UNIVERSIDADE DE TRÁS-OS-MONTES E ALTO DOURO

MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

NO 3º CICLO DO ENSINO BÁSICO E SECUNDÁRIO

RELATÓRIO DE ESTÁGIO

AS SEQUÊNCIAS NO NOVO PROGRAMA DE MATEMÁTICA DO 3º CICLO DO ENSINO BÁSICO

ISAAC MANUEL MARTINS DOS REIS

Vila Real, 2012

UNIVERSIDADE DE TRÁS-OS-MONTES E ALTO DOURO

MESTRADO EM ENSINO DE MATEMÁTICA

NO 3º CICLO DO ENSINO BÁSICO E SECUNDÁRIO

RELATÓRIO DE ESTÁGIO

AS SEQUÊNCIAS NO NOVO PROGRAMA DE MATEMÁTICA DO 3º CICLO DO ENSINO BÁSICO

ISAAC MANUEL MARTINS DOS REIS

ORIENTADOR: Professor Doutor João Luís Honório Matias

Vila Real, 2012

Relatório de Estágio apresentado à Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro, elaborado com vista à obtenção de grau de Mestre em Ensino de Matemática no 3º Ciclo do Ensino Básico e no Ensino Secundário (em conformidade com o Decreto-lei nº 74/2006 de 24 de março).

"Seria possível dizer o que é a Matemática se esta fosse uma ciência morta. Mas a Matemática é, pelo contrário, uma ciência viva, que se encontra hoje, mais do que nunca, em rápido desenvolvimento, proliferando cada vez mais em novos ramos, que mudam não só a sua fisionomia, como até a sua essência."

(José Sebastião e Silva)

AGRADECIMENTOS

Ao terminar este Relatório de Estágio, resta-me registar sinceros agradecimentos a todos aqueles que de várias formas contribuíram para que esta se tornasse numa realidade.

Ao Professor Doutor João Luís Honório Matias pela competência com que orientou esta tese e o tempo que generosamente me dedicou transmitindo-me os melhores e mais úteis ensinamentos, com paciência, lucidez e confiança.

À minha mulher, aos meus pais e a toda a família, agradeço toda a dedicação, compreensão e confiança que desde sempre depositaram em mim, bem como o apoio incondicional com que pude sempre contar em todos os desafios da minha vida.

À minha querida Joaninha agradeço a sua alegria e todos os momentos felizes com que me brinda cada dia, e que me dão força e coragem para enfrentar os desafios com que todos os dias me deparo.

Obrigada a todos, pois sem vós este trabalho nunca teria sido realizado.

RESUMO

Face à entrada em vigor dos novos programas de Matemática do Ensino Básico, homologados em dezembro de 2007, uma nova abordagem aos temas e conteúdos torna-se essencial.

Este trabalho faz uma análise sobre o estudo das Sequências no Programa de Matemática do Ensino Básico, baseado nos seguintes aspetos: evolução do conceito de Sequência ao longo da história; orientações do ensino das Sequências no Programa de Matemática do Ensino Básico; bem como a proposta de um conjunto de tarefas possíveis de implementar, no desenvolvimento deste tópico.

Palavras-chave: Programa de Matemática do Ensino Básico; Sequências.

ABSTRACT

With the recent introduction of the new Mathematics Program for Basic Education, approved in December 2007, a new approach to the themes and contents is essential.

The purpose of this work is to analyze the study of sequences in the mathematics program for Primary Education considering the following aspects: the evolution of the concept of Sequence throughout history; the guidelines for the teaching of Sequences suggested in the Mathematics Program for Basic Education, suggestion of a set of tasks to be implemented when teaching Sequences.

Keywords: Mathematics Program for Primary Education; sequences.

ÍNDICE GERAL

Índice de Figuras

Pág.

Índice de Tabelas

Pág.

INTRODUÇÃO

Hoje, mais do que nunca, a Matemática está presente em todos os ramos da ciência e tecnologia, na arte, em muitas profissões e nas mais diversas atividades diárias. Por isso é essencial que na formação dos nossos alunos, futuros cidadãos, ela seja a base da sua formação, contribuindo para o seu desenvolvimento pessoal e proporcionando a formação Matemática necessária a outras disciplinas, bem como ao prosseguimento dos estudos.

Todos os temas que constituem a Matemática são entusiasmantes e autênticas "caixinhas de segredo", prontas a proporcionar aos seus exploradores, experiências inesquecíveis. No entanto, desde sempre a Álgebra e mais especificamente o tópico das Sequências revelou-se especial.

O trabalho com Sequências de figuras, números ou outro tipo de objetos é um excelente veículo que permite aos alunos desenvolver a capacidade de estabelecer generalizações, um aspeto fundamental do raciocínio matemático. Além disso, favorece o desenvolvimento da capacidade de fazer representações, quer através de diagramas e esquemas, quer usando a linguagem algébrica.

Com a entrada em vigor do novo Programa de Matemática do Ensino Básico, uma nova abordagem aos temas em estudo, revela-se essencial. Estamos perante uma excelente oportunidade de renovação e descoberta de metodologias, estratégias e materiais.

Assim, ao longo deste trabalho faremos um aprofundamento dos conhecimentos teóricos sobre Sequências e Sucessões; analisaremos o desenvolvimento do tópico Sequências no Novo Programa do 3º ciclo do Ensino Básico; desenvolveremos tarefas e atividades que promovam um estudo aliciante deste tópico e a análise de formas de abordagem do mesmo.

