

UNIVERSIDADE DE TRÁS-OS-MONTES E ALTO DOURO

Dinâmica inversa 2D do salto vertical em coordenadas relativas e naturais

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ENGENHARIA
MECÂNICA

Álvaro Alexandre Sousa Figueiredo

Professor José Morais (orientador)

Professor José Xavier (co-orientador)



Vila Real, 2021

UNIVERSIDADE DE TRÁS-OS-MONTES E ALTO DOURO

Dinâmica inversa 2D do salto vertical em coordenadas relativas e naturais

Álvaro Alexandre Sousa Figueiredo

Professor José Morais (orientador)

Professor José Xavier (co-orientador)



Dissertação apresentada à Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Mecânica, realizada sob orientação científica do Professor Doutor José Joaquim Lopes Morais e coorientação científica do Professor Doutor José Cardoso Xavier.

Vila Real, 2021

Aos meus pais e irmão.

Agradecimentos

Esta dissertação apresenta-se como o culminar de um ciclo muito importante e que muitas lições trouxeram para a vida, quer a nível pessoal como profissional.

Ao Professor José Morais só tenho a agradecer pela maneira como cativa os seus alunos a querer trabalhar com ele, e por toda a sua disponibilidade e vontade de ensinar e ajudar. Sem esquecer o Professor José Xavier, pela preocupação e vontade de ajudar.

Sem dúvida, tudo se deve aos meus pais, por tudo o que fizeram por mim e me darem a oportunidade de poder escrever estas palavras.

À Ana, que como namorada foi incansável e sempre esteve presente nos bons e nos maus momentos.

À minha amiga Cristina pela enorme paciência, apesar de acreditar que não.

Resumo

A biomecânica do movimento desempenha um papel importante em áreas tão diversas como a medicina, a reabilitação motora, o desporto, a ergonomia, os videojogos e o cinema. O problema particular do salto vertical ocupa um lugar proeminente na biomecânica do movimento, na medida em que é uma tarefa motora adequada para a validação de modelos biomecânicos: validação de parâmetros inerciais, modelos de ação muscular e algoritmos de controlo, entre outros.

Esta dissertação tem como principal objetivo a análise de dois métodos para a derivação de dados cinemáticos experimentais, que contornem os problemas associados à derivação numérica direta. Em concreto, foram analisados e comparados o método de aproximação por *splines* cúbicos e o método de alisamento por interpolação polinomial. Esses métodos foram empregues na análise cinemática e dinâmica de um modelo biomecânico do salto vertical, usando quer coordenadas relativas quer coordenadas naturais.

Abstract

The biomechanics of human motion has an important role in various domains like medicine, physical rehabilitation, sports, ergonomics, videogames and cinema. The very specific problem of vertical jump occupies a prominent place in the biomechanics of human motion as a result of its suitability for validating biomechanical models: validation of segmental inertial parameters, muscle action models or control algorithms, among other issues of biomechanical modelling.

The main objective of this dissertation is to analyse two numerical differentiation methods, which circumvent the well-known drawbacks of direct numerical differentiation of kinematic experimental data. Indeed, in this work were analysed and compared the approximation method based on cubic splines and the smoothing method based on polynomial interpolation. Both methods were applied to the kinematic and dynamic analyses of a biomechanical model of vertical jump, using relative coordinates and natural coordinates.

Nomenclatura

$a^{(k,j)}$ – Aceleração da rótula (k,j) ;

a_j – Aceleração do segmento j ;

A_j – Matriz de transformação do segmento j ;

$F^{(k,j)}$ – Força na articulação (k,j) ;

$f^{(k,j)}(t)$ – Função motora da articulação (k,j) ;

(k,j) – Articulação entre o segmento k e o segmento j ;

$n^{(k,j)}$ – Momento resultante na articulação (k,j) ;

P_j – Matriz de peso do corpo j ;

$\ddot{q}$ – Acelerações generalizadas;

q – Coordenadas generalizadas;

$\dot{q}$ – Velocidades generalizadas;

$r^{(k,j)}$ – Coordenadas da articulação (k,j) ;

R – Matriz de rotação ortogonal;

$s_j^{(k,j)}$ – Posição da articulação (k,j) no referencial do corpo j ;

$v^{(k,j)}$ – Velocidade da rótula (k,j) ;

$\emptyset_j$ – Ângulo absoluto do segmento j ;

$\emptyset^{(k,j)}$ – Ângulo relativo da articulação (k,j) ;

$\emptyset^{(k,j)}$ – Aceleração angular da articulação (k,j) ;

$\emptyset^{(k,j)}$ – Velocidade angular da articulação (k,j) ;

Índice

Agradecimentos	v
Resumo	vii
Abstract.....	x
CAPÍTULO 1.....	1
Introdução.....	1
CAPÍTULO 2.....	3
Revisão bibliográfica.....	3
2.1 Introdução.....	3
2.2 Morfologia anatômica	3
2.3 Biomecânica do salto vertical.....	7
CAPÍTULO 3.....	9
Cinemática e dinâmica de mecanismos planos.....	9
3.1 Introdução.....	9
3.2 Coordenadas generalizadas: coordenadas cartesianas absolutas	9
3.3 Coordenadas generalizadas: coordenadas relativas.....	11
3.4 Coordenadas generalizadas: coordenadas naturais.....	13
3.5 Análise cinemática de mecanismos cinematicamente definidos	15
3.6 Dinâmica Inversa.....	17
CAPÍTULO 4.....	19
Modelo anatômico do salto vertical.....	19
4.1 Introdução.....	19
4.2 Modelo anatômico.....	19
4.3 Dados cinemáticos do modelo anatômico	22
4.4 Aproximação por splines cúbicos.....	23
4.5 Alisamento de dados	29
4.6 Aproximação polinomial e derivação dos dados cinemáticos: coordenadas relativas	32

4.7	Aproximação polinomial e derivação dos dados cinemáticos: coordenadas naturais	35
4.8	Conclusões	40
CAPÍTULO 5.....		41
Biomecânica do salto vertical: coordenadas relativas		41
5.1	Introdução.....	41
5.2	Análise cinemática: análise de posição	41
5.3	Análise cinemática: análise de velocidades.....	46
5.4	Análise cinemática: análise de acelerações	50
5.5	Análise dinâmica	54
5.6	Conclusões	57
CAPÍTULO 6.....		58
Biomecânica do salto vertical: coordenadas naturais		58
6.1	Introdução.....	58
6.2	Análise cinemática: análise de posição	58
6.3	Análise cinemática: análise de velocidades.....	62
6.4	Análise cinemática: análise de acelerações	66
6.5	Análise dinâmica	70
6.6	Conclusões	72
CAPÍTULO 7.....		73
Conclusões gerais.....		73
Bibliografia		75
Anexos		77

Índice de figuras

Figura 2.1 Posições de referência: (a) posição fundamental e (b) posição anatômica (Nelson, 1980)	5
Figura 2.2 Planos e eixos cardinais do corpo humano (Vilas-Boas, 2016).	5
Figura 2.3 Movimentos no plano transversal (Vilas-Boas, 2016).	6
Figura 2.4 Movimentos no plano sagital (Vilas-Boas, 2016).	6
Figura 2.5 Movimentos no plano frontal (Vilas-Boas, 2016).	7
Figura 2.6 Salto vertical a partir da posição agachada (adaptado de Martins, 2014)	8
Figura 2.7 Salto vertical com impulso contrário (adaptado de Martins, 2014).	8
Figura 3.1 Posição de um sólido em coordenadas cartesianas absolutas.	11
Figura 3.2 Posição de um sólido em coordenadas relativas.	13
Figura 3.3 Posição de um sólido em coordenadas naturais.	14
Figura 3.4- Forças exteriores que atuam num sólido.	17
Figura 4.1-Posição anatômica de referência do modelo biomecânico: centros de massa dos segmentos ($j = 1, \dots, 6$), rótulas ($j+1, j$) e referencial global.	20
Figura 4.2-Rótula (k,j), entre os segmentos k e j	21
Figura 4.3-Splines cúbicos.	26
Figura 4.4- Dados, <i>splines</i> cúbicos e alisamento local das coordenadas generalizadas: (a) ϕ_6 ; (b) $\dot{\phi}_6$; (c) $\ddot{\phi}_6$	35
Figura 4.5- Dados, <i>splines</i> cúbicos e alisamento local das coordenadas generalizadas: (a) $x(7,6)$; (b) $v_{x7,6}$; (c) $a_x(7,6)$	38
Figura 4.6- Dados, <i>splines</i> cúbicos e alisamento local das coordenadas generalizadas: (a) $y(7,6)$; (b) $v_{y7,6}$; (c) $a_y(7,6)$	39
Figura 5.1-Posição das rótulas (j,i) e (k,j) do segmento j	42
Figura 5.2-Posição do modelo anatômico, no plano sagital, durante alguns instantes da fase de impulso (coordenadas relativas).	44
Figura 5.3 - Posição do centro de massa durante a fase de impulso utilizando coordenadas relativas: (a) abcissa x_{CM} ; (b) ordenada y_{CM}	45
Figura 5.4 - Trajetória do centro de massa do modelo biomecânico utilizando coordenadas relativas.	46
Figura 5.5- Velocidade da rótula (7,6) durante a fase de impulso em coordenadas relativas: (a) abcissa $v_{x(7,6)}$; (b) ordenada $v_{y(7,6)}$	47

Figura 5.6- Velocidade do centro de massa durante a fase de impulso: (a) abcissa v_{xCM} ; (b) ordenada v_{yCM}	49
Figura 5.7- Aceleração da rótula (7,6) durante a fase de impulso em coordenadas relativas: (a) abcissa $a_x(7,6)$; (b) ordenada $a_y(7,6)$	52
Figura 5.8- Aceleração do centro de massa durante a fase de impulso utilizando coordenadas relativas: (a) abcissa a_{xCM} ; (b) ordenada a_{yCM}	53
Figura 5.9 - Diagrama de corpo livre do segmento j.	54
Figura 5.10- Força de apoio na rótula (1,0) utilizando coordenadas relativas: (a) abcissa $F_x(1,0)$; (b) ordenada $F_y(1,0)$	56
Figura 5.11-Momento articular na rótula (1,0) utilizando coordenadas relativas.	57
Figura 6.1-Posição do modelo anatómico, no plano sagital, durante alguns instantes da fase de impulso (coordenadas naturais).	60
Figura 6.2 - Posição do centro de massa durante a fase de impulso utilizando coordenadas relativas e naturais: (a) abcissa x_{CM} ; (b) ordenada y_{CM}	61
Figura 6.3 - Trajetória do centro de massa do modelo biomecânico utilizando coordenadas relativas e naturais.	61
Figura 6.4- Velocidade da rótula (7,6) durante a fase de impulso em coordenadas relativas: (a) abcissa $v_x(7,6)$; (b) ordenada $v_y(7,6)$	63
Figura 6.5 - Velocidade do centro de massa durante a fase de impulso utilizando coordenadas relativas: (a) abcissa v_{xCM} ; (b) ordenada v_{yCM}	65
Figura 6.6- Aceleração da rótula (7,6) em x e y ao longo do tempo para coordenadas relativas e naturais: (a) abcissa $a_x(7,6)$; (b) ordenada $a_y(7,6)$	67
Figura 6.7- Aceleração do centro de massa durante a fase de impulso utilizando coordenadas relativas e naturais: (a) abcissa a_{xCM} ; (b) ordenada a_{yCM}	69
Figura 6.8 - Força de apoio na rótula (1,0) utilizando coordenadas relativas e naturais: (a) abcissa $F_x(1,0)$; (b) ordenada $F_y(1,0)$	71
Figura 6.9 - Momento articular na rótula (1,0) utilizando coordenadas relativas e naturais.	71

Índice de tabelas

Tabela 4.1-Segmentos anatómicos.	20
Tabela 4.2-Coordenadas relativas da geometria dos segmentos anatómicos e articulações (Anderson e Pandy, 1999).	21
Tabela 4.3-Propriedades inerciais dos segmentos anatómicos (Anderson e Pandy, 1999).	22
Tabela 4.4-Ângulos entre cada segmento anatómico por instante de tempo (Anderson and Pandy, 1999).....	23
Tabela 4.5-Coordenadas generalizadas, ϕ_j , para $j = 6$, em cada instante de tempo para coordenadas relativas.....	33
Tabela 4.6-Coordenadas absolutas do ponto (7,6), em cada instante de tempo para coordenadas naturais.....	36
Tabela 5.1-Coordenadas da rótula (7,6), em x e y , e do centro de massa do corpo $j=6$ ao longo do tempo.	43
Tabela 5.2-Acelerações da rótula (7,6), em x e y , e do centro de massa do corpo $j=6$ ao longo do tempo.	51
Tabela 6.1-Coordenadas da rótula (7,6), em x e y , e do centro de massa do corpo $j=6$ ao longo do tempo utilizando coordenadas naturais.	59
Tabela 6.2-Velocidades da rótula (7,6), em x e y , e do centro de massa do corpo $j=6$ ao longo do tempo (coordenadas naturais).....	64
Tabela 6.3- Acelerações da rótula (7,6), em x e y , e do centro de massa do corpo $j=6$ ao longo do tempo.	68

CAPÍTULO 1

Introdução

A biomecânica do movimento humano desempenha um papel importante em áreas tão diversas como a medicina, a reabilitação motora, o desporto, a ergonomia e a indústria de entretenimento (por exemplo, videojogos e cinema). Os modelos de biomecânica do incorporam mais ou menos componentes, consoante a sua finalidade: as características geométricas dos segmentos anatómicos, os parâmetros de inércia dos segmentos anatómicos, os grupos musculares, os modelos de ação muscular e os modelos de controlo, entre outras componentes. A fiabilidade dessas componentes necessita de ser validada por comparação com resultados experimentais. O salto vertical é uma tarefa motora particularmente útil para esse efeito, tendo sido objeto de diversos trabalhos de investigação (Anderson e Pandy, 1999; Kim et al, 2014; Domire e Challis, 2015; Almeida, 2016).

Esta dissertação incide sobre a análise cinemática e dinâmica do salto vertical, usando coordenadas relativas e coordenadas naturais, e vem no seguimento da dissertação de mestrado de Almeida (2016). O modelo biomecânico considerado neste trabalho é um modelo 2D (no plano sagital), que foi adaptado a partir do trabalho de Anderson e Pandy (1999). No salto vertical há duas estratégias diferentes (Almeida, 2016): o salto com e sem movimento de impulso contrário. Neste trabalho, tal como nos trabalhos de Anderson e Pandy (1999) e Almeida (2006), foi considerada a estratégia de salto sem movimento de impulso contrário. O principal objetivo do trabalho que foi realizado foi a análise e comparação de dois métodos para a derivação de dados cinemáticos experimentais, que contornem os problemas associados à derivação numérica direta. Em concreto, foram considerados os seguintes métodos: o método de aproximação por *splines* cúbicos e o método de alisamento por interpolação polinomial.

Este trabalho está dividido em sete capítulos, incluindo esta introdução. No Capítulo 2 é apresentada uma revisão sumária da morfologia anatómica e dos movimentos relativos entre os segmentos anatómico, além de uma breve revisão do estado da arte da biomecânica do salto vertical.

O Capítulo 3 é dedicado aos aspetos gerais da análise cinemática e dinâmica de mecanismos planos, quer recorrendo às coordenadas generalizadas relativas quer recorrendo às coordenadas generalizadas naturais. Este capítulo incide apenas sobre os mecanismos planos de cadeia aberta e em que as ligações são juntas de rotação.

No Capítulo 4 começamos por apresentar detalhadamente o modelo anatómico que foi objeto de análise. Trata-se de um modelo plano (no plano sagital), com seis segmentos anatómicos: pé anterior, pé posterior, perna, coxa, pélvis e HAT (*Head, arms and trunk*). Depois disso são apresentados os dados cinemáticos obtidos a partir de Anderson e Pandy (1999) e os algoritmos para a derivação (primeira derivada e segunda derivada) dos dados cinemáticos: aproximação por *splines* cúbicos e alisamento por interpolação polinomial. Concluímos este capítulo com a aplicação destes algoritmos aos dados cinemáticos de Anderson e Pandy (1999), depois de convenientemente transformados para a análise cinemática e dinâmica em coordenadas relativas e em coordenadas naturais.

No Capítulo 5 apresentamos os resultados da análise cinemática e da análise dinâmica do modelo biomecânico do salto vertical, considerando as coordenadas relativas. A análise cinemática compreende a análise de posição, a análise das velocidades e a análise das acelerações dos segmentos anatómicos. A partir destes resultados foi reconstruído o movimento do centro de massa do modelo (posição, velocidade e aceleração). A análise dinâmica (dinâmica inversa) baseou-se na aplicação recursiva das equações de Newton-Euler, tendo em vista a determinação dos esforços (forças e momentos) nas articulações.

O Capítulo 6 reproduz o que foi feito e apresentado no Capítulo 5, mas para a análise cinemática e dinâmica em coordenadas naturais. Além disso, os resultados obtidos para as coordenadas naturais foram comparados com os obtidos para as coordenadas relativas e, no que respeita à força de contato do pé com o solo, com os resultados de Anderson e Pandy (1999).

Finalmente, no Capítulo 7 estão reunidas as conclusões que foram sendo apresentadas ao longo dos Capítulos anteriores.

CAPÍTULO 2

Revisão bibliográfica

2.1 Introdução

Inicia-se este capítulo com uma revisão sumária da morfologia anatómica do corpo humano, destacando os principais segmentos anatómicos e os seus movimentos relativos. Depois disso apresenta-se uma breve revisão do estado da arte da biomecânica do salto vertical. Nesta revisão faz-se a distinção entre duas estratégias de salto vertical: o salto vertical com e sem movimento de impulso contrário.

2.2 Morfologia anatómica

A biomecânica do movimento humano é hoje um domínio científico e tecnológico com grande impacto social e económico, em áreas tão diversas como a saúde, o desporto, a segurança nos transportes, a ergonomia, a robótica e a indústria do entretenimento. A compreensão e modelação dos mecanismos complexos subjacente ao movimento humano atingiu nos dias de hoje uma grande sofisticação, fruto dos desenvolvimentos científicos e tecnológicos em áreas como a eletrónica, a computação, a visão computacional, a metrologia e a mecânica dos sistemas de corpos múltiplos (Manal e Buchanan, 2004)

Uma componente essencial da biomecânica do movimento é a morfologia anatómica. De facto, é necessário conhecer os termos associados à descrição do sistema músculo-esquelético, bem como os constrangimentos impostos pelas articulações ao movimento relativo entre os segmentos anatómicos. No nível mais geral de organização anatómica, o corpo humano é composto anatomicamente por cabeça, tronco e membros. No tronco pode-se considerar os seguintes segmentos anatómicos: o tórax e o abdómen. Quanto aos membros, importa distinguir os membros inferiores e os membros superiores. Nos membros inferiores têm-se os seguintes segmentos anatómicos: a coxa, a perna e o

pé, podendo o pé ser dividido em pé anterior e pé posterior (ou dedos do pé). Nos membros superiores distinguem-se os seguintes segmentos anatómicos: o braço, o antebraço, a mão e os dedos da mão. Na análise cinemática e dinâmica do movimento humano, os segmentos anatómicos são tratados como sólidos rígidos, ligados entre si por diferentes tipos de juntas cinemáticas (as articulações do corpo humano). O detalhe da divisão do corpo em segmentos anatómicos depende da finalidade do modelo biomecânico, podendo existir casos onde um ou mais dos segmentos atrás referidos são agrupados num único segmento ou corpo rígido.

Nos estudos de biomecânica é usual considerar uma posição de referência do corpo humano, para a descrição dos movimentos articulares. As duas posições de referência mais usadas estão ilustradas na figura 2.1 (Nelson, 1980; Hamill e Knutzen, 2008): a posição fundamental e a posição anatómica. A única diferença entre essas posições de referência é que na posição fundamental as palmas das mãos estão viradas para o tronco e na posição anatómica as palmas das mãos estão encostadas às ancas.

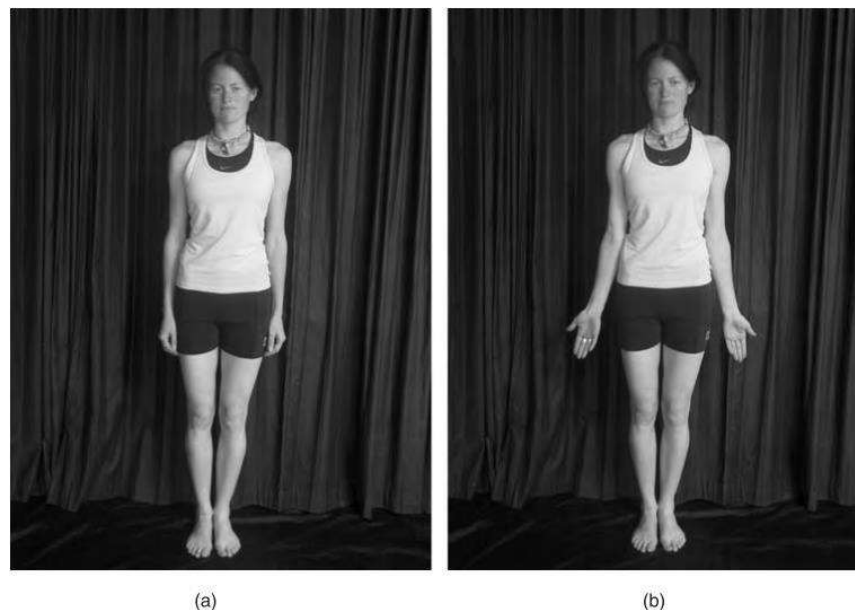


Figura 2.1 - Posições de referência: (a) posição fundamental e (b) posição anatómica (Nelson, 1980).

Outro aspecto essencial para a descrição dos movimentos articulares é a consideração de planos e eixos cardinais associados à posição de referência (figura 2.2). Os planos de referência são designados por plano frontal, plano sagital e plano transversal (figura 2.2). Por sua vez, os eixos de referência são o eixo ântero-posterior (interseção dos planos sagital e transversal), o eixo transversal (interseção dos planos frontal e transversal) e o eixo longitudinal (interseção dos planos sagital e frontal).

Os diferentes movimentos articulares ocorrem em cada um dos planos cardinais descritos atrás e são movimentos de rotação em torno de cada um dos eixos cardinais. No plano transversal podem ser realizados os movimentos de rotação interna (pronação) e de rotação externa (supinação), bem como os movimentos de adução horizontal e de abdução horizontal (figura 2.3).

No plano sagital ocorrem essencialmente dois tipos de movimento: flexão ou extensão (figura 2.4). A flexão ocorre quando o segmento anatómico se move em direção à metade anterior do corpo. Considera-se como extensão o movimento que move o segmento anatómico para a parte posterior do corpo.

No plano frontal são característicos os movimentos de inclinação, de abdução e de adução (figura 2.5). A inclinação pode ocorrer através do movimento lateral do corpo

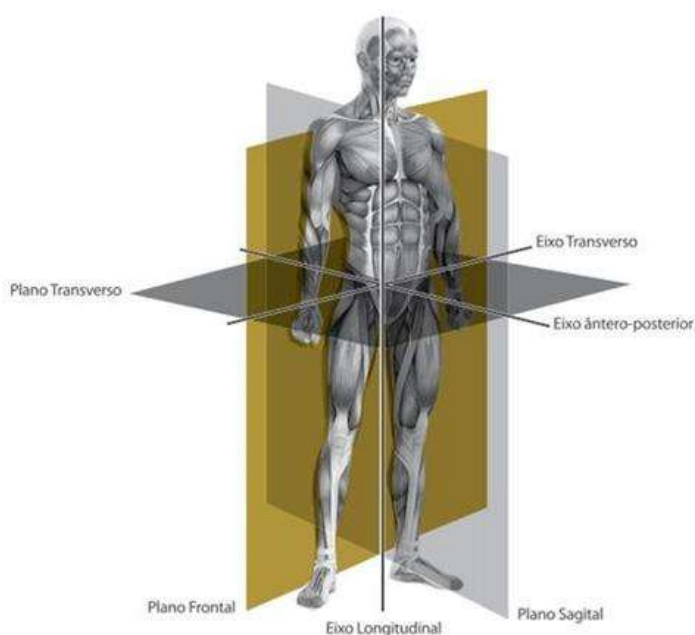


Figura 2.2 - Planos e eixos cardinais do corpo humano (Vilas-Boas, 2016).

para a esquerda ou direita. A abdução trata-se do afastamento do segmento da posição de referência ao longo do plano. A adução é para movimentos de aproximação entre os segmentos e o resto do corpo ao longo do plano.

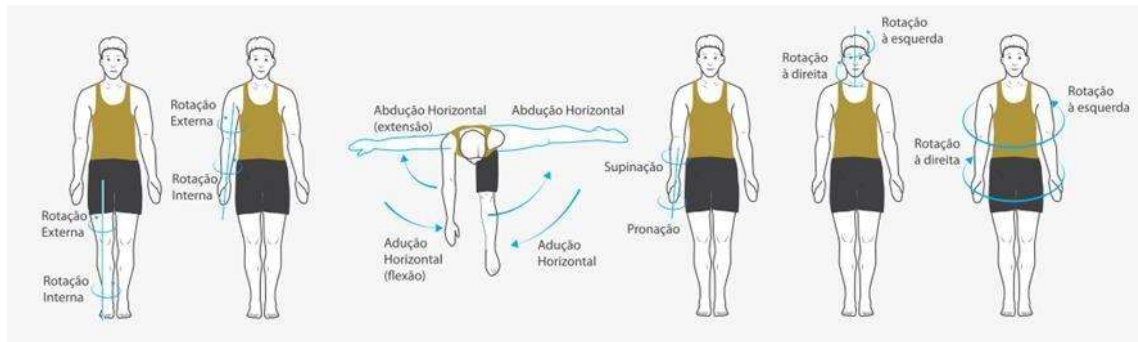


Figura 2.3 Movimentos no plano transverso (Vilas-Boas, 2016).

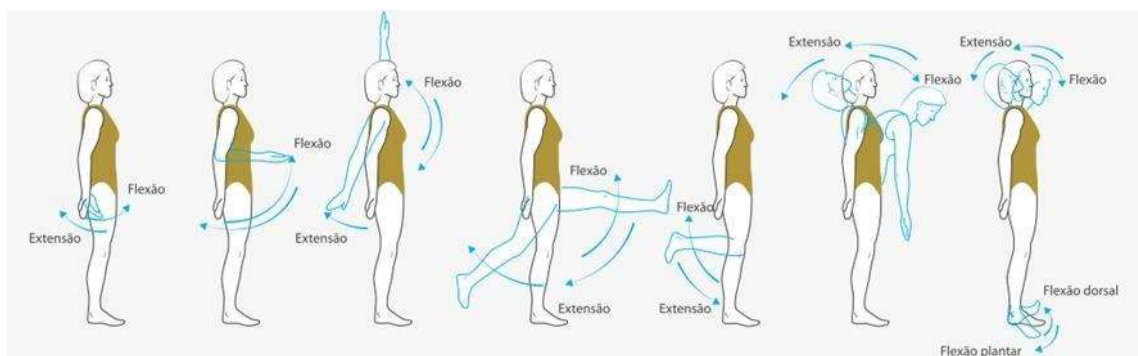


Figura 2.4 Movimentos no plano sagital (Vilas-Boas, 2016).

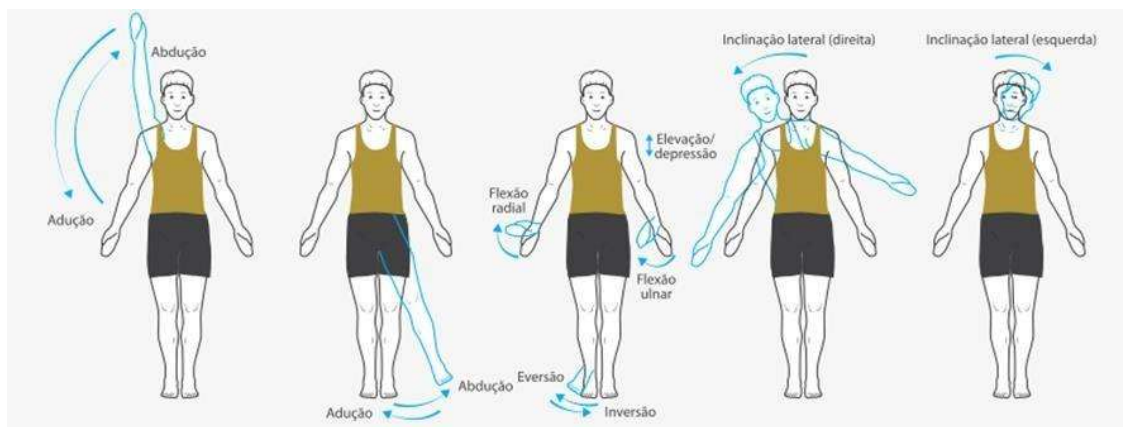


Figura 2.5 - Movimentos no plano frontal (Vilas-Boas, 2016).

2.3 Biomecânica do salto vertical

O salto vertical pode ser dividido em duas fases: a fase de contacto (dos pés com o solo) e a fase de voo. O seu principal objetivo é atingir a maior altura possível, que depende diretamente da velocidade do centro de massa do corpo no fim da fase de contacto. Nos estudos de biomecânica são consideradas duas estratégias de salto distintas: o salto vertical com impulso contrário (*counter movement*) e o salto vertical a partir da posição agachada (*squat*). Dentro destas duas estratégias de salto vertical as próprias posturas iniciais podem variar, consoante a flexão dos segmentos anatómicos (Domire e Challis, 2015).

Na figura 2.6 é apresentado um esquema do salto vertical partindo da posição agachada. Nesta técnica, o corpo parte de uma posição em que os joelhos e ancas estão fletidos, projetando-se de seguida verticalmente, sendo os dedos dos pés o último segmento anatómico a abandonar o solo. Na figura 2.7 encontra-se um esquema do salto vertical com impulso contrário, em que o corpo parte da posição fundamental, fletindo-se rapidamente e criando tensão nos músculos, ocorrendo de seguida um impulso vertical com objetivo de atingir a maior altura possível.

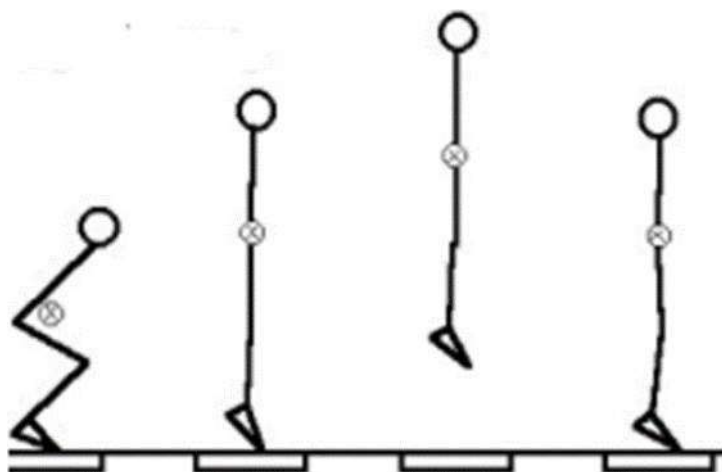


Figura 2.6 - Salto vertical a partir da posição agachada (adaptado de Martins, 2014).

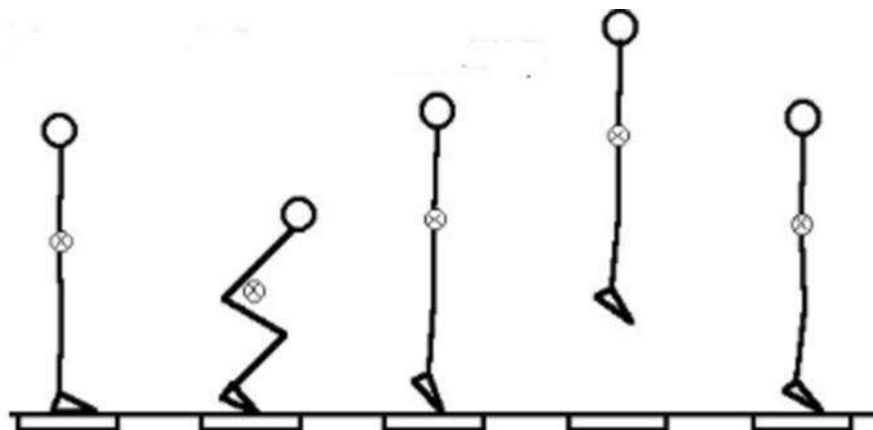


Figura 2.7 - Salto vertical com impulso contrário (adaptado de Martins, 2014).

Sobretudo na década de 90, tiveram início diversos estudos numéricos e experimentais com o objetivo de compreender e modelar o salto vertical, tanto a nível cinemático e dinâmico, como ao nível anatômico e fisiológico. Uma das questões mais estudada foi a compreensão das vantagens do salto com impulso contrário, relativamente ao salto a partir da posição agachada, para atingir uma maior altura de salto (Bobbert et al., 1996). Avaliando as condições mecânicas e a fisiologia dos músculos, alguns autores defendem que essa vantagem se deve à acumulação de energia elástica nos músculos e/ou tendões durante a primeira fase de flexão no salto com impulso contrário (Bobbert et al., 1996; Kim et al., 2014). Outros trabalhos debruçaram-se sobre as melhores condições (maior ou menor flexão dos segmentos anatômicos e maior ou menor inclinação do tronco) para a maximização da altura de salto (Domire e Challis, 2015).

CAPÍTULO 3

Cinemática e dinâmica de mecanismos planos

3.1 Introdução

Neste capítulo passa-se em revista os aspetos fundamentais da análise cinemática de mecanismos planos usando coordenadas cartesianas absolutas, coordenadas relativas e coordenadas naturais. Esta revisão está concentrada nos mecanismos de cadeia aberta com juntas de rotação planas.

