstag ⁴⁹

Reichstag é o nome do edifício onde o parlamento federal da Alemanha exercia as suas funções. Fica localizado em Berlim.

Nos seus mais de cem anos de história, o edifício do Reichstag foi a sede do governo em duas guerras. Em 1992 foi decidido que o Reichstag deveria ser reconstruído e foi escolhido o projeto de Norman Foster. Em 1995, o artista Christo atraiu milhões de visitantes ao cobrir o edifício inteiro. A reconstrução foi um sucesso, especialmente pela construção da cúpula em memória da cúpula original de 1894.

Esta é uma das melhores atrações para os turistas, pois está aberta a visitas.

C.1. Estabeleça a correspondência seguinte:

Universidade de Moscovo	⇒	Edifício A
Arco do Septímio Severo	⇒	Edifício B
Arco do Triunfo	⇒	Edifício C

⁴⁹Fonte: (Garcia *et. al.*, 2006, p. 50).

Castelo de Buda	⇒	Edifício D
Museu Nacional de Belas Artes	⇒	Edifício E
Parlamento alemão	⇒	Edifício F

Com os dados das figuras, preencha a seguinte tabela, utilizando uma régua graduada para determinar as medidas pedidas:

Edifício	Medida do Comprimento	Medida da Altura	Medida da Altura/Medida do comprimento
A			
B			
C			
D			
E			
F			

Tabela 12: Razões entre a medida do comprimento e medida da altura de retângulos que formam os edifícios

Em alguns destes retângulos, a razão entre as medidas da altura e do comprimento aproxima-se do Número de Ouro (1,618033...) ou do seu inverso (0,618033...). Os retângulos que possuem esta propriedade são chamados de retângulos de Ouro.

Muitos arquitetos, desde a Antiguidade até aos dias de hoje, utilizam esta proporção propositadamente, pois acreditam que edifícios que mostram esta relação são mais harmoniosos do que os outros.

C.2. Com régua, esquadro e compasso, tracemos dois retângulos de Ouro, com diferentes tamanhos. Existe um método para a sua construção, para isso, siga as seguintes etapas:

- ✓ **Passo 1:** Trace um quadrado qualquer e designe-o por $[ABCD]$, de tal modo que $[A, B]$ corresponda à sua base. Este quadrado tem lado de medida a .
- ✓ **Passo 2:** Divida $[A, B]$ ao meio e marque ali o ponto médio, M . Trace uma perpendicular a este ponto, dividindo o quadrado em dois rectângulos

- ✓ **Passo 3:** Escolha um destes retângulos, digamos aquele com base $[A, M]$. Trace a sua diagonal, passando por M .
- ✓ **Passo 4:** Trace uma semi reta a partir de M , contendo $[A, M]$.
- ✓ **Passo 5:** Com o compasso, com a ponta sobre M , transfira a medida da diagonal para esta semi reta. Marque ali o ponto E .
- ✓ **Passo 6:** Trace um novo retângulo utilizando os pontos C, B e E , como vértices.

C.3. Os lados deste retângulo têm medidas, a e $a + b$, respetivamente. Calcule o valor de b e de $a + b$, em função de a , usando o Teorema de Pitágoras.

C.4. Este novo retângulo é um retângulo de Ouro, isto é, a razão entre o lado maior e o lado menor é igual ao Número de Ouro. Verifique esta propriedade, calculando $\frac{a+b}{a}$.

5.14. Proposta de resolução da Tarefa C

C.1.

Edifício	Medida do Comprimento	Medida da Altura	Medida da Altura/Medida do comprimento
A	2,32	3,75	$\frac{3,75}{2,32} \cong 1,616$
B	4,68 cm	7,49 cm	$\frac{7,49}{4,68} \cong 1,600$
C	1,45 cm	0,9 cm	$\frac{0,9}{1,45} \cong 0,621$
	1,05 cm	1,7 cm	$\frac{1,7}{1,05} \cong 1,619$
D	1,13 cm	1,7 cm	$\frac{1,7}{1,13} \cong 1,504$
E	2,45 cm	3,95 cm	$\frac{3,95}{2,45} \cong 1,612$
F	3,85 cm	6,2 cm	$\frac{6,2}{3,85} \cong 1,610$

Tabela 13: Razões entre a medida do comprimento e medida da altura de retângulos que formam os edifícios

C.2. Apresentemos uma nova alternativa para a resolução desta questão, usando *software* de Geometria Dinâmica, construindo um retângulo de Ouro com recurso ao *Geogebra*:

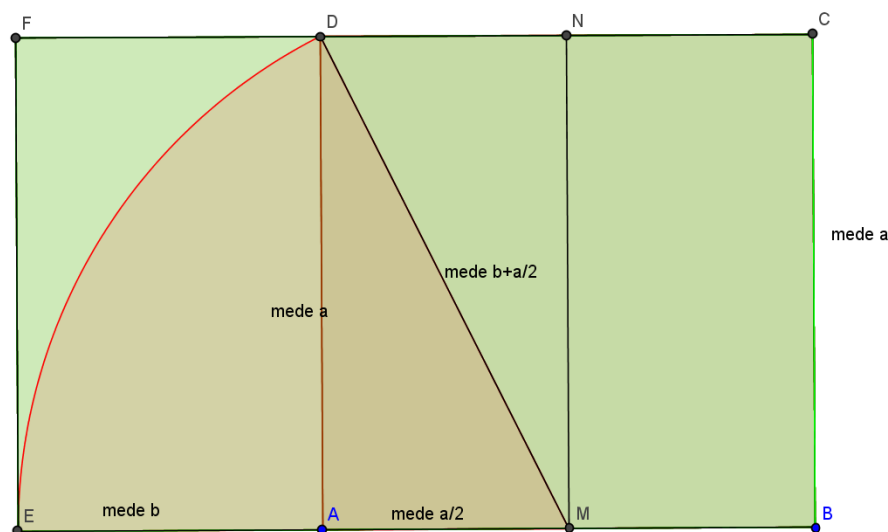


Figura 50: Construção de um retângulo de Ouro com recurso ao *Geogebra*

C.3. Aplicando o Teorema de Pitágoras ao triângulo $[AMD]$, obtemos a seguinte igualdade:

$$\left(b + \frac{a}{2}\right)^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2$$

Desenvolvendo o quadrado do binómio vem:

$$b^2 + 2 \times b \times \frac{a}{2} + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + a^2 \Leftrightarrow b^2 + ab + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4} + a^2 \Leftrightarrow b^2 + ab - a^2 = 0$$

Dividindo a equação por a , pois $a \neq 0$, e seguidamente por b , também $b \neq 0$, obtemos o seguinte:

$$\Leftrightarrow \frac{b^2}{a} + b - a = 0 \Leftrightarrow \frac{b}{a} + 1 - \frac{a}{b} = 0$$

Consideremos $x = \frac{b}{a}$, então a equação anterior toma o seguinte aspeto:

$$\Leftrightarrow x + 1 - x^{-1} = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \mp \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} \vee x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Como se trata de medidas de comprimentos, o valor da solução da equação anterior é o número positivo, isto é, $x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

Como $x = \frac{b}{a}$ então:

- $b = \left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) a.$

- $a + b = a + \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)a = a\left(1 + \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)a.$

C.4. Dividindo o lado maior pelo lado menor do retângulo $[BCEF]$, obtemos:

$$\frac{\overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{a + b}{a} = \frac{\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)a}{a} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \phi.$$

Concluimos que a razão entre o lado maior $a + b$ e o lado menor a do retângulo $[BCEF]$ é igual ao Número de Ouro, por esta razão chama-se, retângulo de Ouro.

5.15. Orientações para a resolução e exploração da Tarefa C

Com esta tarefa pretende-se que os alunos verifiquem que o Número de Ouro, não é apenas um número com aplicação meramente matemática, mas sim, um número que tem aplicação na realidade que nos rodeia. De facto, ele aparece em inúmeras situações da nossa vida real, sendo um dos muitos exemplos, na arquitetura. É objetivo, também, desta tarefa, que cada aluno construa dois retângulos de Ouro e investigue as suas propriedades.

Na questão C.1. pretende-se que os alunos percebam que o Número de Ouro se aplica à vida real, nomeadamente, que existem várias obras de arquitetura onde podemos encontrar a razão áurea na sua construção. Os alunos devem medir os retângulos que se encontram sobre cada figura, fazer a divisão da medida da altura pela do comprimento e concluir que as razões obtidas são valores muito aproximados do Número de Ouro.

Na questão C.2. pretende-se que os alunos construam, dois retângulos de Ouro, seguindo cada passo do enunciado, de forma que percebam algumas das suas propriedades. Poderão resolver esta questão, com material de desenho, como é indicado no enunciado, no entanto, também poderá ser resolvida com recurso a *software* de geometria dinâmica.

Na questão C.3. pretende-se usar o Teorema de Pitágoras na determinação das medidas dos comprimentos dos lados do retângulo de Ouro. Esta questão é muito importante pelos conteúdos que nela são aplicados. Na resolução desta questão os alunos devem utilizar o Teorema de Pitágoras, o quadrado do binómio e a fórmula resolvente para obterem os valores das medidas dos comprimentos pedidos.

O professor deve chamar atenção que o triângulo $[ADM]$ obtido na figura, é retângulo e, depois de descobrir as medidas do comprimento dos seus lados em função de a e de b , deverão aplicar o Teorema de Pitágoras para obterem uma equação do 2.º grau. Na resolução desta

equação do 2.º grau, os alunos deverão desenvolver o quadrado do binómio e determinar os valores pedidos, usando a fórmula resolvente.

Na questão C.4., os alunos deverão dividir as medidas do comprimento e da largura do retângulo de Ouro que construíram, utilizando a alínea anterior, e verificar que, esta razão é igual ao Número de Ouro.

5.16. Introdução à Tarefa D

O estudo dos números irracionais no Programa de Matemática que esteve em vigor, era iniciado no 9.º ano de escolaridade, no capítulo “Números reais. Inequações”. Com a entrada do novo Programa de Matemática para o Ensino Básico, este tópico passa a ser lecionado no 8.º ano de escolaridade, no domínio “Números e Operações”, onde os alunos aprendem a trabalhar com dízimas finitas, infinitas periódicas e infinitas não periódicas. Esta tarefa será proposta para o 9.º ano de escolaridade, uma vez que é nesse nível de ensino que os alunos aprendem a fórmula resolvente, necessária para a resolução deste exercício.

À semelhança do número $\sqrt{2}$, que está presente na diagonal do quadrado de lado igual a 1, os números irracionais aparecem frequentemente em figuras geométricas. Foi assim que os pitagóricos descobriram aquele que viria a ser um dos números irracionais mais famosos, o Número de Ouro.

O Número de Ouro aparece no conhecido retângulo de Ouro, mas também está presente em qualquer pentágono regular (como veremos na tarefa F).

Com a realização da tarefa D pretende-se que os alunos investiguem o aparecimento do número irracional ϕ através da observação e interpretação de um retângulo de Ouro. Na resolução desta tarefa, os alunos terão de usar o Teorema de Pitágoras, as operações com números reais, a fórmula resolvente, bem como o trabalho com valores aproximados.

A tarefa D, que de seguida se propõe, é um exercício, de acordo com Ponte (2004, p. 8), pois apresenta um grau de dificuldade reduzido e possui uma estrutura fechada. Esta tarefa terá um tempo de duração média, prevista para dois blocos de noventa minutos e, surge num contexto puramente matemático.

Sugere-se ainda que seja realizada em pares, fomentando a troca e partilha de ideias.

5.17. Planificação da Tarefa D

Domínio matemático: Números e Operações.

Tópicos matemáticos: Números reais; Teorema de Pitágoras.

Subtópicos matemáticos: Dízimas; Teorema de Pitágoras; Fórmula resolvente.

Conhecimentos prévios:

- Aproximações e arredondamentos de números racionais;
- Noção de raiz quadrada e de raiz potência;
- Problemas envolvendo o cálculo de números racionais representados na forma de frações, dízimas, percentagens e numerais mistos;
- Dízimas finitas e infinitas periódicas;
- Produto da soma de dois monómios pela sua diferença;
- Teorema de Pitágoras;
- Fórmula resolvente.

Objetivos específicos:

- Fazer aproximações de números reais;
- Reconhecer que as propriedades das operações em $\mathbb{Q}$ se mantêm em $\mathbb{R}$ e aplicá-las na simplificação de expressões;
- Resolver problemas usando operações e propriedades de $\mathbb{R}$;
- Relacionar potências e raízes;
- Resolver problemas geométricos envolvendo a utilização do teorema de Pitágoras;
- Saber de memória a fórmula resolvente e aplicá-la à resolução de equações completas do 2.º grau;
- Discutir ideias, processos e resultados matemáticos.

Desenvolvimento da aula:

- Trabalho de pares.
- Duração total da tarefa- 180 minutos, sendo:
 - Apresentação da tarefa: 10 minutos;
 - Trabalho autónomo dos alunos: 120 minutos;
 - Apresentação e discussão de resultados à turma: 30 minutos;
 - Síntese final e registos: 20 minutos.

Recursos utilizados:

- Tarefa D, manual escolar, caderno diário e material de escrita.

Avaliação:

- Domínio de conceitos e procedimentos matemáticos;
- Empenho e interesse na realização das tarefas propostas;
- Respeito pelas normas de trabalho e convivência;
- Qualidade da participação na aula;
- Grelha de observação do trabalho dos alunos.