Relativamente à organização, este trabalho desenvolve-se em quatro capítulos. No primeiro capítulo é feita uma contextualização histórica da evolução do conceito de Sequência; o capítulo dois faz referência à contextualização das Sequências no novo Programa do Ensino Básico; no capítulo três são propostas tarefas para o desenvolvimento do tópico em estudo; e, logo depois, no capítulo quatro, são apresentadas as conclusões do trabalho desenvolvido.

CAPÍTULO 1 - Conceito de Sequência

1.1. Evolução do Conceito de Sequência na História da Matemática

A Matemática é uma das ciências mais antigas, tendo sempre ocupado, ao longo dos tempos, um lugar de destaque relativamente às outras ciências. Através da história procurou-se estabelecer uma melhor compreensão dos conceitos introduzidos, refletidos nos mais nobres pensamentos de inúmeras gerações.

Segundo Ponte e outros (2007), contar e medir terão estado entre as primeiras manifestações do que hoje chamamos atividade Matemática, e foi sendo progressivamente alargada desde que a Matemática se constituiu como domínio autónomo ao estudo dos números e operações, das formas geométricas, das estruturas e regularidades, da variação, do acaso e da incerteza.

A Matemática originalmente, segundo Boyer:

> *"(...) surgiu como parte da vida diária do homem, e se há validade no princípio biológico da "sobrevivência do mais apto" a persistência da raça humana provavelmente tem relação com o desenvolvimento de conceitos matemáticos"* (1993, p. 1).

Ainda segundo o autor, a ideia de número tornou-se finalmente suficientemente ampla e vivida para que se sentisse a necessidade de exprimir as propriedades de algum modo. Presumivelmente, a princípio somente na linguagem de sinais. Os dedos de uma mão podiam facilmente ser usados para indicar um conjunto de dois, três, quatro ou cinco objetos. Deste modo, as duas mãos podiam representar coleções contendo até dez elementos; combinando dedos das mãos e dos pés pode-se ir até vinte. Quando os dedos humanos eram inadequados, podiam ser usados montes de pedras. O homem pré-histórico registava um número fazendo marcas num bastão ou pedaço de osso.

Segundo Eves (1995), perto do final da Idade da Pedra, e em virtude das mudanças climáticas que o mundo viveu, os povos foram impelidos para uma agricultura intensiva e em grande escala. De acordo com as mudanças verificadas o homem tentou adaptar-se como pode. Para se precaver da fome, para além da caça, houve necessidade de arranjar outros modos de se alimentar, voltando-se assim para a agricultura, dando origem a uma "revolução agrícola", que provocou grandes mudanças culturais. Uma das mudanças foi a criação da escrita. Novas necessidades para a alimentação, e consequentemente sobre o cultivo da terra significou irrigação, nomeadamente, dos vales do Norte de África e do Médio Oriente onde a chuva era muito escassa. Com as cheias periódicas do Nilo, os agricultores tiveram necessidade de saber com precisão quando ocorreriam enchentes ou chuvas. Para tal criaram os primeiros calendários e almanaques, procurando estabelecer padrões como os referidos. Dessa forma, observavam os períodos em que estas cheias ocorriam, para poderem plantar na época certa e deste modo, garantir as suas colheitas. Havia, portanto, necessidade de se conhecer o padrão desse acontecimento.

Boyer refere que os Egípcios *"observaram que o rio subia logo depois que Sírius, a estrela do cão, se levantava a leste, um pouco antes do Sol."* Assim, perceberam que estes acontecimentos ocorriam em períodos de 365 dias, o que os levou a estabelecerem um *"calendário solar, feito de doze meses, de trinta dias cada um e mais cinco dias de festas, dedicados aos deuses Osíris, Hórus, Seth, Ísis e Nephthys."* (1993, p. 9).

Ao longo dos tempos, foram efetuados registos periódicos destes acontecimentos, e um certo número de papiros egípcios resistiu ao desgaste do tempo. O mais extenso dos de natureza Matemática, é conhecido como "papiro Rhind", que se encontra representado na figura 1. Este documento data aproximadamente de 1650 a.C. e é constituído por um texto matemático que contém 85 problemas copiados em escrita hierática pelo escriba "Ahmes" de um trabalho mais antigo.

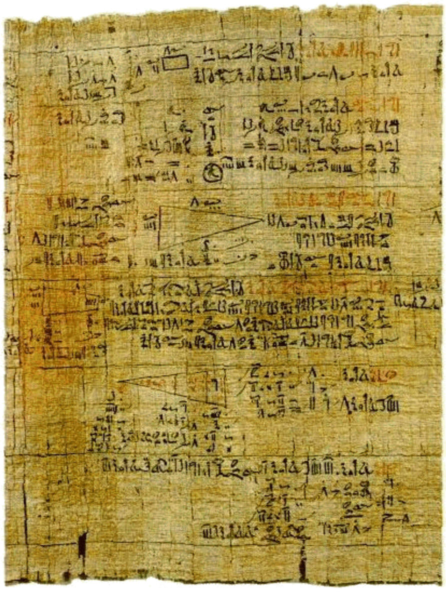


Figura 1 – Papiro de Rhind

(http://www.iesdionisioaguado.org/mates/index.php?option=com_content&task=view&id=112&Itemid=51)

De entre os problemas resolvidos no Papiro Rhind encontram-se alguns problemas de progressões aritméticas, que seriam úteis no dia a dia dos egípcios.

> **(**Problema 40 do Papiro Rhind): "*Divida 100 pães entre 5 pessoas de modo que as partes recebidas estejam em progressão aritmética e que* $\frac{1}{7}$ *da soma das três maiores partes seja igual á soma das duas menores partes"* Sampaio (p. 8).