3.2 Coordenadas generalizadas: coordenadas cartesianas absolutas

Segundo Jalón e Bayo (Jalon e Bayo, 1994), existem três tipos de coordenadas generalizadas para definir a posição de um mecanismo plano: coordenadas cartesianas absolutas, coordenadas relativas e coordenadas naturais. Essas coordenadas generalizadas são agrupadas numa matriz coluna $\underline{q}^a(t)$, que contém as coordenadas generalizadas de cada sólido ($i=1, \dots, N$) do mecanismo:

$$\underline{q}^a(t) = \begin{bmatrix} \underline{q}_1^a(t) \\ \vdots \\ \underline{q}_N^a(t) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Estas coordenadas generalizadas não são independentes entre si, em virtude das juntas cinemáticas que ligam os diferentes componentes do mecanismo entre si e ao exterior. Designando por N_g o número de equações de constrangimento geométrico e sendo $3N$ o número de coordenadas generalizadas, o número de graus de liberdade do mecanismo

(GL) é:

$$GL = N_g - 3N \quad (3.2)$$

Seja S_i um sólido com movimento plano e Ox_0y_0 o referencial global (Figura 3.1). Para definir a posição do sólido em cada instante é introduzido o referencial $C_ix_iy_i$ solidário com o sólido, chamado de referencial local. As coordenadas cartesianas absolutas do sólido são as coordenadas de C_i e o ângulo que define a orientação de $C_ix_iy_i$ relativamente a Ox_0y_0 (Haug,1989):

$$\underline{q}_i^a(t) = \begin{bmatrix} x_i(t) \\ y_i(t) \\ \phi_i(t) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

A principal vantagem da utilização deste tipo de coordenadas é a maior facilidade de pré-processamento e de pós-processamento, tendo em conta que se conhecem as posições exatas de cada segmento para cada instante. Outra vantagem é a de conduzir a uma formulação dos problemas com matrizes esparsas, de fácil implementação computacional.

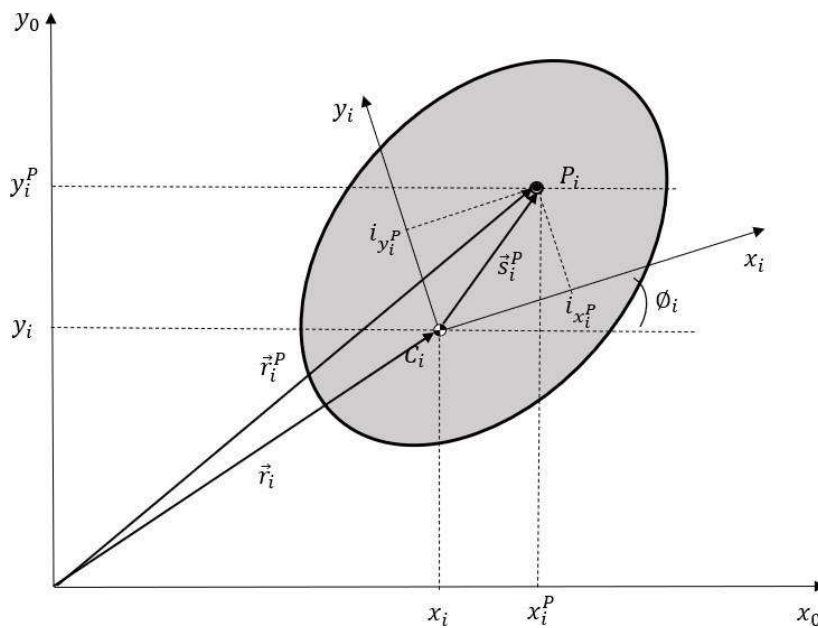


Figura 3.1 - Posição de um sólido em coordenadas cartesianas absolutas.

Uma característica interessante do uso de coordenadas cartesianas absolutas é que nas equações de constrangimento de uma dada junta, apenas intervêm as coordenadas generalizadas dos segmentos ligados por essa junta (Jalon e Bayo, 1994). Em virtude deste caráter local das equações de constrangimento, é possível construir uma biblioteca de constrangimentos que são independentes da estrutura particular de um mecanismo.

3.3 Coordenadas generalizadas: coordenadas relativas

As coordenadas relativas definem a posição de cada segmento em relação ao segmento anterior da cadeia cinemática usando as coordenadas correspondentes aos graus de liberdade relativos permitidos pela junta cinemática. Se dois segmentos estão interligados por uma junta de rotação (que é a única junta cinemática envolvida no presente trabalho), a sua posição relativa é definida por meio de um ângulo.

Sejam j e k dois sólidos de um mecanismo, ligados por uma junta de rotação (figura 3.2). A coordenada generalizada associada a esta junta é o ângulo $\phi_{(k,j)}$ que define a orientação do referencial $C_k x_k y_k$ relativamente ao referencial $C_j x_j y_j$.

$$\underline{q}_i^r(t) = [\phi_i(t)] \quad (3.4)$$

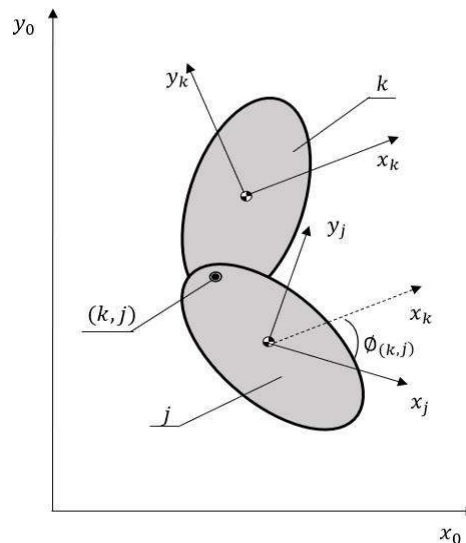


Figura 3.2 - Posição de um sólido em coordenadas relativas.

As coordenadas relativas permitem a modelação de um sistema mecânico com um número mínimo de coordenadas generalizadas (Jalon e Bayo, 1994). Além disso, possibilitam uma modelação fácil e intuitiva dos constrangimentos motores. Nas cadeias cinemáticas abertas, o número de coordenadas relativas pode coincidir com o número de graus de liberdade, não existindo equações de constrangimento geométrico (mecanismo cinematicamente definido). Nos mecanismos com cadeia cinemática fechada as coordenadas relativas conduzem a formulações não sistemáticas (quer dizer, a formulações dependentes da estrutura particular de cada mecanismo), o que dificulta a sua implementação computacional num código generalista (Jalon e Bayo, 1994).

3.4 Coordenadas generalizadas: coordenadas naturais

As coordenadas naturais foram propostas mais recentemente como uma alternativa às coordenadas cartesianas absolutas e às coordenadas relativas (Jalon e Bayo, 1994). Para um sólido com movimento plano podem ser adotadas como coordenadas naturais as coordenadas cartesianas de dois pontos do sólido, D_i^1 e D_i^2 (figura 3.3):

$$\underline{r}_i^{(1)}(t) = \begin{bmatrix} x_i^{(1)} \\ y_i^{(1)} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{r}_i^{(2)}(t) = \begin{bmatrix} x_i^{(2)} \\ y_i^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

A matriz coluna das coordenadas generalizadas naturais do sólido pode então ser agrupada utilizando as funções $\underline{r}_i^{(1)}$ e $\underline{r}_i^{(2)}$:

$$\underline{q}_i^a(t) = \begin{bmatrix} x_i^{(1)}(t) \\ y_i^{(1)}(t) \\ x_i^{(2)}(t) \\ y_i^{(2)}(t) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Estas coordenadas generalizadas não são independentes entre si, devendo satisfazer a

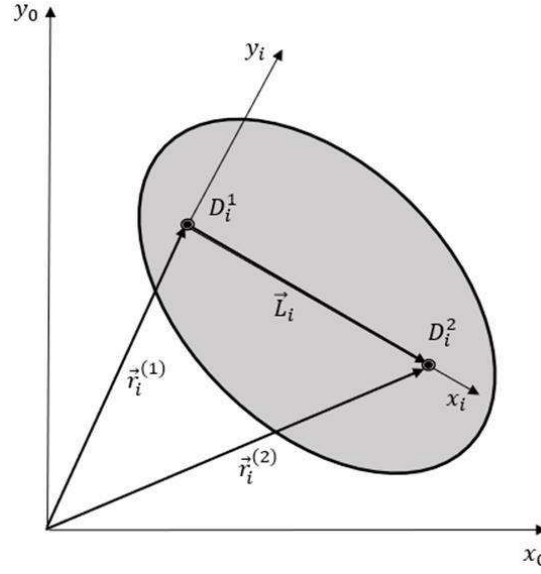


Figura 3.3 - Posição de um sólido em coordenadas naturais.

seguinte equação de constrangimento de corpo rígido:

$$(x_i^{(2)} - x_i^{(1)})^2 + (y_i^{(2)} - y_i^{(1)})^2 - L_i^2 = 0 \quad (3.7)$$

As coordenadas de qualquer ponto P do sólido i podem ser obtidas a partir das coordenadas naturais (3.6) através da seguinte equação de transformação (Jalon e Bayo, 1994):

$$\begin{bmatrix} x_i^P \\ y_i^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - u_1 & u_2 & u_1 - u_2 \\ -u_2 & 1 - u_1 & u_2 & u_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i^{(1)} \\ y_i^{(1)} \\ x_i^{(2)} \\ y_i^{(2)} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

com

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/L_i & 0 \\ 0 & 1/L_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i^P \\ y_i^P \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

sendo x_i^P e y_i^P as coordenadas locais, no referencial $D_i^1 x_i y_i$ (Figura 3.3), do ponto P do sólido i .

Nos mecanismos planos em que as juntas cinemáticas são juntas de rotação, como é o caso do modelo biomecânico sobre o qual incide o presente trabalho, se os pontos usados para definir a posição de um sólido coincidirem com as juntas cinemáticas obtém-se uma redução substancial do número total de coordenadas generalizadas (Jalon e Bayo, 1994). Além disso, as únicas equações de constrangimento geométrico são as equações dos constrangimentos internos de corpo rígido (3.7).

3.5 Análise cinemática de mecanismos cinematicamente definidos

As coordenadas globais do ponto P_i do sólido i e as coordenadas locais (figura 3.3), respetivamente

$$\underline{r}_i = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad {}^i \underline{s}_i^P = \begin{bmatrix} i x_i^P \\ i y_i^P \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

estão relacionadas através da seguinte equação (Haug, 1989):

$$\begin{bmatrix} x_i^P \\ y_i^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos \phi_i & -\sin \phi_i \\ \sin \phi_i & \cos \phi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i x_i^P \\ i y_i^P \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

A velocidade absoluta (medida no referencial global) do ponto P_i ,

$$\underline{v}_i^P = \dot{\underline{r}}_i^P = \begin{bmatrix} \dot{x}_i^P \\ \dot{y}_i^P \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

obtém-se derivando em ordem ao tempo a equação 3.11:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_i^P \\ \dot{y}_i^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{x}_i \\ \dot{y}_i \end{bmatrix} + \dot{\phi}_i \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi_i & -\sin\phi_i \\ \sin\phi_i & \cos\phi_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{x_i^P} \\ i_{y_i^P} \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Por sua vez, para obter a aceleração absoluta ponto P_i ,

$$\underline{a}_i^P = \underline{\ddot{r}}_i^P = \begin{bmatrix} \ddot{x}_i^P \\ \ddot{y}_i^P \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

deve-se derivar a equação 3.13 novamente em ordem ao tempo, resultando:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_i^P \\ \ddot{y}_i^P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_i \\ \ddot{y}_i \end{bmatrix} + \ddot{\phi}_i \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{\underline{A}}_i \begin{bmatrix} i_{x_i^P} \\ i_{y_i^P} \end{bmatrix} - \dot{\phi}_i^2 \underline{\underline{A}}_i \begin{bmatrix} i_{x_i^P} \\ i_{y_i^P} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

onde

$$\underline{\underline{A}}_i = \begin{bmatrix} \cos\phi_i & -\sin\phi_i \\ \sin\phi_i & \cos\phi_i \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

3.6 Dinâmica Inversa

Designam-se por mecanismos cinematicamente todos os mecanismos cujos graus de liberdade são conhecidos ao longo do tempo (constrangimentos motores). Para estes mecanismos a análise cinemática conduz a sistemas de equações (equações de constrangimento) não lineares para a determinação das coordenadas generalizadas e a sistemas de equações lineares para a determinação das velocidades e das acelerações generalizadas. Uma vez resolvido o problema de cinemática podem ser determinados todos os esforços de ligação que atuam em cada sólido do mecanismo, recorrendo à análise dinâmica. Um dos métodos mais comuns para resolver este problema, designado por dinâmica inversa, baseia-se nas equações de Newton-Euler (Shabana, 2009).

Na Figura 3.4 está representado o diagrama de corpo livre de um segmento anatómico genérico. As equações de Newton-Euler, para a dinâmica do movimento plano de um sólido, têm o seguinte aspeto (Shabana, 2009):

$$\underline{M}_i^a \ddot{q}_i^a = \underline{Q}_i^a \quad (3.17)$$

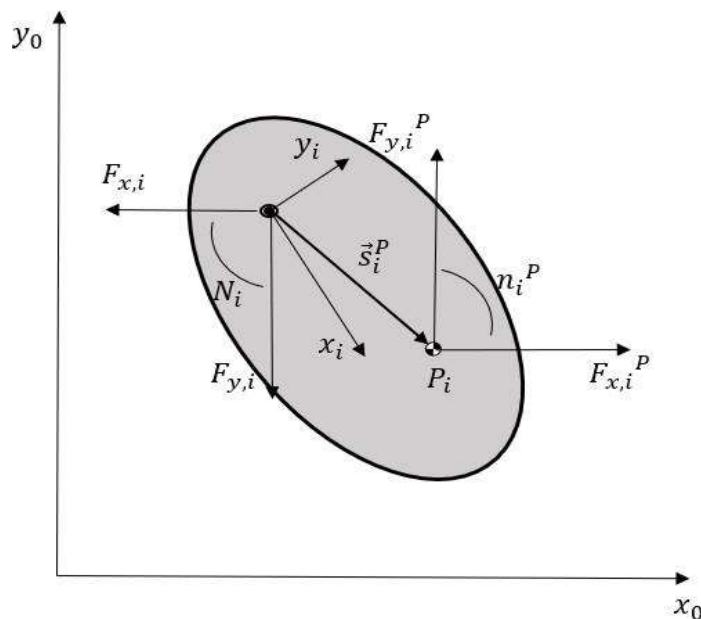


Figura 3.4 – Esforços exteriores que atuam num sólido.

sendo $\ddot{\underline{q}}_i^a$ as acelerações generalizadas, $\underline{\underline{M}}_i^a$ a matriz de massa generalizada e $\underline{Q}_i^a$ a matriz coluna dos esforços exteriores reduzidos ao centro de massa, para coordenadas cartesianas absolutas (3.3).

Fazendo a distinção entre esforços motores (expoente m), esforços diretamente aplicados (expoente d) e esforços de ligação (expoente r), as equações de Newton-Euler (3.17) para o segmento anatómico i podem ser decompostas nas seguintes equações (Almeida, 2016):

$$\underline{F}_i^d + \underline{F}_i^m + \sum_j \underline{F}_{ji}^r - m_i \underline{a}_i = \underline{0} \quad (3.18)$$

e

$$n_i^d + n_i^m + N_i^d + N_i^m + \sum_j (N_{ji}^r + n_{ji}^r) - I_i \ddot{\theta}_6 = 0 \quad (3.19)$$

em que N_i^d representa o momento resultante das forças motoras e N_{ji}^r representa o momento da força de reação $\underline{F}_{ji}^r$. Aplicando as equações anteriores (3.18 e 3.19) a todos os segmentos anatómico do modelo biomecânico obtém-se um sistema de equações lineares cujas incógnitas são os esforços motores ($\underline{F}_i^m$ e n_i^m) e os esforços de reação ($\underline{F}_{ji}^r$ e n_{ji}^r). Num mecanismo de cadeia aberta, como é o caso do modelo biomecânico analisado neste trabalho, esse sistema de equações pode ser resolvido recursivamente.

CAPÍTULO 4

Modelo anatómico do salto vertical

4.1 Introdução

Este capítulo tem dois objetivos centrais. O primeiro objetivo consiste na apresentação do modelo anatómico e dos dados cinemáticos do problema do salto vertical, cuja análise (cinemática e dinâmica) será tratada nos capítulos posteriores. Quer o modelo anatómico quer os dados cinemáticos foram obtidos a partir do trabalho de Anderson e Pandy (1999). O segundo objetivo consiste na apresentação e aplicação de dois algoritmos para a derivação dos dados cinemáticos: a aproximação por *splines* cúbicos e o alisamento polinomial. Estes algoritmos foram aplicados aos dados cinemáticos para a análise mecânica do modelo anatómico recorrendo às coordenadas relativas e recorrendo às coordenadas naturais.

4.2 Modelo anatómico

Para a análise cinemática do salto vertical, recorreu-se ao modelo biomecânico proposto por Anderson e Pandy (1999). A partir desse modelo foi construído o modelo 2D, para análise no plano sagital, cuja posição anatómica de referência se encontra representada na figura 4.1. O modelo é composto pelos seis segmentos anatómicos que estão discriminados na tabela 4.1 (Almeida, 2016; Hamill e Knutzen, 2008), ligados entre si por juntas de rotação (ou rótulas).

Cada segmento anatómico é identificado por um número inteiro j ($j = 1, \dots, 6$), e cada rótula por um par ordenado (k, j) , sendo k o segmento que sucede imediatamente a j na cadeia cinemática ($k = j + 1$). O referencial fixo corresponde ao corpo $j = 0$ e tem origem coincidente com a rótula $(1, 0)$. Os referenciais fixos em cada segmento anatómico $(C_j, \vec{l}_j, \vec{j}_j)$ têm origem no respectivo centro de massa (C_j) . Na posição anatómica de referência, cada referencial $(C_j, \vec{l}_j, \vec{j}_j)$ tem eixos paralelos aos eixos do referencial fixo $(O, \vec{l}_0, \vec{j}_0)$.

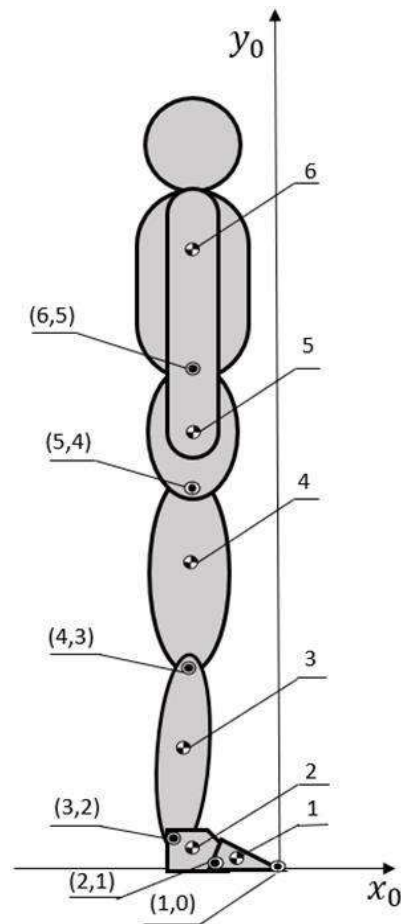


Figura 4.1 - Posição anatômica de referência do modelo biomecânico: centros de massa dos segmentos ($j = 1, \dots, 6$), rótulas $(j+1, j)$ e referencial global.

Tabela 4.1 - Segmentos anatômicos.

j	Segmento anatômico
1	Pé anterior
2	Pé posterior
3	Perna
4	Coxa
5	Pélvis
6	Cabeça, tronco e membros (HAT)

Na figura 4.2 estão representados dois segmentos anatômicos, k e j , numa posição relativa arbitrária. As componentes do vetor $\vec{s}_j^{(k,j)}$ no referencial do corpo j , são as coordenadas $x_j^{(k,j)}$ e $y_j^{(k,j)}$ da rótula (k, j) , nesse mesmo referencial. Por sua vez, $x_k^{(k,j)}$ e

$y_k^{(k,j)}$ são as coordenadas da rótula (k, j) no referencial do corpo k . Todas as coordenadas locais são constantes no tempo e os seus valores estão indicados na tabela 4.3 (Anderson and Pandy, 1999). Na tabela 4.3 encontram-se transcritos os valores da massa, m_j , e do momento de inércia, I_j , de cada segmento anatómico (Anderson and Pandy, 1999).

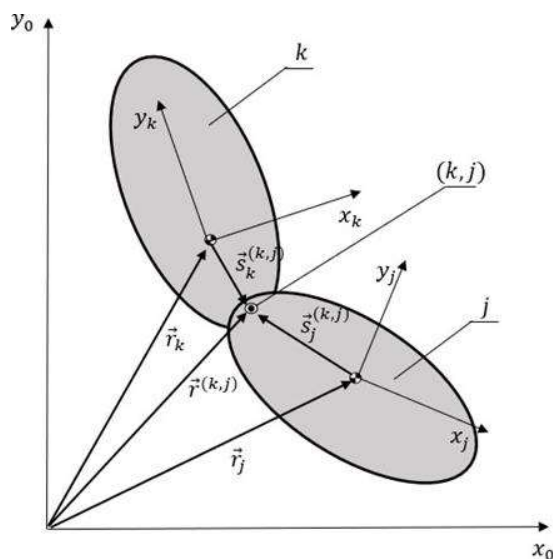


Figura 4.2 - Rótula (k,j) , entre os segmentos k e j .

Tabela 4.2 - Coordenadas relativas da geometria dos segmentos anatómicos e articulações (Anderson e Pandy, 1999).

Segmento j	Segmento k	Referencial local j (m)		Referencial local k (m)	
		$x_j^{(k,j)}$	$y_j^{(k,j)}$	$x_k^{(k,j)}$	$y_k^{(k,j)}$
Ref. Fixo (0)	Pé anterior (1)	0	0	0,0400	-0,0200
Pé anterior (1)	Pé posterior (2)	-0,0269	-0,0185	0,0980	-0,0380
Pé posterior (2)	Perna (3)	-0,0359	0,0513	0,0000	-0,2438
Perna (3)	Coxa (4)	0,0000	0,1862	0,0033	-0,2294
Coxa (4)	Pélvis (5)	0,0020	0,1715	0,0000	-0,0700
Pélvis (5)	HAT (6)	0,0000	0,1270	0,0000	-0,3202

Tabela 4.3 - Propriedades inerciais dos segmentos anatómicos (Anderson e Pandey, 1999).

Segmento, j	Massa, m_j (kg)	Momento de inércia, I_j (kg/m ²)
1	0,4102	0,0002
2	2,4000	0,0078
3	7,0200	0,0968
4	17,6120	0,2674
5	11,1500	0,0548
6	32,4130	1,3552

4.3 Dados cinemáticos do modelo anatómico

Do estudo realizado por Anderson e Pandey (1999) foram recolhidos os dados cinemáticos do movimento, que serão utilizados na implementação das análises cinemática e dinâmica a efetuar neste trabalho. Estes autores utilizaram coordenadas relativas. De facto, para cada instante da fase de impulso fornecem o ângulo (de flexão ou de extensão) entre segmentos contíguos (isto é, o ângulo entre o eixo das abcissas do segmento anatómico k e o eixo das abcissas do segmento anatómico j , ilustrados na figura 4.2), além da orientação das pélvis em relação ao referencial global. Na tabela 4.4 encontram-se os valores dos ângulos $f^{(k,j)}(t)$, entre segmentos anatómicos contíguos e da pélvis em relação ao referencial fixo, no intervalo de tempo da fase de impulso, até o momento em que o modelo anatómico deixa o solo (ou seja, no intervalo $0 \leq t \leq 0,25$ s.

4.4 Aproximação por *splines* cúbicos

Os dados que constam na Tabela 4.4 terão que ser derivados, até à segunda ordem, para a análise das velocidades e a análise das acelerações do modelo biomecânico. Uma possibilidade é a derivação numérica direta desses dados, usando diferenças finitas progressivas, regressivas ou centrais, respetivamente:

Tabela 4.4 - Ângulos entre cada segmento anatómico por instante de tempo (Anderson and Pandy, 1999).

Tempo de contacto com o solo (s)	Ângulo entre segmentos anatómicos (°)				
	$f^{(3,2)}(t)$	$f^{(4,3)}(t)$	$f^{(5,4)}(t)$	$f^{(6,5)}(t)$	$f^{(5,0)}(t)$
0	-28.86	79.87	-76.36	-9.56	-24.99
0.01	-28.86	79.88	-76.24	-9.87	-24.93
0.02	-28.86	80.31	-75.7	-10.35	-24.68
0.03	-28.86	80.31	-74.96	-11.03	-24.18
0.04	-29.12	80.36	-74.19	-12.34	-23.33
0.05	-29.3	80.48	-73.43	-12.97	-22.36
0.06	-29.49	80.49	-71.93	-13.54	-21.62
0.07	-29.53	80.49	-70.83	-13.54	-21.12
0.08	-29.78	80.19	-69.84	-13.56	-20.55
0.09	-29.78	79.39	-68.49	-13.56	-19.63
0.1	-29.78	78.36	-66.59	-13.64	-18.49
0.11	-29.78	77.05	-64.07	-13.44	-17.6
0.12	-29.78	75.57	-61.22	-12.6	-16.75
0.13	-29.54	73.24	-58.27	-11.59	-15.86
0.14	-28.81	70.43	-54.51	-10.28	-14.89
0.15	-27.42	67.04	-51.14	-9.39	-13.85
0.16	-25.59	63.6	-47.23	-8.29	-12.64
0.17	-22.91	59.87	-42.08	-7.34	-11.18
0.18	-19.58	54.56	-36.97	-6.67	-9.49
0.19	-14.92	49.11	-31.89	-6.35	-7.32
0.2	-9.4	42.71	-25.46	-6.22	-5.17
0.21	-2.11	35.8	-18.97	-6.03	-3.04
0.22	7.41	27.22	-12.01	-5.69	-0.9
0.23	15.31	17.53	-5.24	-4.92	0.86
0.24	21.1	10.37	-0.89	-2.66	1.12
0.25	23.47	5.01	2.3	0	0.95

$$f'(t_i) = \frac{f'(t_{i+1} - t_i)}{t_{i+1} - t_i} \quad (4.1)$$

$$f'(t_i) = \frac{f'(t_i - t_{i-1})}{t_i - t_{i-1}} \quad (4.2)$$

$$f'(t_i) = \frac{f'(t_{i+1} - t_{i-1})}{t_{i+1} - t_{i-1}} \quad (4.3)$$

É sabido que a derivação numérica direta amplifica o ruído dos dados originais (tabela 4.4), podendo fornecer resultados inaceitáveis. Por essa razão, neste trabalho recorreu-se aos *splines* cúbicos, não só para interpolar os dados originais como também para obter a sua primeira e segunda derivadas. A interpolação por *splines* foi considerada em vez da regressão polinomial global (isto é, um único polinómio determinado pelo método dos mínimos quadrados) que foi usada em trabalho anterior (Almeida, 2016). De facto, a regressão polinomial de grau elevado conduz a polinómios com oscilações espúrias.

Os *splines* cúbicos constituem um método de aproximação polinomial segmentada, que emprega polinómios de terceiro grau para interpolar dois nós consecutivos, mas de forma a garantir a continuidade da primeira e da segunda derivada (Burden e Faires, 2009). O polinómio segmentado resultante é, pois, uma curva da classe C^2 (curva com derivada contínua de 2ª ordem), tratando-se de uma característica adequada para a derivação de dados cinemáticos discretos.

Consideremos um conjunto de dados $(x_j, f(x_j))$ nos nós $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ (figura 4.3). Associemos ao intervalo $[x_j, x_{j+1}]$ (para cada $j = 0, 1, \dots, n-1$) um polinómio da forma:

$$S_j(x) = a_j + b_j(x - x_j) + c_j(x - x_j)^2 + d_j(x - x_j)^3 \quad (4.4)$$

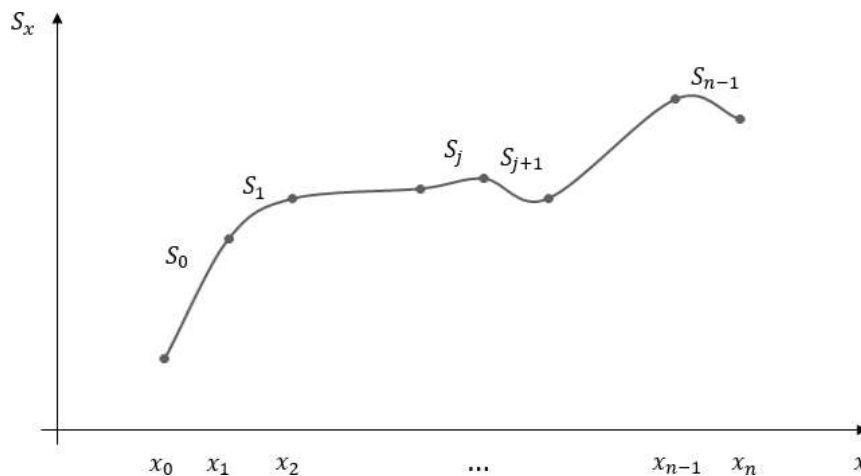


Figura 4.3-Spline cúbico.

A função $S(x)$ que resulta da justaposição dos polinómios $S_j(x)$ é um *spline* cúbico se verificar as seguintes condições (Burden e Faires, 2009):

- a. $S(x_j) = f(x_j)$ para cada $j = 0, 1, \dots, n$;
- c. $S_{j+1}(x_{j+1}) = S_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n - 2$;
- d. $S'_{j+1}(x_{j+1}) = S'_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n - 2$;
- e. $S''_{j+1}(x_{j+1}) = S''_j(x_{j+1})$ para cada $j = 0, 1, \dots, n - 2$;
- f. Uma das seguintes condições de fronteira ser satisfeita:
 - (i) $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$ (**natural**)
 - (ii) $S'(x_0) = f'(x_0)$ e $S'(x_n) = f'(x_n)$ (**clamped**)

Embora os *splines* cúbicos sejam também definidos por outras condições de fronteira, as condições apresentadas são suficientes para o problema que iremos tratar nos capítulos seguintes. De modo geral, as condições de fronteira do tipo *clamped* tendem a apresentar aproximações mais exatas porque incluem mais informações sobre a função. Contudo, para este tipo de condição de fronteira é necessário conhecer os valores das derivadas nas extremidades ou pelo menos uma aproximação exata dos mesmos.

A identificação do *spline* cúbico com uma condição de fronteira natural pode ser obtida através do algoritmo apresentado em seguida (Burden e Faires, 2009).

***Spline* cúbico natural**

Construção da interpolação com *spline* cúbico S para a função f , definida em $x_0 < x_1 < \dots < x_n$:

INPUT $n; x_0, x_1, \dots, x_n; a_0 = f(x_0), a_1 = f(x_1), \dots, a_n = f(x_n)$.

OUTPUT a_j, b_j, c_j, d_j para $j = 0, 1, \dots, n - 1$.

1º passo Para $i = 0, 1, \dots, n - 1$ considere $h_i = x_{i+1} - x_i$.

continua

continuação

2º passo Para $i = 1, 2, \dots, n - 1$ considere $\alpha_i = \frac{3}{h_i}(a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}}(a_i - a_{i-1})$.

3º passo Considere

$$l_0 = 1;$$

$$\mu_0 = 0;$$

$$z_0 = 0;$$

4º passo Para $i = 1, 2, \dots, n - 1$ considere

$$l_i = 2(x_{i+1} - x_{i-1}) - h_{i-1}\mu_{i-1};$$

$$\mu_i = \frac{h_i}{l_i};$$

$$z_i = \frac{\alpha_i - h_{i-1}\mu_{i-1}}{l_i};$$

5º passo Considere

$$l_n = 1;$$

$$z_n = 0;$$

$$c_n = 0;$$

6º passo Para $j = n - 1, n - 2, \dots, 0$ considere

$$c_j = z_j - \mu_j c_{j+1};$$

$$b_j = \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - \frac{h_j(c_{j+1} + 2c_j)}{3};$$

$$d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j};$$

7º passo **OUTPUT** (a_j, b_j, c_j, d_j para $j = 0, 1, \dots, n - 1$);

STOP (Burden e Faires, 2009)

A identificação do *spline* cúbico com uma condição de fronteira “clamped” pode ser obtida através do algoritmo descrito a seguir (Burden e Faires, 2009).

Spline* cúbico *Clamped

Construção da interpolação com *spline* cúbico S para a função f , definida em $x_0 < x_1 < \dots < x_n$:

INPUT $n; x_0, x_1, \dots, x_n; a_0 = f(x_0), a_1 = f(x_1), \dots, a_n = f(x_n); FPO = f'(x_0); FPN = f'(x_n).$

OUTPUT a_j, b_j, c_j, d_j para $j = 0, 1, \dots, n-1$.

1º passo Para $i = 0, 1, \dots, n-1$ considere $h_i = x_{i+1} - x_i$.

2º passo Considere

$$\alpha_0 = \frac{3}{h_0} (a_1 - a_0) - 3FPO;$$

$$\alpha_n = 3FPN - \frac{3}{h_{n-1}} (a_n - a_{n-1})$$

3º passo Para $i = 1, 2, \dots, n-1$ considere

$$\alpha_i = \frac{3}{h_i} (a_{i+1} - a_i) - \frac{3}{h_{i-1}} (a_i - a_{i-1});$$

4º passo Considere

$$l_0 = 2h_0;$$

$$\mu_0 = 0,5;$$

$$z_0 = \frac{\alpha_0}{l_0};$$

continua

continuação

5º passo Para $i = 1, 2, \dots, n - 1$ considere

$$l_i = 2(x_{i+1} - x_{i-1}) - h_{i-1}\mu_{i-1};$$

$$\mu_i = \frac{h_i}{l_i};$$

$$z_i = \frac{\alpha_i - h_{i-1}z_{i-1}}{l_i};$$

6º passo Considere

$$l_n = h_{n-1}(2 - \mu_{n-1});$$

$$z_n = \frac{\alpha_n - h_{n-1}z_{n-1}}{l_n};$$

$$c_n = z_n;$$

7º passo Para $j = n - 1, n - 2, \dots, 0$ considere

$$c_j = z_j - \mu_j c_{j+1};$$

$$b_j = \frac{a_{j+1} - a_j}{h_j} - \frac{h_j(c_{j+1} + 2c_j)}{3};$$

$$d_j = \frac{c_{j+1} - c_j}{3h_j};$$

8º passo **OUTPUT** (a_j, b_j, c_j, d_j para $j = 0, 1, \dots, n - 1$);

STOP (Burden e Faires, 2009)

4.5 Alisamento de dados

Um outro método que pode ser utilizado para solucionar o problema da derivação numérica de dados discretos é o alisamento de dados. No chamado alisamento local dos dados (x_i, y_i) , para obter o valor ajustado $u_i = u(x_i)$, apenas são usados alguns pontos na vizinhança do ponto i . Em seguida vamos apresentar três métodos de alisamento local, para nós x_i que estão equidistantes de h (Pina, 1995).