Capacidades transversais a desenvolver:

- Raciocínio matemático;
- Resolução de problemas;
- Comunicação matemática;
- Discutir ideias e resultados.

5.18. Tarefa D: “Cálculo do valor exato do Número de Ouro”

D.1. Considere o retângulo representado na figura 51, bem como os dados que nele estão assinalados:

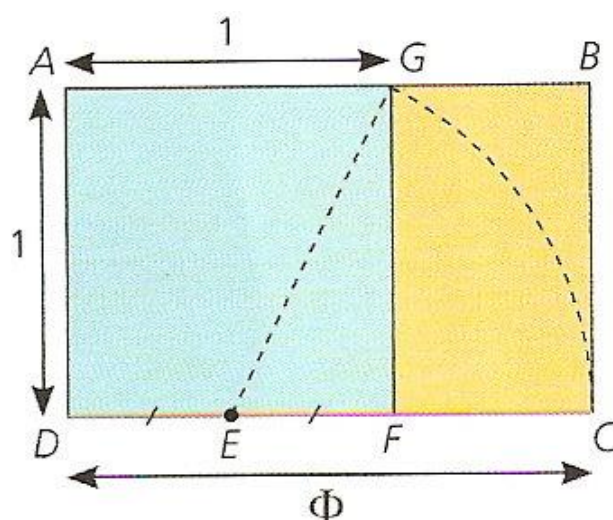


Figura 51: Retângulo de Ouro⁵⁰

⁵⁰ Fonte: (Marques *et. al.*, 2012, p. 83).

D.1.1. Determine o valor exato da medida do raio do arco da circunferência, isto é, de $\overline{EG}$.

D.1.2. Determine o valor exato de $\overline{CD}$.

D.1.3. Prove que $\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = \phi$. Calcule o valor exato de $\frac{1}{\phi}$.

D.1.4. Utilize a calculadora para determinar uma aproximação às milésimas para cada dos números encontrados ϕ e seu inverso $\frac{1}{\phi}$.

D.2. Sabemos que a razão entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci vai-se aproximando do Número de Ouro.

⁵¹Como $\frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}}$, com $a \neq 0$ e $b \neq 0$, também podemos escrever a razão entre dois termos da sequência de Fibonacci da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1} &= 1; \\ \frac{2}{1} &= \frac{1+1}{1} = 1 + \frac{1}{1}; \\ \frac{3}{2} &= \frac{2+1}{2} = 1 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}; \\ \frac{5}{3} &= \frac{3+2}{3} = 1 + \frac{2}{3} = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}.\end{aligned}$$

Se continuarmos o processo pode-se concluir que a razão entre dois números consecutivos da sucessão de Fibonacci é do tipo:

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}$$

A esta expressão, que nunca acaba, os matemáticos chamaram de ϕ . Repare que,

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi}.$$

Resolva esta equação e determine qual é o valor exato de ϕ .

⁵¹ Adaptado de (Neves *et al.*, 2012, p. 107)

5.19. Proposta de resolução da Tarefa D

D.1.1. Usando o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $[EFG]$, temos que:

$$\begin{aligned}\overline{EG}^2 &= \overline{EF}^2 + \overline{FG}^2 \Leftrightarrow \overline{EG}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2 \Leftrightarrow \overline{EG}^2 = \frac{1}{4} + 1 \Leftrightarrow \overline{EG}^2 = \frac{5}{4} \Leftrightarrow \overline{EG} = \mp \sqrt{\frac{5}{4}} \Rightarrow \overline{EG} \\ &= +\frac{\sqrt{5}}{2}.\end{aligned}$$

D.1.2. $\overline{CD} = \overline{CE} + \overline{ED} \Leftrightarrow \overline{CD} = \frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} \Leftrightarrow \overline{CD} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi.$

D.1.3. $\frac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}{1} = \phi.$

$$\frac{1}{\phi} = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = \frac{(1-\sqrt{5})}{-2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

D.1.4. Uma aproximação, às milésimas, do Número de Ouro e do seu inverso é, respectivamente:

$$\phi \cong 1,618 \text{ e } \frac{1}{\phi} \cong 0,618.$$

D.2. Resolvendo esta equação, vem que:

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} \Leftrightarrow \phi^2 - \phi - 1 = 0 \Leftrightarrow \phi = \frac{1 \mp \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-1)}}{2} \Leftrightarrow \phi = \frac{1 \mp \sqrt{5}}{2}.$$

Como se trata da razão entre dois termos consecutivos da sequência de Fibonacci, essa razão só pode ser positiva, pois os números de Fibonacci são inteiros positivos, então vem que essa razão é:

$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

5.20. Orientações para a resolução e exploração da Tarefa D

Com a resolução desta tarefa D pretende-se que os alunos percebam como surgiu o Número de Ouro, num contexto geométrico, através da interpretação de um retângulo de Ouro.

Relativamente ao desenvolvimento da tarefa, pretende-se, na questão D.1., que os alunos apliquem o Teorema de Pitágoras no triângulo retângulo $[EFG]$ para descobrirem o valor exato de $\overline{EG}$ e depois de $\overline{CD}$. Nesta questão, os alunos deverão fazer a soma e o quociente de números reais. Na determinação do inverso do Número de Ouro, o professor deverá ensinar aos alunos que para eliminarmos as raízes do denominador, teremos de multiplicar e dividir toda expressão pelo conjugado do denominador e usar a fórmula do produto da soma de dois monómios pela sua diferença. Nesta questão os alunos também devem calcular valores aproximados de números reais.

Na questão D.2. encontra-se descrito um outro procedimento para escrever as razões entre termos consecutivos da sequência de Fibonacci, e através da resolução de uma equação de 2.º grau, os alunos devem descobrir qual o valor exato de ϕ .

5.21. Introdução à Tarefa E

Com a realização da tarefa E pretende-se trabalhar com os alunos as propriedades da adição e da multiplicação em $\mathbb{R}$, operações com radicais, relações de ordem em $\mathbb{R}$ e os casos notáveis da multiplicação com raízes.

De acordo com o novo Programa de Matemática para o Ensino Básico, estes conteúdos continuam a ser lecionados, na sua maioria, no 9.º ano de escolaridade, tal como no Programa anterior, sendo portanto, a tarefa E, proposta para este nível de ensino.

Esta tarefa engloba conteúdos do 8.º ano de escolaridade, nomeadamente, os casos notáveis da multiplicação, que estão integrados no tópico “Monómios e polinómios”, no domínio da Álgebra, sendo também, um exercício de revisão destes conteúdos do ano letivo anterior.

No 9.º ano de escolaridade, os alunos aprendem a trabalhar com números irracionais, nomeadamente, com raízes. Devem reconhecer que as propriedades das operações em $\mathbb{Q}$ se mantêm em $\mathbb{R}$ e nesta tarefa E, deverão aplicá-las na simplificação de expressões, usando estas propriedades e os casos notáveis.

Quando um radical aparece no denominador de uma fração é conveniente transformar a fração dada numa fração equivalente, mas sem radicais no denominador. Esta tarefa E também tem como objetivo introduzir a racionalização do denominador, conteúdo que apenas é lecionado no 10.º ano de escolaridade, no entanto, será muito interessante introduzir este conteúdo já neste nível de escolaridade, adquirindo determinados conhecimentos, para uma melhor compreensão no desenvolvimento deste conteúdo em anos posteriores.

Classificando esta tarefa, de acordo com Ponte (2004, p. 8), podemos considerá-la como um problema, uma vez que apresenta questões de desafio elevado e de resposta fechada. No que diz respeito à duração da tarefa, pode-se considerar de duração média, sendo proposta para um bloco de noventa minutos. Trata-se de uma tarefa que surge num contexto puramente matemático.

Todas as questões estão formuladas de forma a direcionar os alunos para os objetivos pretendidos deste problema. Sugere-se que esta tarefa seja resolvida em grupo de pares, privilegiando a troca e partilha de ideias apenas entre dois alunos, pois a tarefa impõe uma grande capacidade de concentração na resolução das várias questões, que culminarão na determinação de algumas propriedades do Número de Ouro.

5.22. Planificação da Tarefa E

Domínio matemático: Números e Operações.

Tópicos matemáticos: Operações com números reais.

Subtópicos matemáticos: Propriedades das operações em $\mathbb{R}$; Casos notáveis da multiplicação.

Conhecimentos prévios:

- Noção de número natural, inteiro, racional e real;
- Propriedades das operações em $\mathbb{Q}$;
- Noção de raiz quadrada e de raiz potência;
- Problemas envolvendo o cálculo de números racionais representados na forma de frações, dízimas, percentagens e numerais mistos;
- Dízimas finitas e infinitas periódicas;
- Casos notáveis da multiplicação;
- Propriedades dos radicais.

Objetivos específicos:

- Reconhecer que as propriedades das operações em $\mathbb{Q}$ se mantêm em $\mathbb{R}$ e aplicá-las na simplificação de expressões;
- Simplificar e ordenar expressões numéricas reais que envolvam frações, dízimas e radicais utilizando as propriedades da relação de ordem;
- Resolver problemas usando operações e propriedades de $\mathbb{R}$;
- Relacionar potências e raízes;
- Expressar ideias, processos e resultados matemáticos, oralmente e por escrito, utilizando notação, simbologia e vocabulário próprio.

Desenvolvimento da aula:

- Trabalho de pares.
- Duração total da tarefa- 90 minutos, sendo:
 - Apresentação da tarefa: 5 minutos;
 - Trabalho autónomo dos alunos: 50 minutos;
 - Apresentação e discussão de resultados à turma: 20 minutos;
 - Síntese final e registos: 15 minutos.

Recursos utilizados:

- Tarefa E, manual escolar, caderno diário e material de escrita.

Avaliação:

- Domínio de conceitos e procedimentos matemáticos;
- Observação do empenho e do interesse na Tarefa proposta;
- Respeito pelas normas de trabalho e convivência;
- Qualidade da participação na aula;
- Grelha de observação do trabalho dos alunos.

Capacidades transversais a desenvolver:

- Raciocínio matemático;
- Resolução de problemas;
- Comunicação matemática;
- Discutir ideias e resultados.

5.23. Tarefa E: “Propriedades do Número de Ouro”

Sabendo que o valor exato do Número de Ouro é :

$$(fi) \quad \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

Prove que as seguintes propriedades são verdadeiras:

E.1. $\Phi^2 = \Phi + 1;$

E.2. $\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}.$

E.3. Sabe-se que o Número de Ouro, Φ , é o valor da razão $\frac{1}{a}$, na seguinte equação:

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{1-a}.$$

Mostre a seguinte equivalência:

$$\frac{1}{a} = \frac{a}{1-a} \Leftrightarrow a = \frac{1}{a} - 1.$$

E.4. Utilizando as propriedades de cálculo para os números reais, e tendo em conta que $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, calcule o valor das seguintes expressões numéricas, apresentando o valor exato:

E.4.1. $3\Phi + 4\Phi;$

E.4.2. $(2\Phi - 1)^2;$

E.4.3. $\sqrt{5} \left(\frac{1+\Phi}{2} \right);$

E.4.4. $(4\sqrt{\Phi})^2.$

E.5. Considere um retângulo, cujo comprimento e largura, medem respetivamente, $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) cm$ e $(\sqrt{5} - 1) cm$.

E.5.1. Qual é a expressão simplificada que representa o perímetro do retângulo?

E.5.2. Mostre que a área do retângulo é um número inteiro.

5.24. Proposta de resolução da Tarefa E

E.1. Considerando $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e substituindo na expressão obtemos:

$$\begin{aligned}\Phi^2 = \Phi + 1 &\Leftrightarrow \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} + 1 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} = \frac{2+2\sqrt{5}}{4} + \frac{4}{4} \Leftrightarrow \frac{6+2\sqrt{5}}{4} = \frac{6+2\sqrt{5}}{4},\end{aligned}$$

igualdade verdadeira.

E.2. Considerando $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e substituindo na expressão obtemos:

$$\begin{aligned}\Phi - 1 = \frac{1}{\Phi} &\Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} - 1 = \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} - \frac{2}{2} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{(1-\sqrt{5})(1+\sqrt{5})} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2},\end{aligned}$$

igualdade verdadeira.