> (Problema 64, adaptado): *"10 medidas de milho são distribuídas a 10 pessoas, formando uma sequência de medidas de tal modo que cada pessoa, a partir da segunda, recebe* $\frac{1}{8}$ *a menos que a pessoa precedente. Determine essas medidas"* Sampaio (p. 8).

Podemos encontrar também, no Papiro Rhind, referências a outras sequências que não constituem Progressões Aritméticas:

> (Problema 79 do Papiro Rhind, adaptado): "*Numa aldeia egípcia há sete casas. Em cada casa, há sete gatos. Para cada gato, há sete ratos. Para cada rato, há sete espigas de trigo. Em cada espiga, há sete grãos. Quantos grãos há ao todo, nas sete casas?"* Sampaio (p. 9)

O “Papiro Rhind” constitui um verdadeiro manual prático de matemática egípcia, e é considerado a principal fonte de conhecimentos acerca do modo como a civilização egípcia contava, calculava e media. Através da análise deste papiro encontraram-se evidências de que, já nessa altura, sabiam fazer a soma dos termos de uma progressão aritmética. Surge neste papiro uma sequência muito interessante, formada pelas frações: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$, que se encontram distribuídas no “Olho de Hórus”, representado na figura 2.

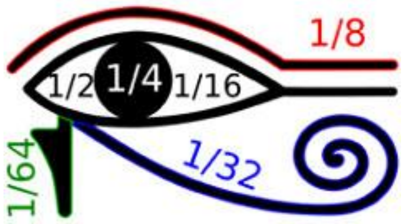


Figura 2 – Olho de Hórus
(http://www.planetaesoterico.com.br/horus/o-olho-de-horus.html)

Segundo a lenda, o “Olho de Hórus” simboliza o olho do falcão, que foi perdido durante sua luta contra o deus Seth, que o fracionou em 64 partes. Cada um dos elementos do olho, ou seja, a sobrancelha, a pupila, etc., servia para formar uma fração do sistema numérico dos egípcios. Todos os pedaços reunidos formavam o “Uadjat” (cujo significado é “o olho inteiro”), o número inteiro, a unidade recuperada e, por efeitos mágicos, o amuleto proporcionava a integridade física e a valentia do corpo. Também era usado como medida médica, usando as proporções matemáticas do olho para determinar as proporções dos ingredientes na preparação de medicamentos.

Deve, no entanto referir-se que:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}=\frac{63}{64}$$

Deste modo, o último pedaço que falta $\left(\frac{1}{64}\right)$ para perfazer o “número inteiro”, era considerado mágico, não podendo como tal ser visto.

A partir 200 a.C. este símbolo também passou a ser utilizado pelos egípcios para representar frações da hekat. A hekat era a unidade de volume egípcia para a medição de grãos e era dividida em 64 partes. A hekat é subdividida em : $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$.

Segundo Eves (1995), aproximadamente em 2000 a.C. a aritmética babilónica já tinha evoluído para uma álgebra retórica bem desenvolvida. Encontraram-se diversas tábulas, que nos dão informações sobre os conhecimentos matemáticos dessa altura.

> "(…) *encontrou-se uma tábula que fornece, além de uma tábua de quadrados e de cubos dos inteiros de 1 a 30, também a sequência de valores de $n^3 + n^2$."* (Eves, 1995, p. 62)

Eves (1995) refere também que, a mais notável das tábulas matemáticas babilónias já analisadas é conhecida por "Plimpton 322" (1900 a 1600 a.C.), representada na Figura 3. O nome indica que se trata de da tábula da coleção G.A. Plimpton da Universidade de Colúmbia, catalogada sob o número 322.

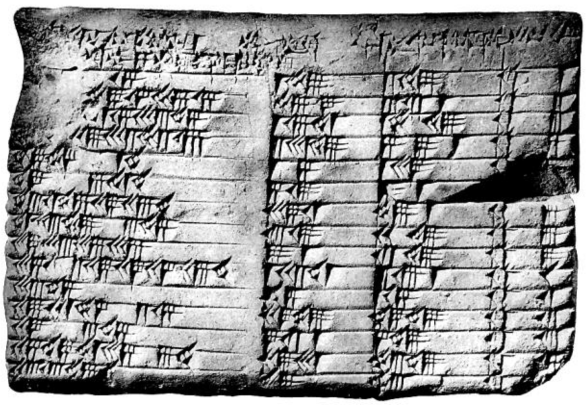


Figura 3 – Plimpton 322
(http://www.mat.uc.pt/~jaimecs/hm10)

Boyer refere que as tábulas babilónicas encontradas, fornecem-nos também informações, sobre os conhecimentos desta civilização relativamente às progressões:

> "(…) *Numa tabela a progressão geométrica* $1 + 2 + 2^2 + ... + 2^9$ *é somada e em outra a soma da série de quadrados* $1^2 + 2^2 + 3^2 + … + 10^2$ *é achada."*
> (1993, p. 27)

Boyer (1993) refere ainda que é possível que os babilónios conhecessem as fórmulas gerais para a soma de uma progressão geométrica e para a soma dos n primeiros quadrados perfeitos. Pensa-se também, que teriam percebido que a soma dos n primeiros cubos perfeitos é igual ao quadrado da soma dos n primeiros inteiros.

Os Matemáticos gregos dedicaram-se também, ao estudo das propriedades de Sequências numéricas associadas a Sequências geométricas como os números poligonais triangulares, quadrados, pentagonais, etc. Presume-se que se deve a Pitágoras (585 a.C. – 500 a.C.) e aos sábios gregos que viveram depois dele, a criação da Aritmética, pois os pitagóricos conheciam as progressões aritméticas, as geométricas, as harmónicas, as proporções e ainda os quadrados de uma soma ou de uma diferença.