Alisamento com um polinómio de grau ≤ 1 e 3 pontos. O alisamento é feito por ajustamento de um polinómio de grau ≤ 1 ao conjunto de dados (x_{i-1}, y_{i-1}) , (x_i, y_i) e (x_{i+1}, y_{i+1}) , usando o método dos mínimos quadrados. O valor alisado u_i é dado por:

$$u_i = \frac{1}{3}(y_{i-1} + y_i + y_{i+1}), \quad 2 \leq i \leq m-1 \quad (4.5)$$

No caso do ponto x_i ser um dos valores extremos, x_1 ou x_m , dos valores disponíveis, tem-se para o extremo esquerdo

$$u_1 = \frac{1}{6}(5y_1 + 2y_2 - y_3) \quad (4.6)$$

e para o extremo direito,

$$u_m = \frac{1}{6}(5y_m + 2y_{m-1} - y_{m-2}) \quad (4.7)$$

Associada a esta técnica de alisamento tem-se a seguinte aproximação para a primeira derivada (Pina, 1995):

$$u'_i = \frac{1}{2h}(y_{i+1} - y_{i-1}) \quad (4.8)$$

Alisamento com um polinómio de grau ≤ 1 e 5 pontos. O alisamento é feito neste caso por ajustamento de um polinómio de grau ≤ 1 , através do método dos mínimos quadrados, ao conjunto de dados (x_{i-2}, y_{i-2}) , (x_{i-1}, y_{i-1}) , (x_i, y_i) , (x_{i+1}, y_{i+1}) e (x_{i+2}, y_{i+2}) , resultando no seguinte valor alisado (Pina, 1995):

$$u_i = \frac{1}{5}(y_{i-2} + y_{i-1} + y_i + y_{i+1} + y_{i+2}), \quad 2 \leq i \leq m-1 \quad (4.9)$$

Os valores alisados nos extremos esquerdo e direito, respetivamente, são dados por:

$$u_1 = \frac{1}{5} (3y_1 + 2y_2 + y_3 - y_4) \quad (4.10)$$

e

$$u_m = \frac{1}{5} (3y_m + 2y_{m-1} - y_{m-1} - y_{m-3}) \quad (4.11)$$

Por sua vez, para os pontos x_2 e x_{m-1} tem-se:

$$u_2 = \frac{1}{10} (4y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4) \quad (4.12)$$

e

$$u_{m-1} = b = \frac{1}{10} (4y_m + 3y_{m-1} + 2y_{m-2} + y_{m-3}) \quad (4.13)$$

A primeira derivada pode ser calculada por intermédio da expressão (Pina, 1995), válida apenas para os pontos $2 \leq i \leq m - 1$:

$$u'_i = b = \frac{1}{5} \left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \right) + \frac{4}{5} \left(\frac{y_{i+2} - y_{i-2}}{4h} \right) \quad (4.14)$$

Alisamento com um polinómio de grau ≤ 2 e 5 pontos. O alisamento é feito neste caso por ajustamento, no sentido dos mínimos quadrados, de um polinómio de grau ≤ 2 ao conjunto de dados (x_{i-2}, y_{i-2}) , (x_{i-1}, y_{i-1}) , (x_i, y_i) , (x_{i+1}, y_{i+1}) e (x_{i+2}, y_{i+2}) . O valor alisado resultante é dado por (Pina, 1995):

$$u_i = \frac{1}{35} (-3y_{i-2} + 12y_{i-1} + 17y_i + 12y_{i+1} - 3y_{i+2}), \quad 3 \leq i \leq m - 2 \quad (4.15)$$

Os restantes valores alisados são dados pelas seguintes expressões (Pina, 1995):

$$u_1 = \frac{1}{35} (31y_1 + 9y_2 - 3y_3 - 5y_4 + 3y_5) \quad (4.16)$$

$$u_2 = \frac{1}{35} (9y_1 + 13y_2 + 12y_3 + 6y_4 - 5y_5) \quad (4.17)$$

$$u_m = \frac{1}{35} (31y_m + 9y_{m-1} - 3y_{m-2} - 5y_{m-3} + 3y_{m-4}) \quad (4.18)$$

$$u_{m-1} = \frac{1}{35} (9y_m + 13y_{m-1} + 12y_{m-2} + 6y_{m-3} - 5y_{m-4}) \quad (4.19)$$

4.6 Aproximação polinomial e derivação dos dados cinemáticos: coordenadas relativas

Para implementação do algoritmo de coordenadas relativas, começamos por gerar as coordenadas relativas $\emptyset_j$ a partir da informação recolhida no trabalho de Anderson e Pandy (1999), através do seguinte sistema de equações (tabela 4.4):

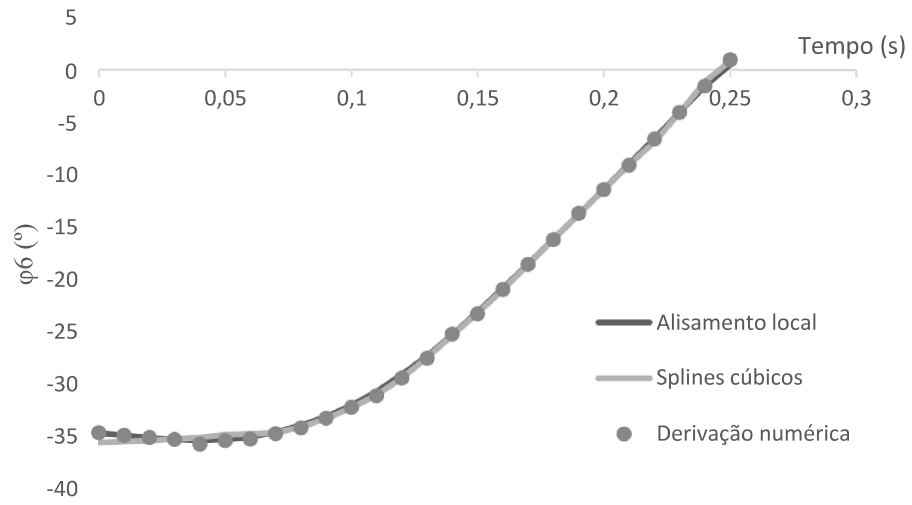
$$\begin{bmatrix} \emptyset_5 \\ \emptyset_6 \\ \emptyset_4 \\ \emptyset_3 \\ \emptyset_2 \\ \emptyset_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f^{(5,0)}(t) \\ \emptyset_5 + f^{(6,5)}(t) \\ \emptyset_5 - f^{(5,4)}(t) \\ \emptyset_4 - f^{(4,3)}(t) \\ \emptyset_3 - f^{(3,2)}(t) \\ f^{(1,0)}(t) \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

Os resultados assim obtidos estão ilustrados na tabela 4.5, para a coordenada $\emptyset_6$.

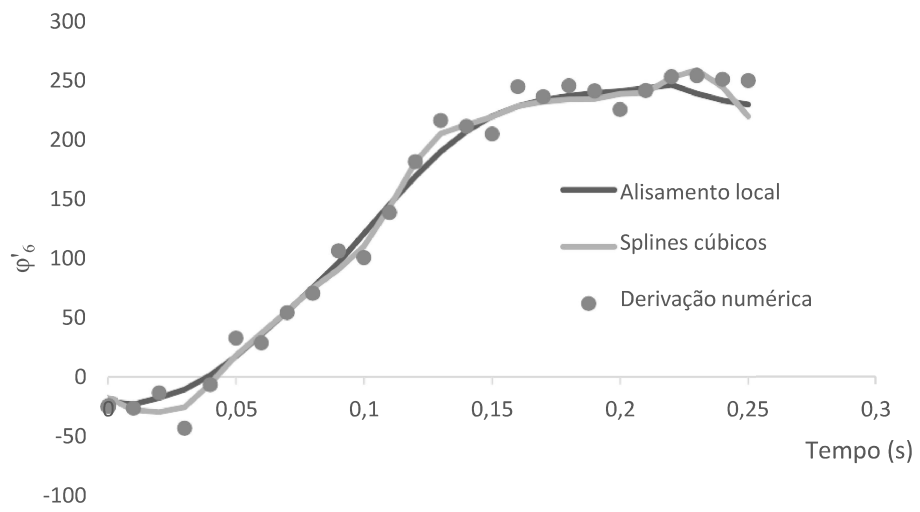
Tabela 4.5 - Coordenada relativa $\emptyset_6$ durante a fase de contacto

Tempo de contacto com o solo (s)	$\emptyset_6$
0	-34.55
0.01	-34.8
0.02	-35.03
0.03	-35.21
0.04	-35.67
0.05	-35.33
0.06	-35.16
0.07	-34.66
0.08	-34.11
0.09	-33.19
0.1	-32.13
0.11	-31.04
0.12	-29.35
0.13	-27.45
0.14	-25.17
0.15	-23.24
0.16	-20.93
0.17	-18.52
0.18	-16.16
0.19	-13.67
0.2	-11.39
0.21	-9.07
0.22	-6.59
0.23	-4.06
0.24	-1.54
0.25	0.95

Para calcular a primeira e segunda derivadas das coordenadas generalizadas recorreu-se a três métodos de derivação: (1) derivação numérica (diferenças finitas progressivas, regressivas ou centrais); (2) derivação através de *splines* cúbicos, com alisamento local utilizando um polinómio com $n \leq 2$ e 5 pontos; (3) derivação através do método de alisamento local com um polinómio com $n \leq 1$ e 5 pontos. Na figura 4.4 encontram-se os resultados obtidos para $\emptyset_6$ e para as respetivas derivadas. Os gráficos das restantes coordenadas generalizadas encontram-se no Anexo 1.

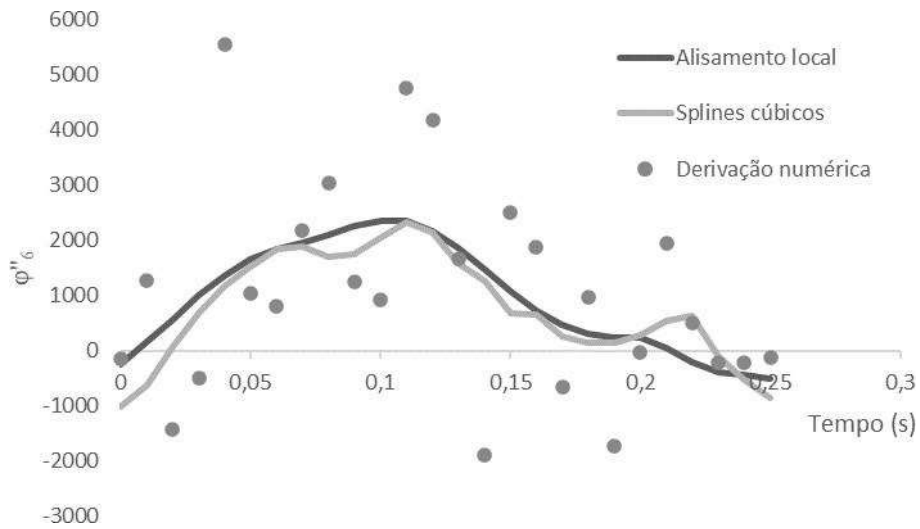


(a)



(b)

Figura 4.4 - Dados, *splines* cúbicos e alisamento local das coordenadas generalizadas: (a) ϕ_6 ; (b) $\dot{\phi}_6$; (c) $\ddot{\phi}_6$. (Continua)



(c)

Figura 4.4 - Derivação numérica, *splines* cúbicos e alisamento local das coordenadas generalizadas: (a) $\dot{\phi}_6$; (b) $\ddot{\phi}_6$; (c) $\ddot{\phi}_6$.
(Continuação)

4.7 Aproximação polinomial e derivação dos dados cinemáticos: coordenadas naturais

Para o modelo biomecânico adotado neste trabalho (figura 4.1) a lista de coordenadas naturais são as coordenadas das juntas de rotação (ou rótulas):

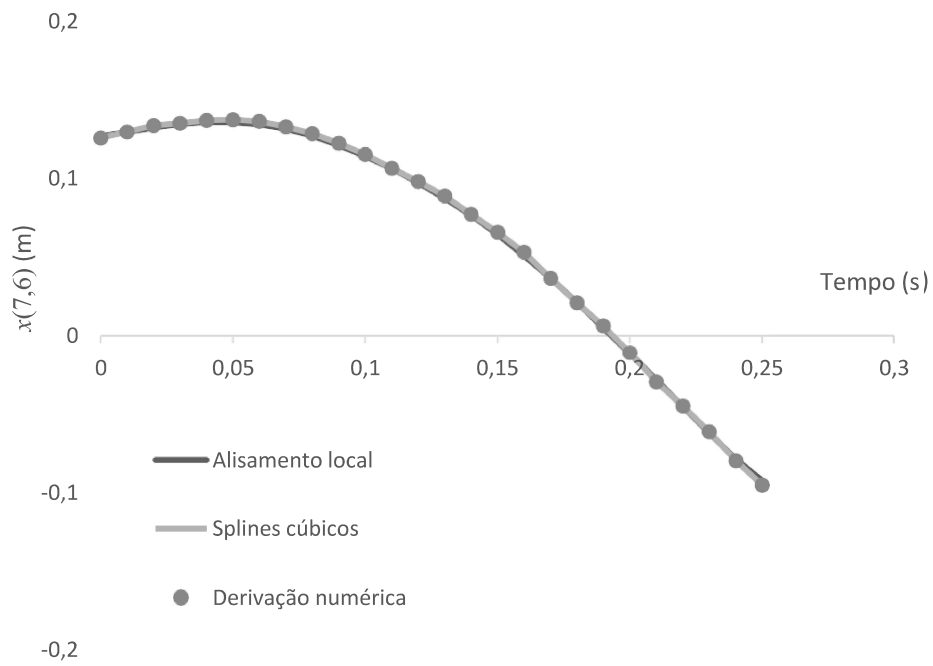
$$\underline{q}^T = [x^{(2,1)} y^{(2,1)} x^{(3,2)} y^{(3,2)} x^{(4,3)} y^{(4,3)} x^{(5,4)} y^{(5,4)} x^{(6,5)} y^{(6,5)} x^{(7,6)} y^{(7,6)}] \quad (4.21)$$

Na análise cinemática e dinâmica do modelo biomecânico os dados são os valores destas coordenadas naturais. Tais valores foram gerados a partir dos dados que constam na tabela 4.4 (Anderseon e Pandey, 1999), usando a equação de transformação 3.11 e os parâmetros geométricos do modelo biomecânico (tabela 4.2). Os resultados obtidos estão ilustrados na tabela 4.6 para o ponto (7,6) do segmento HAT (figura 4.1).

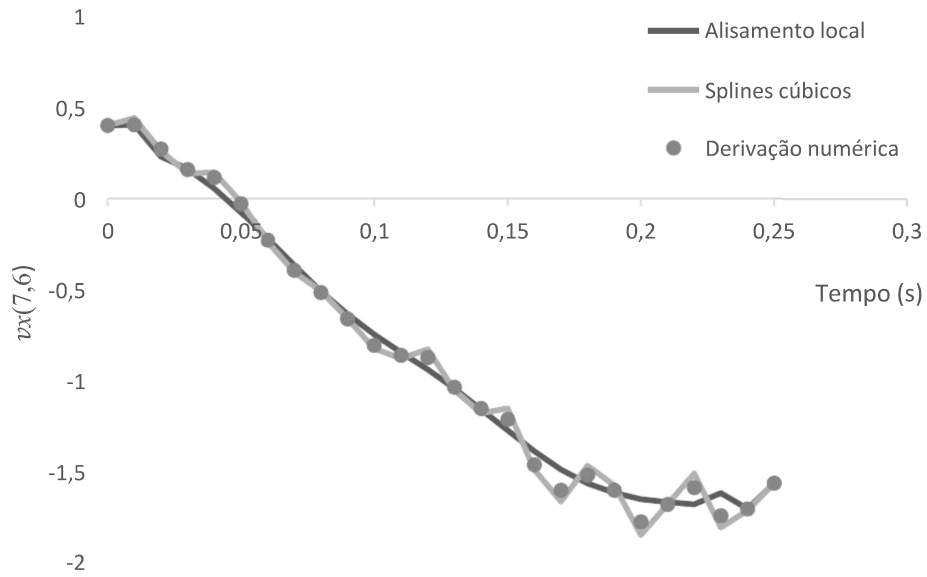
Tabela 4.6 - Coordenadas absolutas do ponto básico (7,6) da lista de coordenadas naturais, em cada instante de tempo.

Tempo de contacto com o solo (s)	$x^{(7,6)}$	$y^{(7,6)}$
0	0.12532	1.40587
0.01	0.12933	1.40571
0.02	0.13341	1.40499
0.03	0.13474	1.40464
0.04	0.13658	1.40546
0.05	0.13703	1.40757
0.06	0.13602	1.41067
0.07	0.13248	1.41620
0.08	0.12817	1.42373
0.09	0.12220	1.43339
0.1	0.11499	1.44579
0.11	0.10614	1.46145
0.12	0.09782	1.48061
0.13	0.08873	1.50220
0.14	0.07717	1.52608
0.15	0.06573	1.55219
0.16	0.05298	1.58003
0.17	0.03658	1.60865
0.18	0.02104	1.63860
0.19	0.00630	1.66935
0.2	-0.01091	1.70054
0.21	-0.02907	1.73005
0.22	-0.04440	1.75498
0.23	-0.06073	1.77322
0.24	-0.07913	1.78605
0.25	-0.09471	1.79164

Aos valores discretos das coordenadas naturais que foram obtidos do modo que acabamos de descrever, foram aplicados os três métodos de tratamento citados anteriormente para obter as primeiras e segundas derivadas: (1) derivação numérica (diferenças finitas progressivas, regressivas ou centrais); (2) derivação através de *splines* cúbicos, com alisamento local utilizando um polinómio com $n \leq 2$ e 5 pontos; (3) derivação através do método de alisamento local com um polinómio com $n \leq 1$ e 5 pontos. Nas figuras 4.5 e 4.6 podem-se visualizar graficamente os resultados obtidos a partir dos dados que constam na tabela na tabela 4.6. Os resultados relativos às restantes coordenadas naturais encontram-se no Anexo 2.

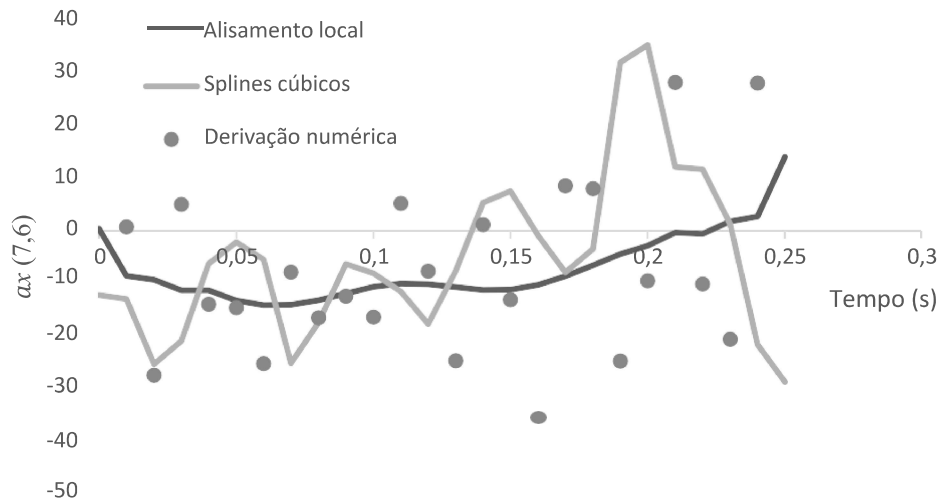


(a)



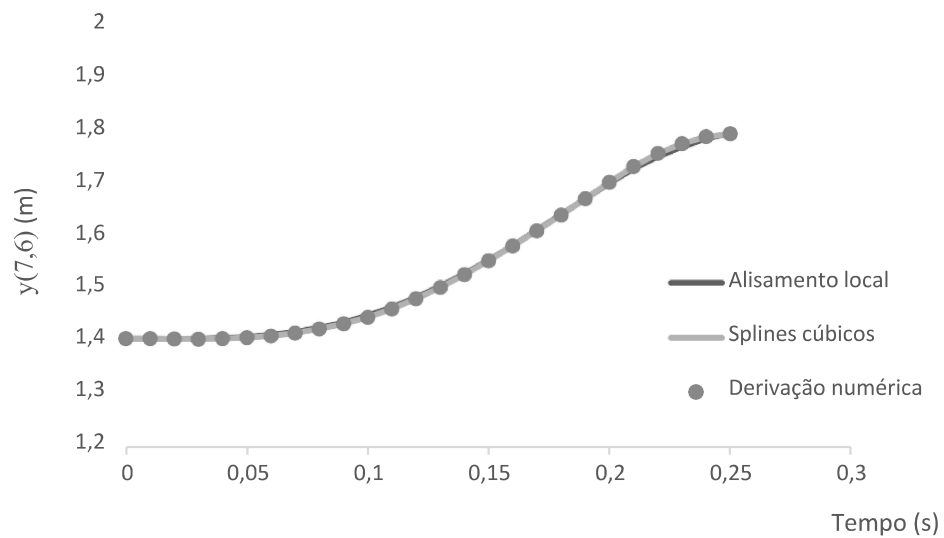
(b)

Figura 4.5 - Dados, *splines* cúbicos e alisamento local para: (a) $x^{(7,6)}$; (b) $v_x^{(7,6)}$; (c) $a_x^{(7,6)}$. (*Continua*)



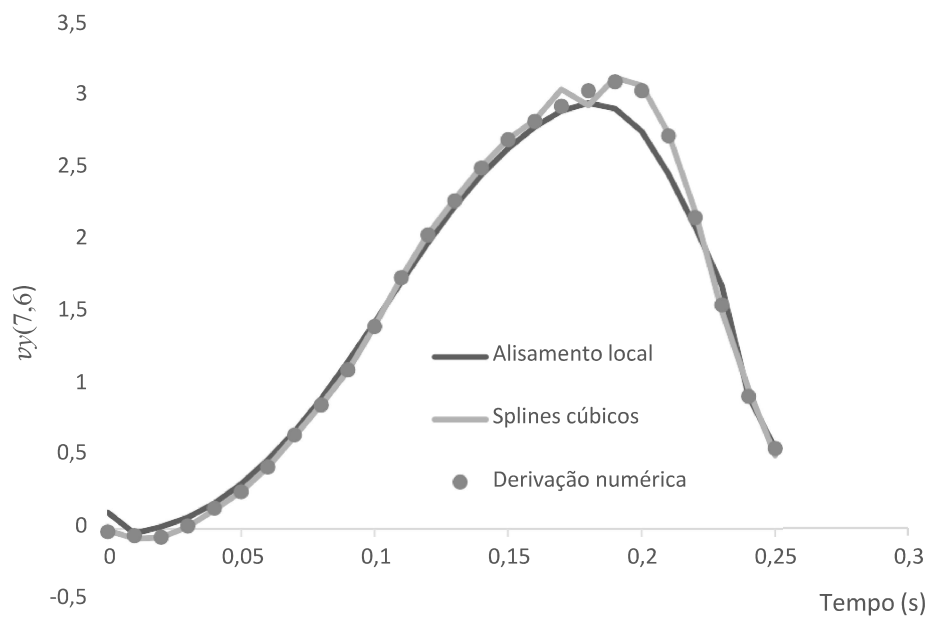
(c)

Figura 4.5 - Derivação numérica, *splines* cúbicos e alisamento local, para: (a) $x^{(7,6)}$; (b) $v_x^{(7,6)}$; (c) $a_x^{(7,6)}$.

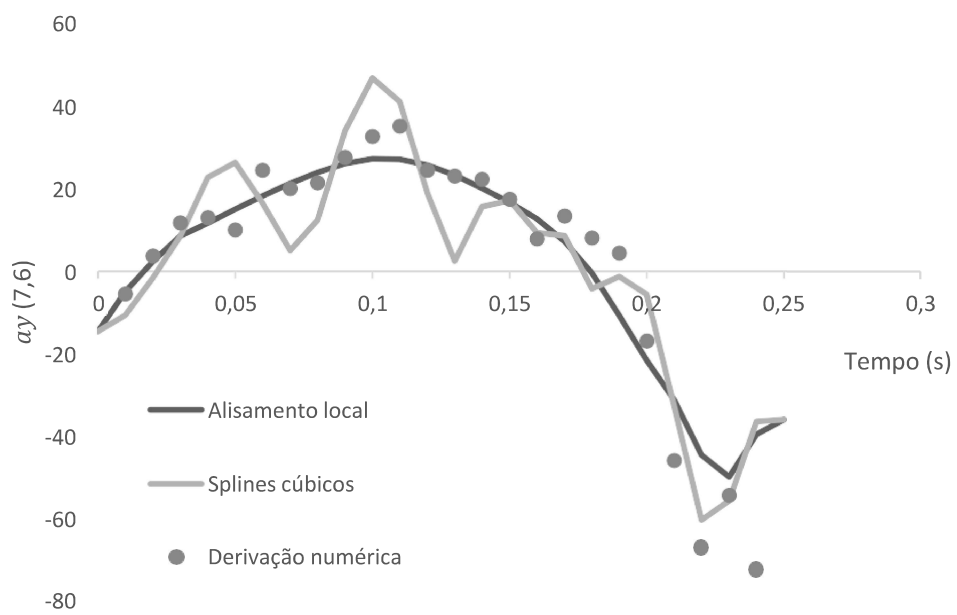


(a)

Figura 4.6 - Dados, *splines* cúbicos e alisamento local para: (a) $y^{(7,6)}$; (b) $v_y^{(7,6)}$; (c) $a_y^{(7,6)}$. (Continua)



(b)



(c)

Figura 4.6 - Dados, *splines* cúbicos e alisamento local para: (a) $y^{(7,6)}$; (b) $v_y^{(7,6)}$; (c) $a_y^{(7,6)}$. (Continuação)

4.8 Conclusões

A derivação numérica direta dos dados cinemáticos, amplifica o ruído desses dados, conduzindo a resultados pouco realistas, nomeadamente no que diz respeito à segunda derivada. Este problema é contornado pela aproximação dos dados através de *splines* cúbico e do alisamento local dos dados por interpolação polinomial (com polinómios do 1º grau e cinco pontos, e com polinómios do 2º grau e cinco pontos). Quer a aproximação com *splines* cúbicos, quer o alisamento local reproduzem com fidelidade os dados cinemáticos. Contudo, o alisamento local revelou-se mais adequado que a aproximação por *splines* cúbicos para o cálculo da primeira derivada e, sobretudo, para o cálculo da segunda derivada. Entre as duas versões do alisamento local (com polinómios de 1º grau ou polinómios do 2º grau, ambos com 5 pontos) não há diferenças significativas. Assim, a análise cinemática e dinâmica será feita com base no alisamento local dos dados cinemáticos, com polinómios do 1º grau e 5 pontos.

CAPÍTULO 5

Biomecânica do salto vertical: coordenadas relativas

5.1 Introdução

Neste capítulo são apresentados e discutidos os resultados da análise cinemática e dinâmica do modelo biomecânico do salto vertical, baseada nas coordenadas relativas dos segmentos anatómicos. A análise cinemática compreende a análise de posição, a análise das velocidades e a análise das acelerações, incluindo a posição, a velocidade e a aceleração do centro de massa durante a fase de contacto do modelo com o sólido. A análise dinâmica compreende a determinação dos esforços de ligação, através da aplicação recursiva das equações de Newton-Euler.

5.2 Análise cinemática: análise de posição

Uma vez que são conhecidas as coordenadas relativas $\emptyset_j$ (tabela 4.4 e equação 4.20), bem como os parâmetros geométricos do modelo anatómico (tabela 4.2), as coordenadas $\underline{r}^{(k,j)}$ das rótulas (k, j) podem ser obtidas aplicando recursivamente a seguinte equação (figura 5.1):

$$\underline{r}^{(k,j)} = \underline{r}_j + \underline{A}_j \underline{s}_j^{(k,j)} \quad (5.1)$$

sabendo que as coordenadas da rótula $(1,0)$ são (figura 4.1)

$$\underline{r}^{(1,0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

Por sua vez, as coordenadas $\underline{r}_j$ do centro de massa de cada segmento anatómico j são calculadas através da equação:

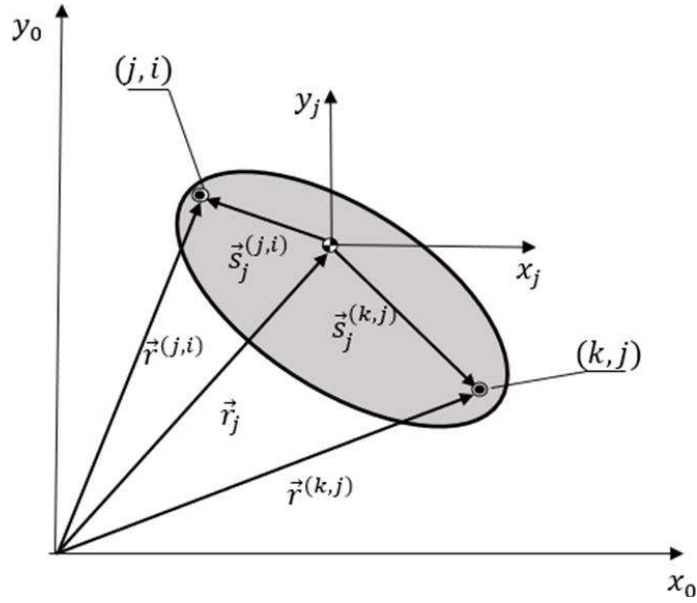


Figura 5.1 - Posição das rótulas (j,i) e (k,j) do segmento j .

$$\underline{r}_j = \underline{r}^{(j,i)} - \underline{A}_j \underline{s}_j^{(j,i)} \quad (5.3)$$

Nas equações 5.1 e 5.2, $\underline{A}_j$ é a matriz de rotação do segmento j (3.16), enquanto $\underline{s}_j^{(j,i)}$ e $\underline{s}_j^{(k,j)}$ são os vetores de posição locais das rótulas (j,i) e (k,j) , respetivamente (figura 5.1 e tabela 4.2).

Na tabela 5.1 estão ilustrados os resultados obtidos através do procedimento recursivo que acabamos de descrever, para o caso do centro de massa do segmento anatómico $j=6$ (segmento HAT) e do ponto (k,j) . Na figura 5.2 pode ser apreciada a configuração geométrica do modelo em diferentes instantes da fase de impulso (quando os pés estão em contacto com o solo).

Tabela 5.1 - Coordenadas do ponto (7,6) e do centro de massa do segmento $j=6$ ao longo do tempo.

Tempo de contacto com o solo (s)	Centro de massa para $j=6$		Ponto (7,6)	
	x_6	y_6	$x^{(7,6)}$	$y^{(7,6)}$
0	-0.04509	1.158974	0.125323	1.405873
0.01	-0.04183	1.159325	0.129326	1.405708
0.02	-0.03889	1.159402	0.133409	1.404992
0.03	-0.03822	1.159522	0.134743	1.404641
0.04	-0.03669	1.160557	0.136585	1.405459
0.05	-0.03592	1.162441	0.137034	1.407567
0.06	-0.03599	1.164881	0.136021	1.410668
0.07	-0.0374	1.168933	0.132483	1.416201
0.08	-0.03894	1.174578	0.128166	1.423727
0.09	-0.04131	1.18186	0.122196	1.433387
0.1	-0.04383	1.191278	0.114988	1.445792
0.11	-0.04672	1.203315	0.106141	1.461452
0.12	-0.04775	1.218294	0.097819	1.480609
0.13	-0.04863	1.235492	0.088729	1.502197
0.14	-0.0507	1.254697	0.077168	1.526083
0.15	-0.05179	1.276163	0.06573	1.552187
0.16	-0.05357	1.299587	0.052983	1.580028
0.17	-0.05863	1.324155	0.036578	1.608645
0.18	-0.06233	1.350414	0.021037	1.638598
0.19	-0.06506	1.377962	0.006304	1.66935
0.2	-0.07008	1.406434	-0.01091	1.70054
0.21	-0.07577	1.433704	-0.02907	1.730046
0.22	-0.07851	1.456927	-0.0444	1.75498
0.23	-0.08198	1.473973	-0.06073	1.773219
0.24	-0.08726	1.486155	-0.07913	1.786045
0.25	-0.0923	1.491649	-0.09471	1.791639

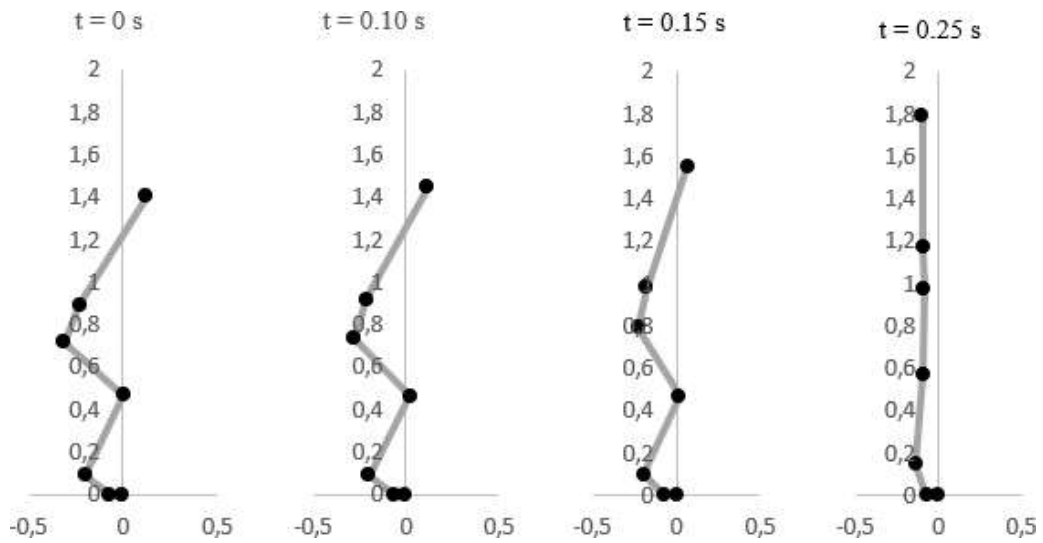


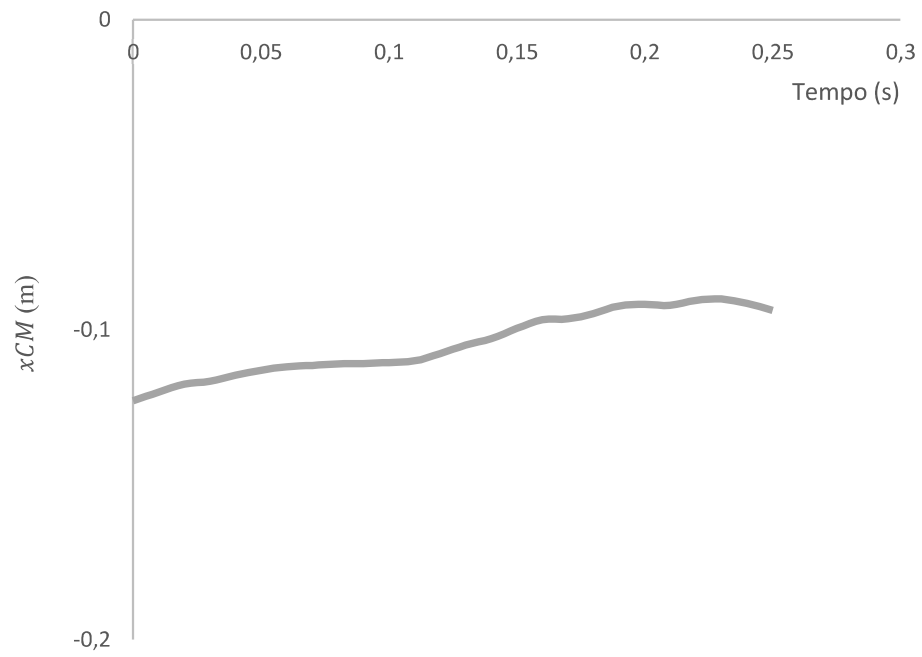
Figura 5.2 - Posição do modelo anatómico, no plano sagital, durante alguns instantes da fase de impulso (coordenadas relativas).