E.3. Considerando $\frac{1}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$ obtemos que esta equação $\frac{1}{a} = \frac{a}{1-a} \Leftrightarrow a = \frac{1}{a} - 1$ é equivalente a:

$$\Phi = \frac{\frac{1}{\Phi}}{1 - \frac{1}{\Phi}} \Leftrightarrow \frac{1}{\Phi} = \Phi - 1.$$

Substituindo o valor de $\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi$ na equação anterior obtemos:

$$\begin{aligned}\Phi = \frac{\frac{1}{\Phi}}{1 - \frac{1}{\Phi}} &\Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}}{1 - \frac{1}{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}} \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}{1 - \frac{2}{1+\sqrt{5}}} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}{\frac{1-2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}} \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}-1} \Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.\end{aligned}$$

Outra forma de resolvermos esta questão é simplificar a primeira equação, obtendo a segunda:

$$\Phi = \frac{\frac{1}{\Phi}}{1 - \frac{1}{\Phi}} \Leftrightarrow \Phi \times \left(1 - \frac{1}{\Phi}\right) = \frac{1}{\Phi} \Leftrightarrow \Phi - \frac{\Phi}{\Phi} = \frac{1}{\Phi} \Leftrightarrow \Phi - 1 = \frac{1}{\Phi}.$$

E.4.1.

$$3\Phi + 4\Phi = 3\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) + 4\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) = \frac{3 + 3\sqrt{5}}{2} + \frac{4 + 4\sqrt{5}}{2} = \frac{7 + 7\sqrt{5}}{2}.$$

E.4.2.

$$\begin{aligned} (2\Phi - 1)^2 &= 4\Phi^2 - 4\Phi + 1 = 4\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^2 - 4\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) + 1 \\ &= 4\left(\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4}\right) - \frac{4 + 4\sqrt{5}}{2} + \frac{4}{4} = 4\left(\frac{1 + 2\sqrt{5} + 5}{4}\right) - \frac{8 + 8\sqrt{5}}{4} + \frac{4}{4} \\ &= \frac{4 + 8\sqrt{5} + 20 - 8 - 8\sqrt{5} + 4}{4} = \frac{20}{4} = 5. \end{aligned}$$

E.4.3.

$$\begin{aligned} \sqrt{5}\left(\frac{1 + \Phi}{2}\right) &= \sqrt{5}\left(\frac{1 + \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}{2}\right) = \sqrt{5}\left(\frac{\frac{2 + 1 + \sqrt{5}}{2}}{2}\right) = \sqrt{5}\left(\frac{3 + \sqrt{5}}{4}\right) = \frac{3\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2}{4} \\ &= \frac{3\sqrt{5} + 5}{4}. \end{aligned}$$

E.4.4.

$$(4\sqrt{\Phi})^2 = 16\Phi = 16\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) = 8 + 8\sqrt{5}.$$

E.5.1. Perímetro do retângulo:

$$P = 2 \times \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) + 2 \times (\sqrt{5} - 1) = 1 + \sqrt{5} + 2\sqrt{5} - 2 = (3\sqrt{5} - 1) \text{ cm}.$$

E.5.2. Área do retângulo:

$$A = \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \times (\sqrt{5} - 1) = \frac{\sqrt{5} + (\sqrt{5})^2 - 1 - \sqrt{5}}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ cm}^2,$$

que é um número inteiro.

5.25. Orientações para a resolução e exploração da Tarefa E

O principal objetivo desta tarefa é o estudo de determinadas propriedades matemáticas, nomeadamente, soma, subtração, potenciação, produto e quociente de radicais. Sendo o Número de Ouro um número irracional, com esta tarefa E pretende-se utilizar as propriedades das operações para efetuar diversas operações com números reais.

Na questão E.1. os alunos, deverão substituir a letra grega ϕ pelo respetivo valor numérico e, usando conhecimentos adquiridos anteriormente, serão capazes de simplificar a expressão obtida, utilizando o desenvolvimento do quadrado do binómio que resulta da expressão, chegando a uma igualdade, que é verdadeira, como pretendido.

Na questão E.2. substituindo o valor $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, será obtida uma expressão que apresenta raízes no denominador. Nesta questão deverá ser introduzida a racionalização de denominadores, onde os alunos necessitarão de aprender que, para obter uma equação com denominador racionalizado, deverão recorrer à diferença de quadrados, multiplicando o numerador e o denominador de uma fração pelo conjugado do denominador. Efetuando as operações necessárias e simplificando a expressão obtida, obterão uma expressão com denominador racional, provando assim a igualdade pretendida.

Na questão E.3. apresentamos duas resoluções diferentes: uma delas consiste em substituir o Número de Ouro pelo seu valor numérico, e usando as propriedades das operações e a diferença de quadrados para racionalizar o denominador, chegamos ao resultado pretendido; a outra resolução consiste em simplificar a primeira expressão, usando as propriedades das operações, chegando à segunda expressão, mostrando assim a equivalência das duas expressões algébricas.

Na questão E.4. são apresentadas várias expressões em que os alunos terão de efetuar as operações pretendidas, a soma, a subtração ou a potenciação de expressões numéricas. Deverão apresentar os resultados o mais simplificado possível.

Na questão E.5. os alunos deverão determinar o perímetro e a área de um retângulo, em que os comprimentos dos lados são números reais. Nesta questão pretende-se relembrar as fórmulas do perímetro e da área de um retângulo, deverão aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição ou à subtração e apresentar o resultado final o mais simplificado possível.

5.26. Introdução à Tarefa F

Esta tarefa F tem como objetivos construir um pentágono áureo com recurso ao *software* de geometria dinâmica *Geogebra* e verificar qual a relação deste tipo de pentágonos com o Número de Ouro.

Com esta tarefa F trabalharemos com os alunos as construções geométricas, amplitudes de ângulos internos de um triângulo, determinação de amplitudes de ângulos internos de um polígono regular e a trigonometria.

Esta tarefa F será direcionada para o 9.º ano de escolaridade, dado que os tópicos da trigonometria e da determinação da amplitude dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados, continuam a ser lecionados neste nível de ensino, no novo Programa de Matemática para o Ensino Básico.

No entanto, a realização desta tarefa, permitirá rever conteúdos lecionados em anos anteriores, como é o caso da construção de figuras geométricas, da determinação de amplitudes dos ângulos internos de um triângulo, bem como a classificação de triângulos quanto aos lados e quanto aos ângulos.

De acordo com Ponte (2004, p. 8), podemos classificar esta tarefa F, no que diz respeito ao grau de dificuldade e estruturação, como sendo uma tarefa de exploração e um problema, isto é: a construção do pentágono áureo, pode-se considerar como uma exploração, pois trata-se de uma questão de desafio reduzido e aberta; as questões seguintes podem-se considerar como um problema, uma vez que se apresentam um desafio com grau elevado e fechado.

No que diz respeito à duração da tarefa, pode-se considerar de duração média, sendo proposta para dois blocos de noventa minutos. Trata-se de uma tarefa que surge num contexto puramente matemático.

Todas as questões estão formuladas de forma a direcionar os alunos para os objetivos pretendidos desta tarefa. Sugere-se que esta tarefa seja resolvida em grupo de pares, privilegiando a troca e partilha de ideias apenas entre dois alunos, que culminarão na construção de um pentágono áureo e na determinação da relação deste pentágono com o Número de Ouro.

5.27. Planificação da Tarefa F

Domínio matemático: Números e Operações; Geometria e Medida.

Tópicos matemáticos: Trigonometria.

Subtópicos matemáticos: Construção de figuras geométricas; Ângulos internos de um polígono; Trigonometria.

Conhecimentos prévios:

- Usar *software* de geometria dinâmica;
- Classificar triângulos, quanto aos lados e quanto aos ângulos;
- Determinar as amplitudes dos ângulos internos de um triângulo;
- Determinar as amplitudes dos ângulos internos de um polígono regular;
- Identificar num triângulo retângulo a hipotenusa e os catetos;
- Identificar cateto oposto e cateto adjacente de um ângulo agudo de um triângulo retângulo;
- Razões trigonométricas de um ângulo agudo;
- Problemas envolvendo o cálculo de números racionais representados na forma de frações, dízimas, percentagens e numerais mistos;
- Conhecimentos básicos do *software Geogebra*;
- Noções básicas de construção geométrica.

Objetivos específicos:

- Construir um pentágono áureo, utilizando o *Geogebra*;
- Determinar amplitudes de ângulos internos de um triângulo e de um polígono regular;
- Classificar triângulos, quanto aos lados e quanto aos ângulos;
- Identificar o seno, o cos seno e a tangente de um ângulo agudo dados como razões obtidas a partir de elementos de um triângulo retângulo;
- Reconhecer que as razões trigonométricas de um ângulo dependem do ângulo e não do triângulo escolhido;
- Determinar distâncias utilizando trigonometria;
- Simplificar expressões algébricas;
- Conhecer e colocar em prática estratégias de resolução de problemas, verificando a adequação dos resultados obtidos e dos processos utilizados;

- Resolver problemas envolvendo a determinação de distâncias utilizando ângulos agudos dados e as respectivas razões trigonométricas dadas por uma máquina de calcular ou por uma tabela.

Desenvolvimento da aula:

- Trabalho de pares.
- Duração total da tarefa- 180 minutos, sendo:
 - Apresentação da tarefa: 10 minutos;
 - Trabalho autónomo dos alunos: 120 minutos;
 - Apresentação e discussão de resultados à turma: 30 minutos;
 - Síntese final e registos: 20 minutos.

Recursos utilizados:

- Tarefa F, manual escolar, caderno diário, material de escrita, máquina de calcular, computador com o *software* de geometria dinâmica *Geogebra*.

Avaliação:

- Qualidade de participação oral;
- Cooperação no grupo;
- Qualidade da participação e do empenho na tarefa proposta;
- Respeito pelas normas de trabalho e convivência;
- Concretização da atividade proposta;
- Capacidade de síntese e de análise;
- Grelha de observação do trabalho dos alunos.

Capacidades transversais a desenvolver:

- Raciocínio matemático;
- Resolução de problemas;
- Comunicação matemática;
- Discutir ideias e resultados.

5.28. Tarefa F: “O pentágono áureo”

Um pentágono é um polígono regular com cinco lados iguais. Nesta tarefa vamos construir um pentágono regular e mostrar que a razão entre uma diagonal e o lado do pentágono é o Número de Ouro.

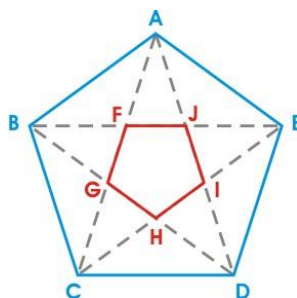


Figura 52: Pentágono áureo ⁵²

Realize as seguintes questões, utilizando os recursos do *Geogebra*:

F.1. Trace uma circunferência de centro O e raio não nulo.

F.1.1. No menu principal do *Geogebra*, aceder a *Disposições* e selecionar *Geometria*. Com o *menu* correspondente, divida o ângulo ao centro da circunferência em cinco ângulos iguais a 72° cada.

F.1.2. Estes ângulos determinam cinco pontos A, B, C, D, E sobre a circunferência. De seguida, una estes pontos. A figura obtida é um pentágono regular $[ABCDE]$.

F.1.3. Trace as diagonais do pentágono. A figura obtida é uma estrela de 5 pontas.

F.1.4. Destaque na figura o triângulo $[ABC]$. Classifique, justificando convenientemente, o triângulo, quanto aos lados e quanto aos ângulos.

F.1.5. Calcule as amplitudes dos ângulos internos do triângulo $[ABC]$.

F.1.6. Utilize a noção de seno e de co seno para calcular a razão $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$.

F.2. Repare que $[A, C]$ é uma diagonal do pentágono e $[A, B]$ é um lado do pentágono. Verifique que a razão entre a medida da diagonal do pentágono regular e a medida do lado coincide com o Número de Ouro.

⁵² Fonte: <http://www.republicaeditorial.com.br/?p=663>

5.29. Proposta de resolução da Tarefa F

Na construção deste pentágono regular, será utilizado o *software* de geometria dinâmica, o *Geogebra*. Este *software* facilita a criação de construções matemáticas por professores e alunos, permitindo uma exploração interativa, arrastando objetos e/ou alterações de valores de parâmetros.

A experimentação, a simulação e a ilustração permitem a investigação e a exploração, possibilitando aprofundar a compreensão de determinado conceito.

Através da seleção de ferramentas apropriadas na barra de ferramentas podem-se realizar construções na área gráfica apenas recorrendo ao rato do computador. Em simultâneo, as coordenadas correspondentes e as equações são apresentadas na área algébrica. O campo de entrada é utilizado para introduzir no *Geogebra* coordenadas de pontos, equações, comandos ou expressões de funções diretamente. De facto, a Geometria e a Álgebra trabalham lado a lado.