Estrada e outros (2004) referem que para os pitagóricos a “chave para a compreensão do mundo era o número”. A ciência pitagórica era constituída por quatro disciplinas principais: aritmética, geometria, astronomia e música. Porém estas quatro disciplinas tinham importâncias distintas: a aritmética era considerada a “ciência por excelência”; a música, a astronomia e a geometria eram consideradas como ciências redutíveis à aritmética.

Ainda de acordo com estes autores, teriam sido os pitagóricos os pioneiros da realização de experiências acústicas. De facto, nenhum músico teve tanta importância no período clássico como Pitágoras. Este associou o número à música, originando essa associação pitagórica os termos "média harmónica" e "progressão harmónica". Esta associação deve-se ao facto de Pitágoras e seus discípulos terem realizado um estudo das cordas vibrantes. Pitágoras teria esticado uma corda musical que produzia um determinado som que tomou como tom fundamental. Fez marcas na corda dividindo-a em doze secções iguais, como se representa na Figura 4.

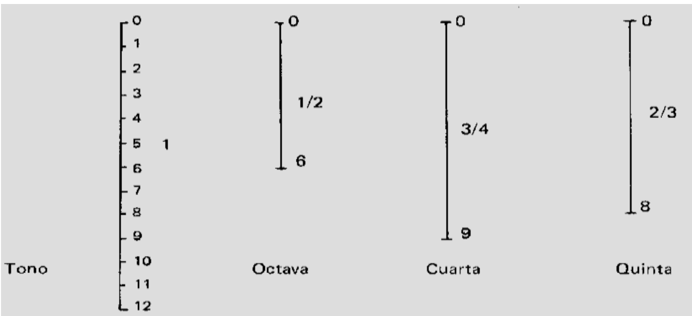


Figura 4 – Cordas musicais
(http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/musica/pitagoras.htm)

Segundo Pombo (2004), quando Pitágoras tocou a corda na 6ª marca e observou que se produzia a oitava. Tocou depois na 9ª marca e resultava a quarta. Ao tocar a 8ª marca, obtinha-se a quinta. As frações $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{3}$ correspondiam à oitava, à quarta e à quinta. Os números 12, 9, 8 e 6 constituíam outra quaterna muito interessante pelas suas propriedades aritméticas.

Os seguidores de Pitágoras aplicaram estas razões ao comprimento de fios de corda num instrumento chamado cânon, ou monocorda, tendo sido capazes de determinar matematicamente a entonação de todo um sistema musical, de acordo com Pombo (2004).

Embora não tenham sido os pitagóricos os primeiros a observar que a vibração de uma corda tensionada é capaz de produzir variados sons, a eles se deve a primeira teoria sobre o relacionamento entre a música e a Matemática.

A importância desses factos, para Pitágoras, residia em que novos tons eram relacionados com o original por meio de frações, isto é, estabeleciam-se relações entre os números naturais e os tons musicais. Confirmava pois, ainda mais a sua teoria de que tudo no Universo estaria relacionado com os números.

Segundo Jorge e outros (2011), um outro aspeto que despertou particular interesse nos pitagóricos foi o estudo de padrões geométricos, constituídos por aglomerados de pontos, e a sua relação com os números – os designados números figurados.

Estrada e outros referem que este tipo de representação realça a ligação entre as propriedades dos números e as formas geométricas.

> *"A disposição dos pontos representativos das unidades em esquemas de forma triangular equilátera, quadrada, pentagonal, etc. terá levado à consideração das sucessões dos números triangulares, dos números quadrados, dos números pentagonais, etc."* (2004, p. 231)

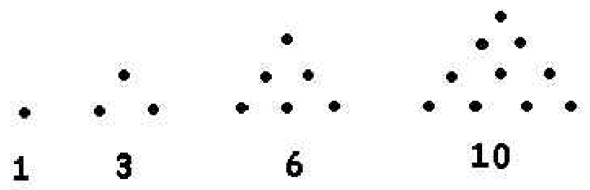


Figura 5 – Números triangulares

(http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm31/sequencias.htm)

A sequência anterior (1 , 3 , 6 , 10 , 15 , 21 , 28...) é uma sequência de números triangulares, que são números naturais provenientes da contagem de pontos em arranjos triangulares. Cada um dos termos desta sequência é formado adicionando sucessivamente os termos da série: 1 +2 + 3 + 4 + 5 + 6 + …

Embora nenhum triângulo possa ser formado com menos de três pontos, é possível obter triângulos com maior número de pontos. Números como três, seis, dez e quinze ou, em geral, números dados pela fórmula:

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

eram chamados números triangulares.

Havia, é claro uma infinidade de outras categorias de números privilegiados.