Depois de obtida a posição do centro de massa de cada segmento anatómico ao longo do tempo, e conhecendo as massas de cada segmento anatómico (tabela 4.3), facilmente se determinam as coordenadas do centro de massa do modelo biomecânico em cada instante (figura 5.3), bem como a respetiva trajetória (figura 5.4), através das seguintes equações:

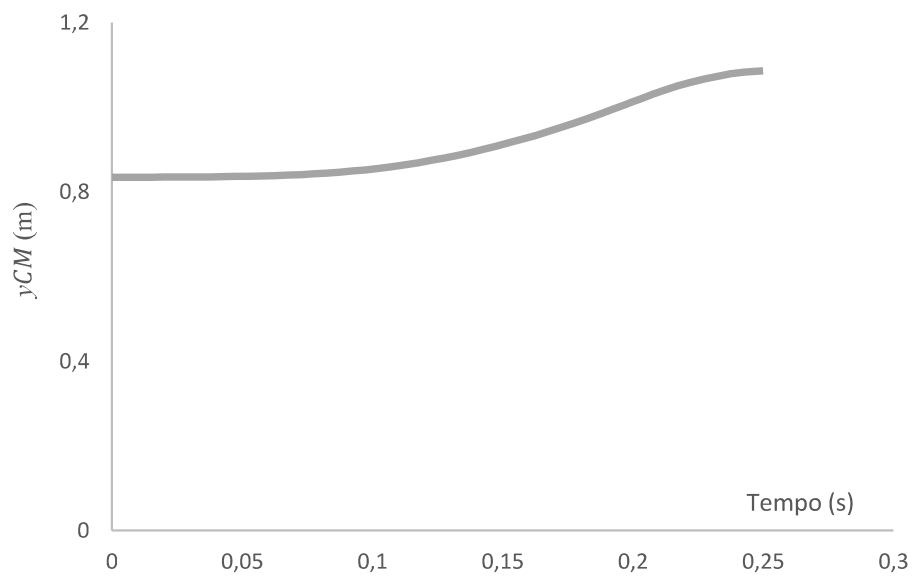
$$x^{CM} = \frac{\sum m_j x_j}{\sum m_j} \quad (5.4)$$

e

$$y^{CM} = \frac{\sum m_j y_j}{\sum m_j} \quad (5.5)$$



(a)



(b)

Figura 5.3 - Posição do centro de massa durante a fase de impulso utilizando coordenadas relativas: (a) abscissa x^{CM} ; (b) ordenada y^{CM} .

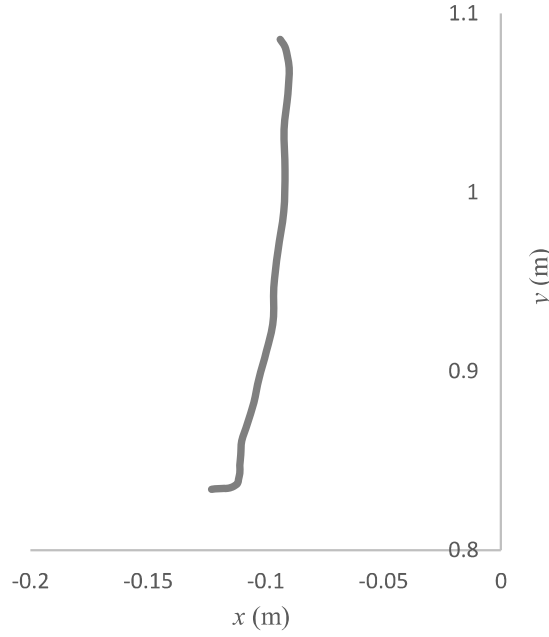


Figura 5.4 - Trajetória do centro de massa do modelo biomecânico utilizando coordenadas relativas.

5.3 Análise cinemática: análise de velocidades

Na análise de velocidades é necessário utilizar as velocidades generalizadas, que representam as velocidades angulares de cada segmento anatómico e que foram calculadas na secção 4.6 do capítulo 4:

$$\underline{\dot{q}}^T = [\dot{\phi}_1 \quad \dot{\phi}_2 \quad \dot{\phi}_3 \quad \dot{\phi}_4 \quad \dot{\phi}_5 \quad \dot{\phi}_6] \quad (5.6)$$

A partir destas velocidades generalizadas, as velocidades $\underline{v}^{(k,j)}$ das rótulas (k, j) e as velocidades $\underline{v}_j$ dos centros de massa de cada segmento j (equação 3.13) são obtidas recursivamente através das seguintes equações:

$$\underline{v}^{(k,j)} = \underline{v}_j + \dot{\phi}_j R \underline{A}_j \underline{S}_j^{(k,j)} \quad (5.7)$$

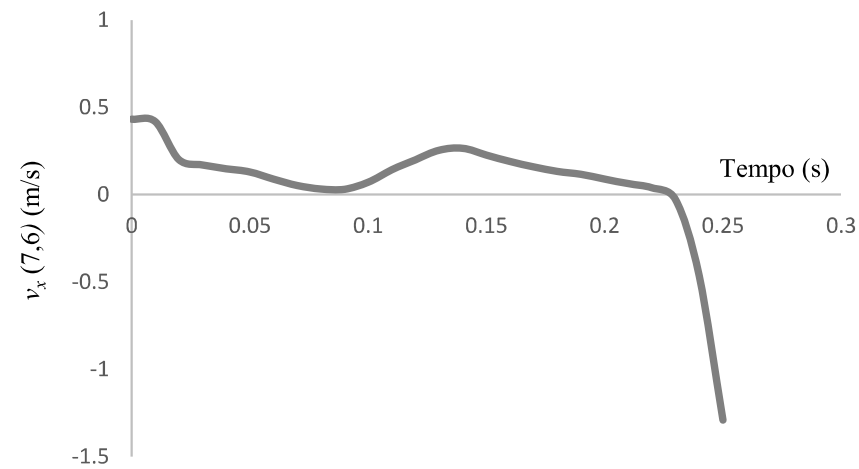
e

$$\underline{v}_j = \underline{v}^{(j,i)} - \dot{\phi}_j R \underline{A}_j \underline{S}_j^{(j,i)} \quad (5.8)$$

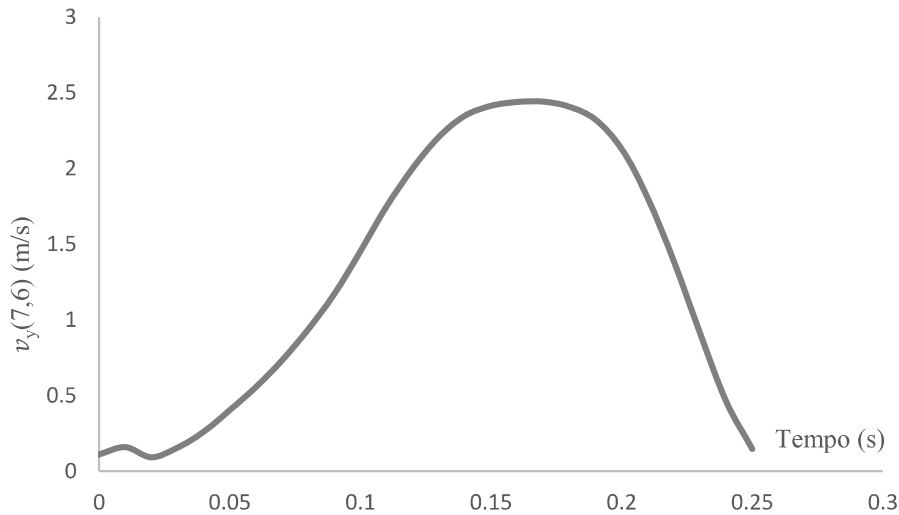
sabendo que para a rótula $(1,0)$

$$\underline{v}^{(1,0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Na figura 5.5 e na tabela 5.2 estão ilustrados os resultados desse procedimento recursivo, no que diz respeito ao ponto $(7,6)$ e ao centro de massa do segmento $j=6$ (segmento HAT).



(a)



(b)

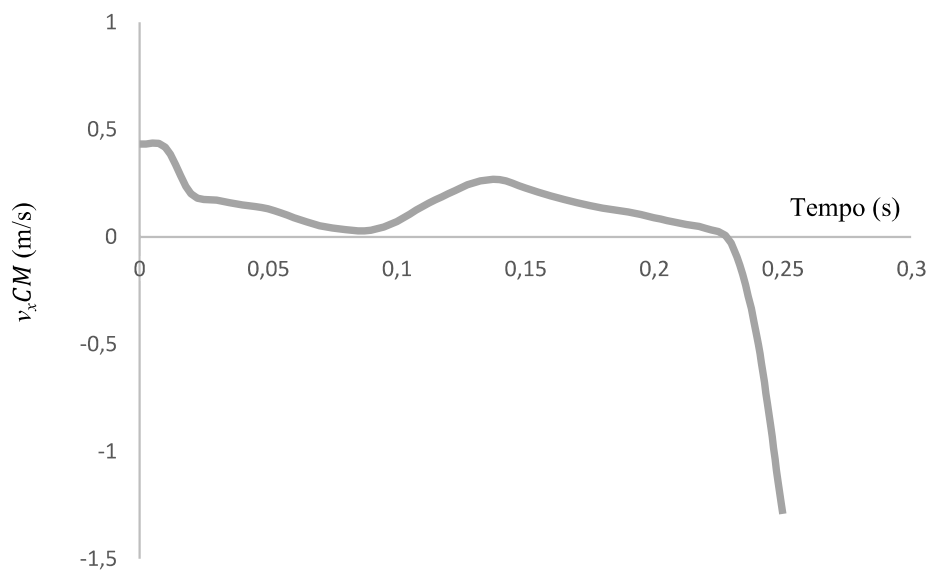
Figura 5.5 – Velocidade da rótula $(7,6)$ durante a fase de impulso em coordenadas relativas:
(a) abscissa $v_x^{(7,6)}$; (b) ordenada $v_y^{(7,6)}$

Tabela 5.2 – Velocidades do ponto (7,6), em x e y , e do centro de massa do corpo $j=6$ ao longo do tempo.

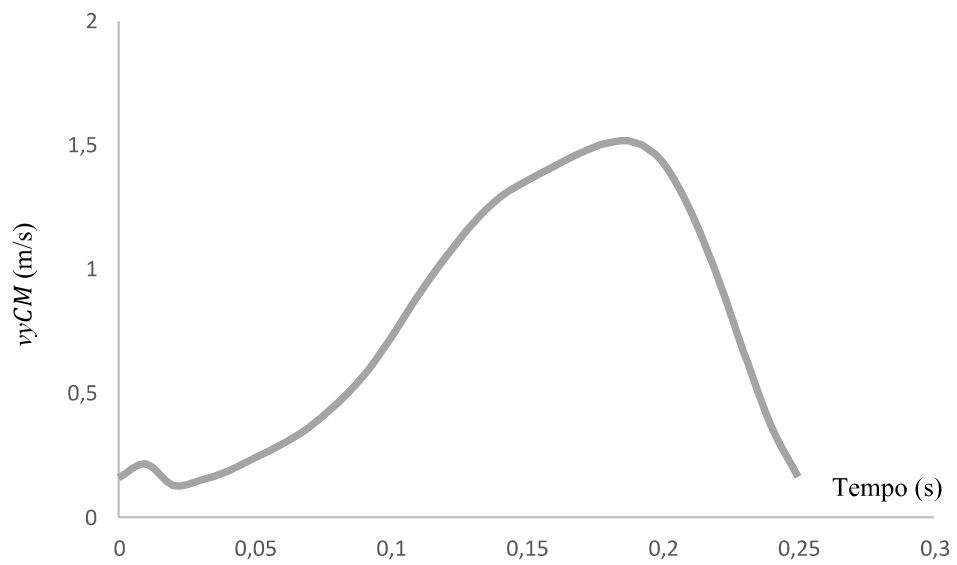
Tempo de contacto com o solo (s)	Centro de massa para $j=6$		Rótula (7,6)	
	vx_6	vy_6	$vx^{(6,7)}$	$vy^{(6,7)}$
0	0.596375	0.111125	0.596375	0.111125
0.01	0.579394	0.158414	0.579394	0.158414
0.02	0.279538	0.092048	0.279538	0.092048
0.03	0.185899	0.154836	0.185899	0.154836
0.04	0.075141	0.259958	0.075141	0.259958
0.05	-0.05053	0.401806	-0.05053	0.401806
0.06	-0.21324	0.555761	-0.21324	0.555761
0.07	-0.37491	0.729832	-0.37491	0.729832
0.08	-0.52328	0.936063	-0.52328	0.936063
0.09	-0.65859	1.168029	-0.65859	1.168029
0.1	-0.76891	1.452286	-0.76891	1.452286
0.11	-0.84512	1.746733	-0.84512	1.746733
0.12	-0.93451	1.999897	-0.93451	1.999897
0.13	-1.01782	2.206986	-1.01782	2.206986
0.14	-1.13281	2.347007	-1.13281	2.347007
0.15	-1.28953	2.41281	-1.28953	2.41281
0.16	-1.41665	2.438153	-1.41665	2.438153
0.17	-1.51782	2.440491	-1.51782	2.440491
0.18	-1.59184	2.407714	-1.59184	2.407714
0.19	-1.63581	2.321849	-1.63581	2.321849
0.2	-1.66218	2.13075	-1.66218	2.13075
0.21	-1.67098	1.804432	-1.67098	1.804432
0.22	-1.66812	1.389492	-1.66812	1.389492
0.23	-1.64726	0.912242	-1.64726	0.912242
0.24	-2.10308	0.462932	-2.10308	0.462932
0.25	-3.04389	0.146843	-3.04389	0.146843

A partir das velocidades dos centros de massa de cada segmento anatómico ao longo do tempo, e recorrendo à tabela 4.3, obtém-se a velocidade do centro de massa do modelo biomecânico em cada instante (figura 5.6):

$$\vec{v}^{CM} = \begin{cases} v_x^{CM} = \frac{\sum m_j v_{xj}}{\sum m_j} \\ v_y^{CM} = \frac{\sum m_j v_{yj}}{\sum m_j} \end{cases} \quad (5.10)$$



(a)



(b)

Figura 5.6- Velocidade do centro de massa durante a fase de impulso: (a) abcissa v_x^{CM} ; (b) ordenada v_y^{CM} .

5.4 Análise cinemática: análise de acelerações

Na análise de acelerações é necessário utilizar as acelerações generalizadas, que representam as velocidades angulares de cada segmento anatómico, obtidas no capítulo 4:

$$\underline{\ddot{q}}^T = [\ddot{\phi}_1 \quad \ddot{\phi}_2 \quad \ddot{\phi}_3 \quad \ddot{\phi}_4 \quad \ddot{\phi}_5 \quad \ddot{\phi}_6] \quad (5.11)$$

As acelerações das rótulas ($\underline{a}^{(k,j)}$), bem como as acelerações dos centros de massa de cada segmento j ($\underline{a}_j$), podem ser determinadas recursivamente usando as seguintes equações:

$$\underline{a}^{(k,j)} = \underline{a}_j + \ddot{\phi}_j R \underline{A}_j \underline{S}_j^{(k,j)} - \dot{\phi}_j^2 \underline{A}_j \underline{S}_j^{(k,j)} \quad (5.12)$$

e

$$\underline{a}_j = \underline{a}^{(j,i)} - \ddot{\phi}_j R \underline{A}_j \underline{S}_j^{(k,j)} + \dot{\phi}_j^2 \underline{A}_j \underline{S}_j^{(k,j)} \quad (5.13)$$

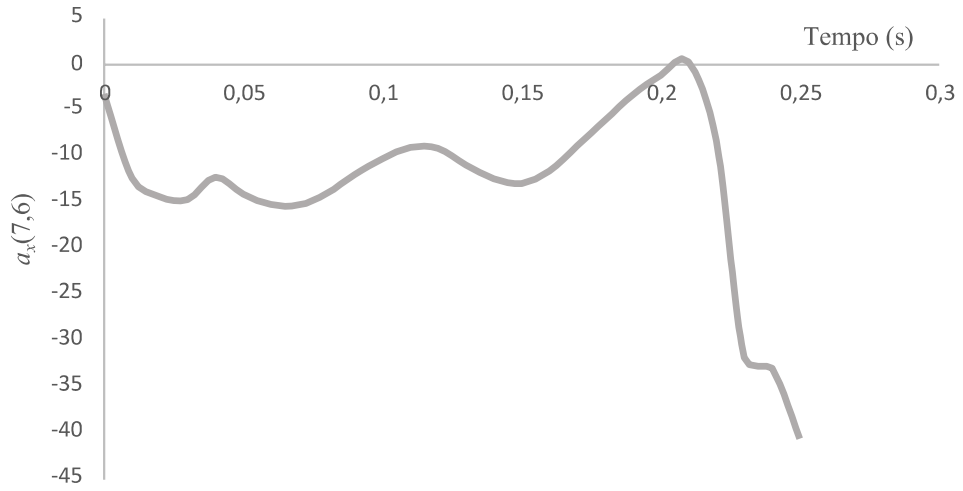
sabendo que para a rótula $(1,0)$ se tem (figura 4.1)

$$\underline{a}^{(1,0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.14)$$

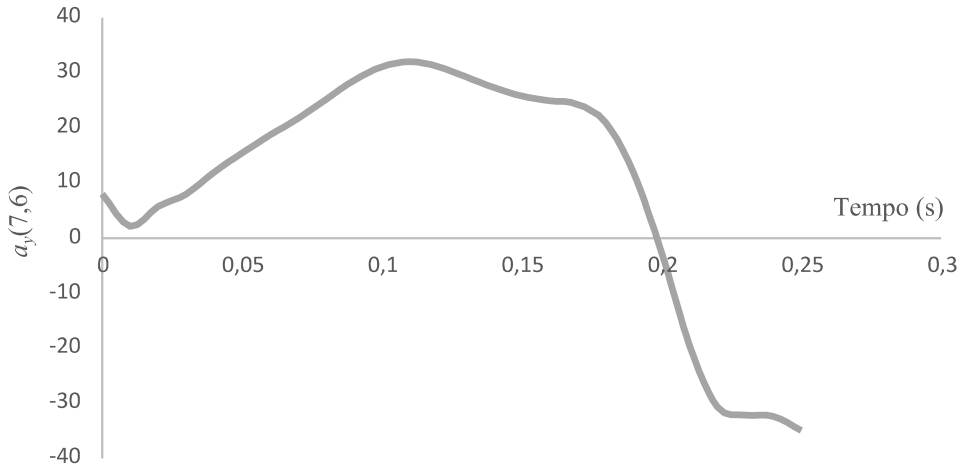
Na tabela 5.3 encontram-se os resultados que foram obtidos para a aceleração do centro de massa do segmento HAT ($j=6$) e para o ponto (7,6) desse segmento. Por sua vez, na figura 5.7 encontram-se os gráficos das componentes da aceleração do ponto (7,6), durante a fase de impulso do modelo biomecânico do salto vertical.

Tabela 5.3 - Acelerações do ponto (7,6), em x e y, e do centro de massa do corpo $j=6$ ao longo do tempo.

Tempo de contacto com o solo (s)	Centro de massa para $j=6$		Ponto (7,6)	
	ax_6	ay_6	$ax^{(7,6)}$	$ay^{(7,6)}$
0	-4.216	8.74816	-3.17891	7.985058
0.01	-11.6165	1.710082	-12.3121	2.133945
0.02	-11.9148	4.036669	-14.3478	5.70926
0.03	-10.3741	4.967252	-14.6436	7.967219
0.04	-6.4627	7.887516	-12.2135	11.95609
0.05	-6.96819	10.44653	-14.0713	15.42486
0.06	-7.17226	13.21535	-15.1814	18.67786
0.07	-6.62388	16.1157	-15.2716	21.72201
0.08	-4.56224	19.45656	-13.994	25.16225
0.09	-1.60253	22.90418	-11.9453	28.62262
0.1	0.944814	25.67381	-10.2299	31.0858
0.11	2.576529	27.40238	-8.98479	32.01917
0.12	2.0834	27.90895	-9.08722	31.13926
0.13	-0.71271	27.72601	-10.8895	29.27994
0.14	-3.73815	27.55876	-12.388	27.33233
0.15	-5.99699	27.5725	-12.9049	25.74297
0.16	-6.312	28.00881	-11.5536	24.94245
0.17	-4.8961	28.20992	-8.81418	24.30298
0.18	-3.05879	25.41878	-6.04221	20.98424
0.19	-0.84867	16.56557	-3.28997	11.80986
0.2	1.038883	2.340991	-1.16889	-2.59035
0.21	1.355707	-14.1798	0.293871	-19.451
0.22	-8.69202	-25.1321	-8.2705	-30.7196
0.23	-33.5141	-26.8215	-31.7731	-32.1385
0.24	-35.1257	-27.3706	-32.9309	-32.3616
0.25	-43.2783	-30.1988	-40.5656	-34.9633



(a)

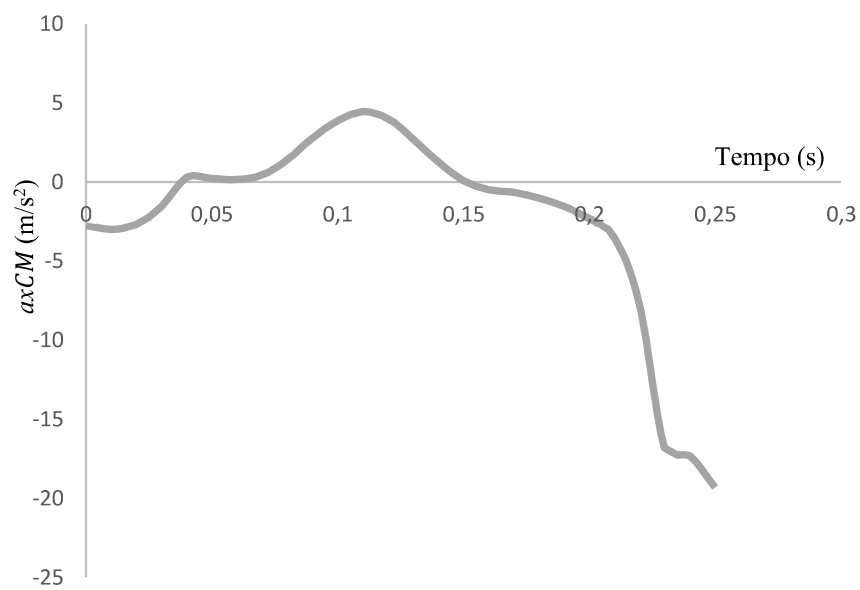


(b)

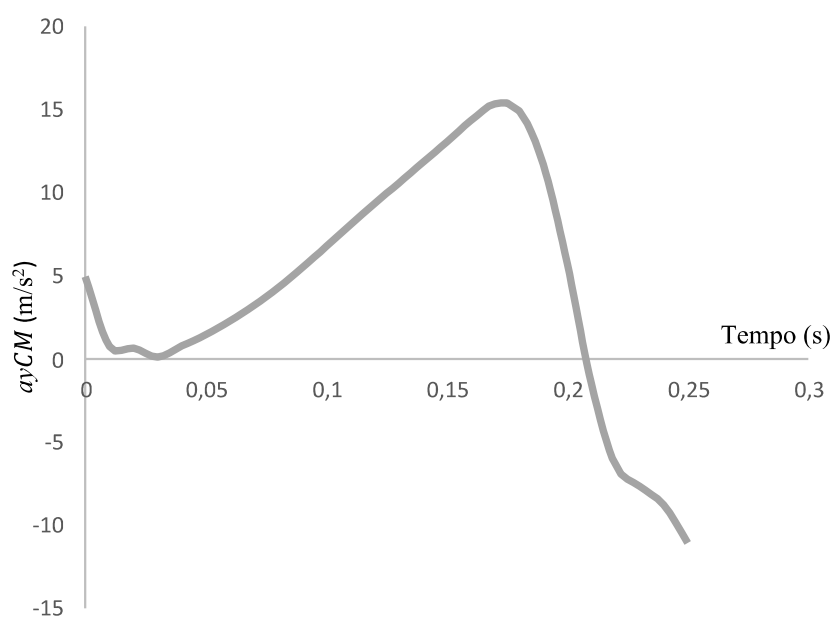
Figura 5.7 - Aceleração da rótula (7,6) durante a fase de impulso em coordenadas relativas: (a) abcissa $a_x^{(7,6)}$; (b) ordenada $a_y^{(7,6)}$.

A partir das acelerações dos centros de massas de cada segmento anatômico, e com as massas dos segmentos anatômicos que constam na tabela 4.3, obtém-se a aceleração do centro de massa do modelo biomecânico em cada instante (figura 5.8):

$$\vec{a}^{CM} = \begin{cases} a_x^{CM} = \frac{\sum m_j a_{xj}}{\sum m_j} \\ a_y^{CM} = \frac{\sum m_j a_{yj}}{\sum m_j} \end{cases} \quad (5.15)$$



(a)



(b)

Figura 5.8 - Aceleração do centro de massa durante a fase de impulso utilizando coordenadas relativas: (a) abscissa a_{x}^{CM} ; (b) ordenada a_{y}^{CM} .

5.5 Análise dinâmica

Na análise dinâmica o objetivo passará por calcular os esforços articulares (dinâmica inversa). Na figura 5.9 encontra-se o diagrama de corpo livre do segmento anatómico j , sendo que $\underline{P}_j$ representa o peso do segmento anatómico, $\underline{F}^{(j,i)}$ e $\underline{F}^{(k,j)}$ representam as forças no segmento j nas articulações (j,i) e (k,j) , respectivamente:

$$\underline{P}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ -m_j g \end{bmatrix} \quad (5.16)$$

$$\underline{F}^{(j,i)} = \begin{bmatrix} F_x^{(j,i)} \\ F_y^{(j,i)} \end{bmatrix} \quad (5.17)$$

$$\underline{F}^{(k,j)} = \begin{bmatrix} F_x^{(k,j)} \\ F_y^{(k,j)} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

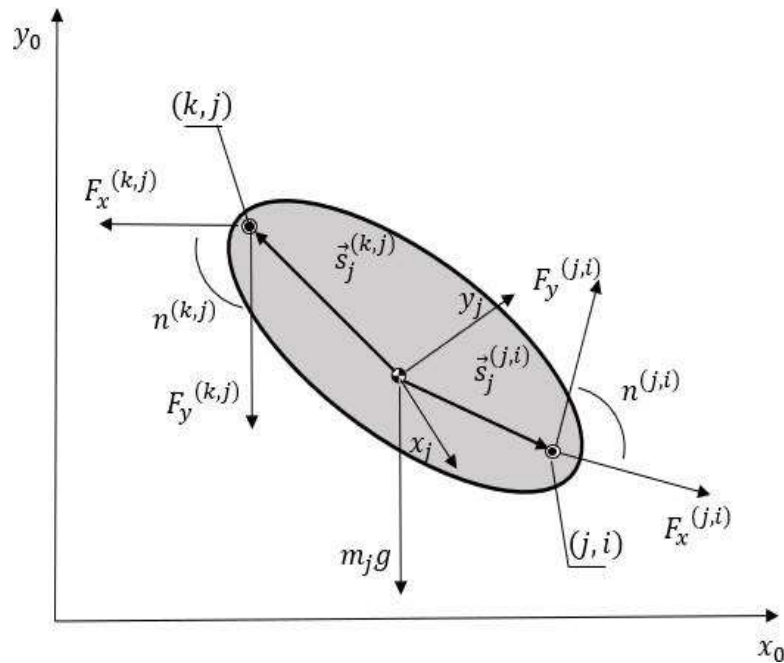


Figura 5.9 - Diagrama de corpo livre do segmento j.

O diagrama de corpo livre (figura 5.9) inclui também os momentos articulares $n^{(j,i)}$ e $n^{(k,j)}$.

As equações de Newton-Euler (3.18 e 3.19) para o segmento j podem ser descritas da seguinte forma (figura 5.9):

$$\underline{F}^{(j,i)} - \underline{F}^{(k,j)} = \underline{\underline{m}}_j \underline{a}_j - \underline{P}_j \quad (5.19)$$

e

$$n^{(j,i)} - n^{(k,j)} - \underline{s}_j^{(j,i)T} \underline{\underline{A}}_j^T \underline{\underline{R}} \underline{F}^{(j,i)} + \underline{s}_j^{(k,j)T} \underline{\underline{A}}_j^T \underline{\underline{R}} \underline{F}^{(k,j)} = I_j \ddot{\Phi}_j \quad (5.20)$$

sendo que

$$\underline{\underline{m}}_j = \begin{bmatrix} m_j & 0 \\ 0 & m_j \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

Para mecanismos em cadeia aberta simples (como é o caso do modelo biomecânico em análise), as equações de Newton-Euler (5.19 e 5.20) podem ser resolvidas de forma recursiva (García de Jalón e Bayo, 1994). Assim, começa-se por aplicar as equações de Newton-Euler ao segmento terminal ($j=6$), resultando:

$$\underline{F}^{(6,5)} = \underline{\underline{m}}_6 \underline{a}_6 - \underline{P}_6 \quad (5.22)$$

$$n^{(6,5)} = I_6 \ddot{\Phi}_6 + \underline{s}_6^{(6,5)T} \underline{\underline{A}}_j^T \underline{\underline{R}} \underline{F}^{(6,5)} \quad (5.23)$$

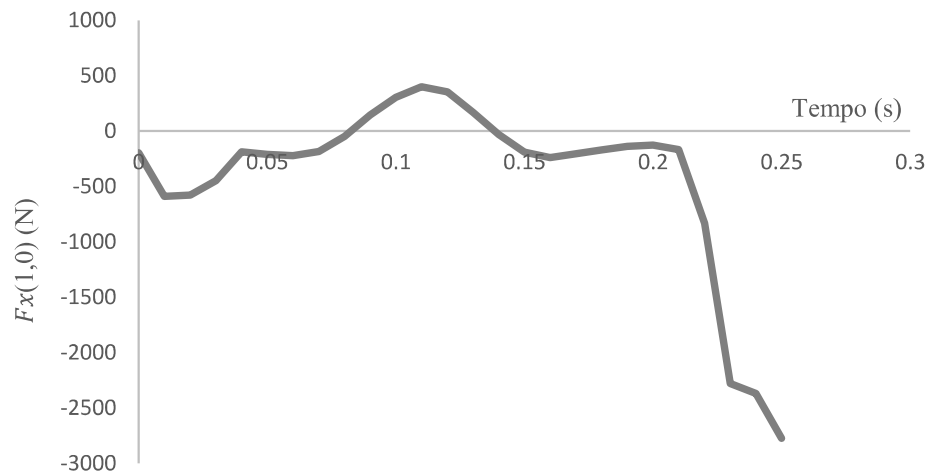
Uma vez calculados os esforços articulares $\underline{F}^{(6,5)}$ e $n^{(6,5)}$, aplicam-se novamente as equações de Newton-Euler (5.19 e 5.20) ao segmento seguinte ($j=5$), resultando:

$$\underline{F}^{(5,4)} = \underline{F}^{(6,5)} + \underline{\underline{m}}_5 \underline{a}_5 - \underline{P}_5 \quad (5.24)$$

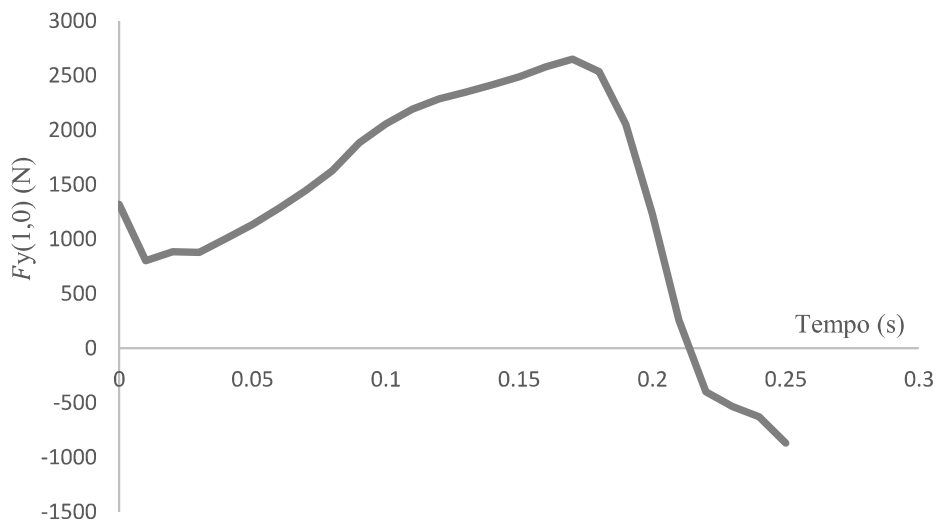
e

$$n^{(5,4)} = n^{(6,5)} + \underline{s}_j^{(5,4)T} \underline{\underline{A}}_5^T \underline{\underline{R}} F^{(5,4)} - \underline{s}_5^{(6,5)T} \underline{\underline{A}}_5^T \underline{\underline{R}} F^{(6,5)} + I_5 \ddot{\theta}_5 \quad (5.25)$$

O algoritmo prossegue de forma idêntica até se chegar aos esforços na rótula (1,0) do segmento terminal ($j=1$). Nas figuras 5.10 e 5.11 encontram-se os gráficos dos esforços na rótula (1,0). Os restantes esforços articulares encontram-se no Anexo 3.