Depois de iniciar o *software* apresenta-se a seguinte *interface*:

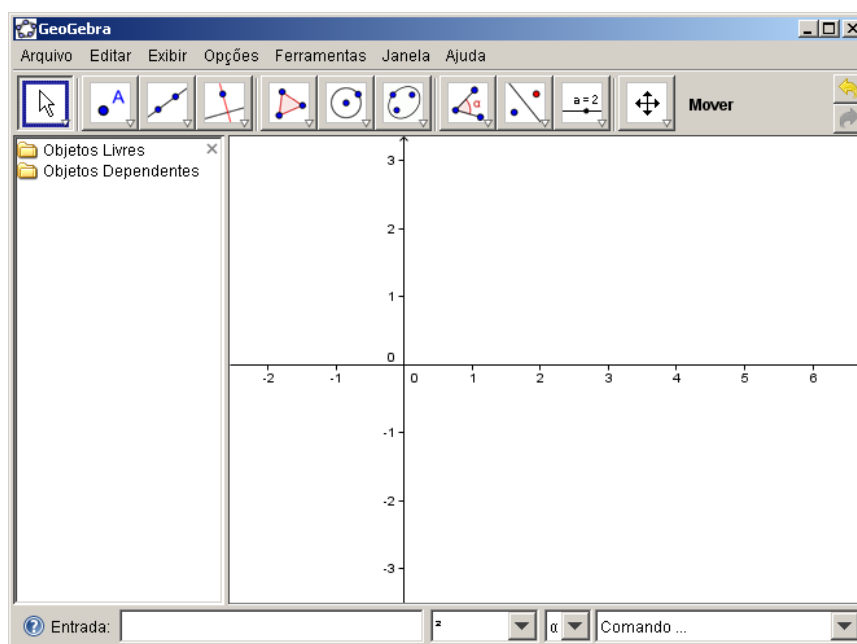


Figura 53: Ambiente de trabalho do *Geogebra* ⁵³

F.1.1. e F.1.2. Na resolução desta questão, devem ser exploradas as potencialidades do *Geogebra*. Seguindo os passos do enunciado, obtemos um pentágono regular inscrito numa circunferência,

⁵³ Fonte: http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tela_inicial_do_GeoGebra_3.2.30.0.png

dividindo a circunferência em cinco partes com uma amplitude de 72° cada. Obtemos assim, a seguinte imagem:

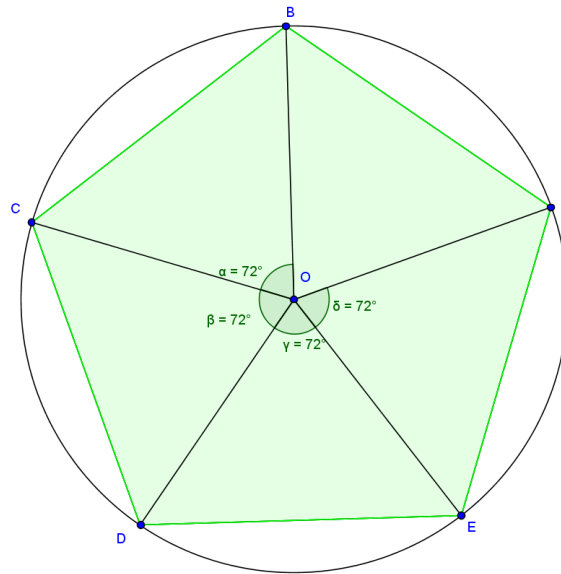


Figura 54 : Pentágono regular inscrito numa circunferência

F.1.3. Ocultando os segmentos de reta que dividem o pentágono em cinco partes iguais e construindo as cinco diagonais do pentágono regular, obtemos uma estrela pentagonal, tal como mostra na seguinte imagem:

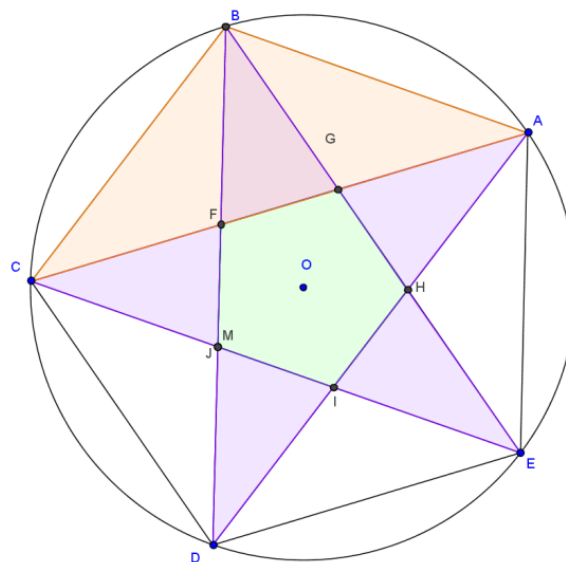


Figura 55 : Estrela pentagonal

Ocultando a circunferência e fazendo as medições necessárias, usando os recursos do *Geogebra*, obtemos a seguinte imagem:

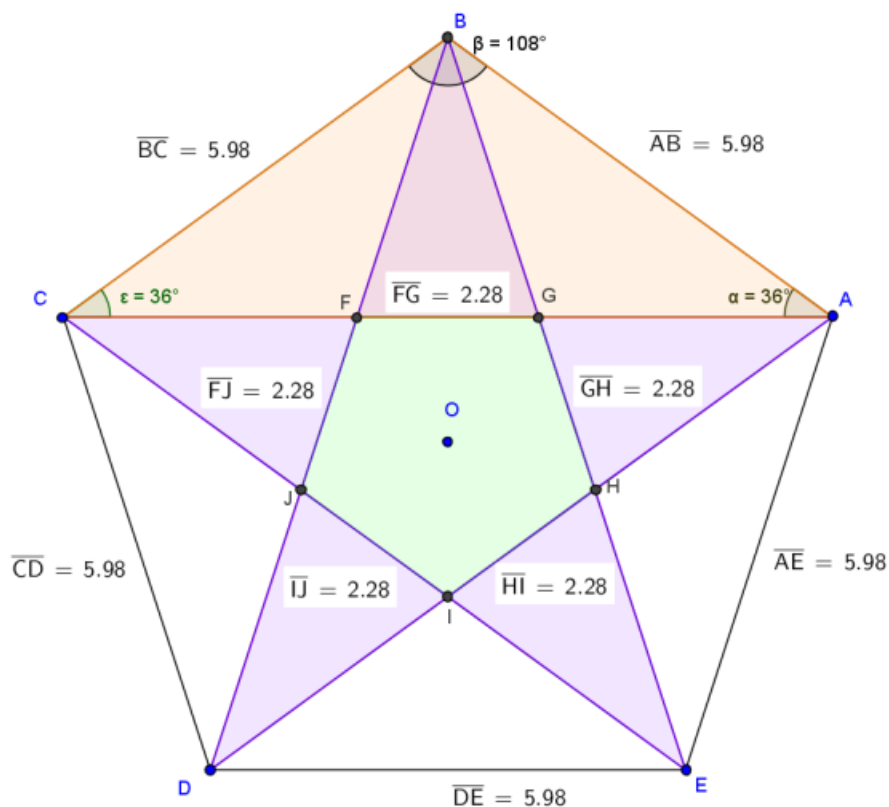


Figura 56: Construção de um pentágono áureo com recurso ao *Geogebra*

F.1.4. Como o pentágono é regular, tem os lados todos iguais, como dois desses lados coincidem com os lados do triângulo, concluímos que o triângulo $[ABC]$ é isósceles, sendo que $\overline{AB} = \overline{BC}$. Relativamente à classificação do triângulo, quanto aos ângulos, é obtusângulo, visto que possui um ângulo obtuso de 108° .

F.1.5. Cálculo da amplitude dos ângulos internos do triângulo $[ABC]$:

$$\widehat{ABC} = 180^\circ - \frac{360^\circ}{5} = 108^\circ.$$

Os outros dois ângulos são iguais, pois o triângulo $[ABC]$ é isósceles:

$$\widehat{ACB} = \widehat{BAC} = \frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ.$$

F.1.6. Para calcular a razão $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$, usaremos o seguinte triângulo retângulo, retirado do pentágono áureo acima:

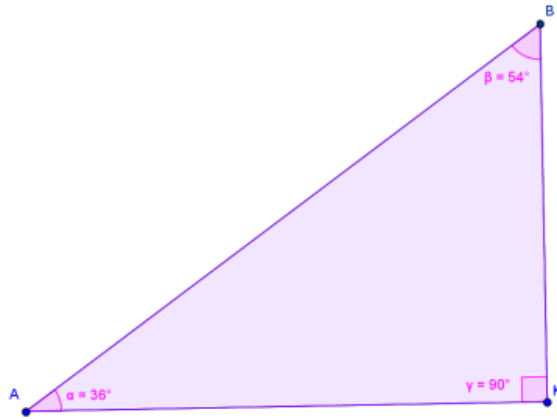


Figura 57: Triângulo rectângulo

Utilizando as razões trigonométricas, obtemos:

$$\text{sen}54^0 = \frac{\overline{AK}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AK} = \overline{AB} \times \text{sen}54^0;$$

$$\text{cos}54^0 = \frac{\overline{BK}}{\overline{AB}} \Leftrightarrow \overline{AB} = \frac{\overline{BK}}{\text{cos}54^0};$$

$$\overline{AK} = \overline{AB} \times \text{sen}54^0 \Leftrightarrow \overline{AK} = \frac{\overline{BK}}{\text{cos}54^0} \times \text{sen}54^0.$$

Como $\overline{AC} = 2 \times \overline{AK}$, vem que:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{2 \times \frac{\overline{BK}}{\text{cos}54^0} \times \text{sen}54^0}{\frac{\overline{BK}}{\text{cos}54^0}} \Leftrightarrow \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = 2 \times \text{sen}54^0.$$

F.2. Verifica-se que $\overline{AC}$ é uma diagonal do pentágono áureo e $\overline{AB}$ é um lado do pentágono.

A razão entre o comprimento da diagonal do pentágono áureo e o comprimento do lado desse pentágono é aproximadamente igual ao Número de Ouro:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = 2 \times \text{sen}54^0 \cong \phi.$$

5.30. Orientações para a resolução e exploração da Tarefa F

Com a realização desta tarefa F, os alunos poderão trabalhar matemática de forma lúdica e interativa. Para além de aprenderem os conteúdos previstos para esta atividade, os alunos deverão explorar as potencialidades do *Geogebra*.

Esta tarefa é muito rica em conteúdos matemáticos, pois nela os alunos trabalharão a construção de figuras geométricas, nomeadamente, de um pentágono regular, com recurso ao *software* de geometria dinâmica *Geogebra*; farão a revisão de conteúdos apreendidos em anos anteriores, como é o caso da classificação de triângulos, quanto aos lados e quanto aos ângulos e da determinação de amplitudes dos ângulos internos de um triângulo; e utilizarão as razões trigonométricas, para deduzir fórmulas e determinar distâncias desconhecidas.

Nas questões F.1.1., F.1.2. e F.1.3. os alunos deverão conhecer e explorar o *Geogebra*, e utilizando as suas potencialidades, terão de construir um pentágono regular inscrito numa circunferência. De seguida, deverão traçar as cinco diagonais do pentágono regular, obtendo assim, uma estrela de cinco pontas inscrita no pentágono regular.

Na questão F.1.4. o professor deverá aproveitar para fazer a revisão da classificação de triângulos quanto aos lados: isósceles, escaleno ou equilátero; e quanto aos ângulos: retângulo, obtusângulo ou acutângulo. Após esta pequena revisão, os alunos deverão classificar o triângulo pedido, quanto aos lados e quanto aos ângulos.

Na questão F.1.5. os alunos deverão calcular as amplitudes dos ângulos internos do triângulo $[ABC]$. O professor deverá fazer uma revisão da fórmula que nos dá as amplitudes dos ângulos internos de um polígono regular de n lados: $S = 180^\circ \times (n - 2)$. Assim sendo, a amplitude de cada ângulo interno é dada pela fórmula: $180^\circ - \frac{360^\circ}{n}$. Após esta revisão de conteúdos, os alunos deverão usar estas fórmulas para calcularem a amplitude de cada ângulo interno do pentágono regular. Essa é a amplitude igual à do ângulo ABC do triângulo $[ABC]$, sendo igual a 108° . Como se trata de um triângulo isósceles e como a soma das amplitudes dos ângulos internos de qualquer triângulo é igual a 180° , as amplitudes dos restantes ângulos do triângulo serão dadas por $\frac{180^\circ - 108^\circ}{2} = 36^\circ$.

Na questão F.1.6. os alunos deverão determinar as medidas de comprimentos dos lados de um triângulo retângulo, usando o seno e o cos seno de um ângulo, para conseguirem descobrir o valor da razão $\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$, usando as razões trigonométricas. Os resultados pedidos, deverão ser apresentados o mais simplificado possível.

Na última questão desta tarefa F, os alunos deverão concluir que a razão entre o comprimento de uma diagonal qualquer de um pentágono regular e o comprimento de um lado desse pentágono é um valor que se aproxima muito do Número de Ouro, por essa razão é chamado pentágono áureo.

5.31. Introdução à Tarefa G

Com a realização da tarefa G pretendemos que os alunos deduzam e estudem várias propriedades que relacionam a sequência de Fibonacci e a sequência de Lucas.

As operações com os números reais são lecionadas, no novo Programa de Matemática, no 8.º ano de escolaridade, bem como os casos notáveis da multiplicação. No entanto, o trabalho das operações com radicais é desenvolvido no 9.º ano de escolaridade e, neste sentido, a tarefa G é proposta para o 9.º ano de escolaridade.

Sendo duas sequências muito similares, com a resolução da tarefa G, os alunos deverão investigar relações existentes entre estas duas sequências por observação dos seus termos. Nesta tarefa, os alunos deverão conhecer os termos de cada uma das sequências, bem como o termo geral de cada uma delas, e utilizar a fórmula de Binet para simplificar expressões que envolvam as duas sequências.

Podemos classificar esta tarefa, de acordo com Ponte (2004, p. 8), como um problema, uma vez que as questões apresentadas possuem um grau de dificuldade elevado e de resposta fechada.

No que diz respeito à duração da tarefa, pode-se considerar de duração média, sendo proposta para um bloco de noventa minutos. Trata-se de uma tarefa que surge num contexto puramente matemático.

Todas as questões estão formuladas de forma a direcionar os alunos para os objetivos pretendidos desta tarefa. Sugere-se que esta tarefa seja resolvida em grupo de dois, privilegiando a troca e partilha de ideias, apenas, entre dois alunos.

5.32. Planificação da Tarefa G

Domínio matemático: Números e Operações.

Tópicos matemáticos: Operações com números reais.

Subtópicos matemáticos: Sequência de Fibonacci; Sequência de Lucas; Propriedades das operações em $\mathbb{R}$; Fórmula de Binet.