Os gregos representavam os quadrados, tal como todos os números poligonais, como um padrão de pontos, originando a sequência: 1 , 4 , 9 , 16 , 25 , 36 , …

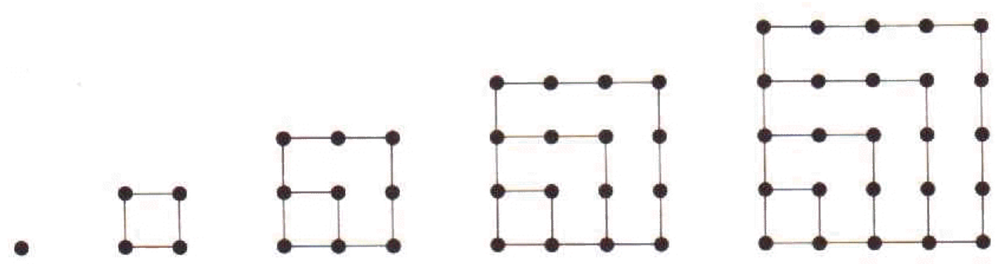


Figura 6 – Números quadrados
(http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm36/propriedades.htm)

Verifica-se que a sequência de números quadrados pode ser obtida pela soma sucessiva dos termos da sequência dos números ímpares: 1 , 3 , 5 , 7 , 9 , 11 , …
Podemos comprovar esse facto no seguinte padrão:

$$1 = 1^2$$

$$1 + 3 = 2^2$$

$$1 + 3 + 5 = 3^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 5^2$$

...

Um conceito importante na matemática grega é o de gnomon. Os"gnômon" eram números catalogados pelos pitagóricos, com configurações geométricas como se apresenta na figura abaixo.

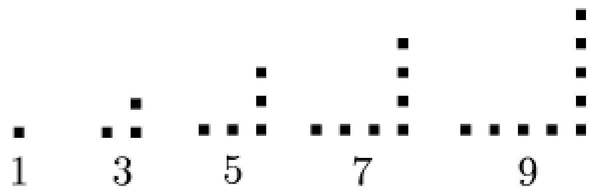


Figura 7 – Gnomon

(http://www.dm.ufscar.br/~sampaio/sequencias.PDF)

Cada número ímpar representado na sequência: $1, 3, 5, 7, \ldots, (2n-1)$, era considerado como uma configuração de pontos semelhante a um *"gnômon"* (o relógio de sombra babilónio) colocado em torno de dois lados da precedente configuração de pontos em forma de quadrado.

Segundo Estrada e outros (2004), a busca de esquemas retangulares para representar os números, terá levado os pitagóricos ao conceito de divisibilidade.

A sequência de números, $2, 6, 12, 20 \ldots$ representa o que os Gregos chamaram "números oblongos", ou números retangulares. Cada um destes números resulta do produto de dois números inteiros consecutivos, isto é, $n(n+1)$ que pode ser expresso como $n^2 + n$. Poderá ainda referir-se que a sucessão dos números retangulares coincide com a sucessão dos dobros dos números triangulares.

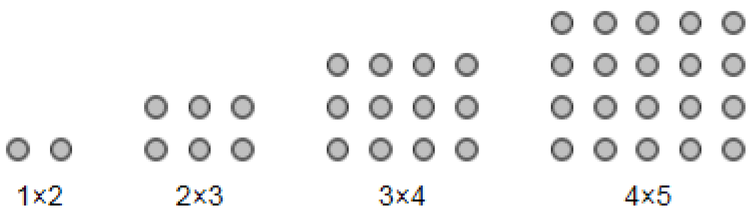


Figura 8 - Números retangulares

(http://pt.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_oblongo)

Estrada e outros (2004) referem que estas representações geométricas dos números poderão sugerir várias relações, fórmulas e proposições aritméticas, estudadas pelos pitagóricos.

Verifica-se que a sequência de números oblongos resulta da soma sucessiva dos termos da sequência dos números pares:

$$n(n+1) = 2+4+6+\cdots+2n$$

Outra sequência de números, os números pentagonais formam a sequência: 1 , 5 , 12 , 22 , 35 , 51 , 70 ... . Esta sequência pode ser representada através de configurações pentagonais de pontos.

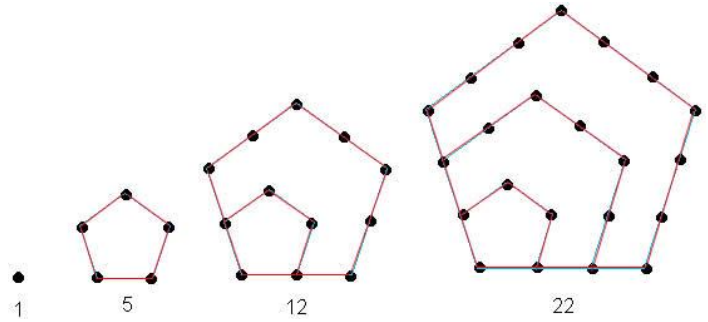


Figura 9 – Números pentagonais

(http://ensinodematemtica.blogspot.com/2011/04/numeros-figurados.html)

Cada um dos termos da sequência anterior, é formado adicionando sucessivamente os termos da série: $1+4+7+\cdots+(3n-2)$.

Os números pentagonais eram dados pela fórmula:

$$\frac{n(3n-1)}{2} = 1+4+7+\cdots+(3n-2)$$

Os números hexagonais formam a sequência: $1 , 6 , 15 , \ldots , (4n-3)$. Cada termo desta sequência é obtido através da soma dos termos da seguinte série:

$$2n^2 - n = 1+5+9+\cdots+(4n-3)$$

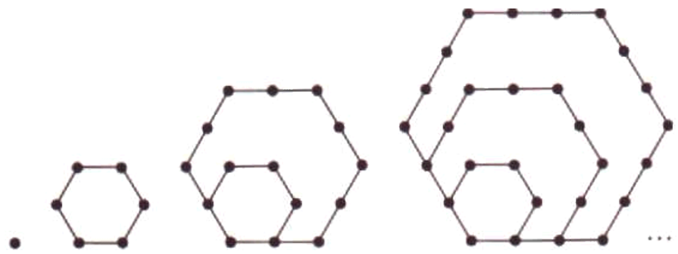


Figura 10 – Números hexagonais

(http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm98/icm36/curiosidades.htm)

De acordo com Estrada e outros (2004), no decorrer do século V a.C. as filosofias pitagóricas foram criticadas por parte de várias novas escolas, defensoras de filosofias que se opunham ao pitagorismo. Uma das mais importantes foi fundada por Paraménides de Elea.