(a)



(b)

Figura 5.10 – Força de apoio na rótula (1,0) utilizando coordenadas relativas: (a) abcissa $F_x^{(1,0)}$; (b) ordenada $F_y^{(1,0)}$.

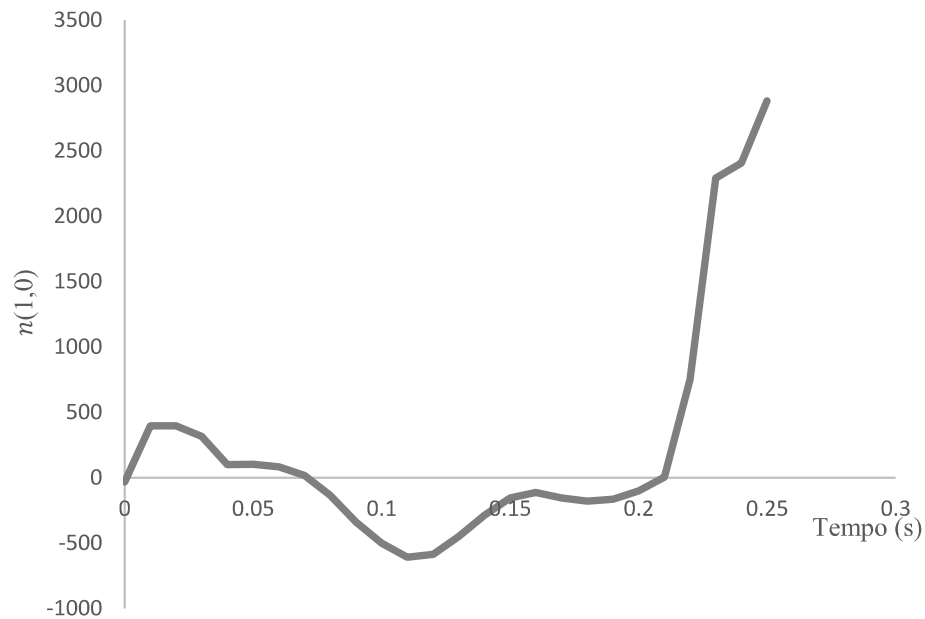


Figura 5.11 – Momento articular na rótula $(l,0)$ utilizando coordenadas relativas.

5.6 Conclusões

A análise cinemática em coordenadas relativas conduziu a um movimento do modelo biomecânico, durante a fase de contato com o solo, que é consistente e admissível. Esta conclusão é especialmente suportada pelo resultado obtido para a trajetória do centro de massa do modelo biomecânico. Os resultados da análise dinâmica, obtidos através da aplicação recursiva das equações de Newton-Euler, são também consistentes e admissíveis.

CAPÍTULO 6

Biomecânica do salto vertical: coordenadas naturais

6.1 Introdução

Neste capítulo é reproduzido o que foi feito no capítulo anterior (Capítulo 5), para a análise cinemática e dinâmica em coordenadas naturais. Será apresentada também a comparação dos resultados da análise cinemática e dinâmica em coordenadas naturais com os resultados obtidos usando as coordenadas relativas.

6.2 Análise cinemática: análise de posição

No capítulo 4 foram gerados os dados para a análise cinemática do modelo biomecânico do salto vertical baseada nas coordenadas naturais:

$$\underline{q}^T = [x^{(2,1)} y^{(2,1)} x^{(3,2)} y^{(3,2)} x^{(4,3)} y^{(4,3)} x^{(5,4)} y^{(5,4)} x^{(6,5)} y^{(6,5)} x^{(7,6)} y^{(7,6)}] \quad (6.1)$$

Esses dados foram empregues na determinação da posição dos centros de massa e das rótulas dos segmentos anatómicos, através das equações 5.3 a 5.5. Na tabela 6.1 encontram-se os resultados obtidos para o centro de massa do segmento HAT ($j=6$) e para o ponto (7,6) desse segmento anatómico. Além disso, a posição do modelo biomecânico para alguns instantes da fase de impulso pode ser apreciada na figura 6.1.

Uma vez determinada a posição do centro de massa de cada segmento anatómico ao longo do tempo, e sendo conhecidas as massas dos segmentos anatómicos (tabela 4.3), obtém-se facilmente a posição do centro de massa do modelo biomecânico, através das equações 5.4 e 5.5. Na figura 6.2 estão representados os gráficos das coordenadas do centro de massa do modelo em função do tempo. Na figura 6.3 está representada a trajetória resultante. Nessas figuras estão incluídos os resultados obtidos em coordenadas relativas, que, como seria de esperar, coincidem com os resultados obtidos com as coordenadas naturais.

Tabela 6.1-Coordenadas da rótula (7,6), em x e y, e do centro de massa do corpo $j=6$ ao longo do tempo utilizando coordenadas naturais.

Tempo de contacto (s)	Centro de massa para $j=6$		Rótula (7,6)	
	r_{6x}	r_{6y}	$r^{(7,6)}_x$	$r^{(7,6)}_y$
0	-0.04509	1.158974	0.125323	1.405873
0.01	-0.04183	1.159325	0.129326	1.405708
0.02	-0.03889	1.159402	0.133409	1.404992
0.03	-0.03822	1.159522	0.134743	1.404641
0.04	-0.03669	1.160557	0.136585	1.405459
0.05	-0.03592	1.162441	0.137034	1.407567
0.06	-0.03599	1.164881	0.136021	1.410668
0.07	-0.0374	1.168933	0.132483	1.416201
0.08	-0.03894	1.174578	0.128166	1.423727
0.09	-0.04131	1.18186	0.122196	1.433387
0.1	-0.04383	1.191278	0.114988	1.445792
0.11	-0.04672	1.203315	0.106141	1.461452
0.12	-0.04775	1.218294	0.097819	1.480609
0.13	-0.04863	1.235492	0.088729	1.502197
0.14	-0.0507	1.254697	0.077168	1.526083
0.15	-0.05179	1.276163	0.06573	1.552187
0.16	-0.05357	1.299587	0.052983	1.580028
0.17	-0.05863	1.324155	0.036578	1.608645
0.18	-0.06233	1.350414	0.021037	1.638598
0.19	-0.06506	1.377962	0.006304	1.66935
0.2	-0.07008	1.406434	-0.01091	1.70054
0.21	-0.07577	1.433704	-0.02907	1.730046
0.22	-0.07851	1.456927	-0.0444	1.75498
0.23	-0.08198	1.473973	-0.06073	1.773219
0.24	-0.08726	1.486155	-0.07913	1.786045
0.25	-0.0923	1.491649	-0.09471	1.791639

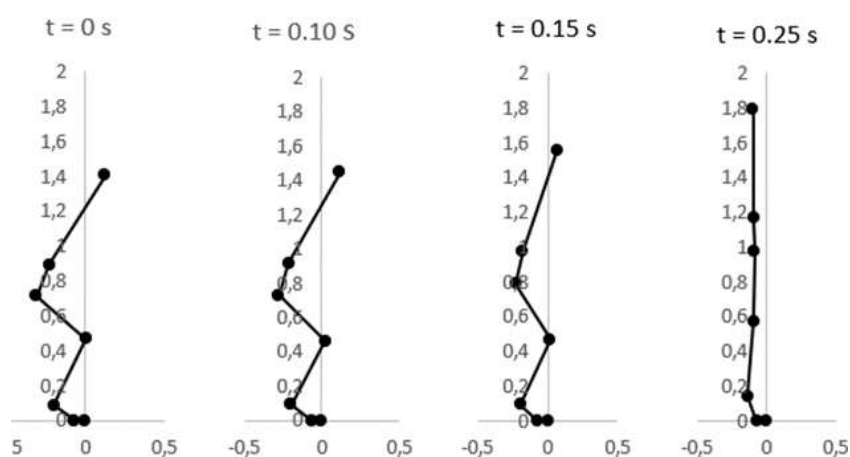
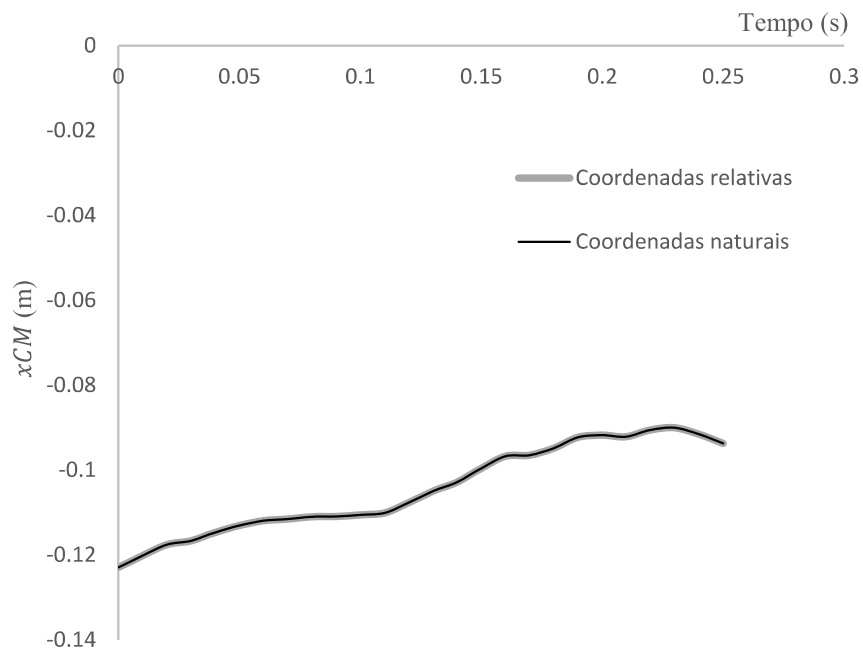
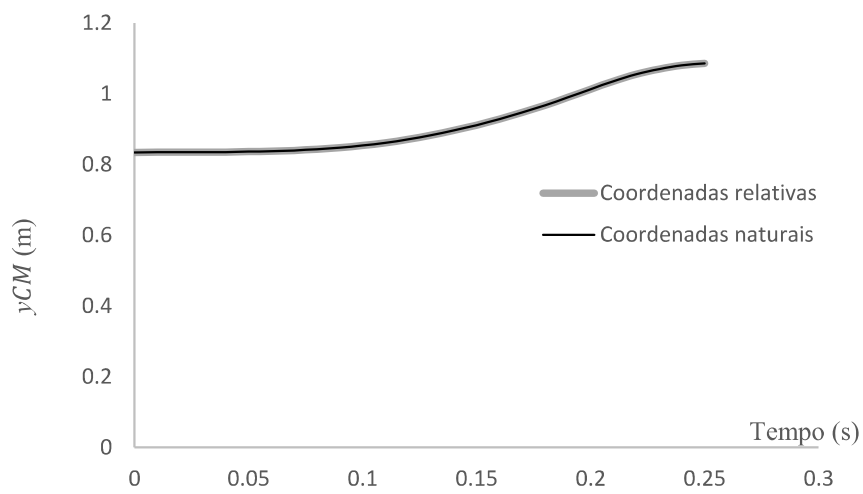


Figura 6.1 - Posição do modelo anatómico, no plano sagital, durante alguns instantes da fase deimpulso (coordenadas naturais).



(a)



(b)

Figura 6.2 – Posição do centro de massa durante a fase de impulso utilizando coordenadas relativas e naturais: (a) abscissa x^{CM} ; (b) ordenada y^{CM} (continuação).

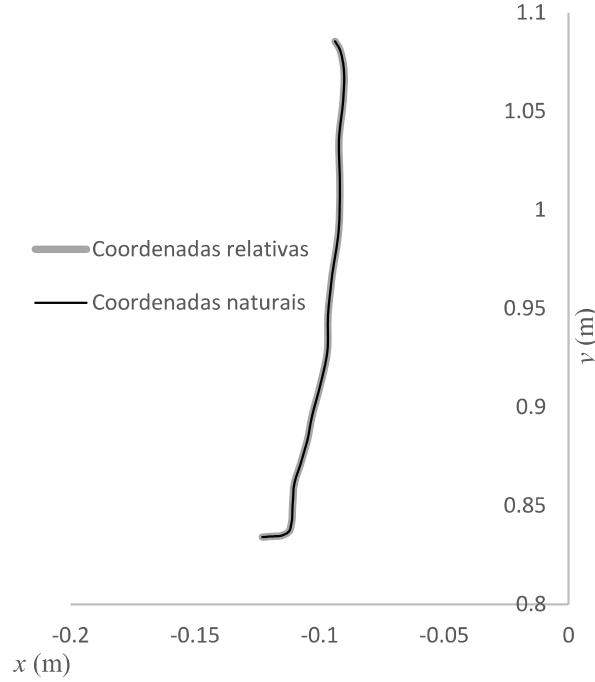


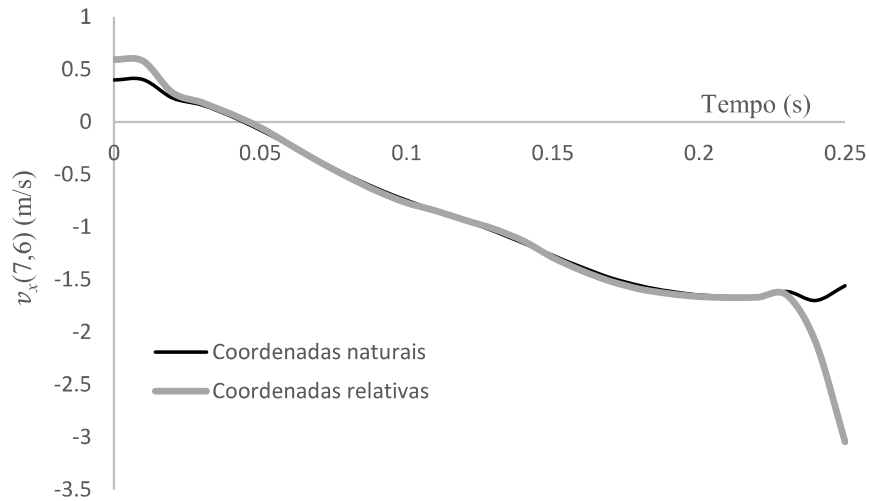
Figura 6.3 – Trajetória do centro de massa do modelo biomecânico utilizando coordenadas relativas e naturais.

6.3 Análise cinemática: análise de velocidades

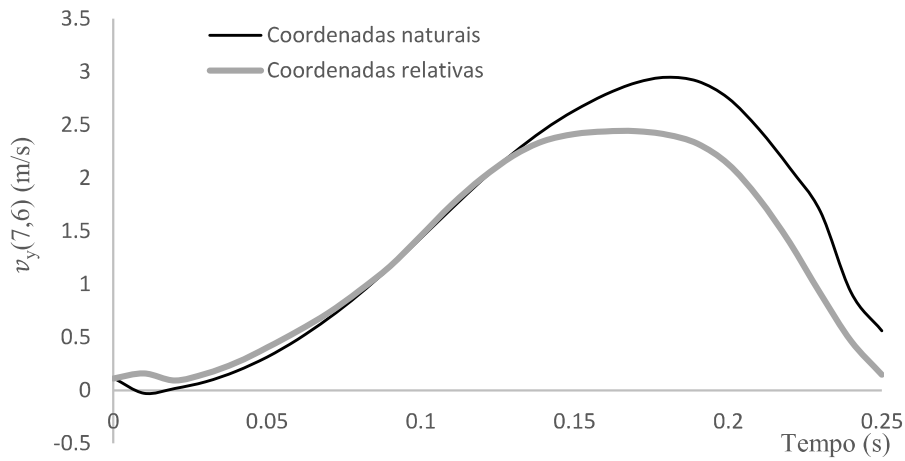
Os dados para a análise das velocidades em coordenadas naturais foram gerados no capítulo 4, a partir do trabalho de Anderson e Pandy (1999):

$$\underline{\dot{q}}^T = [\dot{x}^{(2,1)} \dot{y}^{(2,1)} \dot{x}^{(3,2)} \dot{y}^{(3,2)} \dot{x}^{(4,3)} \dot{y}^{(4,3)} \dot{x}^{(5,4)} \dot{y}^{(5,4)} \dot{x}^{(6,5)} \dot{y}^{(6,5)} \dot{x}^{(7,6)} \dot{y}^{(7,6)}] \quad (6.2)$$

Com estes dados (que são as velocidades das rótulas $\underline{v}^{(k,j)}$) foram calculadas as velocidades dos centros de massa de cada segmento anatómico j ($\underline{v}_j$), aplicando as equações 5.7 e 5.8. Os resultados assim obtidos estão ilustrados para o caso do centro de massa do segmento $j=6$ e para o ponto (7,6) desse segmento. Na figura 6.4 comparamos os resultados obtidos com as coordenadas naturais com os resultados obtidos com as coordenadas relativas. As discrepâncias observadas devem-se às diferenças resultantes da aplicação do mesmo método de derivação numérica (ver capítulo 4) a diferentes conjuntos de dados.



(a)



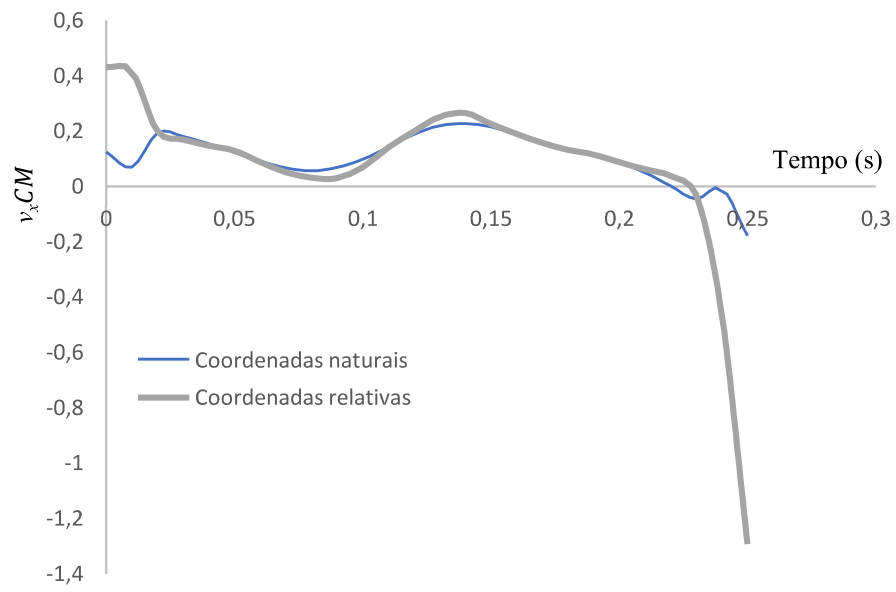
(b)

Figura 6.4 – Velocidade da rótula (7,6) durante a fase de impulso em coordenadas relativas: (a) abscissa $v_x^{(7,6)}$; (b) ordenada $v_y^{(7,6)}$.

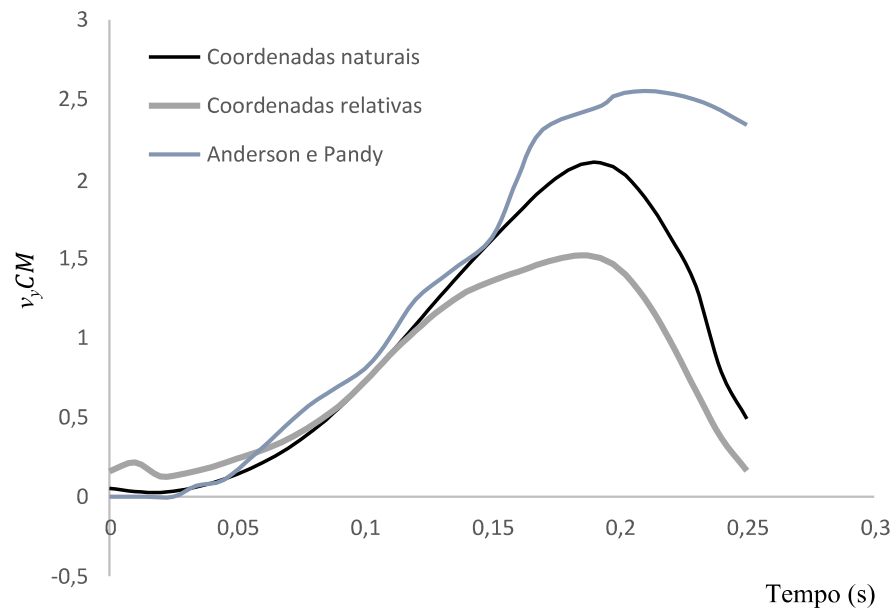
Tendo sido obtidas as velocidades dos centros de massa de cada segmento anatómico ao longo do tempo, e recorrendo à tabela 4.3 e à equação 5.10, obtêm-se finalmente as velocidades do centro de massa do modelo biomecânico em cada instante. Na figura 6.5 comparamos os resultados obtidos pela análise cinemática em coordenadas naturais e em coordenadas relativas, entre si e com os resultados de Anderson e Pandy (1999). Importa referir que estes autores apenas fornecem a componente da aceleração segundo y .

Tabela 6.2 - Velocidades da rótula (7,6), em x e y, e do centro de massa do corpo j=6 ao longo do tempo (coordenadas naturais).

Tempo de contacto com o solo (s)	Centro de massa para $j=6$		Rótula (7,6)	
	$\underline{v}_6x$	$\underline{v}_6y$	$\underline{v}^{(7,6)}x$	$\underline{v}^{(7,6)}y$
0	0.055759	0.236577	0.139293	0.116963
0.01	0.035583	0.205552	-0.01211	-0.02847
0.02	0.195758	0.040486	0.229368	0.017254
0.03	0.158035	0.083885	0.162605	0.080968
0.04	0.095834	0.152378	0.055146	0.180135
0.05	0.021543	0.248397	-0.07579	0.313324
0.06	-0.0507	0.370724	-0.21768	0.479825
0.07	-0.11422	0.516238	-0.36443	0.676403
0.08	-0.16146	0.68826	-0.50776	0.903403
0.09	-0.18109	0.887757	-0.63319	1.157937
0.1	-0.1914	1.116588	-0.74424	1.43119
0.11	-0.18563	1.356361	-0.84248	1.710209
0.12	-0.17647	1.597025	-0.93609	1.982727
0.13	-0.18279	1.826342	-1.03957	2.232751
0.14	-0.21039	2.035185	-1.15419	2.450851
0.15	-0.25202	2.222442	-1.26968	2.633989
0.16	-0.30164	2.387611	-1.38286	2.783561
0.17	-0.35128	2.526611	-1.484	2.895394
0.18	-0.38787	2.616007	-1.55952	2.948635
0.19	-0.41033	2.620657	-1.6118	2.910018
0.2	-0.41596	2.510045	-1.6464	2.752594
0.21	-0.43146	2.265087	-1.66229	2.457638
0.22	-0.46153	1.942039	-1.67446	2.093756
0.23	-0.47384	1.555614	-1.61323	1.684897
0.24	-0.16798	0.985498	-1.76106	1.025942
0.25	-0.14112	0.930886	-1.92182	0.94646



(a)



(b)

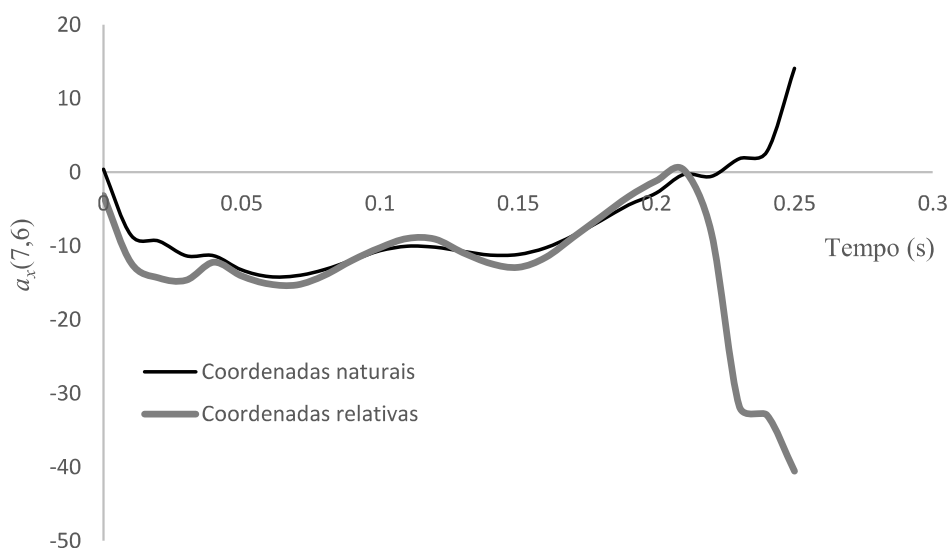
Figura 6.5 - Velocidade do centro de massa durante a fase de impulso utilizando coordenadas relativas: (a) abcissa v_x^{CM} ; (b) ordenada v_y^{CM} .

6.1 Análise cinemática: análise de acelerações

No capítulo 4 foram obtidos os dados para a análise das acelerações recorrendo às coordenadas naturais:

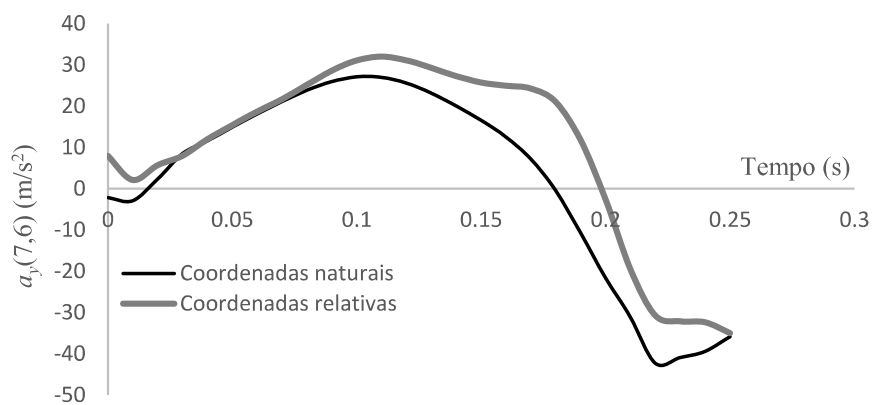
$$\underline{\ddot{q}}^T = [\ddot{x}^{(2,1)} \ddot{y}^{(2,1)} \ddot{x}^{(3,2)} \ddot{y}^{(3,2)} \ddot{x}^{(4,3)} \ddot{y}^{(4,3)} \ddot{x}^{(5,4)} \ddot{y}^{(5,4)} \ddot{x}^{(6,5)} \ddot{y}^{(6,5)} \ddot{x}^{(7,6)} \ddot{y}^{(7,6)}] \quad (6.3)$$

Com estes dados, que são as acelerações das rótulas $\underline{a}^{(k,j)}$, foram calculadas as acelerações dos centros de massa dos vários segmentos anatómico j , recorrendo às equações 5.12 e 5.13. Na tabela 6.3 ilustramos os resultados obtidos desta forma, para o caso do centro de massa do segmento $j=6$ e para o ponto (7,6). Na figura 6.6 apresentamos a comparação entre os resultados da análise das acelerações em coordenadas naturais e em coordenadas relativas, para o ponto (7,6). A explicação para as discrepâncias registadas é a mesma que foi indicada na secção anterior para as velocidades.



(a)

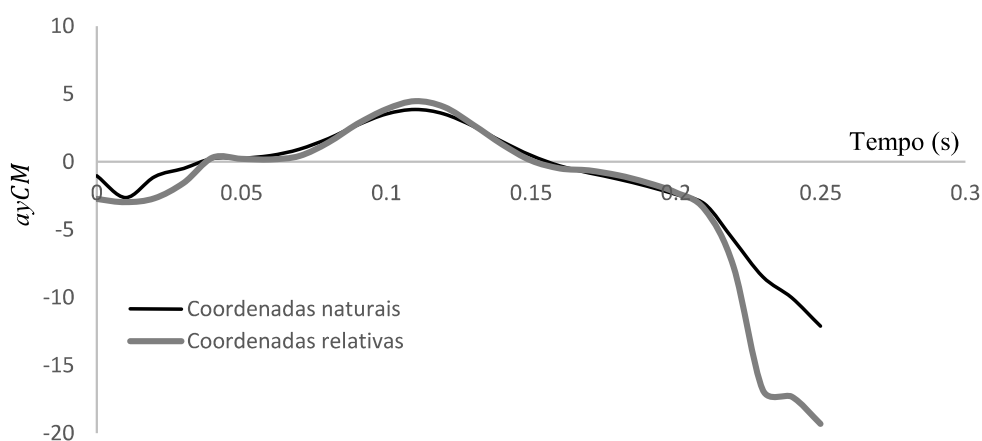
Figura 6.6 – Aceleração da rótula (7,6) em x e y ao longo do tempo para coordenadas relativas e naturais: (a) abcissa $a_x^{(7,6)}$; (b) ordenada $a_y^{(7,6)}$ (*continua*).



(b)

Figura 6.6 – Aceleração da rótula (7,6) em x e y ao longo do tempo para coordenadas relativas e naturais: (a) abscissa $a_x^{(7,6)}$; (b) ordenada $a_y^{(7,6)}$ (*continuação*).

Uma vez obtidas as acelerações dos centros de massa de cada segmento anatômico ao longo do tempo, e recorrendo à tabela 4.3 e à equação 5.15, obtêm-se as acelerações do centro de massa do modelo biomecânico em cada instante que podem ser comparadas com as acelerações do centro de massa do modelo biomecânico obtidas através da implementação do algoritmo com coordenadas relativas (figura 6.7). Estão também presentes no gráfico da componente da aceleração em y , os valores de Anderson e Pandey (1999).



(a)

Figura 6.7 – Aceleração do centro de massa durante a fase de impulso utilizando coordenadas relativas e naturais: (a) abscissa a_x^{CM} ; (b) ordenada a_y^{CM} . (*continua*)

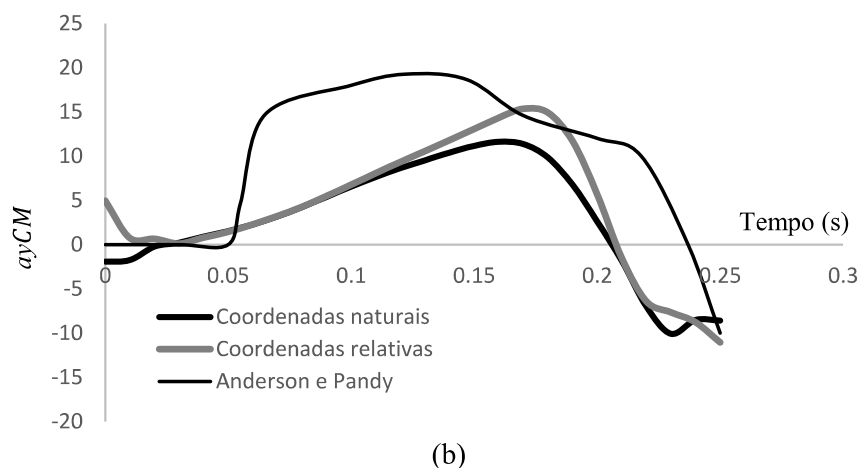


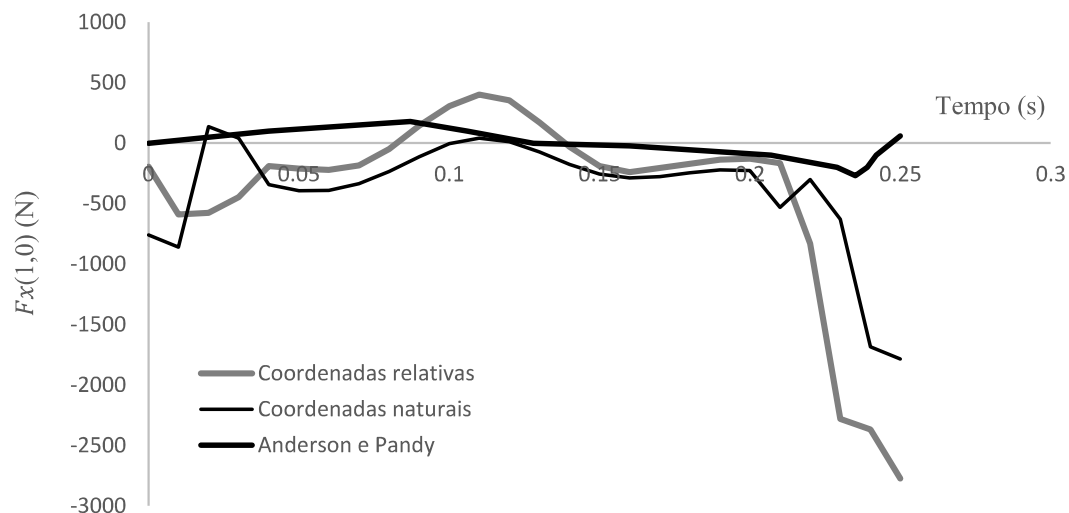
Figura 6.7 – Aceleração do centro de massa durante a fase de impulso utilizando coordenadas relativas e naturais: (a) abscissa a_x^{CM} ; (b) ordenada a_y^{CM} . (continuação)

Tabela 6.3 - Acelerações da rótula (7,6), em x e y , e do centro de massa do corpo $j=6$ ao longo do tempo.

Tempo de contacto com o solo (s)	Centro de massa para $j=6$		Rótula (7,6)	
	$\underline{a}_6x$	$\underline{a}_6y$	$\underline{a}^{(7,6)}_x$	$\underline{a}^{(7,6)}_y$
0	-2.01908	-8.40275	-15.1404	-2.18048
0.01	-4.64116	-5.63875	-18.6637	-2.89109
0.02	2.022878	-2.90499	0.064242	2.357851
0.03	-1.27402	1.984463	-3.01581	8.464745
0.04	-6.27675	8.27452	-11.3249	11.57498
0.05	-6.87888	10.87599	-13.2689	14.9056
0.06	-6.46326	13.45663	-14.1445	18.09614
0.07	-5.12468	16.02052	-14.0488	21.12803
0.08	-3.44183	18.70581	-13.2188	23.84264
0.09	-1.67365	21.19259	-11.9257	25.95398
0.1	-0.30271	22.9705	-10.6595	27.1092
0.11	0.125636	23.65113	-10.0462	27.01164
0.12	-0.38086	23.09064	-10.17	25.61864
0.13	-1.72791	21.67205	-10.7251	23.15686
0.14	-3.27479	19.69082	-11.2364	20.02908
0.15	-4.36047	17.41587	-11.1753	16.57998
0.16	-4.60163	14.55726	-10.2497	12.56974
0.17	-4.06643	10.18146	-8.6089	7.171326
0.18	-2.89757	3.347454	-6.54889	-0.4731
0.19	-1.89688	-6.31272	-4.43466	-10.7155
0.2	-1.69062	-17.0264	-2.80385	-21.6214
0.21	-1.74237	-27.0621	-0.30917	-31.0908
0.22	4.509997	-37.7918	-1.80245	-42.2605
0.23	8.75887	-36.2924	-6.05655	-40.9017
0.24	4.2924	-38.0477	-20.2836	-39.3978
0.25	3.721614	-31.9037	-16.0764	-35.8493

6.2 Análise dinâmica

Na análise dinâmica serão calculadas as componentes das forças, $\underline{F}^{(j,i)}$ e $\underline{F}^{(k,j)}$, bem como os momentos articulares, $n^{(j,i)}$ e $n^{(k,j)}$, à semelhança do que foi feito no capítulo 5, mas desta vez utilizando coordenadas naturais. Nas figuras 6.8 e 6.9 apresentam-se os esforços calculados para a rótula (1,0), juntamente com os resultados fornecidos pela análise dinâmica inversa em coordenadas relativas e os resultados fornecidos por Anderson e Pandey (1999).