Conhecimentos prévios:

- Noção de número natural, inteiro, racional e real;
- Propriedades das operações em $\mathbb{R}$;
- Noção de raiz quadrada e de raiz potência;
- Problemas envolvendo o cálculo de números racionais representados na forma de frações, dízimas, percentagens e numerais mistos;
- Casos notáveis da multiplicação;
- Propriedades dos radicais.

Objetivos específicos:

- Reconhecer que as propriedades das operações em $\mathbb{Q}$ se mantêm em $\mathbb{R}$ e aplicá-las na simplificação de expressões;
- Determinar termos da sequência de Fibonacci, da sequência de Lucas, bem como de outras sequências similares, definidas por recorrência;
- Simplificar e ordenar expressões numéricas reais que envolvam frações, dízimas e radicais utilizando as propriedades da relação de ordem;
- Resolver problemas usando operações e propriedades de $\mathbb{R}$;
- Conhecer e usar a fórmula de Binet na simplificação de expressões numéricas;
- Relacionar potências e raízes.

Desenvolvimento da aula:

- Trabalho de pares.
- Duração total da tarefa- 90 minutos, sendo:
 - Apresentação da tarefa: 5 minutos;
 - Trabalho autónomo dos alunos: 50 minutos;
 - Apresentação e discussão de resultados à turma: 20 minutos;
 - Síntese final e registos: 15 minutos.

Recursos utilizados:

- Tarefa G, manual escolar, caderno diário e material de escrita.

Avaliação:

- Domínio de conceitos e procedimentos matemáticos;
- Empenho e do interesse na Tarefa proposta;
- Respeito pelas normas de trabalho e convivência;
- Qualidade da participação na aula;
- Grelha de observação do trabalho dos alunos.

Capacidades transversais a desenvolver:

- Raciocínio matemático;
- Resolução de problemas;
- Comunicação matemática;
- Discutir ideias e resultados.

5.33. Tarefa G: “Propriedades que relacionam a sequência de Fibonacci e a sequência de Lucas”

G.1. Escreva os 20 primeiros termos da sequência de Fibonacci.

G.2. Escreva os 20 primeiros termos da sequência de Lucas.

G.3. Estude os resultados obtidos nas duas questões anteriores e procure três possíveis relações numéricas entre os números de Fibonacci e os números de Lucas.

G.4. Considere a seguinte sequência:

$$H_1 = 1, H_2 = 4 \text{ e } H_{n+2} = H_{n+1} + H_n, \quad n \geq 1.$$

Determine os 20 primeiros termos desta sequência.

G.5. Verifique que:

G.5.1. $L_5 = F_6 + F_4;$

G.5.2. $F_9 = F_5^2 + F_4^2;$

$$\text{G.5.3. } L_7 + L_9 = 5F_8;$$

$$\text{G.5.4. } H_{20} = 4F_{19} + F_{18}, \text{ sendo}$$

H a sequência definida na questão G.4. .

$$\text{G.5.5. } F_8 = L_4F_4;$$

$$\text{G.5.6. } \frac{F_{10}}{F_5} \text{ é um número inteiro;}$$

$$\text{G.5.7. } F_7 \times F_9 - F_8^2 = 1;$$

$$\text{G.5.8. } L_3 \times L_5 - L_4^2 = -5.$$

G.6. Usando a fórmula de Binet para a sequência de Fibonacci: $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$ e a fórmula de Binet para a sequência de Lucas: $L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n$, mostre que:

$$\text{G.6.1. } F_{2n} = F_n L_n, \quad n \geq 1;$$

$$\text{G.6.2. } 5F_n^2 = L_n^2 - 4(-1)^n, \quad n \geq 1.$$

5.34. Proposta de resolução da Tarefa G

G.1. Os vinte primeiros termos da sequência de Fibonacci são:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765.

G.2. Os vinte primeiros termos da sequência de Lucas são:

1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, 843, 1364, 2207, 3571, 5778, 9349, 15127.

G.3. Existem várias relações numéricas entre os números de Lucas e os números de Fibonacci, como por exemplo:

$$L_2 = F_1 + F_3 \Leftrightarrow 3 = 1 + 2 \Leftrightarrow 3 = 3;$$

$$L_3 = F_2 + F_4 \Leftrightarrow 4 = 1 + 3 \Leftrightarrow 4 = 4;$$

$$L_4 = F_3 + F_5 \Leftrightarrow 7 = 2 + 5 \Leftrightarrow 7 = 7.$$

Partindo dos exemplos atrás referidos e da demonstração feita no capítulo II, podemos concluir que para $n > 1$, se somar os respectivos números de Fibonacci, $F_{n-1} + F_{n+1}$, o resultado dá o número de Lucas de ordem n , isto é:

$$F_{n-1} + F_{n+1} = L_n, \quad n > 1.$$

Outra relação entre estas duas sequências é a seguinte:

$$5F_2 = L_1 + L_3 \Leftrightarrow 5 \times 1 = 1 + 4 \Leftrightarrow 5 = 5;$$

$$5F_3 = L_2 + L_4 \Leftrightarrow 5 \times 2 = 3 + 7 \Leftrightarrow 10 = 10;$$

$$5F_4 = L_3 + L_5 \Leftrightarrow 5 \times 3 = 4 + 11 \Leftrightarrow 15 = 15.$$

Partindo dos exemplos atrás referidos e da demonstração feita no capítulo II., podemos concluir que para $n > 1$:

$$5F_n = L_{n-1} + L_{n+1}, \quad n > 1.$$

Existem muitas relações entre estas duas sequências, um outro exemplo é o seguinte:

$$F_2 = F_1 \times L_1 \Leftrightarrow 1 = 1 \times 1 \Leftrightarrow 1 = 1;$$

$$F_4 = F_2 \times L_2 \Leftrightarrow 3 = 1 \times 3 \Leftrightarrow 3 = 3;$$

$$F_6 = F_3 \times L_3 \Leftrightarrow 8 = 2 \times 4 \Leftrightarrow 8 = 8.$$

Partindo dos exemplos atrás referidos, podemos concluir que para $n > 1$:

$$F_{2n} = F_n \times L_n, \quad n > 1.$$

G.4. Os vinte primeiros termos da sequência referida são:

1, 4, 5, 9, 14, 23, 37, 60, 97, 157, 254, 411, 665, 1076, 1741, 2817, 4558, 7375, 11933, 19308.

G.5.1. $L_5 = F_6 + F_4 \Leftrightarrow 11 = 8 + 3 \Leftrightarrow 11 = 11;$

G.5.2. $F_9 = F_5^2 + F_4^2 \Leftrightarrow 34 = 5^2 + 3^2 \Leftrightarrow 34 = 34;$

G.5.3. $L_7 + L_9 = 5F_8 \Leftrightarrow 29 + 76 = 5 \times 21 \Leftrightarrow 105 = 105;$

G.5.4. $H_{20} = 4F_{19} + F_{18} \Leftrightarrow 19308 = 4 \times 4181 + 2584 \Leftrightarrow 19308 = 19308;$

G.5.5. $F_8 = L_4 F_4 \Leftrightarrow 21 = 7 \times 3 \Leftrightarrow 21 = 21;$

G.5.6. $\frac{F_{10}}{F_5} = \frac{55}{5} = 11$ é um número inteiro;

G.5.7. $F_7 \times F_9 - F_8^2 = 1 \Leftrightarrow 13 \times 34 - 21^2 = 1 \Leftrightarrow 442 - 441 = 1 \Leftrightarrow 1 = 1;$

G.5.8. $L_3 \times L_5 - L_4^2 = -5 \Leftrightarrow 4 \times 11 - 7^2 = -5 \Leftrightarrow -5 = -5.$

G.6.1. Mostremos que a propriedade é verdadeira, usando a fórmula de Binet para a sequência de Lucas e a fórmula de Binet para a sequência de Fibonacci: $F_{2n} = F_n L_n$.

$$\begin{aligned}
F_{2n} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n} \right]; \\
F_n L_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \times \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow F_n L_n &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n} \right] \Leftrightarrow F_n L_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n} \right].
\end{aligned}$$

G.6.2. Mostremos que a propriedade é verdadeira, usando a fórmula de Binet para a sequência de Lucas e a fórmula de Binet para a sequência de Fibonacci:

$$\begin{aligned}
5F_n^2 &= L_n^2 - 4(-1)^n \Leftrightarrow \\
\Leftrightarrow 5 \times \left(\frac{1}{\sqrt{5}} \right)^2 \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]^2 &= \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]^2 - 4(-1)^n \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \frac{5}{5} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n} - 2 \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n} \right] \\
&= \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{2n} + 2 \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{2n} - 4(-1)^n \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow -2 \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n = 2 \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n - 4(-1)^n \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow -4 \times \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n = -4(-1)^n \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right) \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right) \right]^n = (-1)^n \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{1-5}{4} \right)^n = (-1)^n \Leftrightarrow (-1)^n = (-1)^n.
\end{aligned}$$

5.35. Orientações para a resolução e exploração da Tarefa G

Com a realização desta tarefa G, os alunos poderão investigar relações matemáticas que existem entre a sequência de Fibonacci e a sequência de Lucas.

Nas questões G.1., G.2. e G.4., os alunos deverão saber determinar termos de sequências definidas por recorrência, deduzindo qual a regra que permite calcular os termos seguintes, à custa dos anteriores. As três sequências que são propostas nesta tarefa são todas similares, a partir do 2.º termo, os termos seguinte obtêm-se somando os dois termos anteriores.

Na questão G.3., os alunos deverão observar os termos da sequência de Fibonacci e da sequência de Lucas e descobrir relações numéricas entre estas duas sequências. Para além destas sequências terem a mesma regra de formação, têm imensas propriedades que as relacionam, algumas já referidas e demonstradas neste Relatório.

Os alunos deverão verificar, entre outras propriedades, por exemplo:

- que para $n > 1$, se somar os respetivos números de Fibonacci, $F_{n-1} + F_{n+1}$, o resultado dá o número de Lucas de ordem n ;
- que para $n > 1$, se somar os respetivos números de Lucas, $L_{n-1} + L_{n+1}$, o resultado dá o quádruplo do número de Fibonacci de ordem n ;
- que para $n > 1$, se multiplicar o número de Lucas e o número de Fibonacci de ordem n , o resultado dá o número de Fibonacci de ordem $2n$.

Na questão G.5., pretende-se que os alunos verifiquem determinadas propriedades das sequências referidas, trabalhando as operações com números reais, usando os termos das sequências.

Na última questão, pretende-se que os alunos utilizem a fórmula de Binet, para a sequência de Lucas e para a sequência de Fibonacci, na simplificação de expressões numéricas, verificando assim determinadas propriedades que as relacionam. Nesta questão são trabalhadas as operações com radicais e os casos notáveis da multiplicação.

Os alunos deverão efetuar as operações pedidas e para tal poderão escolher dois processos: simplificar os dois membros da equação chegando a um mesmo resultado, ou simplificar um dos termos da equação até obtermos o outro termo.

CAPÍTULO VI – CONCLUSÕES E LIMITAÇÕES AO ESTUDO

Ao longo do nosso percurso profissional, concluímos que ser Professor implica a necessidade de estar sempre atento às mudanças que vão ocorrendo na sociedade. Devemos procurar mantermo-nos sempre informados e atualizados acerca da evolução de conceitos, procedimentos e estratégias que vão ocorrendo na área da educação.

A evolução da sociedade implica uma mudança nas estratégias usadas na forma de ensinar. Os professores devem propor desafios cada vez mais inovadores e que vão ao encontro das necessidades de resposta dos alunos. Neste sentido, um educador precisa de procurar novos conhecimentos, mantendo-se atualizado, acompanhando a mudança de perspetivas que vão surgindo ao longo dos tempos.

Neste trabalho propomos o estudo da história e da relação entre as sequências de Fibonacci e de Lucas. Estes conteúdos apresentam-se desenvolvidos de forma deficitária no novo Programa de Matemática para o Ensino Básico. Sabendo que o estudo das sequências e dos números reais fazem parte dos conteúdos do Currículo Nacional, propomos um alargamento do estudo destes conceitos, nomeadamente, incluindo o estudo das sequências de Fibonacci e de Lucas, bem como do Número de Ouro, de forma mais específica, nos conteúdos a lecionar na disciplina de Matemática no 3.º Ciclo do Ensino Básico.

Achamos muito interessante propor o estudo destes temas no Ensino Básico, devido ao facto de possuírem características muito importantes que poderão servir como ponto de partida para o desenvolvimento de outros conteúdos da disciplina de Matemática, nomeadamente, das Funções, das Equações, da História da Matemática, etc.

Ao elaborar este trabalho, consideramos que os principais objetivos foram os seguintes:

- Pesquisar dados históricos relativos às sequências de Fibonacci e de Lucas;
- Estudar algumas propriedades de cada uma das sequências acima referidas;
- Evidenciar e provar a estreita relação existente entre estas duas sequências;
- Indicar a relação existente entre a sequência de Fibonacci e o Número de Ouro;
- Verificar a aplicação da Matemática à vida real, nomeadamente, da sequência de Fibonacci e do Número de Ouro em várias situações do dia a dia;
- Desenvolver e aprofundar conhecimentos relativos ao novo Programa de Matemática para o Ensino Básico, que entrará em vigor no atual ano letivo de 2013/2014;
- Fazer uma reflexão crítica relativa ao novo Programa de Matemática para o Ensino Básico;

- Sugerir situações em que se utilize a razão áurea no ensino da Matemática;
- Propor um conjunto de atividades que poderão servir de recursos para os professores aplicarem em ambiente de sala de aula, que permitam o desenvolvimento dos tópicos relativos à sequência de Fibonacci e ao Número de Ouro;
- Fazer uma proposta de inclusão do estudo mais aprofundado da sequência de Fibonacci e do Número de Ouro nos Programas de Matemática do 3.º Ciclo do Ensino Básico.