Zenão de Elea (490-430 a.C.), foi também, um matemático da antiguidade que desenvolveu estudos com Sequências. Discípulo de Parménides, destacou-se pelos métodos que usou, em defesa das ideias do seu mestre: em vez de provar as teses que este professava, procurou deduzir consequências contraditórias das hipóteses dos adversários - os pitagóricos -, recorrendo a uma técnica lógica que viria a ser conhecida por «redução ao absurdo».

Segundo Eves (1995), os filósofos daquela época teriam ficado intrigados e confusos com as suposições feitas, por Zenão que desafiou os conceitos de movimento e de tempo através de quatro paradoxos que criaram uma certa agitação, que perdura até aos nossos dias. Apresentamos de seguida, alguns desses paradoxos:

> *"Dicotomia: Não há movimento porque, antes do móvel percorrer um certo espaço, tem de percorrer metade desse espaço; mas, antes de percorrer metade desse espaço, tem de percorrer metade de metade desse espaço; e assim indefinidamente. Portanto, o movimento não pode chegar sequer a começar.*
>
> *Aquiles: Se Aquiles, o mais veloz corredor da Ática, der algum adianto a uma lenta tartaruga, então nunca a conseguirá vencer numa corrida. Com efeito, quando Aquiles atingir o local de onde a tartaruga partiu, já esta terá avançado e se encontrará num outro local adiante dele; e, quando Aquiles atingir esse outro local, já a tartaruga terá realizado novo avanço; e assim indefinidamente. Portanto, Aquiles nunca conseguirá atingir a tartaruga.*
>
> *A Seta: Uma seta voando para o alvo está, na realidade, parada. Com efeito, em cada instante, a seta ocupa uma só posição, ou seja, em cada instante, a seta está parada; portanto, a seta está sempre parada.*
>
> *O Estádio: Considerem-se três filas paralelas de atletas num estádio, uma imóvel, outra correndo num dos sentidos, e a última correndo no sentido oposto. Se, numa unidade de tempo, cada um dos atletas em corrida passar por um dos atletas em repouso, então um corredor duma fila passa por um corredor de outra fila em metade desse tempo. Portanto, a unidade de tempo é igual ao seu dobro."*
>
> (Estrada, Sá, Queiró, Silva, & Costa, 2004, p. 240)

Estrada e outros (2004) referem que os argumentos da "Dicotomia" e do "Aquiles" podem ser interpretados, como uma abordagem da convergência de uma série real.

Vários dos matemáticos gregos da antiguidade usaram o método de exaustão para medir áreas de figuras e regiões.

Usando sua técnica refinada de raciocínio designada por "método", Arquimedes (287-212 a.C.) alcançou vários resultados importantes envolvendo áreas e volumes de várias figuras e sólidos. Embora Arquimedes tenha sido condicionado pela falta de precisão e notação eficiente, foi capaz de descobrir muitos dos elementos da análise moderna de Sequências e Séries.

Euclides (365 - 300 a.C) viveu em Alexandria, no Egipto, e foi o mais talentoso e influente matemático de sua época. Euclides registou, coletou e ampliou a Matemática do mundo antigo. Este matemático ficou muito conhecido pelo seu trabalho no campo da geometria, apresentado na obra clássica intitulada "*Os Elementos*".

Segundo Estrada e outros (2004), esta obra é uma compilação de resultados de diversos autores, não devendo ser atribuída a Euclides a autoria de todos os teoremas ou teorias que constituem esta obra.

Este livro é composto por 465 proposições distribuídas em treze livros.

De acordo com Eves o livro VIII faz referência:

> *"(...) proporções contínuas e progressões geométricas relacionadas. Se temos uma proporção contínua:* $a : b = b : c = c : d$*, então a, b, c, d formam uma Progressão Geométrica"* (1995, p. 173).

De acordo com Boyer a proposição 35 do livro IX, o último dos três sobre teoria dos números, contém uma fórmula para a soma dos primeiros n termos de uma "progressão geométrica", expressa em termos elegantes mas poucos usuais:

> *"Se tantos números quantos quisermos estão em proporção continuada, e se subtrairmos do segundo e último número iguais ao primeiro, então assim como o excesso do segundo está para o primeiro, o excesso do último estará para todos os que o precedem"* (1993, p. 84).

O enunciado anterior, faz referência, à fórmula:

$$\frac{a_{n+1}-a_1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} = \frac{a_2-a_1}{a_1} \quad \text{(Boyer, 1993, p. 84)}$$

Que por sua vez equivale à fórmula:

$$S_n = \frac{a-ar^n}{1-r} \quad \text{(Boyer, 1993, p. 84)}$$

Diofanto de Alexandria (século III d. C.) é considerado como o maior algebrista grego. À semelhança de outros matemáticos, pouco se sabe relativamente à sua vida, desconhecendo-se a data precisa do seu nascimento. De acordo com Varandas, o que se conhece acerca da sua vida foi tirado da dedicatória inscrita no seu túmulo em forma de exercício matemático:

> *"(...) Caminhante! Aqui foram sepultados os restos de Diofanto.*
> *E os números podem mostrar. Oh milagre!*
> *Que longa foi sua vida, Cuja Sexta parte constituiu a sua infância; Tinha decorrido uma duodécima parte da sua vida quando de pêlos se cobriu a sua barba; E a sétima parte da sua vida ocorreu um casamento, ao que aos cinco anos se deu o nascimento do seu precioso primogénito, que entregou seu corpo, sua maravilhosa existência durou somente a metade da de seu pai na terra; E com profunda pena desceu à sua sepultura, tendo vivido mais 4 anos após a descida de seu filho, mitigando a sua dor com investigações sobre a ciência dos números"* (2002)

Segundo Eves (1995), Diofanto, mais que um cultor da aritmética, e sobretudo da geometria, como o foram os matemáticos gregos anteriores, deve considerar-se um precursor da álgebra. Ao longo da sua vida escreveu três trabalhos, sendo o mais importante a Aritmética, composta por treze livros.