(a)

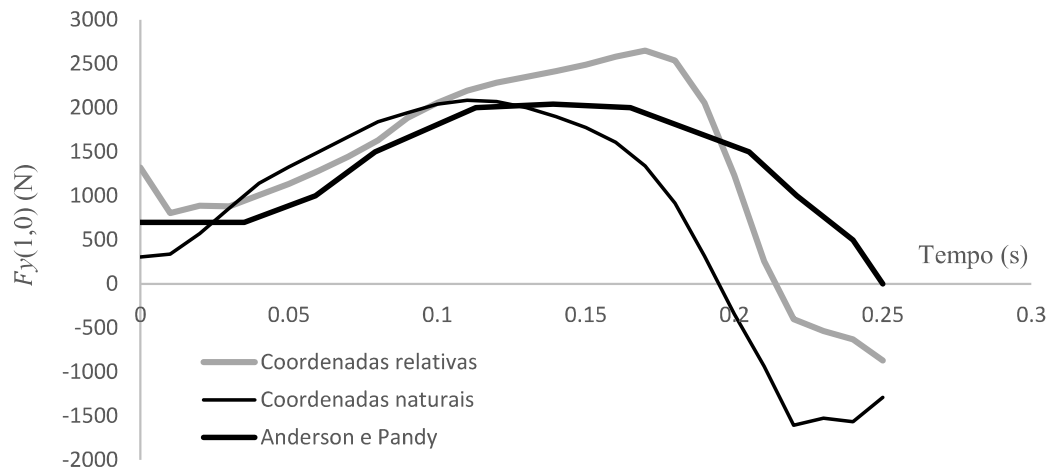


Figura 6.8 – Força de apoio na rótula $(1,0)$ utilizando coordenadas relativas e naturais: (a) abcissa $F_x^{(1,0)}$; (b) ordenada $F_y^{(1,0)}$.

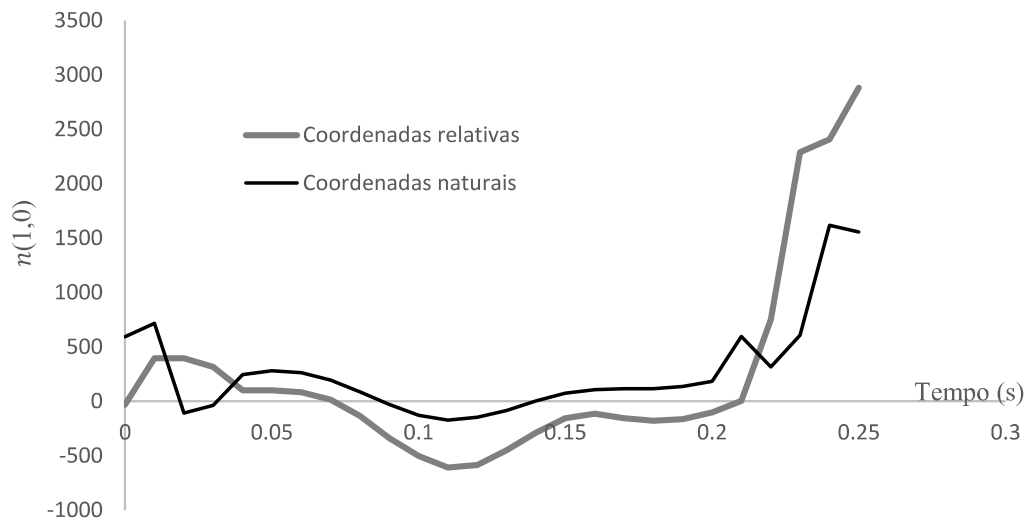


Figura 6.9 – Momento articular na rótula $(1,0)$ utilizando coordenadas relativas e naturais.

6.6 Conclusões

À semelhança da análise cinemática e dinâmica em coordenadas relativas, os resultados obtidos para as coordenadas naturais são consistentes e admissíveis. Aliás, os dois tipos de coordenadas conduzem a resultados idênticos para a trajetória do centro de massa do modelo anatómico. Contudo, foram registadas algumas discrepâncias entre os resultados obtidos com coordenadas relativas e os resultados obtidos para as coordenadas naturais para as velocidades e as acelerações das rótulas (e, por consequência, para a velocidade e aceleração do centro de massa do modelo). Essas discrepâncias ocorrem sobretudo no início e no fim do movimento (durante a fase de impulso) e refletem-se nos esforços articulares. Os resultados obtidos neste trabalho são, em termos globais, semelhantes aos obtidos por Anderson e Pandy (1999), apesar de o apoio do modelo biomecânico com o solo que foi usado neste trabalho ser diferente do modelo de contato usado por Anderson e Pandy (1999).

CAPÍTULO 7

Conclusões gerais

1. A derivação numérica direta dos dados cinemáticos, amplifica o ruído desses dados, conduzindo a resultados pouco realistas, nomeadamente no que diz respeito à segunda derivada. Este problema é contornado pela aproximação dos dados através de splines cúbico e do alisamento local dos dados por interpolação polinomial (com polinómios do 1º grau e cinco pontos, e com polinómios do 2º grau e cinco pontos). Quer a aproximação com splines cúbicos, quer o alisamento local reproduzem com fidelidade os dados cinemáticos. Contudo, o alisamento local revelou-se mais adequado que a aproximação por splines cúbicos para o cálculo da primeira derivada e, sobretudo, para o cálculo da segunda derivada. Entre as duas versões do alisamento local (com polinómios de 1º grau ou polinómios do 2º grau, ambos com 5 pontos) não há diferenças significativas. Assim, a análise cinemática e dinâmica será feita com base no alisamento local dos dados cinemáticos, com polinómios do 1º grau e 5 pontos.

2. A análise cinemática em coordenadas relativas conduziu a um movimento do modelo biomecânico, durante a fase de contato com o solo, que é consistente e admissível. Esta conclusão é especialmente suportada pelo resultado obtido para a trajetória do centro de massa do modelo biomecânico. Os resultados da análise dinâmica, obtidos através da aplicação recursiva das equações de Newton-Euler, são também consistentes e admissíveis.

3. À semelhança da análise cinemática e dinâmica em coordenadas relativas, os resultados obtidos para as coordenadas naturais são consistentes e admissíveis. Aliás, os dois tipos de coordenadas conduzem a resultados idênticos para a trajetória do centro de massa do modelo anatómico. Contudo, foram registadas algumas discrepâncias entre os resultados obtidos com coordenadas relativas e os resultados obtidos para as

coordenadas naturais para as velocidades e as acelerações das rótulas (e, por consequência, para a velocidade e aceleração do centro de massa do modelo). Essas discrepâncias ocorrem sobretudo no início e no fim do movimento (durante a fase de impulso) e refletem-se nos esforços articulares. Os resultados obtidos neste trabalho são, em termos globais, semelhantes aos obtidos por Anderson e Pandy (1999), apesar de o apoio do modelo biomecânico com o solo que foi usado neste trabalho ser diferente do modelo de contato usado por Anderson e Pandy (1999).

Bibliografia

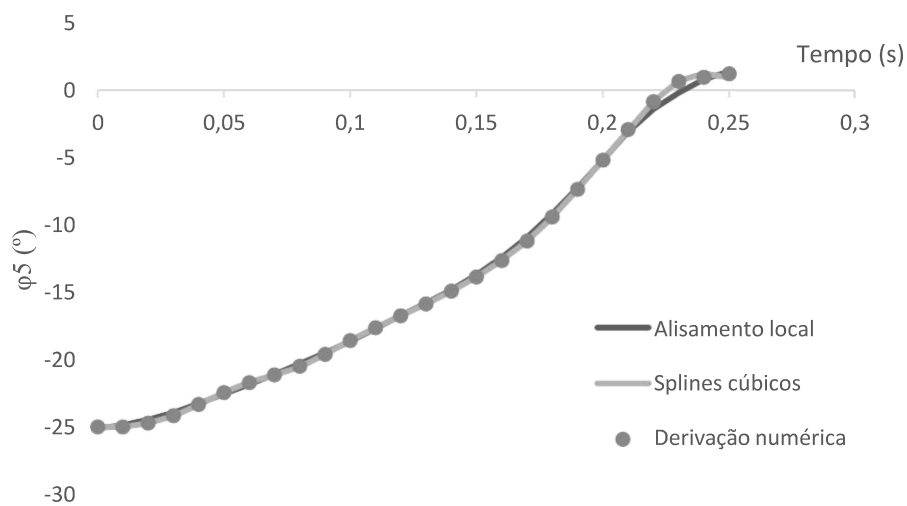
- Almeida, B. (2016) Análise cinemática e dinâmica do salto vertical Análise cinemática e dinâmica do salto vertical.
- Anderson and Pandy. (1999) A dynamic optimization solution for vertical jumping in three dimensions.
- Bobbert, M. F., Gerritsen, K. G. M., Litjens, M. C. A., e Van Soest, A. J. (1996) Why is countermovement jump height greater than squat jump height? Medicine and Science in Sports and Exercise. doi:10.1097/00005768-199611000-00009
- Burden, R. L., e Faires, J. D. (2009) Numerical analysis. Power Systems (Sixth Edit., Vol. 38). doi:10.4324/9781315154039-12
- Domire, Z. J., e Challis, J. H. (2015) Maximum height and minimum time vertical jumping. Journal of Biomechanics, 48(11), 2865–2870. doi:10.1016/j.jbiomech.2015.04.021
- García de Jalón, J., e Bayo, E. (1994) Improved Formulations for Real-Time Dynamics., 271–324. doi:10.1007/978-1-4612-2600-0_8
- Hamill e Knutzen. (2008) Biomechanical Basis of Human Movement. Journal of Chemical Information and Modeling (Vol. 53). doi:10.1017/CBO9781107415324.004
- Haug. (1989) Haug_Massachusetts Allyn and Bacon_1989_Computer-Aided Kinematics and Dynamics of Mechanical Systems, Volume I Basic Methods.pdf.
- Jalon, J. G. de, e Bayo, E. (1994) Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems.
- Kim, S., Park, S., e Choi, S. (2014) Countermovement strategy changes with vertical jump height to accommodate feasible force constraints. Journal of Biomechanics, 47(12), 3162–3168. doi:10.1016/j.jbiomech.2014.06.013
- Manal, K. T., e Buchanan, T. S. (2004) Source : Standard handbook of biomedical engineering and design chapter 5 biomechanics of human movement. Standard Handbook of Biomedical Engineering and Design, 1–26. doi:10.1

- Martins, D. (2014) O squat jump na avaliação da força muscular limitações e soluções metodologicas.pdf. fmh. obtido de [https://www.repository.utl.pt/bitstream/10400.5/7636/1/o squat jump na avaliação da força muscular limitações e soluções metodologicas.pdf](https://www.repository.utl.pt/bitstream/10400.5/7636/1/o_squat_jump_na_avaliacao_da_forca_muscular_limitacoes_e_solucoes_metodologicas.pdf)
- Nelson, R. C. (1980) Introduction to Sport Biomechanics. Biomechanics of Motion. doi:10.1007/978-3-7091-4366-7_4
- Shabana, A. A. (2009) Computational Dynamics, Third Edition. Computational Dynamics, Third Edition. doi:10.1002/9780470686850

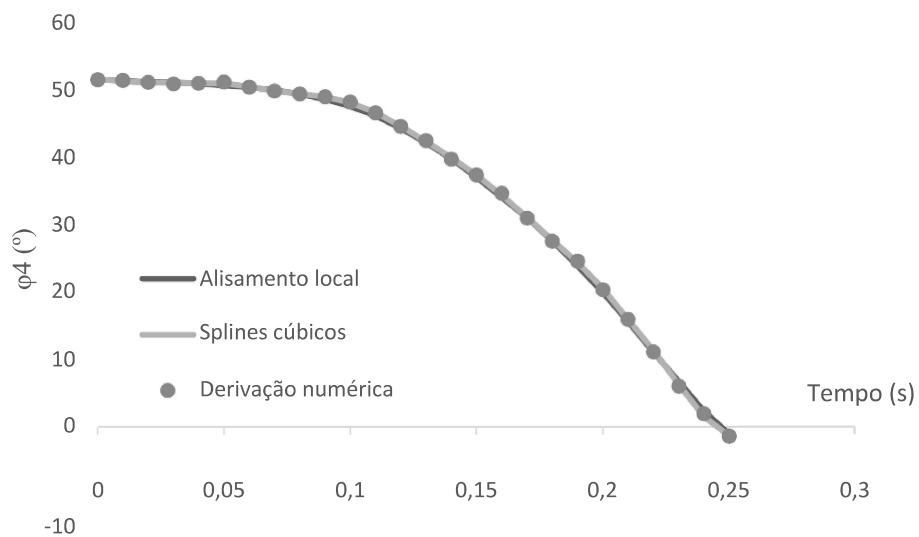
Anexos

Anexo 1

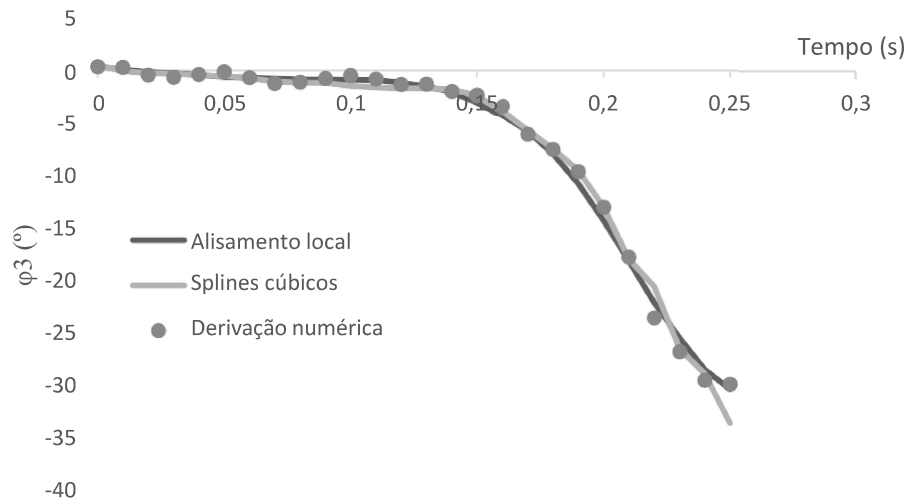
Coordenadas generalizadas e respectivas primeira e segunda derivadas (coordenadas relativas).



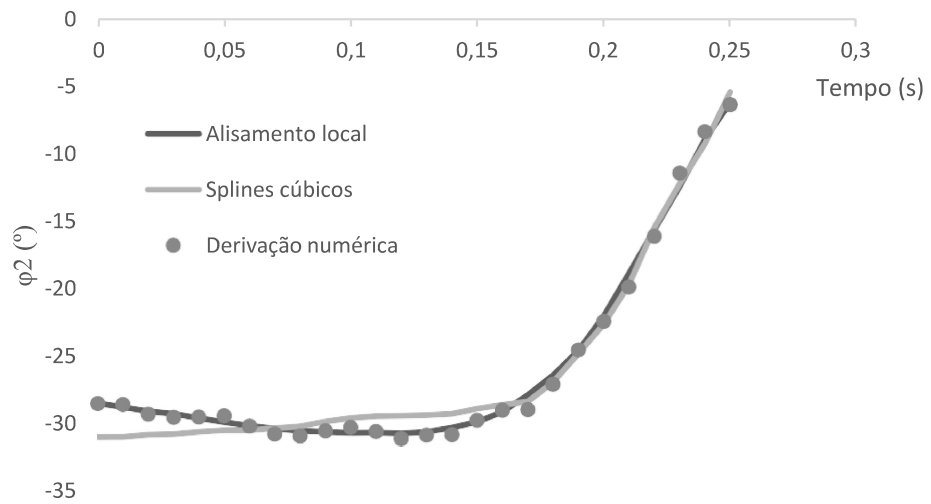
(a)



(b)

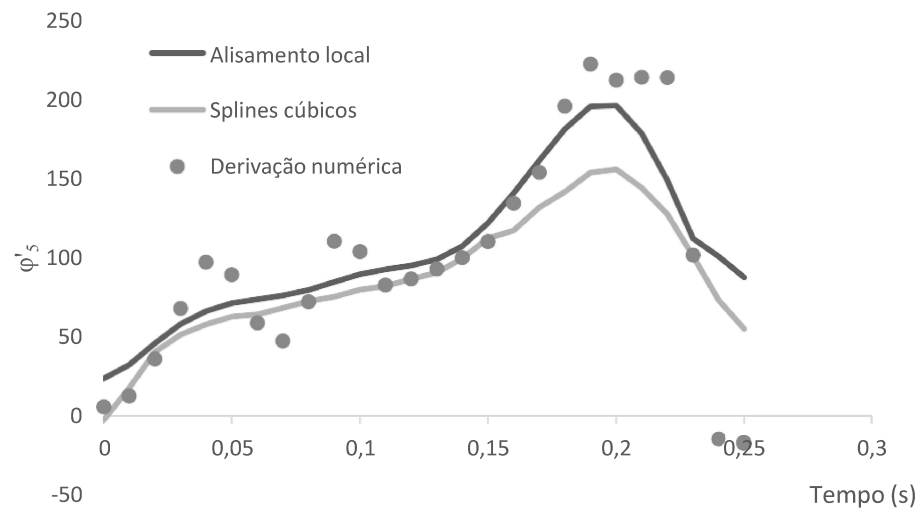


(c)

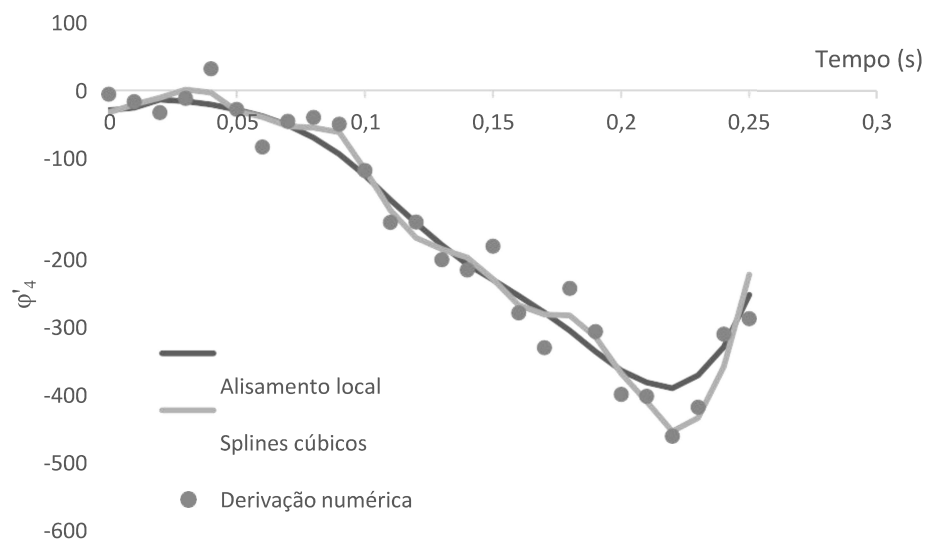


(d)

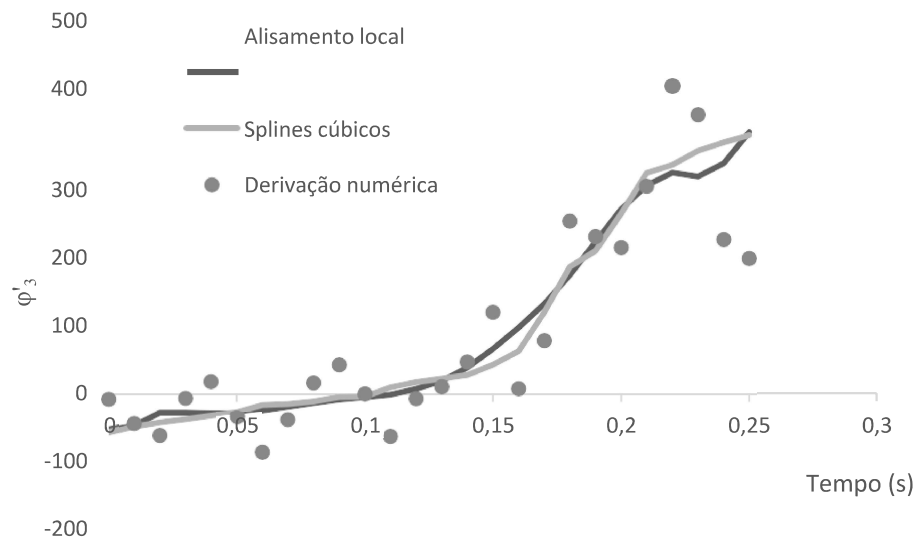
Figura 1.1.A – Coordenadas generalizadas ϕ_j , segundo os três métodos aplicados para coordenadas relativas.



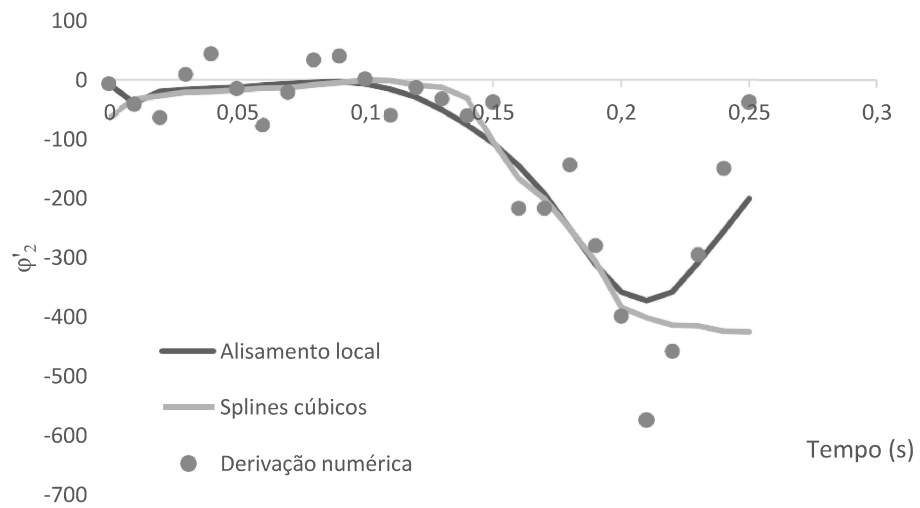
(a)



(b)

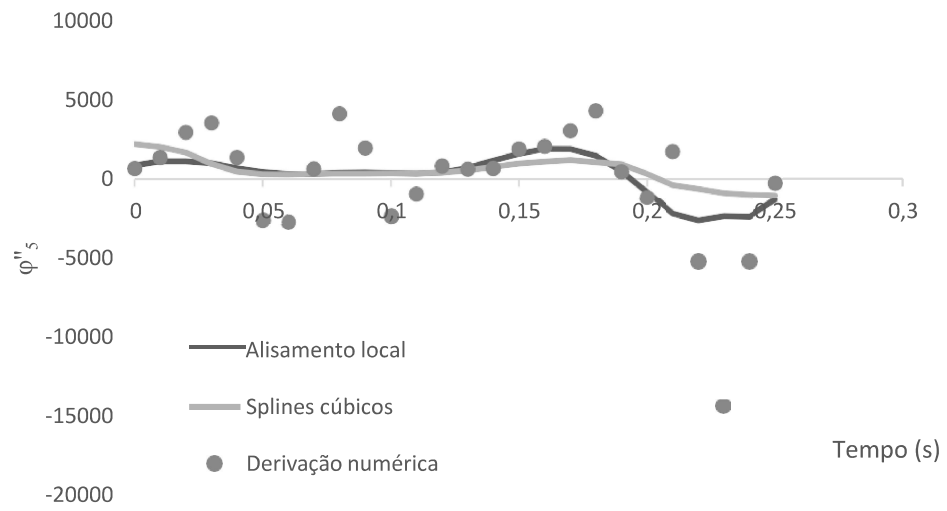


(c)

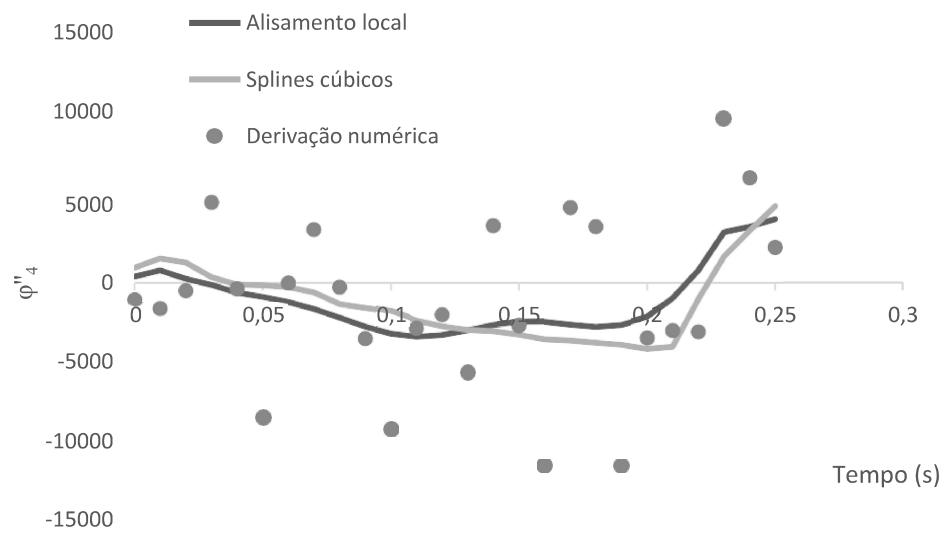


(d)

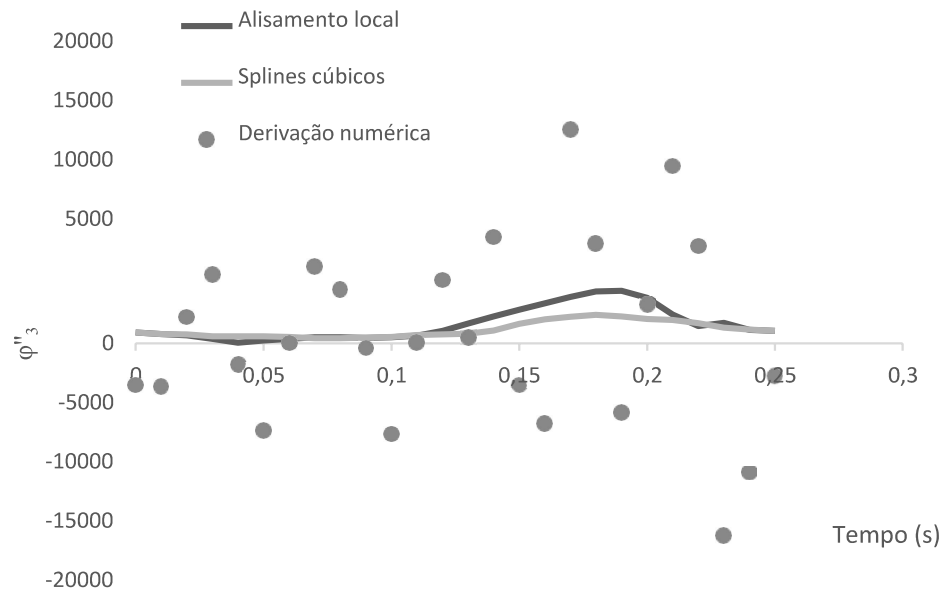
Figura 1.2.A – Velocidades generalizadas segundo os três métodos aplicados, para coordenadas relativas.



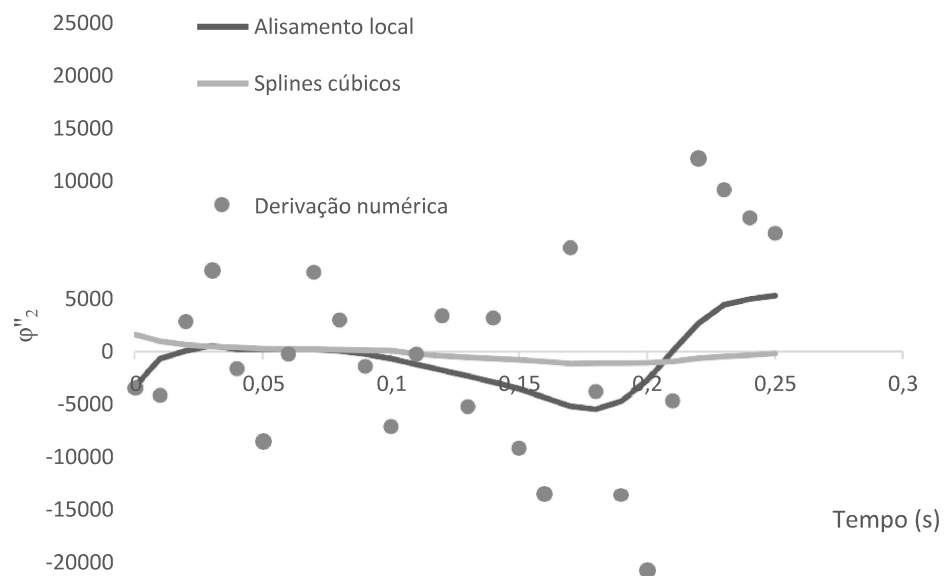
(a)



(b)



(c)

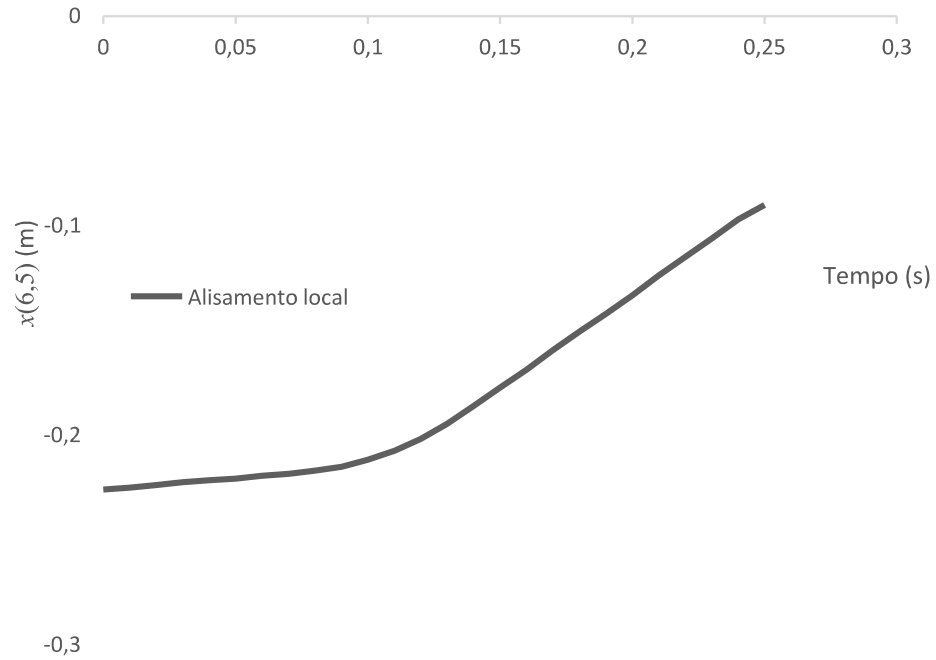


(d)

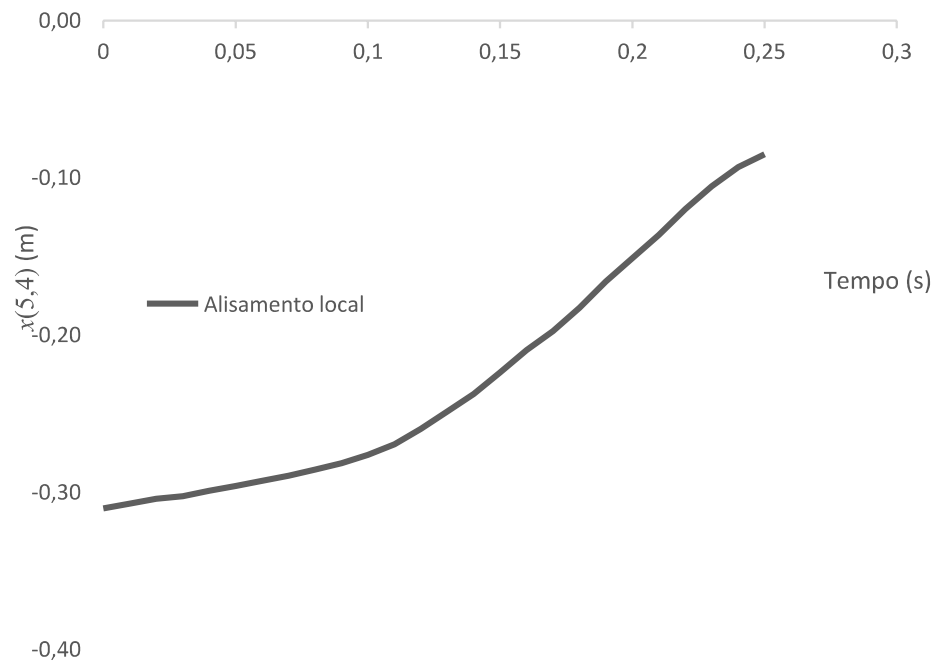
Figura 1.3.A – Acelerações generalizadas segundo os três métodos aplicados, para coordenadas relativas.

Anexo 2

Coordenadas generalizadas e respectivas primeira e segunda derivadas (coordenadas naturais).