Pensamos que todos os objetivos acima referidos foram atingidos com a realização deste Relatório. Nele podemos consultar e aprofundar conhecimentos científicos e propriedades importantes relativas à sequência de Fibonacci, ao Número de Ouro e à sequência de Lucas.

Neste trabalho, podemos também, encontrar um conjunto de tarefas e respetivas planificações, que estão de acordo com o novo Programa de Matemática do Ensino Básico (2013). Estas tarefas foram rigorosamente preparadas com vista a uma proposta de inclusão de um estudo mais aprofundado da sequência de Fibonacci e do Número de Ouro, no Currículo de Matemática do Ensino Básico, e que poderão servir de recursos para o estudo e desenvolvimento destes conteúdos em ambiente de sala de aula.

O uso das tecnologias no ensino da Matemática estimula a aprendizagem dos alunos e representam excelentes recursos que auxiliam os professores nos conteúdos a lecionar. Algumas das tarefas propostas poderão ser resolvidas recorrendo às tecnologias, nomeadamente ao *software* de geometria dinâmica *Geogebra*. Este tipo de recursos motivam os alunos para a aprendizagem, tornando as tarefas mais agradáveis, estimulantes e atrativas.

Não poderíamos deixar de referir a impossibilidade de aplicar estas tarefas em contexto de sala de aula. Seria com certeza muito interessante verificar qual o interesse e empenho dos alunos na resolução destas tarefas, bem como na análise dos resultados obtidos. No entanto, oportunidades não faltarão para continuarmos o estudo destes temas, bem como a sua aplicação em sala de aula.

Em jeito de conclusão, considero que este trabalho foi muito importante para a minha evolução enquanto professora de Matemática. Representa uma etapa muito importante na minha vida, de dedicação e de estudo, que deixou marcas e uma enorme vontade de continuar a procurar novos conhecimentos.

Resta-me acrescentar, que o trabalho árduo e as noites perdidas, foram produtivas para o meu aperfeiçoamento. A dedicação e esforço ao longo deste período, as aprendizagens que realizei, a troca de experiências e o convívio saudável, nomeadamente com a orientadora deste Relatório, levam-me a encher de orgulho o trabalho apresentado neste documento.

BIBLIOGRAFIA

- Araújo, M., Feitosa, F. & Ribeiro, B. (2011). *Notas de Aulas. Introdução à Teoria de Números*. Universidade Federal de Juíz de Fora, Brasil.
- Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F. & Timóteo M. (2012). *Metas Curriculares Matemática Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.
- Bivar, A., Grosso, C., Oliveira, F. & Timóteo M. (2013). *Programa de Matemática Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação e Ciência.
- Boyer, C. (1996). *Historia de la matemática*. Madrid: Alianza Universidad Textos.
- Burton, David, M. (1976). *Elementary number theory*. Allyn Bacon and Bacon, Inc.
- Caldwell, C. K. & Komatsu, T., “Some Periodicities in the Continued Fraction Expansions of Fibonacci and Lucas Dirichlet Series”. *The Fibonacci Quarterly*, 48, no. 1 (2010), 47-55.
- Catarino, P., “On some identities and generating functions for k -Pell numbers”, *International Journal of Mathematical Analysis*, Vol. 7 (38) (2013), 1877-1884.
- Catarino, P. & Vasco, P., “On some Identities and Generating Functions for k - Pell-Lucas sequence”, *Applied Mathematical Sciences*, Vol. 7 (98) (2013), 4867 – 4873.
- Conceição, A. & Almeida, M. (2012). *Matematicamente Falando 9 – Matemática – 9.º ano*. Porto: Areal Editores.
- Corbalán, F. (2010). *A Proporção Áurea- A linguagem matemática da beleza*. Lisboa: RBA Coleccionables, S.A..
- Costa, B. & Rodrigues, E. (2010). *Novo espaço. Matemática A- 10º ano (parte 1)*. Lisboa: Porto Editora.

- Costa, E. A História da Ciência e o ensino da recursividade: As torres de Hanói. *História da Ciência e Ensino – Construindo interfaces*, v. 4 (2011), 38-48.
- D’Ambrósio, U. (2003). *Educação Matemática: da teoria à prática (10ª edição)*. Campinas/SP: Editora Papirus.
- Estrada, M. F., Sá, C. C., Queiró, J., F., Silva, M., C. & Costa, M. J. (2000). *História da Matemática*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Garcia, V., Serres, F., Magro, J. & Azevedo, A. (2006). *O Número de Ouro como instrumento de aprendizagem significativa no estudo dos números irracionais*, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil.
- Gusmão, G. A. Sequência de Fibonacci. *Revista de Olimpíada*, no. 4 (2003), 47-63.
- Hoggatt, V. E. (1969). *Fibonacci and Lucas Numbers*. A publication of the Fibonacci Association. University of Santa Clara, Santa Clara. Houghton Mifflin Company.
- Jhala, D., Sisodiya, K. & G. P. S. Rathore, “On Some Identities for k -Jacobsthal Numbers”, *Int. Journal of Math. Analysis*, Vol. 7, no. 12 (2013), 551-556.
- Marques, D. “The Order of Appearance of the Product of Consecutive Lucas Numbers”, *The Fibonacci Quarterly*, 51(1) (2013), 38-43.
- Marques, M. & Ferreira P. (2012). *Matemática – 9.ºano (volume 2)*. Carnaxide: Santillana Constância.
- Mason, J., Graham, A. & Wilder, S. (2005). *Developing thinking in Algebra*. The Open University.
- Ministério da Educação. (2001). *Currículo nacional do ensino básico. Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento da Educação Básica.

- Monteiro, C. (2006). *Uma conversa sobre Educação Matemática*. Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

- Moura, V. G. (1994). *Camões e a Divina Proporção*. Lisboa Imprensa Nacional- Casa da Moeda.

- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. [Tradução portuguesa da edição original, *Principles and standards for school mathematics*, 2000]. Lisboa: APM.

- Neto, P. (2013). *A aplicação do Número de Ouro como recurso metodológico no processo de ensino-aprendizagem*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Piauí, Brasil.

- Neves, M., A., Guerreiro, L. & Pereira, A., (2004). *Matemática B -10º ano*. Porto: Porto Editora.

- Neves, M., A., Silva, A. P., Raposo, M., J. & Silva, J., N. (2012). *Matemática – 9.º ano (parte 2)*. Porto: Porto editora.

- Oliveira, C. (2010). *Razão Áurea: Suas aplicações e importância no Ensino da Matemática*. Monografia , Instituto Superior de Educação da Faculdade Alfredo Nasser, Brasil.

- Pacci, D. & Rodrigues, C. (2013). *Sequência de Fibonacci*. Trabalho do curso de Licenciatura em Matemática, Universidade Estadual de Campinas, Brasil.

- Ponte, J. P., Brocardo, J.& Oliveira, H. (2003) . *Investigações matemáticas na sala de aula* (capítulo 7). Belo Horizonte: Autêntica.

- Ponte, J. P. (2004). *Gestão curricular em Matemática*. Lisboa: Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, 8-10.

- Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. Em I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, A. P. Canavarro (Orgs). *Números e Álgebra na aprendizagem da matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

- Ponte, J. P., Serrezina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M.E.G. & Oliveira P.A. (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. Lisboa: Ministério da Educação - Direção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

- Ramos, M. (2013). *A Sequência de Fibonacci e o Número de Ouro*. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Santa Cruz, Brasil.

- Rojano, T. (2002). Mathematics Learning in the Junior Secondary School: Students' Access to significant Mathematical Ideas. In L. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (vol. 1, pp. 143-161). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

- Saraiva, M., Pereira, M. & Berrincha, R. (2010). *Sequências e expressões algébricas. Aprendizagem da resolução de equações a partir de igualdades numéricas. Tarefas para o 7.º ano de escolaridade. Materiais de apoio ao Professor*. Lisboa: APM, FCT.

- Shattuck, M., "Combinatorial Proofs of Determinant Formulas for the Fibonacci and Lucas Polynomials", *The Fibonacci Quarterly*, 51 (1) (2013), 63-71.

- Vorobiov, N. N., (1974). *Números de Fibonacci*. Editora MIR, URSS.

- Zeckendorf, E., Representation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas, *Bull. de la Soc. Royale des Sci. de Liege*, 41 (1972), 179-182.

WEBGRAFIA

A seguir indicam-se os *sites* da *internet* de onde foram retirados alguns dados, bem como algumas figuras que constam no texto:

- [1]. Alves, A. P. (2011). A Matemática na natureza. *Infinito – Blog de Matemática*. Acedido janeiro 10, 2013, em <http://infinito-matematica.co/curiosidades/>
- [2]. Ana & Rui (2002). Papiro de Rhind. *Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa*. Acedido maio 30, 2013, em <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/rhind/inicio.htm>
- [3]. Associação de Professores de Matemática (2012). *Metas Curriculares do Ensino Básico Matemática–Parecer*. Acedido janeiro 19, 2013, em [http://www.apm.pt/files/200299_Parecer_APM - Metas Curriculares_500dc8c09d26f.pdf](http://www.apm.pt/files/200299_Parecer_APM_-_Metas_Curriculares_500dc8c09d26f.pdf).
- [4]. Associação de Professores de Matemática (2013). *Posição da direcção da Associação de Professores de Matemática face à recente homologação do Programa de Matemática para o Ensino Básico*. Acedido julho 1, 2013, em [http://www.apm.pt/files/ HomologacaoPMat_posicaoAPM_51c99507c9ab6.pdf](http://www.apm.pt/files/HomologacaoPMat_posicaoAPM_51c99507c9ab6.pdf)
- [5]. Associação de Professores de Matemática (2013). *Posição da direcção da Associação de Professores de Matemática sobre o despacho de revogação do Programa de Matemática do Ensino Básico*. Acedido maio 8, 2013, em http://www.apm.pt/files/205600_PosDirAPMrevPMEB_2013_519167625d7a0.pdf
- [6]. Barcelos, A. (2004). Álgebra na Itália. Capítulo I: Fibonacci e sua sequência. Acedido dezembro 11, 2013, em http://www.geocities.ws/ailton_barcelos/naitalia.htm
- [7]. Barata A. (2012). *As mais belas bibliotecas do Mundo: Biblioteca geral histórica da Universidade de Salamanca-Espanha*. Acedido maio 23, 2013, em http://jabarata.blogspot.pt/2012_06_01_archive.html

- [8]. Cabrero, G. (n.d.). *Constructivismo soviético*. Acedido junho 12, 2013, em <http://gutierrezcabrero.dpa-etsam.com/page/15/>
- [9]. Correia, A. & Andrade, C. (1999). Geometria a várias dimensões: Sólidos platónicos. *Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa*. Acedido dezembro 20, 2012, em http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm43/sol_plat.htm
- [10]. Diaz M. (n.d.). *El Numero de Oro*. Acedido abril 2, 2013, em <http://www.dav.sceu.frba.utn.edu.ar/homovidens/MirtaDiaz/Proyectofinal/index.htm>
- [11]. Didáxis – Escola Cooperativa V. S. Cosme (n.d.). História e personalidades da Matemática. O Número de Ouro. *Mat3mática*. Acedido julho 1, 2013, em <http://www.didaxis.org/matematicaonline/index.php?url=historiamatematica>
- [12]. ebook3000.com (2010). *Fibonacci's Liber Abaci*. Acedido outubro 15, 2012, em http://www.ebook3000.com/Fibonacci-s-Liber-Abaci_60105.html
- [13]. Ferlin, G. (2012). *Modulor*. Acedido junho 3, 2013, em <http://giorgiaferlin.com/2012/12/13/modulor/>
- [14]. Ferrer, J. (n.d.). O Número de Ouro na arte, arquitectura e natureza: beleza e harmonia. *Ciência em galego*. Acedido março 27, 2013, em http://www.cienciaengalego.org/drupal6/sites/default/files/numero_de_ouro.pdf
- [15]. Fibonacci Quarterly (2013). Fibonacci and Lucas Numbers. *Books and Tables Published by the Fibonacci Association*. Acedido agosto 20, 2013, em www.fq.math.ca
- [16]. Freire, B. & Dias C. (2009). *Notas de aula. Teoria de Números: A Sequências de Fibonacci*. Acedido março 20, 2013, em http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br/wp-content/uploads/2013/08/NOTAS-DE-AULA_09.pdf.
- [17]. Granato F. & Bela, L.(2010). Pintura: O nascimento de Vénus. *Sala Renascentista*. Acedido fevereiro 26, 2013, em <http://luisaefelipe77.blogspot.pt/2010/10/pintura-o-nascimento-de-venus.html>