Eves refere que "Aritmética" constitui uma abordagem analítica da teoria algébrica dos números que eleva o autor à condição de génio no seu campo. Dos problemas que se encontram na obra Aritmética, o autor, que admitia apenas respostas entre os números racionais positivos, apresenta dois problemas envolvendo progressões.

O problema 7 do livro III, propõe:

> *"Encontre três números em progressão aritmética, sabendo-se que a soma de dois quaisquer deles é um quadrado."*
> *(Resposta, segundo Diofanto é: 120 1/2; 840 1/2; 1560 1/2.*[(1)] *)*
> (Eves, 1995, p. 208)

O problema 21 do livro IV propõe:

> *"Encontre três números em Progressão Geométrica de maneira que a diferença entre dois quaisquer deles é um número quadrado."*
> *(Resposta de Diofanto: 81/7, 144/7 e 256/7)* (Eves, 1995, p. 208)

---

(1) A notação usada por Diofanto na resposta ao problema anterior, é equivalente à notação usada atualmente para designar um numeral misto fracionário. Por exemplo: 120 1/2 = $120\ \frac{1}{2}$.

Para além da civilização grega, outras civilizações se distinguiram pelos seus estudos e descobertas que muito contribuíram para o desenvolvimento da Matemática.

Boyer (1993), refere que a civilização chinesa, bem como a civilização indiana, são muito mais antigas que as civilizações grega e romana, mas não mais antigas que as civilizações egípcia e mesopotâmicas.

De acordo com Boyer (1993), a obra de Yang Hui inclui resultados quanto à soma de séries e ao chamado triângulo de Pascal, que já era conhecido pelos matemáticos chineses antes do século XIV. Este já se encontra descrito no livro "*Espelho Precioso"*, de Chu Shih-chieh, que não se declarava autor do triângulo, mas a ele se referia como "diagrama do velho método para achar potências oitavas e menores".

Algumas das muitas séries encontradas no livro "*Espelho Precioso"*, são as seguintes:

- $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3!}$

- $1 + 8 + 30 + 80 + \cdots + \frac{n^2(n+1)(n+2)}{3!} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)(4n+1)}{5!}$

Figura 11 - Triângulo de Yang Hui , in (Boyer, 1993, p. 151)

Em 1202, Leonardo de Pisa (Fibonacci = filius Bonacci) matemático e comerciante da idade média, escreveu um livro denominado "Liber Abacci", que chegou a nós, graças à sua segunda edição datada de 1228. Este livro contém uma grande quantidade de assuntos relacionados com a Aritmética e Álgebra da época, tendo-se revelado importante no desenvolvimento matemático na Europa nos séculos seguintes pois foi por este livro que os europeus vieram a conhecer os algarismos hindus, também denominados arábicos.

Segundo Boyer (1993), grande parte do livro "Liber Abacci" é desinteressante, no entanto, alguns problemas são estimulantes e foram usados por autores posteriores. Entre esses, destaca-se um problema que pode ter sido sugerido por um problema semelhante no "Papiro Rhind". Fibonacci propõe:

> *"Sete velhas foram a Roma; cada uma tinha sete mulas; cada mula carregava sete sacos; cada saco continha sete pães; e com cada pão havia sete facas; cada faca estava dentro de sete bainhas."* (Boyer, 1993, p. 186)

Um outro problema é o dos pares de coelhos, que refere:

> *"Quantos pares de coelhos serão produzidos num ano, começando com um só par, se em cada mês cada par gera um novo par que se torna produtivo a partir do segundo mês?"* (Boyer, 1993, p. 186)

Este problema célebre dá origem à conhecida sequência de Fibonacci:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots, u_n, \ldots \text{ , onde } \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$$

Boyer (1993), refere ainda que na sequência anterior, verifica-se que cada termo, após os dois primeiros, se obtém pela soma dos dois termos imediatamente precedentes. Para além disso pode provar-se que dois termos sucessivos quaisquer são primos entre si.

Os matemáticos hindus também foram hábeis aritméticos e deram contribuições significativas à álgebra, somando Progressões Aritméticas e Geométricas rapidamente.

Um dos matemáticos hindus que se destacou no sexto século foi Aryabhata, cuja obra mais conhecida, teria sido escrita em 499 e intitulada "Aryabhatiya" tratando-se de um pequeno livro escrito em verso sobre astronomia e matemática.

Segundo Boyer uma parte muito conhecida da sua obra "Aryabhatiya", é a que trata de progressões aritméticas e contém regras arbitrárias para achar a soma dos n primeiros termos numa progressão (regra há muito conhecida) e determinar o número de termos de uma progressão, dados o primeiro termo, a razão e a soma dos n primeiros termos (explanação um pouco complicada):

> *"(...) Multiplique-se a soma da progressão por oito vezes a razão, some-se o quadrado da diferença entre duas vezes o primeiro termo e a razão, extraia-se a raiz quadrada disso, subtraia-se duas vezes o primeiro termo, divida-se pela razão, some-se um, divida-se por 2. O resultado será o número de termos"* (1993, p. 154).