(a)



(b)

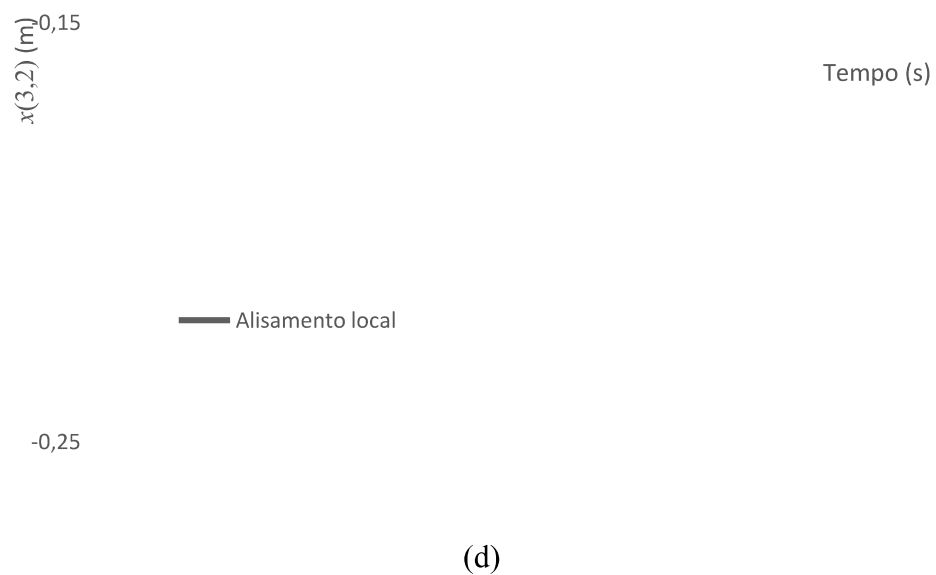
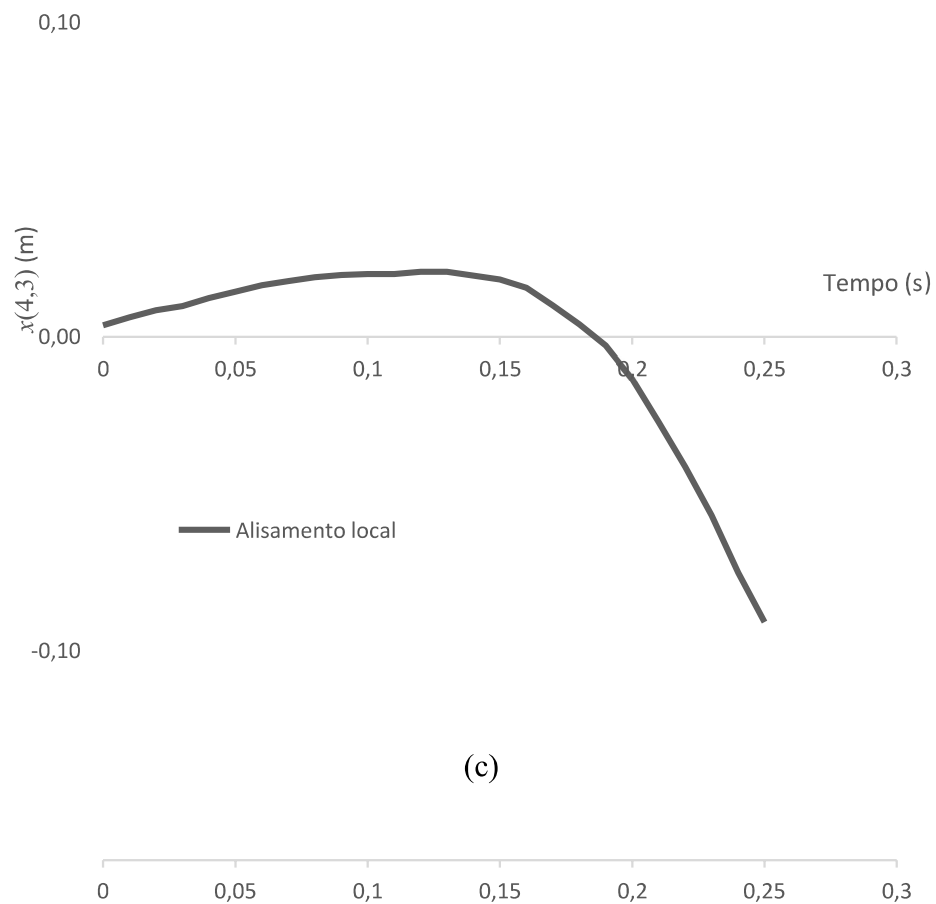
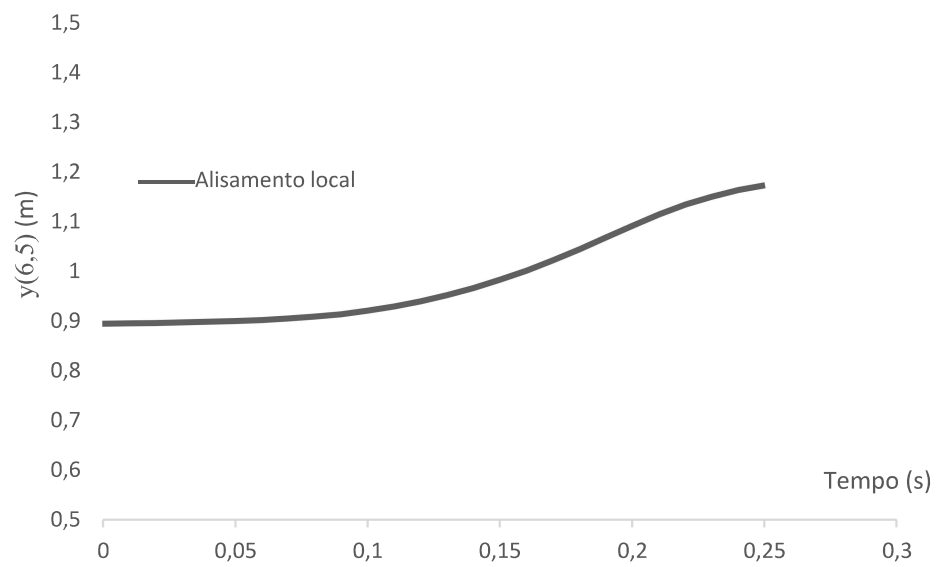
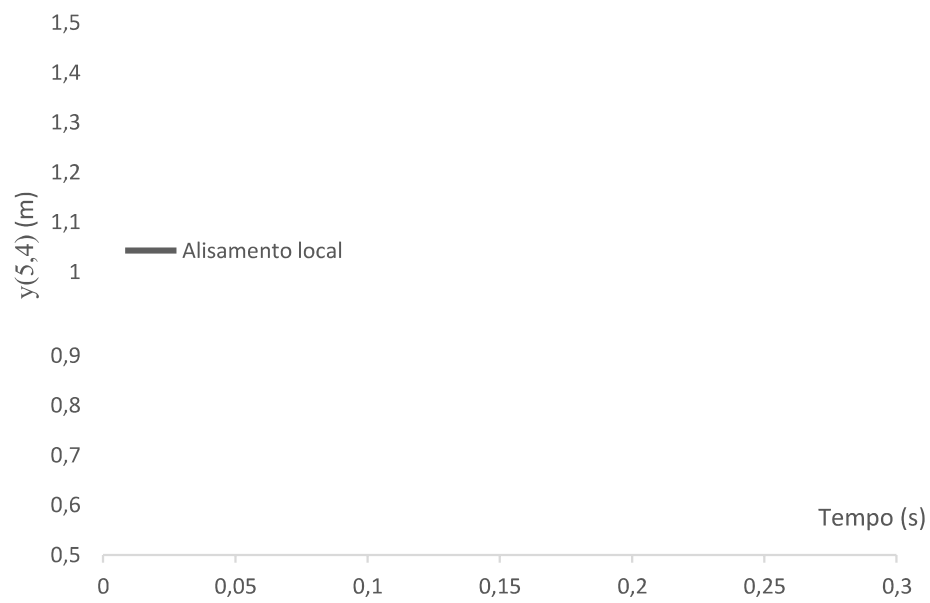


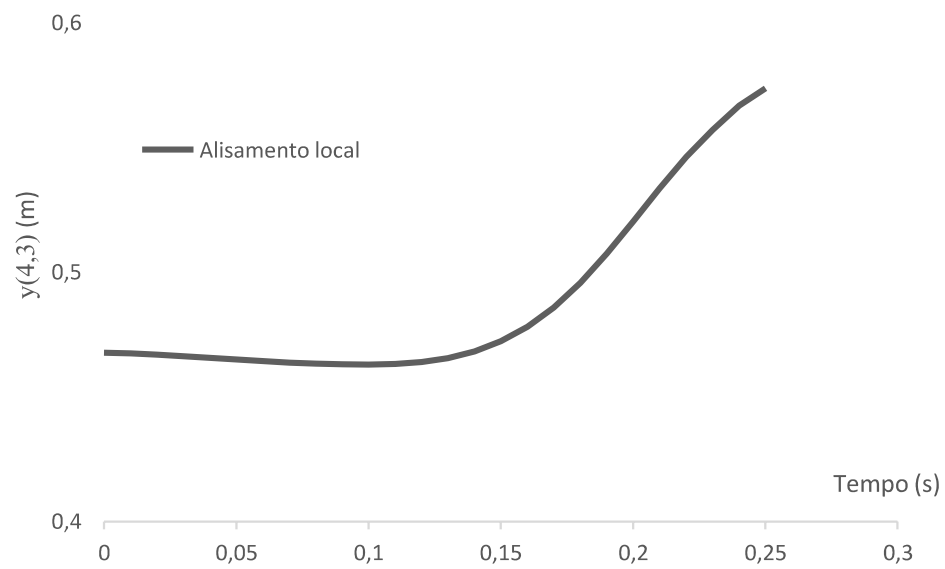
Figura 2.1.A – Abcissa para coordenadas generalizadas das rótulas (k,j) , utilizando coordenadas naturais.



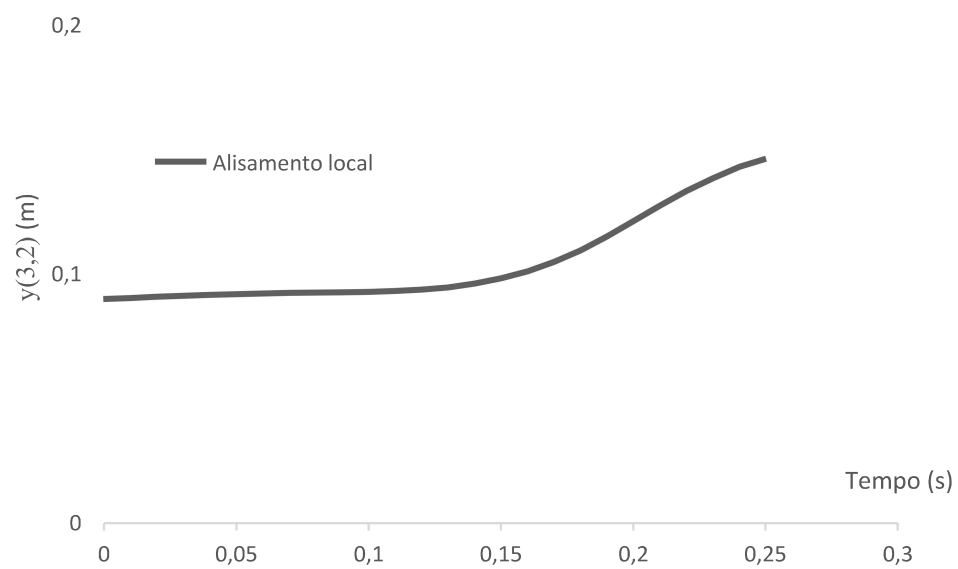
(a)



(b)

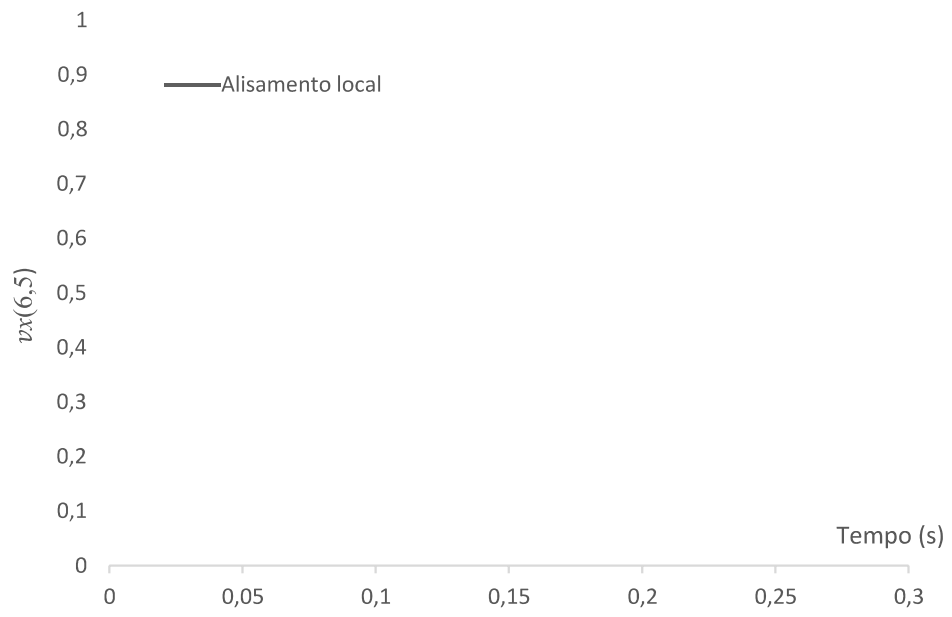


(c)

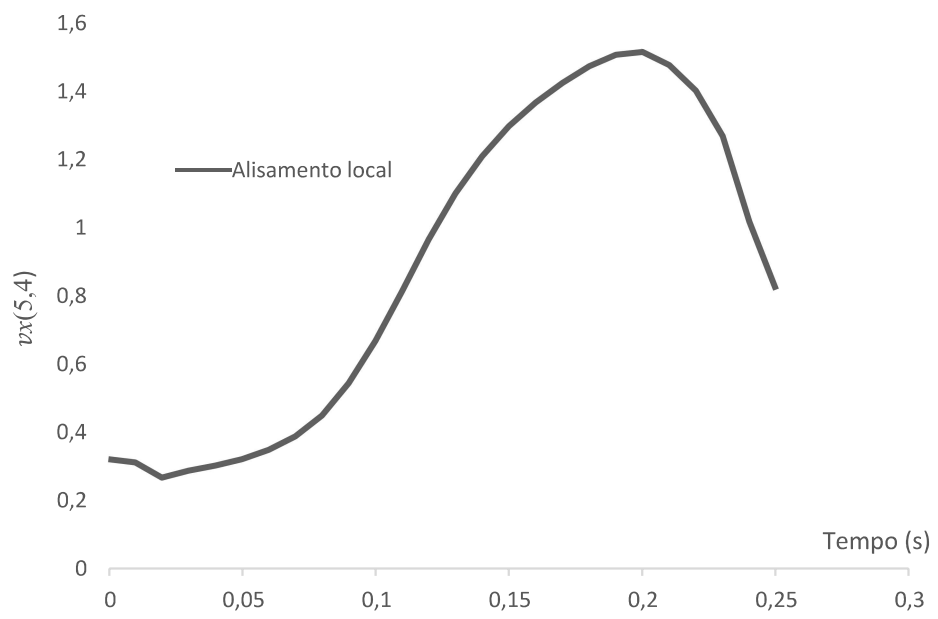


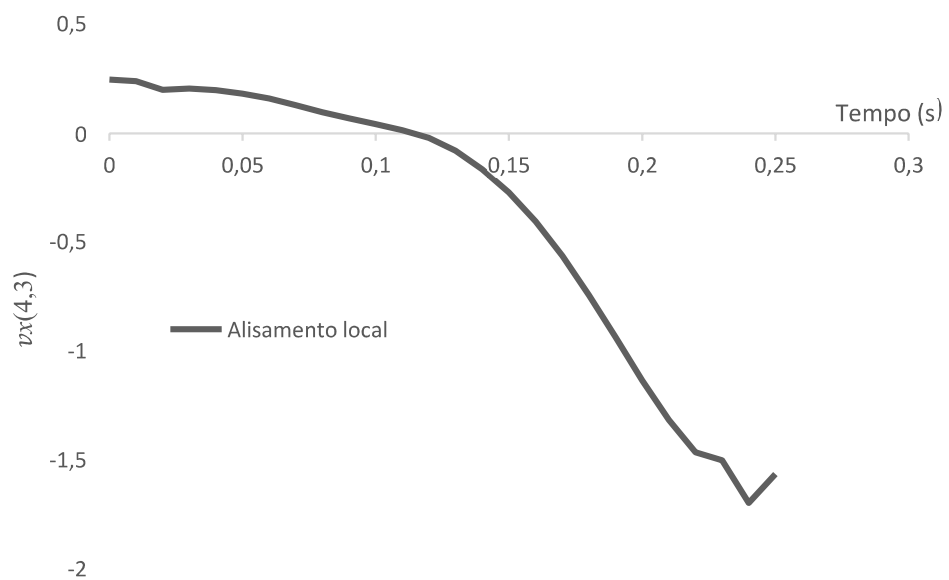
(d)

Figura 2.2.A – Ordenada para coordenadas generalizadas das rótulas (k,j) , utilizando coordenadas naturais

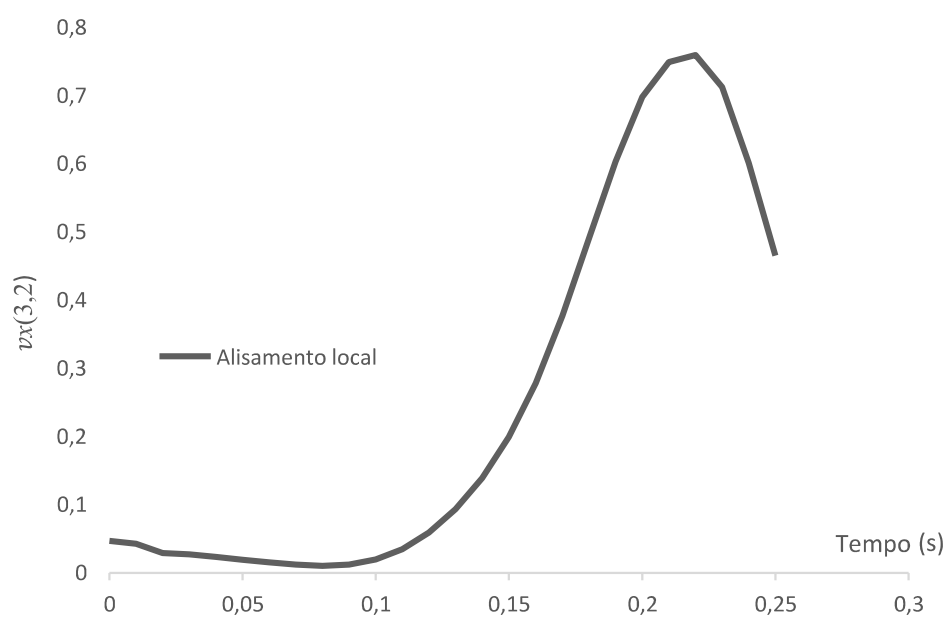


(a)



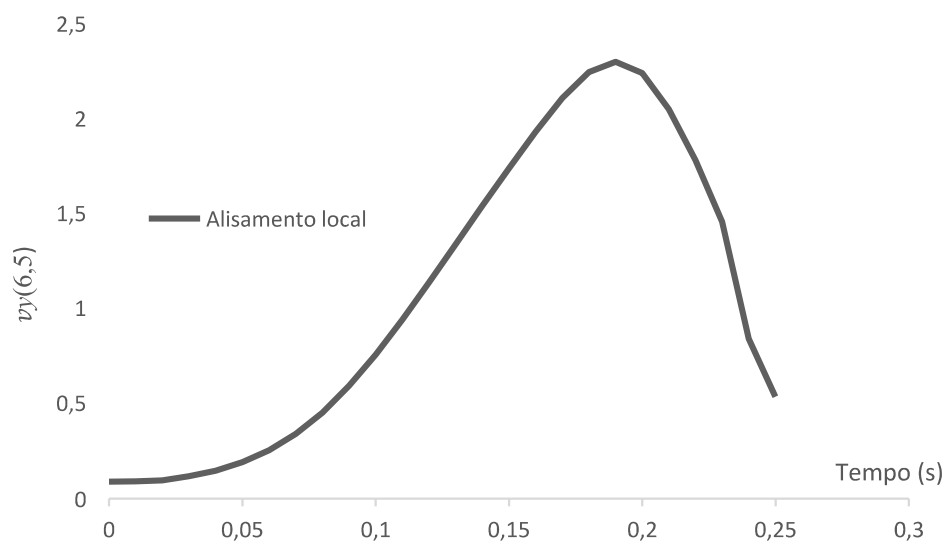


(c)

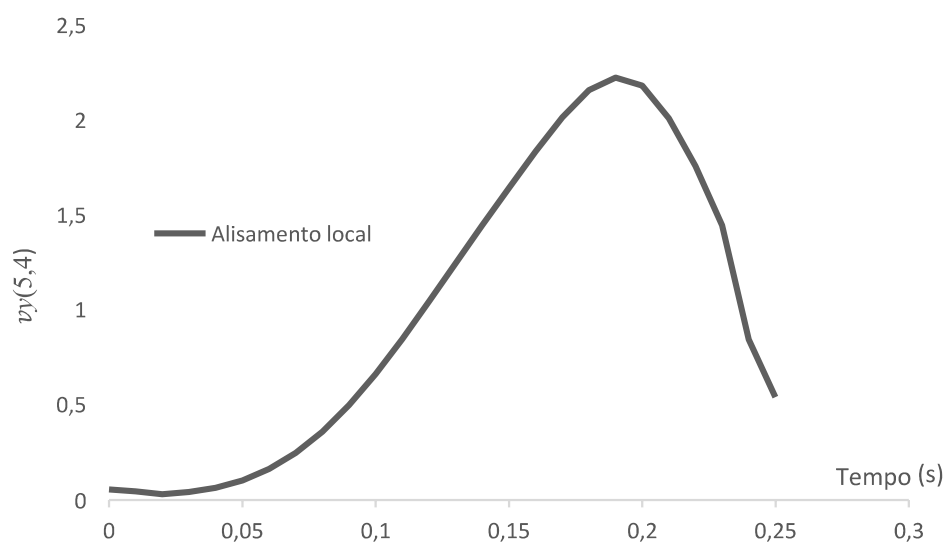


(d)

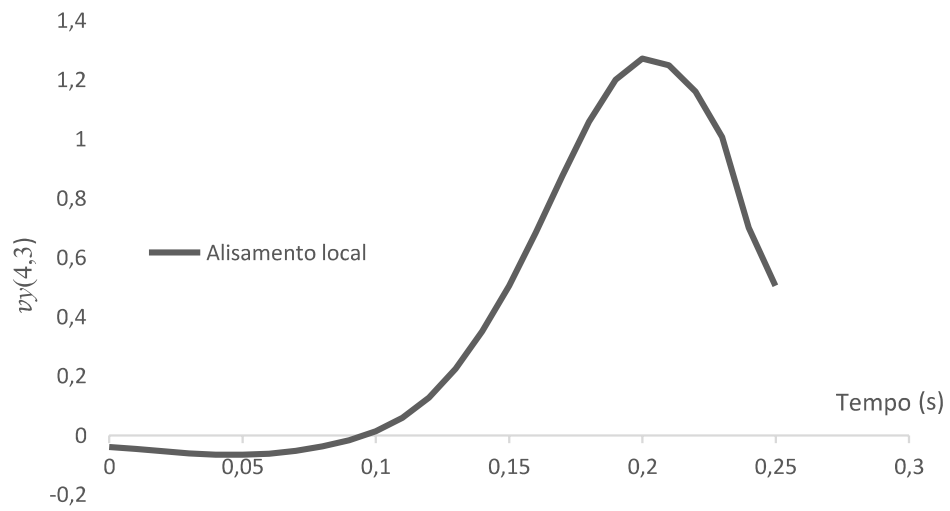
Figura 2.3.A – Velocidades generalizadas em x , das rótulas (k,j) , utilizando coordenadas naturais.



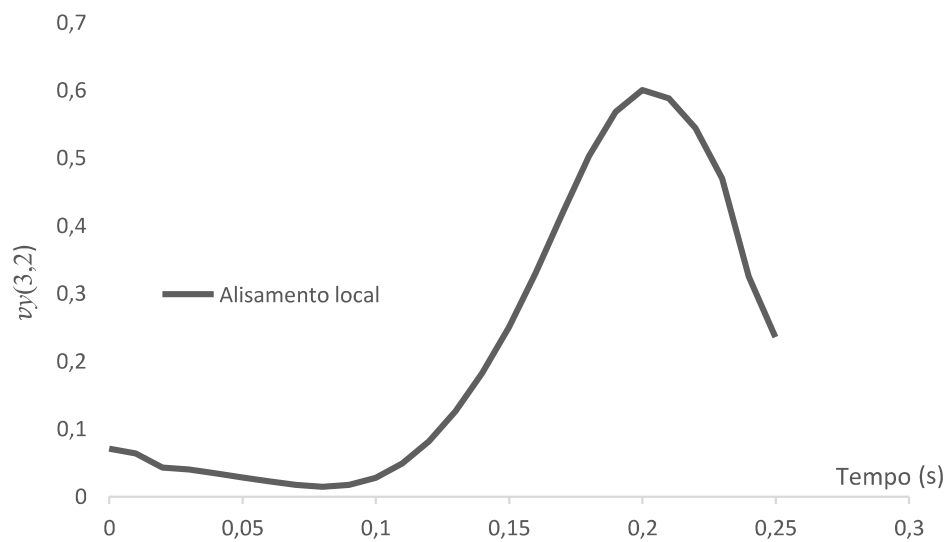
(a)



(b)

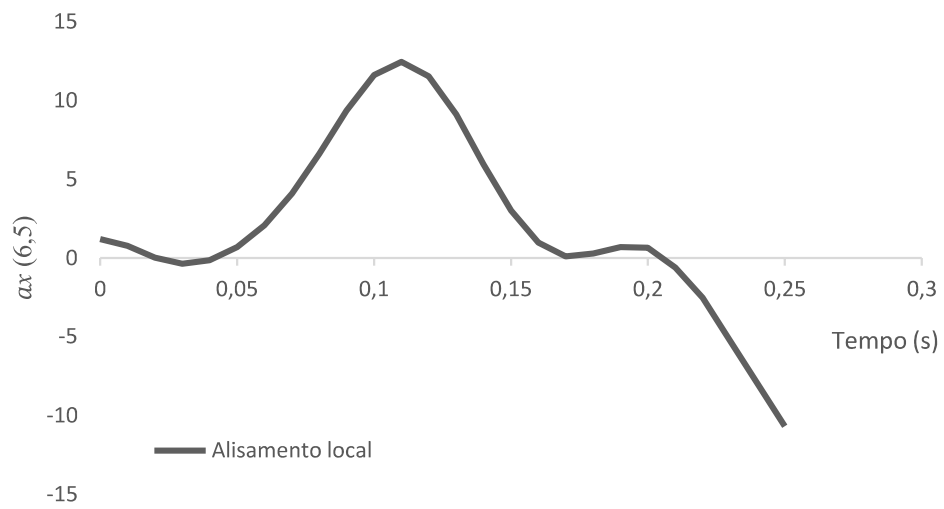


(c)

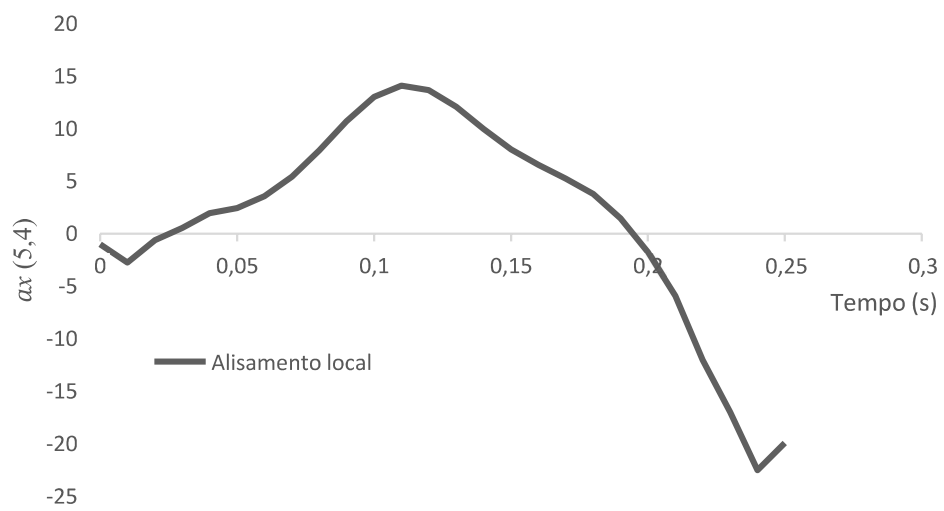


(d)

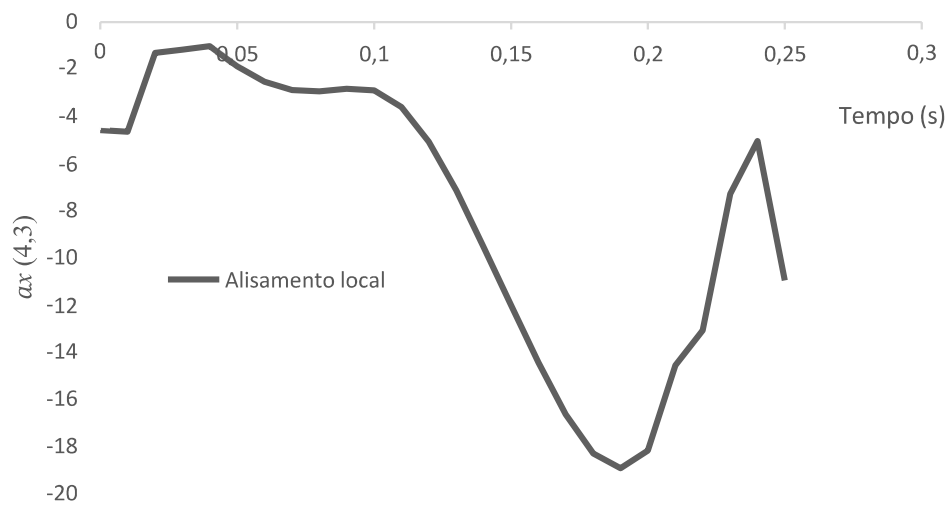
Figura 2.4.A - Velocidades generalizadas em y , das rótulas (k,j) , utilizando coordenadas naturais.



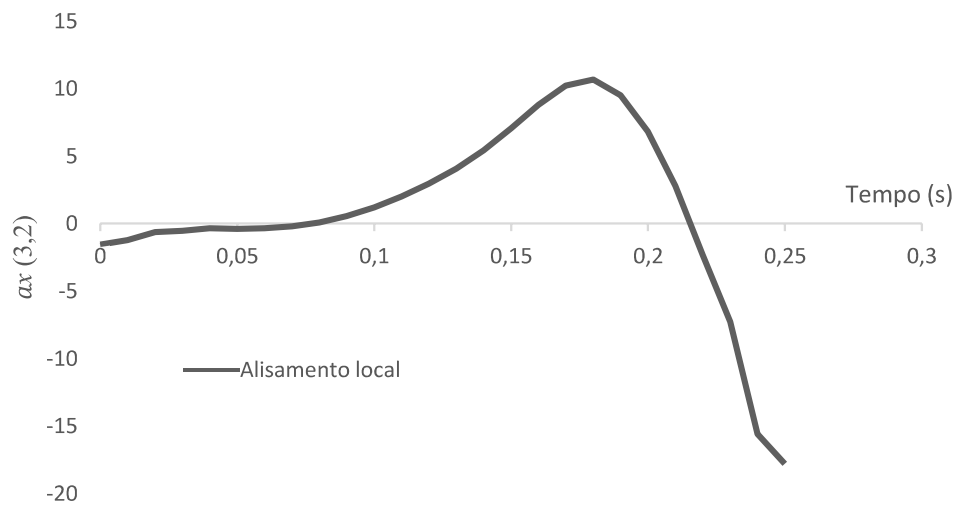
(a)



(b)

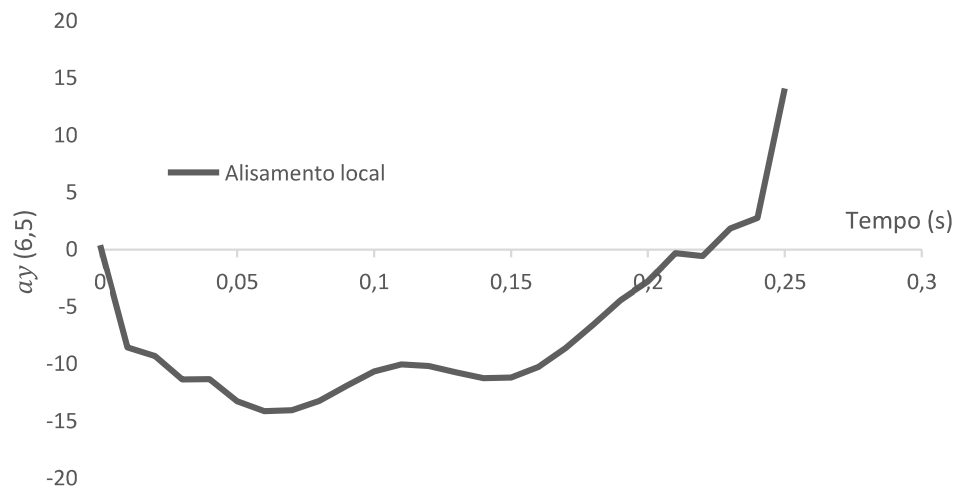


(c)

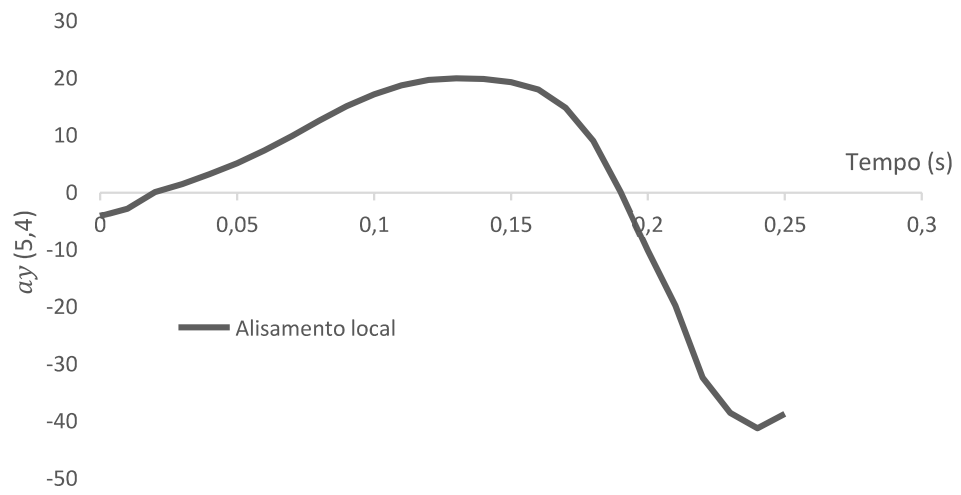


(d)

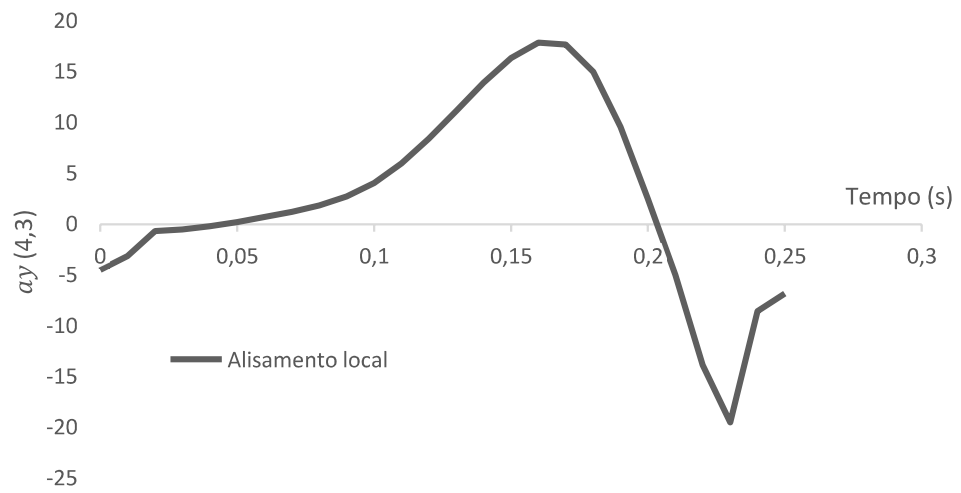
Figura 2.5.A - Acelerações generalizadas em x , das rótulas (k,j) , utilizando coordenadas naturais.