- [18]. Instituto Federal de Santa Catarina (2012). *Phi – O Número de Ouro. Aplicações da razão áurea*. Acedido maio 2, 2013, em <http://razaoaureaifsc.blogspot.pt/2012/09/aplicacoes-da-razao-aurea.html>
- [19]. Jamal, R. (2010). O Número de Ouro. *República Editorial*. Acedido janeiro 28, 2013, em <http://www.republicaeditorial.com.br/?p=663>
- [20]. Justo, D.(2011). A perfeição divina aplicada à arte e ao design. *Design on the rocks*. Acedido junho 17, 2013, em <http://www.designontherocks.xpg.com.br/a-perfeicao-divina-aplicada-a-arte-e-ao-design/>
- [21]. Klein, J. (n.d.). Decifrando o código da natureza. Acedido maio, 12, 2013, em <http://www.chabad.org.br/biblioteca/artigos/codigo/home.html>
- [22]. Lamas, J. (2012). Proporção áurea. *Violino Acústico*. Acedido abril 16, 2013, em http://violinoacustico.blogspot.pt/2012_03_01_archive.html
- [23]. Maciel, F. (2008). A Proporção Áurea e curiosidades históricas ligadas ao desenvolvimento da ciência. Livros *MAE AFRICA*. Acedido fevereiro 8, 2013, em <http://www.africamae.com.br/?p=9>.
- [24]. maisnet (2011). *Unidade Habitacional de Marselha – Le Corbusier*. Acedido junho 12, 2013, em <http://www.maisnet.net/2011/03/unidade-habitacional-de-marselha-le-corbusier/>
- [25]. Montfort – Associação Cultural (2013). A beleza no mundo, no homem e em Deus: a Filosofia da Arte, a Sabedoria de Deus na criação e a vida espiritual (parte 7). *Artigos Montfort*. Acedido abril 11, 2013, em <http://www.montfort.org.br/a-beleza-no-mundo-no-homem-e-em-deus-a-filosofia-da-arte-a-sabedoria-de-deus-na-criacao-e-a-vida-espiritual-parte-7/>
- [26]. Os autores do Programa de Matemática do Ensino Básico de 2007 (2013). *Sobre o Programa de Matemática para o Ensino Básico recentemente homologado*. Acedido julho 8, 2013, em [http://www.apm.pt/files/SobreProgrMatHomol\(2013\)-autores_51d58e73899ae.pdf](http://www.apm.pt/files/SobreProgrMatHomol(2013)-autores_51d58e73899ae.pdf)

- [27]. Pensamento jovem (2010). *Leonardo Fibonacci*. Acedido outubro 19, 2012, em <http://pensamentojovem.blog.terra.com.br/2010/06/18/leonardo-fibonacci/>
- [28]. Piropo, B. (2007). *Um número muito especial VIII: Fi e as artes*. Acedido fevereiro 7, 2013, em <http://www.bpiropo.com.br/fpc20070226.htm>
- [29]. Preto, A. (2013). A criação e o número Phi. *Ser Luminoso*. Acedido junho 17, 2013, em <http://serluminoso.blogspot.pt/2013/06/a-criacao-e-o-numero-phi.html>
- [30]. Rafaela (2010). O Número de Ouro e a sequência de Fibonacci na natureza. *Hora Matemática*. Acedido julho 3, 2013, em <http://horamatematica.blogspot.pt/2010/11/o-numero-de-ouro-e-sequencia-de.html>
- [31]. Ribeiro, R. & Silva, C. (n.d.). O Misterioso Número de Ouro. *Arquivo do Centro de Matemática da Universidade do Porto*. Acedido março 27, 2013, em <http://cmup.fc.up.pt/cmup/mecs/O%20Misterioso%20Numero%20de%20Ouro.pdf>
- [32]. Rigonatto, M. (2010). Sequência de Fibonacci. *Brasil Escola*. Acedido novembro 16, 2012, em <http://www.brasilecola.com/matematica/sequencia-fibonacci.htm>
- [33]. Saindo da Matrix (2004). Fibonacci e o Phi. Acedido maio 21, 2013, em http://www.saindodamatrix.com.br/archives/2004/09/fibonacci_e_o_p.html
- [34]. Santana, C. (2012). A sequência de Fibonacci. *Charlezine: Revista electrónica de Cultura, Opinião e Filosofia*. Acedido abril 15, 2013, em <http://charlezine.com.br/sequencia-de-fibonacci/>
- [35]. Sociedade Portuguesa da Matemática (2013). *Parecer da Sociedade Portuguesa de Matemática sobre o Programa de Matemática – Ensino Básico*. Acedido maio 27, 2013, em http://spm.pt/files/outros/ProgramaEB_Parecer_SPM_2013-05-19.pdf
- [36]. Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática (2012). *Parecer sobre o documento “Metas Curriculares” para o Ensino Básico – Matemática*. Acedido janeiro 23, 2013, em

http://www.apm.pt/files/200299_SPIEM_PARECER_FINAL_METAS_CURRICULARES_500ebf3b9e854.pdf

[37]. Sodré, U. & Tóffoli, S. (2000). A sequência de Fibonacci. Acedido dezembro 11, 2012, em <http://www.interaula.com/matweb/alegria/fibon/seqfib1.htm>

[38]. Souza, J. de (2012). Um pouco sobre a sequência de Fibonacci. Acedido dezembro 11, 2012, em <http://fibonaccihmt.blogspot.pt/>

[39]. Stefano, F. (2012). Apple e il repporto aureo. *II Pappagallo di Fermat*. Acedido janeiro 7, 2013, em <http://pappagallodifermat.blogspot.pt/2012/07/apple-e-il-rapporto-aureo.html>

[40]. Tavares, J.N.(2006). A Fórmula de Euler. *Centro de Matemática da Universidade do Porto*. Acedido dezembro 27, 2012, em <http://cmup.fc.up.pt/cmup/pick/Manhas/Modulo3PolidrosEuler.html>

[41]. Vita, S. (2009). A percepção visual do espaço arquitectónico e sua representação no espaço televisivo: O caso do castelo Rá-Tim-Bum. *Arquivo da Universidade de São Judas Tadeu*. Acedido junho 25, 2013, em http://www.usjt.br/biblioteca/mono_disser/mono_diss/097.pdf

[42]. Wikimedia Commons (2009). *Tela inicial do GeoGebra 3.2.30.0.png*. Acedido maio 27, 2013, em http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Tela_inicial_do_GeoGebra_3.2.30.0.png

[43]. Wikipédia (2013). *Édouard Lucas*. Acedido março 28, 2013, em http://pt.wikipedia.org/wiki/%C3%89douard_Lucas

[44]. Wikipédia (2013). *Jacques Philippe Marie Binet*. Acedido junho 11, 2013, em http://en.wikipedia.org/wiki/Jacques_Philippe_Marie_Binet

ANEXO I

Neste anexo, encontramos os Princípios de Indução Matemática usados nas demonstrações de algumas propriedades da sequência de Fibonacci e da sequência de Lucas.

De acordo com Araújo *et. al* (2011, pp. 2-5) os Princípios de Indução Matemática podem ser enunciados da seguinte forma:

Princípio de Indução Matemática – PIM - 1ª Forma:

Suponhamos que para cada número natural n se tenha uma proposição $P(n)$ que satisfaça às seguintes propriedades:

- (i) $P(1)$ é verdadeira, e
 - (ii) Sempre que a afirmativa é válida para um número natural arbitrário $n = k$, ela é válida para o seu sucessor $n = k + 1$, isto é, $P(k)$ é verdadeira implica $P(k + 1)$ verdadeira.
- Então $P(n)$ é verdadeira para todo o natural $n \geq 1$. (Araújo *et. al*, 2011, p. 2).

Generalização do Primeiro Princípio de Indução:

Seja $a \in \mathbb{N}$. Suponhamos que para cada natural $n \geq a$ se tenha uma proposição $P(n)$ que satisfaça às seguintes propriedades:

- (i) $P(a)$ é verdadeira, e
 - (ii) Sempre que a afirmativa é válida para um número natural arbitrário $n = k \geq a$, ela é válida para o seu sucessor $n = k + 1$, isto é, $P(k)$ é verdadeira implica $P(k + 1)$ verdadeira.
- Então $P(n)$ é verdadeira para todo o natural $n \geq a$. (Araújo *et. al*, 2011, p. 4).

Princípio de Indução Matemática – PIM - 2ª Forma:

Seja $a \in \mathbb{N}$. Suponhamos que para cada natural $n \geq a$ se tenha uma proposição $P(n)$ que satisfaça às seguintes propriedades:

- (i) $P(a)$ é verdadeira, e
 - (ii) $P(m)$ é verdadeira para todo o natural m com $a \leq m \leq k$ implica $P(k + 1)$ verdadeira.
- Então $P(n)$ é verdadeira para todo o natural $n \geq a$. (Araújo *et. al*, 2011, p. 5).

ANEXO II

Neste anexo, encontramos o novo Programa de Matemática para o 3.º Ciclo do Ensino Básico, que entrou em vigor em setembro de 2013, tendo-se iniciado no 1.º, 3.º, 5.º e 7.º anos de escolaridade.

Domínios e Conteúdos – 3.º Ciclo do Ensino Básico	
7.º ANO DE ESCOLARIDADE	
Domínios	Conteúdos
✓ Números e Operações	Números racionais • Simétrico da soma e da diferença de racionais; • Extensão da multiplicação a todos os racionais; • Extensão da divisão ao caso em que o dividendo é um racional qualquer e o divisor um racional não nulo.
✓ Geometria e Medida	Alfabeto grego • As letras α, β, γ, δ, π, ρ e σ do alfabeto grego. Figuras Geométricas Linhas poligonais e polígonos • Linhas poligonais; vértices, lados, extremidades, linhas poligonais fechadas e simples; parte interna e externa de linhas poligonais fechadas simples; • Polígonos simples; vértices, lados, interior, exterior, fronteira, vértices e lados consecutivos; • Ângulos internos de polígonos; • Polígonos convexos e côncavos; caracterização dos polígonos convexos através dos ângulos internos; • Ângulos externos de polígonos convexos; • Soma dos ângulos internos de um polígono; • Soma de ângulos externos de um polígono convexo; • Diagonais de um polígono. Quadriláteros • Diagonais de um quadrilátero; • Paralelogramos: caracterização através das diagonais e caracterização dos retângulos e losangos através das diagonais; • Papagaios: propriedade das diagonais; o losango como papagaio; • Trapézios: bases; trapézios isósceles, escalenos e retângulos; caracterização dos paralelogramos; • Problemas envolvendo triângulos e quadriláteros. Paralelismo, congruência e semelhança • Isometrias e semelhanças; • Critério de semelhança de polígonos envolvendo os respetivos lados e diagonais; • Teorema de Tales; • Critérios de semelhança de triângulos (LLL, LAL e AA); igualdade dos ângulos correspondentes em triângulos semelhantes; • Semelhança dos círculos; • Critério de semelhança de polígonos envolvendo os respetivos lados e

	ângulos internos; • Divisão de um segmento num número arbitrário de partes iguais utilizando régua e compasso, com ou sem esquadro; • Homotetia direta e inversa; • Construção de figuras homotéticas; • Problemas envolvendo semelhanças de triângulos e homotetias. Medida Mudanças de unidade de comprimento e incomensurabilidade • Conversões de medidas de comprimento por mudança de unidade; • Invariância do quociente de medidas; • Segmentos de reta comensuráveis e incomensuráveis; • Incomensurabilidade da hipotenusa com os catetos de um triângulo retângulo isósceles. Áreas de quadriláteros • Área do papagaio e do losango; • Área do trapézio. Perímetros e áreas de figuras semelhantes • Razão entre perímetros de figuras semelhantes; • Razão entre áreas de figuras semelhantes; • Problemas envolvendo perímetros e áreas de figuras semelhantes.
✓ Funções, Sequências Sucessões	Funções Definição de função • Função ou aplicação f de A em B; domínio e contradomínio; igualdade de funções; • Pares ordenados; gráfico de uma função; variável independente e variável dependente; • Funções numéricas; • Gráficos cartesianos de funções numéricas de variável numérica; equação de um gráfico cartesiano. Operações com funções numéricas • Adição, subtração e multiplicação de funções numéricas e com o mesmo domínio; exponenciação de expoente natural de funções numéricas; • Operações com funções numéricas de domínio finito dadas por tabelas, diagramas de setas ou gráficos cartesianos; • Funções constantes, lineares e afins; formas canônicas, coeficientes e termos independentes; propriedades algébricas e redução à forma canônica; • Funções de proporcionalidade direta; • Problemas envolvendo funções de proporcionalidade direta. Sequências e sucessões • Sequências e sucessões como funções; • Gráficos cartesianos de sequências numéricas; • Problemas envolvendo sequências e sucessões.
✓ Álgebra	Expressões algébricas • Extensão a $\mathbb{Q}$ das propriedades associativa e comutativa da adição e da multiplicação; • Extensão a $\mathbb{Q}$ da propriedade distributiva da multiplicação em relação à