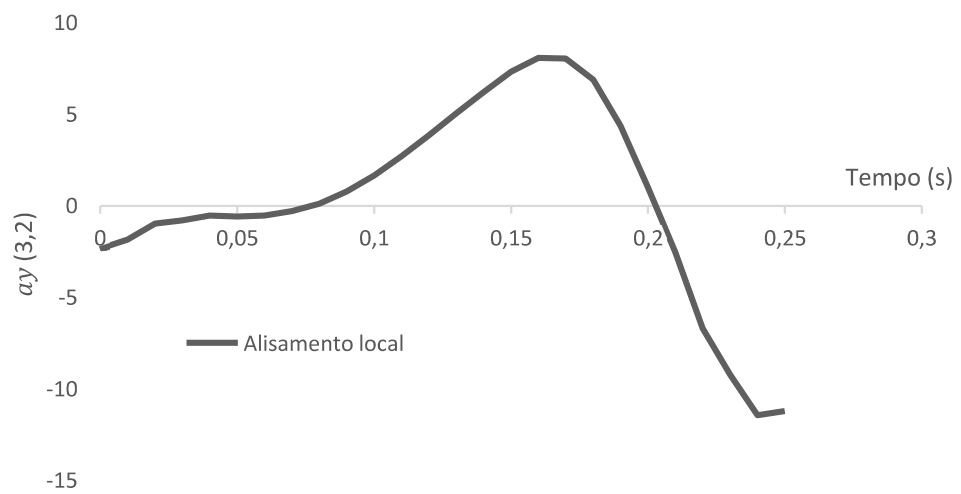
(a)



(b)



(c)

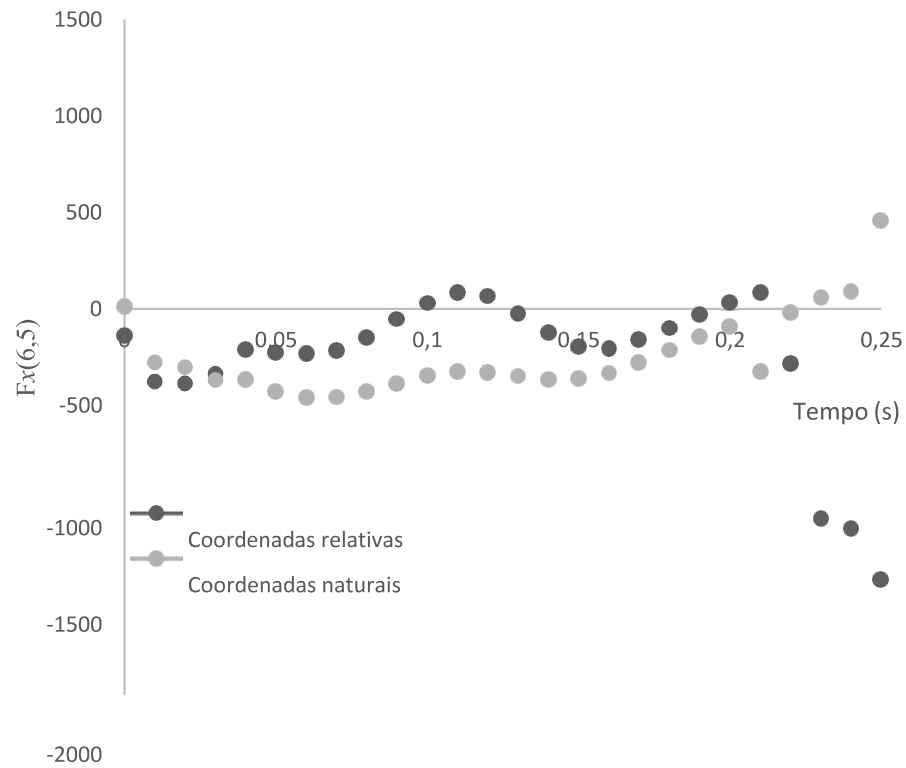


(d)

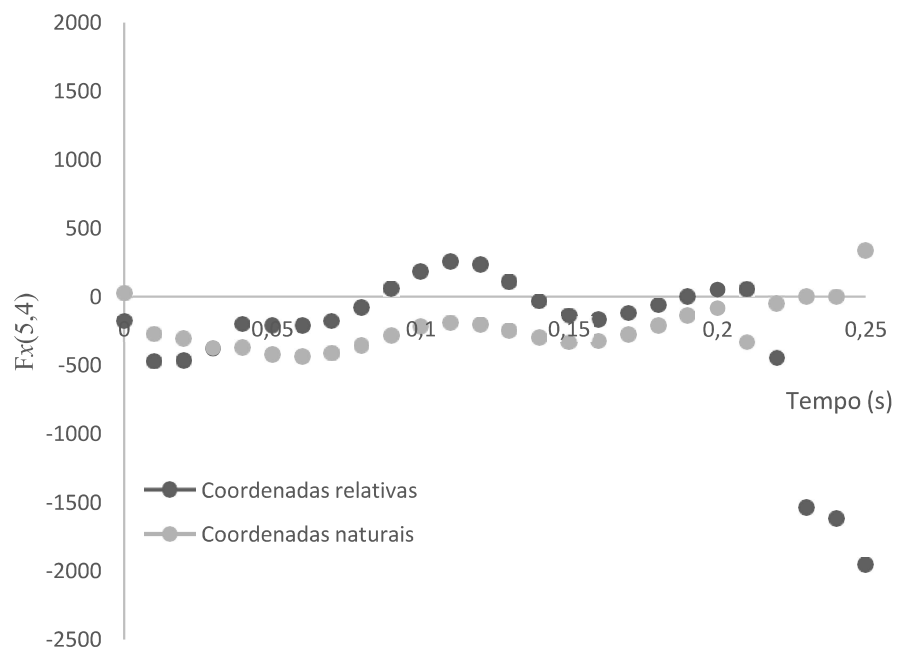
Figura 2.6.A - Acelerações generalizadas em y , das rótulas (k,j) , utilizando coordenadas naturais.

Anexo 3

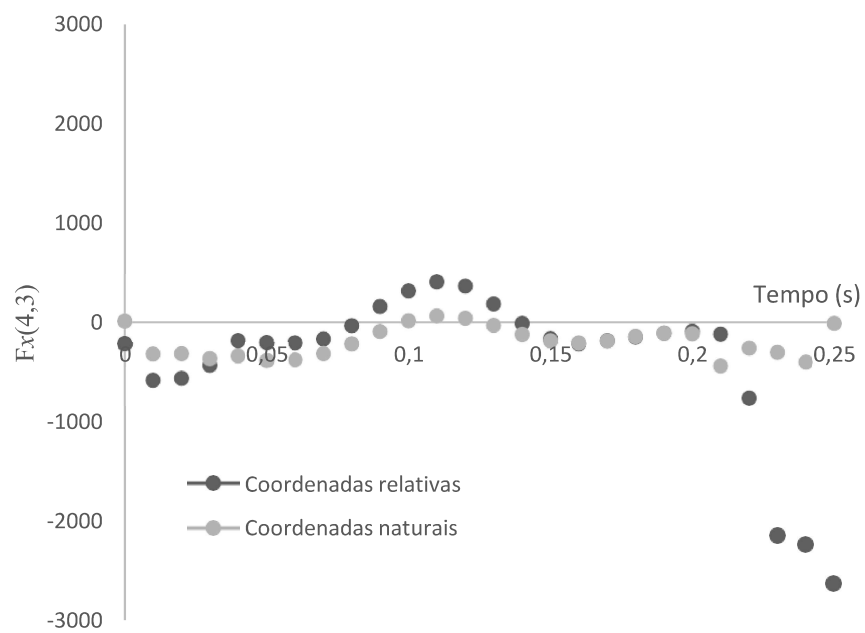
Forças de apoio $F_x^{(k,j)}$ e $F_y^{(k,j)}$, e momentos articulares $n^{(k,j)}$.



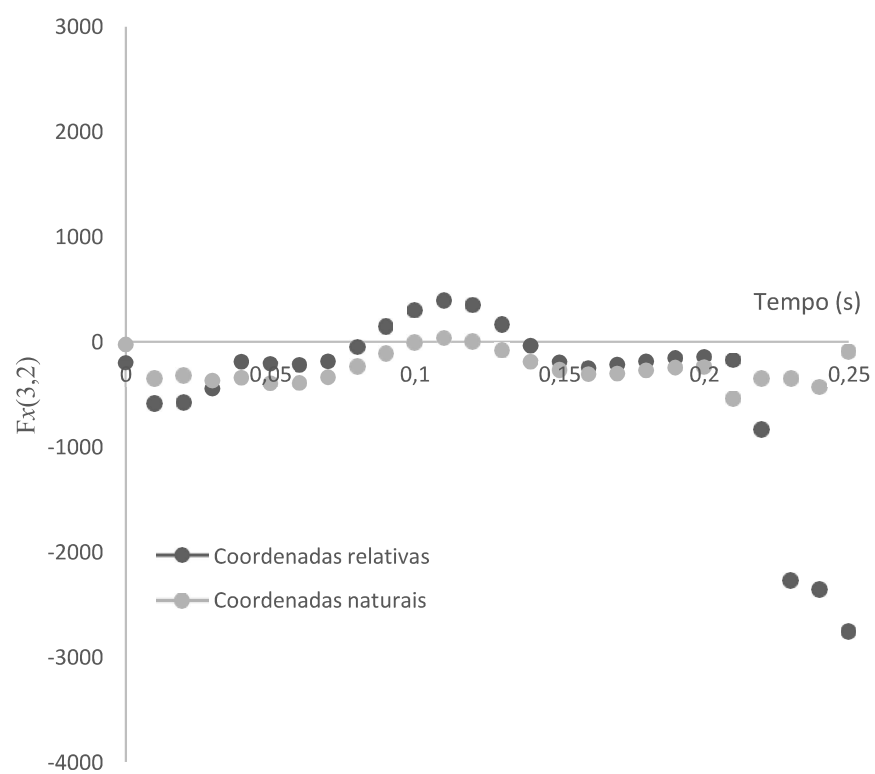
(a)



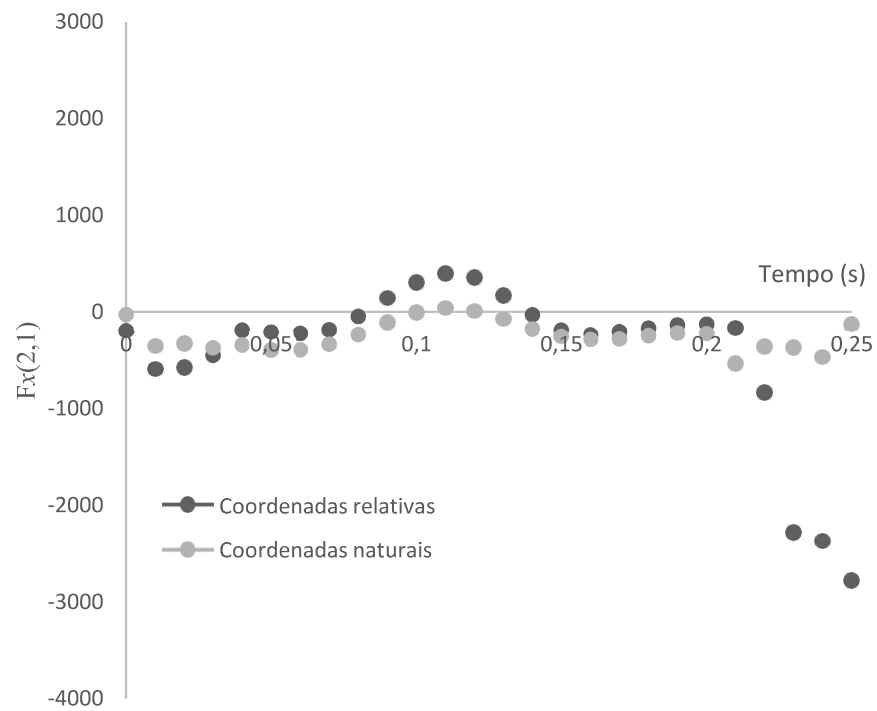
(b)



(c)

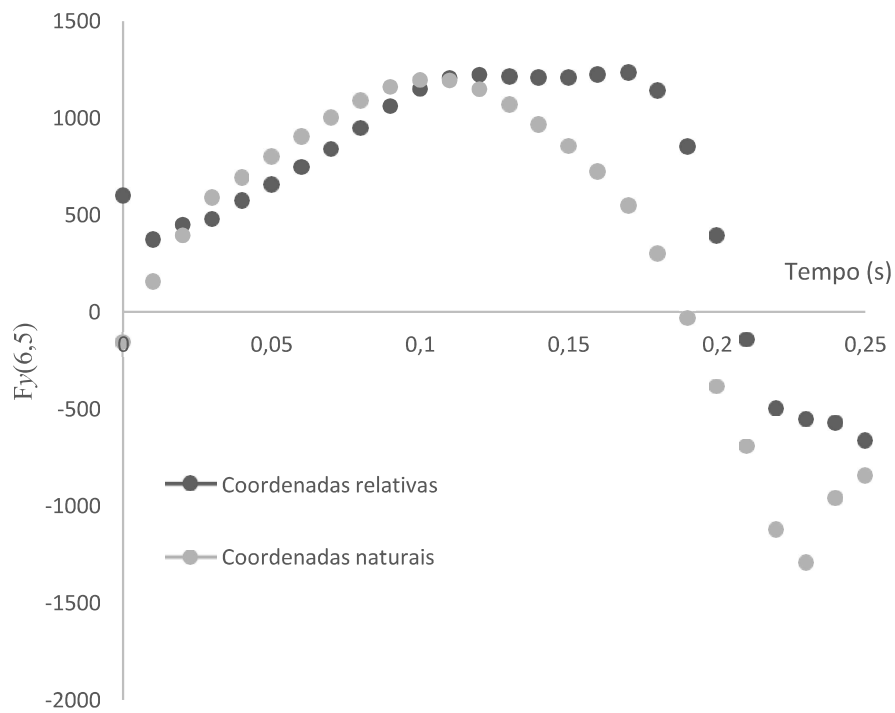


(d)

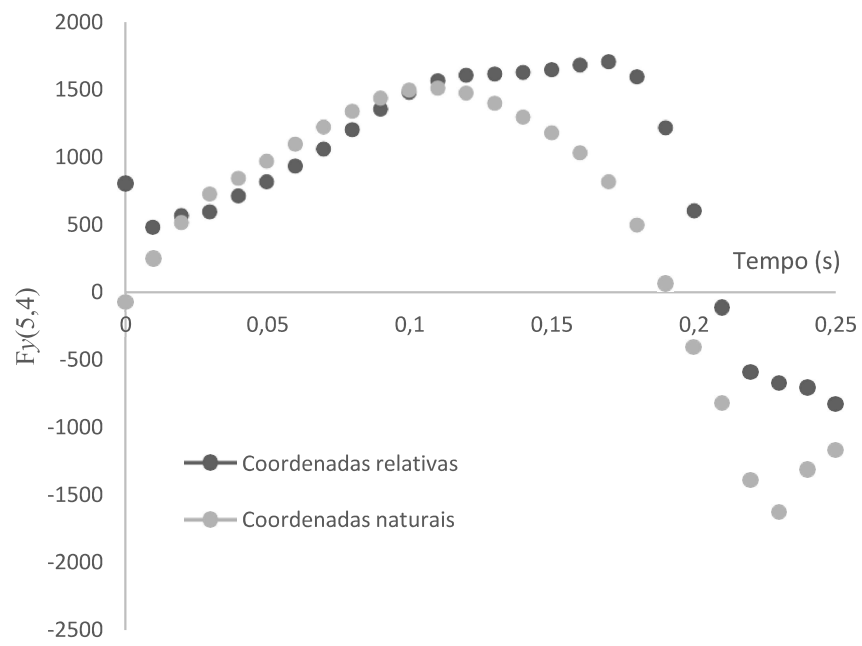


(c)

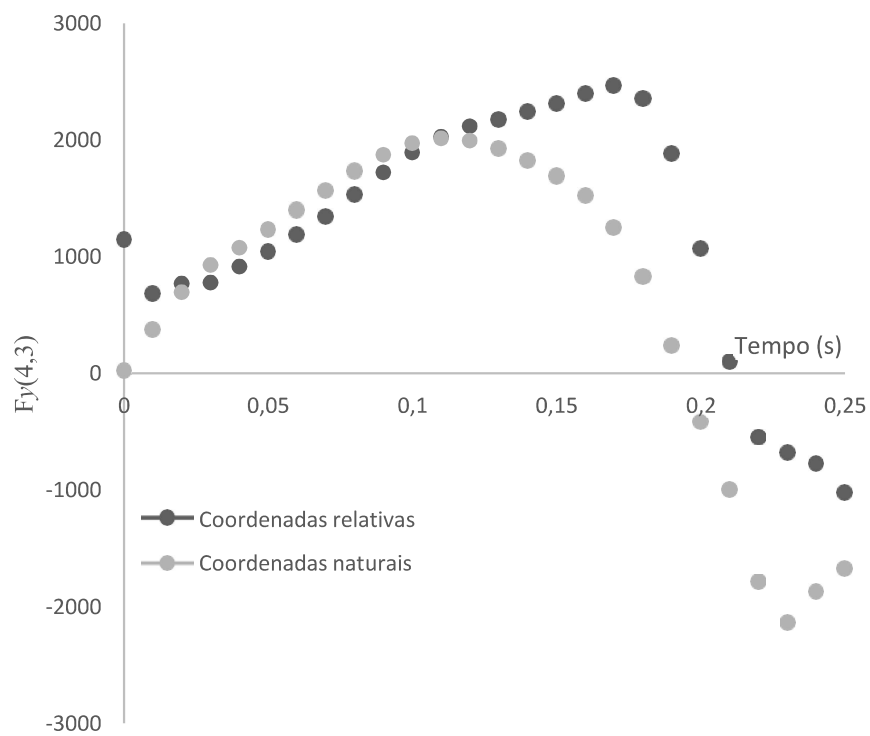
Figura 3.1.A - Força de apoio $F_x^{(k,j)}$, nas rótulas (k,j) , utilizando coordenadas relativas e naturais.



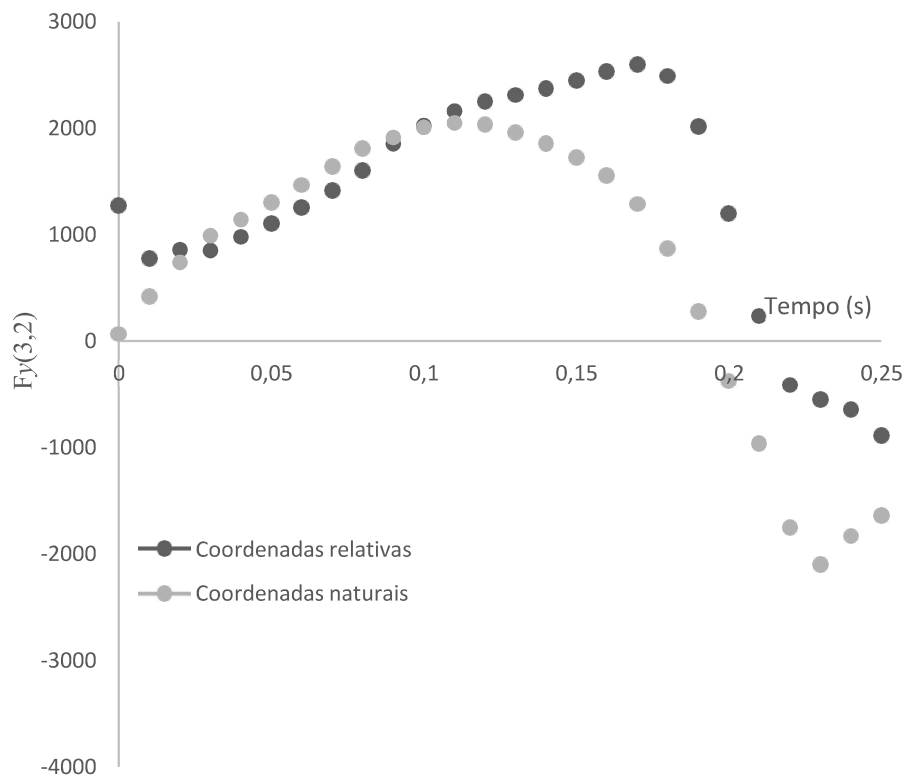
(a)



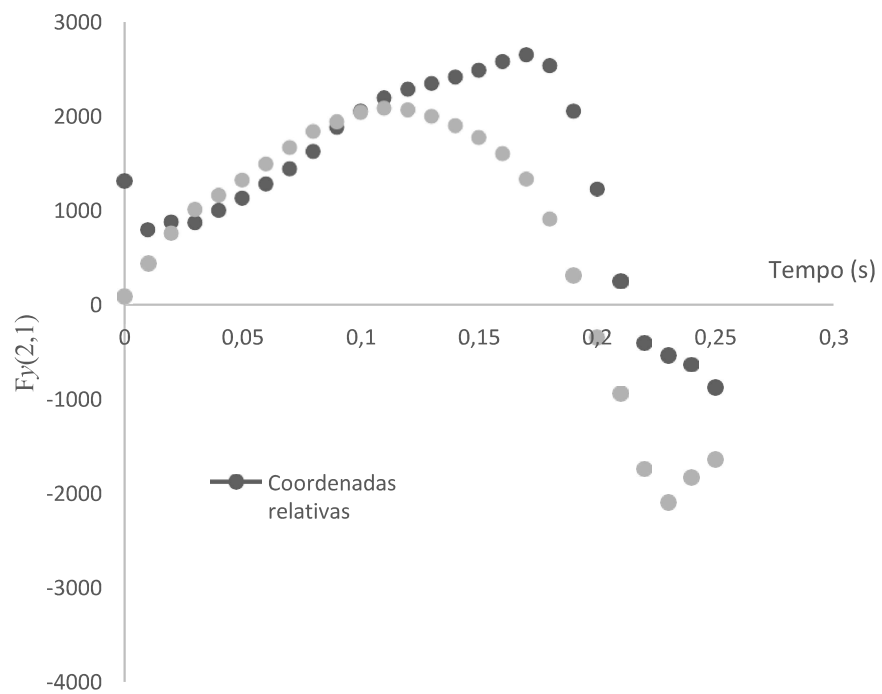
(b)



(c)

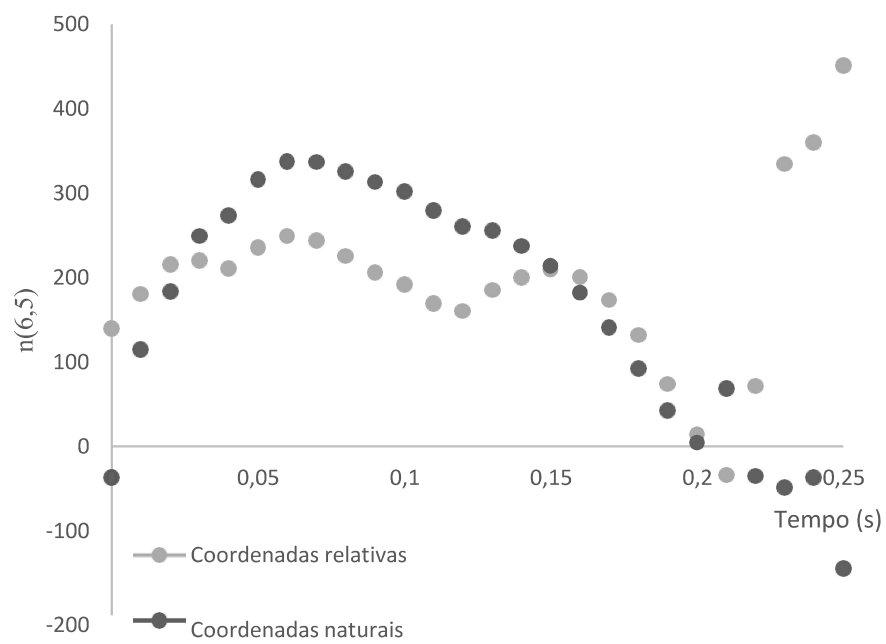


(d)

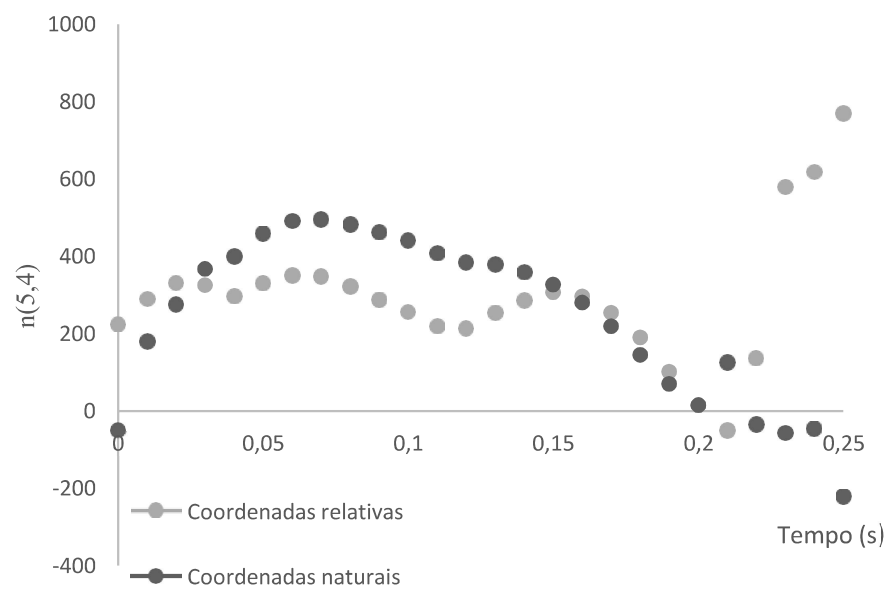


(e)

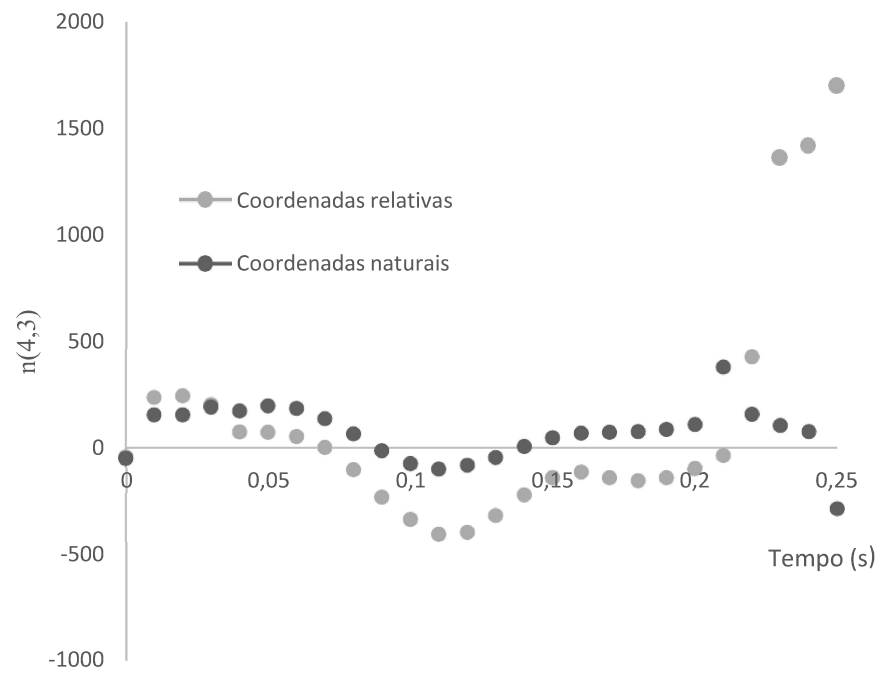
Figura 3.2.A - Forças de apoio $F_y^{(k,j)}$, nas rótulas (k,j) , utilizando coordenadas relativas e naturais.



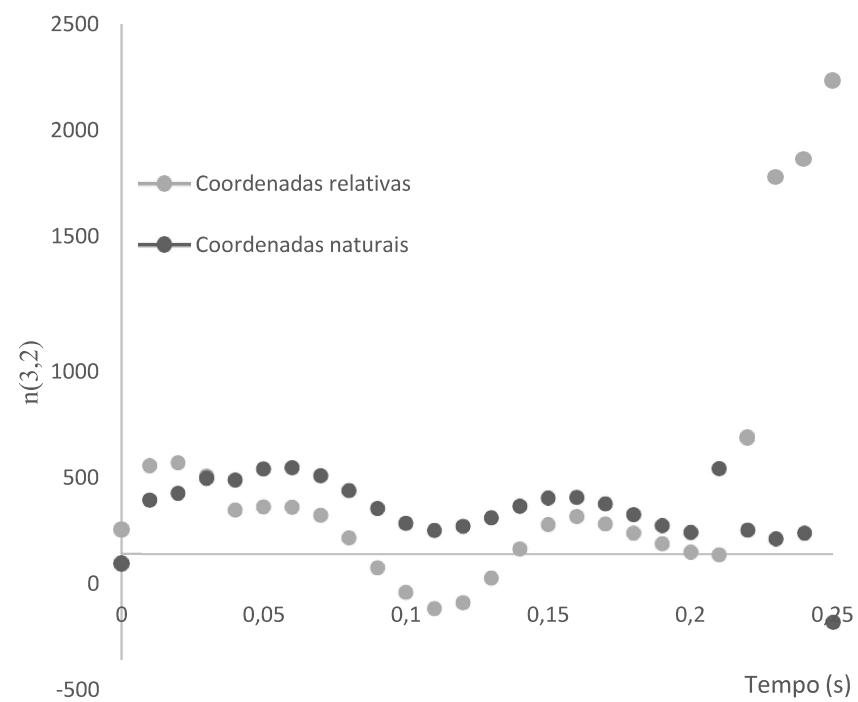
(a)



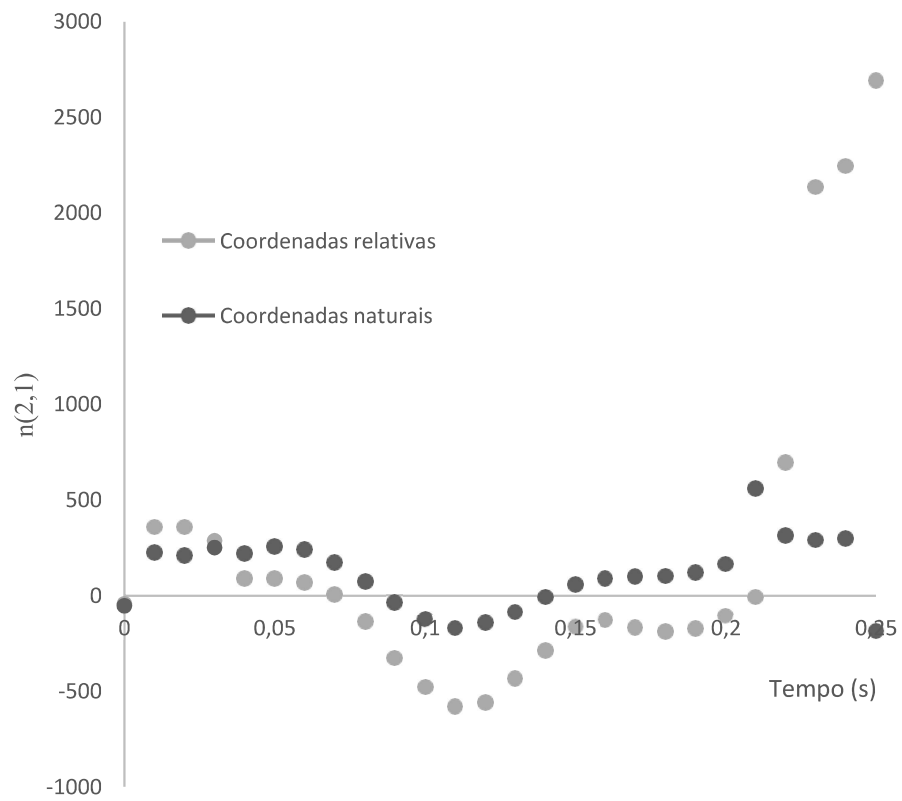
(b)



(c)



(d)



(e)

Figura 3.3.A - Momento articular nas rótulas (k,j) utilizando coordenadas relativas e naturais.