	adição e à subtração; - Extensão a $\mathbb{Q}$ das regras de cálculo do inverso de produtos e quocientes e do produto e do quociente de quocientes; - Extensão a $\mathbb{Q}$ da definição e propriedades das potências de expoente natural; potência do simétrico de um número; - Simplificação e cálculo do valor de expressões numéricas envolvendo as quatro operações aritméticas, a potenciação e a utilização de parêntesis. Raízes quadradas e cúbicas - Monotonia do quadrado e do cubo; - Quadrado perfeito e cubo perfeito; - Raiz quadrada de quadrado perfeito e raiz cúbica de cubo perfeito; - Produto e quociente de raízes quadradas e cúbicas; - Representações decimais de raízes quadradas e cúbicas. Equações algébricas - Equação definida por um par de funções; primeiro e segundo membro, soluções e conjunto-solução; - Equações possíveis e impossíveis; - Equações equivalentes; - Equações numéricas; princípios de equivalência; - Equação linear com uma incógnita; simplificação e caracterização do conjunto-solução; equações lineares impossíveis, possíveis, determinadas e indeterminadas; equação algébrica de 1.º grau; - Soluções exatas e aproximadas de equações algébricas de 1.º grau; - Problemas envolvendo equações lineares.
✓ Organização e Tratamento Dados	Medidas de localização - Sequência ordenada dos dados; - Mediana de um conjunto de dados; definição e propriedades; - Problemas envolvendo tabelas, gráficos e medidas de localização.
8.º ANO DE ESCOLARIDADE	
✓ Números e Operações	Dízimas finitas e infinitas periódicas - Caracterização das frações irredutíveis equivalentes a frações decimais; - Representação de números racionais através de dízimas finitas ou infinitas periódicas utilizando o algoritmo da divisão; período e comprimento do período de uma dízima; - Conversão em fração de uma dízima infinita periódica; - Decomposição decimal de números racionais representados por dízimas finitas, utilizando potências de base 10 e expoente inteiro; - Notação científica; aproximação, ordenação e operações em notação científica; - Definição de dízima infinita não periódica; - Representação na reta numérica de números racionais dados na forma de dízima. Dízimas infinitas não periódicas e números reais - Pontos irracionais da reta numérica; exemplo; - Números irracionais e dízimas infinitas não periódicas; - Números reais; extensão a $\mathbb{R}$ das operações conhecidas sobre $\mathbb{Q}$ e respectivas propriedades; extensão a medidas reais das propriedades envolvendo proporções entre comprimentos de segmentos; - Irracionalidade de $\sqrt{n}$ para n natural e distinto de um quadrado perfeito; - Construção da representação de raízes quadradas de números naturais na

	reta numérica, utilizando o Teorema de Pitágoras; Extensão a $\mathbb{R}$ da ordem em $\mathbb{Q}$; propriedades transitiva e tricotômica da relação de ordem; ordenação de números reais representados na forma de dízima.
✓ Geometria e Medida	Teorema de Pitágoras - Teorema de Pitágoras e o respetivo recíproco; - Problemas envolvendo os teoremas de Pitágoras e de Tales e envolvendo a determinação de distâncias desconhecidas por utilização destes teoremas. Vetores, translações e isometrias - Segmentos orientados com a mesma direção e sentido e com a mesma direção e sentidos opostos; comprimento de um segmento orientado; segmento orientado reduzido a um ponto; - Segmentos orientados equipolentes e vetores; - Vetores colineares e simétricos; - Soma de um ponto com um vetor e translação determinada por um vetor; - Composta de translações e soma de vetores; regras do triângulo e do paralelogramo; propriedades algébricas da adição algébrica de vetores; - Translações como isometrias; caracterização pela preservação da direção e sentido dos segmentos orientados e semirretas; - Reflexões deslizantes como isometrias; - Ação das isometrias sobre as retas, as semirretas e os ângulos e respetivas amplitudes; - Classificação das isometrias do plano; - Problemas envolvendo as propriedades das isometrias do plano; - Problemas envolvendo figuras com simetrias de translação, rotação, reflexão axial e reflexão deslizante.
✓ Funções, Sucessões Sequências	Gráficos de funções afins - Equação de reta não vertical e gráfico de função linear ou afim; - Declive e ordenada na origem de uma reta não vertical; - Relação entre declive e paralelismo; - Determinação do declive de uma reta determinada por dois pontos com abcissas distintas; - Equação de reta vertical; - Problemas envolvendo equações de retas.
✓ Álgebra	Potências de expoente inteiro - Potência de expoente nulo; - Potência de expoente negativo; - Extensão a potências de expoente inteiro das propriedades conhecidas das potências de expoente natural. Monómios e Polinómios - Monómios; fatores numéricos, constantes e variáveis ou indeterminadas; parte numérica ou coeficiente; monómio nulo e monómio constante; parte literal; - Monómios semelhantes; forma canónica de um monómio; igualdade de monómios; - Grau de um monómio; - Soma algébrica e produto de monómios; - Polinómios; termos; variáveis ou indeterminadas, coeficientes; forma reduzida; igualdade de polinómios; termo independente; polinómio nulo; - Grau de um polinómio;

	• Soma algébrica e produto de polinômios; • Casos notáveis da multiplicação como igualdades entre polinômios; • Problemas associando polinômios a medidas de áreas e volumes, interpretando geometricamente igualdades que os envolvam; • Problemas envolvendo polinômios, casos notáveis da multiplicação de polinômios e factorização. Equações incompletas de 2.º grau • Equação do 2.º grau; equação incompleta; • Lei do anulamento do produto; • Resolução de equações incompletas de 2.º grau; • Resolução de equações de 2.º grau tirando partido da lei do anulamento do produto; • Problemas envolvendo equações de 2.º grau. Equações literais • Equações literais; • Resolução em ordem a uma dada incógnita de equações literais do 1.º e 2.º grau. Sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas • Sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas; forma canónica; soluções; sistemas equivalentes; • Interpretação geométrica de sistemas de duas equações do 1.º grau com duas incógnitas; • Resolução de sistemas de duas equações de 1.º grau pelo método de substituição; • Problemas envolvendo sistemas de equações do 1.º grau com duas incógnitas.
✓ Organização e Tratamento Dados	Diagramas de extremos e quartis • Noção de quartil; • Diagramas de extremos e quartis; • Amplitude interquartil; • Problemas envolvendo gráficos diversos e diagramas de extremos e quartis.
9.º ANO DE ESCOLARIDADE	
✓ Números e Operações	Relação de ordem em $\mathbb{R}$ Propriedades da relação de ordem • Monotonia da adição; • Monotonia parcial da multiplicação; • Adição e produto de inequações membro a membro; • Monotonia do quadrado e do cubo; • Inequações e passagem ao inverso; • Simplificação e ordenação de expressões numéricas reais envolvendo frações, dízimas ou radicais, utilizando as propriedades da relação de ordem em $\mathbb{R}$. Intervalos • Intervalos de números reais; • Representação de intervalos de números reais na reta numérica; • Interseção e reunião de intervalos.

	Valores aproximados de resultados de operações • Aproximações da soma e do produto de números reais; • Aproximações de raízes quadradas e cúbicas; • Problemas envolvendo aproximações de medidas de grandezas.
✓ Geometria e Medida	Axiomatização das teorias Matemáticas Vocabulário do método axiomático • Teorias; objetos e relações primitivas; axiomas; • Axiomática de uma teoria; definições, teoremas e demonstrações; • Teorias axiomatizadas como modelos da realidade; • Condições necessárias e suficientes; hipótese e tese de um teorema; o símbolo “$\Rightarrow$”; • Lemas e corolários. Axiomatização da Geometria • Referência às axiomáticas para a Geometria Euclidiana; axiomáticas equivalentes; exemplos de objetos e relações primitivas; • Axiomática de Euclides; referência aos «Elementos» e aos axiomas e postulados de Euclides; confronto com a noção atual de axioma; • Lugares geométricos. Paralelismo e perpendicularidade de retas e planos A Geometria euclidiana e o axioma das paralelas • 5.º Postulado de Euclides e axioma euclidiano de paralelismo; • Referência às Geometrias não-euclidianas; Geometria hiperbólica ou de Lobachewski; • Demonstrações de propriedades simples de posições relativas de retas num plano, envolvendo o axioma euclidiano de paralelismo. Paralelismo de retas e planos no espaço euclidiano • Planos concorrentes; propriedades; • Retas paralelas e secantes a planos; propriedades; • Paralelismo de retas no espaço; transitividade; • Paralelismo de planos: caracterização do paralelismo de planos através do paralelismo de retas; transitividade; existência e unicidade do plano paralelo a um dado plano contendo um ponto exterior a esse plano. Perpendicularidade de retas e planos no espaço euclidiano • Ângulo de dois semiplanos com fronteira comum; • Semiplanos e planos perpendiculares; • Retas perpendiculares a planos; resultados de existência e unicidade; projeção ortogonal de um ponto num plano; reta normal a um plano e pé da perpendicular; plano normal a uma reta; • Paralelismo de planos e perpendicularidade entre reta e plano; • Critério de perpendicularidade de planos; • Plano mediador de um segmento de reta. Problemas • Problemas envolvendo posições relativas de retas e planos. Medida Distâncias a um plano de pontos, retas paralelas e planos paralelos • Distância de um ponto a um plano; • Projeção ortogonal num plano de uma reta paralela ao plano e distância entre a reta e o plano;

	• Distância entre planos paralelos; • Altura da pirâmide, do cone e do prisma. Volumes e áreas de superfícies de sólidos • Volume da pirâmide, cone e esfera; • Área da superfície de poliedros, da superfície lateral de cones retos e da superfície esférica; • Problemas envolvendo o cálculo de áreas e volumes de sólidos. Trigonometria • Seno, cos seno e tangente de um ângulo agudo; • Fórmula fundamental da Trigonometria; • Relação entre a tangente de um ângulo agudo e o seno e cos seno do mesmo ângulo; • Relação entre o seno e o cos seno de ângulos complementares; • Dedução dos valores das razões trigonométricas dos ângulos de 45°, 30° e 60°; • Utilização de tabelas e de uma calculadora para a determinação de valores aproximados da amplitude de um ângulo conhecida uma razão trigonométrica desse ângulo; • Problemas envolvendo distâncias e razões trigonométricas. Lugares Geométricos envolvendo pontos notáveis de triângulos • A bissetriz de um ângulo como lugar geométrico; • Circuncentro, incentro, ortocentro e baricentro de um triângulo; propriedades e construção; • Problemas envolvendo lugares geométricos no plano. Propriedades de ângulos, cordas e arcos definidos numa circunferência • Arcos de circunferência; extremos de um arco; arco menor e maior; • Cordas; arcos subtensos por uma corda; arco correspondente a uma corda; propriedades; • Amplitude de um arco; • Ângulo inscrito num arco; arco capaz; arco compreendido entre os lados de um ângulo inscrito; propriedades; • Segmento de círculo maior e menor; • Ângulo do segmento; ângulo ex inscrito; propriedades; • Ângulos de vértice no exterior ou no interior de um círculo e lados intersecando a respetiva circunferência; propriedades; • Demonstração das fórmulas para a soma dos ângulos internos e de n ângulos externos com vértices distintos de um polígono convexo; aplicações: demonstração da fórmula para a soma dos ângulos opostos de um quadrilátero inscrito numa circunferência; construção aproximada de um polígono regular de n lados inscrito numa circunferência utilizando transferidor; • Problemas envolvendo ângulos e arcos definidos numa circunferência e ângulos internos e externos de polígonos regulares.
✓ Funções, Sucessões	Funções algébricas • Funções de proporcionalidade inversa; referência à hipérbole; • Problemas envolvendo funções de proporcionalidade inversa; • Funções da família $f(x) = ax^2$ com $a \neq 0$; • Conjunto-solução da equação de segundo grau $ax^2 + bx + c = 0$ como interseção da parábola de equação $y = ax^2$ com a reta de equação $y = -bx - c$.

✓ Álgebra	Inequações • Inequação definida por um par de funções; primeiro e segundo membro, soluções e conjunto- solução; • Inequações possíveis e impossíveis; • Inequações equivalentes; • Princípios de equivalência; • Inequações de 1.º grau com uma incógnita; • Simplificação de inequações de 1.º grau; determinação do conjunto- solução na forma de um intervalo; • Determinação dos conjuntos- solução de conjunções e disjunções de inequações do 1.º grau como intervalos ou reunião de intervalos disjuntos; • Problemas envolvendo inequações de 1.º grau. Equações do 2.º grau • Equações de 2.º grau completas; completamento do quadrado; • Fórmula resolvente; • Problemas geométricos e algébricos envolvendo equações de 2.º grau. Proporcionalidade Inversa • Grandezas inversamente proporcionais; critério de proporcionalidade inversa; • Constante de proporcionalidade inversa; • Problemas envolvendo grandezas inversamente e diretamente proporcionais.
✓ Organização e Tratamento Dados	Histogramas • Variáveis estatísticas discretas e contínuas; classes determinadas por intervalos numéricos; agrupamento de dados em classes da mesma amplitude; • Histogramas; propriedades; • Problemas envolvendo a representação de dados em tabelas de frequência e histogramas. Probabilidade • Experiências deterministas e aleatórias; universo dos resultados ou espaço amostral; casos possíveis; • Acontecimentos: casos favoráveis, acontecimento elementar, composto, certo, impossível; • Acontecimentos disjuntos ou incompatíveis e complementares; • Experiências aleatórias com acontecimentos elementares equiprováveis; • Definição de Laplace de probabilidade; propriedades e exemplos; • Problemas envolvendo a noção de probabilidade e a comparação de probabilidades de diferentes acontecimentos compostos, utilizando tabelas de dupla entrada e diagramas em árvore; • Comparação de probabilidades com frequências relativas em experiências aleatórias em que se presume equiprobabilidade dos casos possíveis.

Tabela 14: Novo Programa de Matemática do 3.º Ciclo do Ensino Básico (Bivar *et al.*, 2013, pp. 20-27)