Um outro Matemático hindu muito conhecido, Bhaskara (1114 a cerca de 1185) foi o mais importante matemático indiano do século XII. Segundo Boyer (1993), ele foi também o último matemático medieval importante da Índia, e sua obra representa a culminação de contribuições hindus anteriores. Na sua obra "Lilavati" estão registados numerosos problemas sobre tópicos distintos, nomeadamente progressões aritméticas e geométricas.

Eves (1995) refere que o século XIV foi relativamente "estéril, matematicamente falando", pois foi o século da Peste Negra, que vitimou um terço da população da Europa. O maior matemático deste período, Nicole Oresme (1323 – 1382), escreveu cinco trabalhos matemáticos, onde estudou e desenvolveu diversos temas, entre os quais: o primeiro uso conhecido de expoentes fracionários; localização de pontos por coordenadas, etc. Num dos seus manuscritos, Oresme obteve a soma da série:

$$\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\frac{4}{16}+\frac{5}{32}+\cdots,$$

Tornando este matemático num precursor da Análise Infinitesimal.

O matemático Stifel (1486- 1567) foi, segundo Eves (1995), um dos personagens mais singulares da história da Matemática. Considerado o maior algebrista alemão do século XVI, a sua obra Matemática mais conhecida é "Arithmética", a qual se encontra dividida em três partes, dedicadas, respetivamente, aos números racionais, números irracionais e álgebra.

Segundo Eves (1995), na primeira parte, ou seja, na parte dos números racionais, Stifel salienta as vantagens de se associar uma "progressão aritmética" a uma "geométrica", antecipando, deste modo em quase um século a invenção dos logaritmos.

No século XVII, surge o matemático John Napier (1550 – 1617).

Eves (1995), refere que em 1614, Napier publicou o seu texto - "*Mirifici logarithmorum canonis descriptio",* (Descrição da Maravilhosa Lei dos Logaritmos) que continha uma descrição dos logaritmos, um conjunto de tabelas, e regras para o seu uso. Com tal feito, Napier revelou possuir completo conhecimento da correspondência entre progressões, pois o que ele chamava "tábua de logaritmos" era uma tabela de duas colunas (ou de duas linhas), colocando em correspondência os termos de uma progressão geométrica (na verdade, potências de certo número) com os de uma progressão aritmética.

Para eliminar as longas multiplicações e divisões e fugir das longas prostaférese (palavra grega que significa "adição e subtração"), Napier baseia-se no facto de que, associando-se aos termos de uma progressão geométrica:

> *" $b, b^2, b^3, b^4, \ldots, b^m, \ldots, b^n, \ldots$*
>
> *os da progressão aritmética:*
>
> *$1, 2, 3, 4, \ldots, m, \ldots, n, \ldots,$*
>
> *então o produto $b^m\, b^n = b^{m+n}$ de dois termos de primeira progressão está associado à soma $m+n$ dos termos correspondentes da segunda progressão"* (Eves, 1995, p. 344).

Abraham De Moivre (1667-1754), grande matemático do seu tempo, conhecedor das propriedades das sequências e séries, produziu uma quantidade de pesquisa considerável.

Segundo Eves há uma lenda interessante envolvendo a morte De Moivre. Segundo ela:

> *"(...) De Moivre teria revelado, certa ocasião, que daí para frente teria que dormir, em cada dia, quinze minutos a mais do que no dia precedente. E quando essa "progressão aritmética" atingiu 24 horas ele de facto teria morrido"* (1995, p. 468).

Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716), nasceu em Leipzig, Alemanha e ainda bem jovem, pôde entrar em contacto com uma ampla gama de autores clássicos, através da leitura de várias obras que dispunha na biblioteca montada pelo pai. O seu interesse pela matemática surgiu pelas inúmeras citações sobre a importância dessa matéria nos trabalhos filosóficos. Mais tarde, frequentou a Universidade de Altdorf, próxima a Nuremberga, onde se formou doutor em Direito. Em Paris, trabalhou nessa área para financiar seus estudos matemáticos.

Boyer (1993) refere que em 1676 Leibniz, numa das suas visitas a Londres, terá apresentado uma máquina de calcular, por si desenvolvida, e que conseguia não só somar e subtrair, mas também multiplicar, dividir e extrair raízes quadradas. Essa foi a primeira calculadora para uso geral e os seus princípios ainda são usados nas máquinas de calcular mecânicas.

À semelhança de Newton, para Leibniz as séries infinitas desempenharam um importante papel nos seus primeiros trabalhos. Boyer refere que Huygens (1629–1695) ter-lhe-á proposto o problema de achar "*a soma dos recíprocos dos números triangulares"* (1993, p. 294)

Segundo Carvalho (2007, p. 28), Leibniz tinha conhecimento de sequências de diferenças e, para o problema proposto, procedeu do seguinte modo:
conhecendo a sequência:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n, a_{n+1}$$

considerou a sequência de diferenças:

$$b_1 = a_1 - a_2;\ b_2 = a_2 - a_3;\ b_3 = a_3 - a_4;\ ... \ .$$

Leibniz observou que:

$$b_1+b_2+b_3+b_4+... = a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + a_3 - a_4 + ... + (a_{n-1}) - a_n + a_n - (a_{n+1}) + ... = a_1 - a_{n+1}\,.$$

casualmente, verificou que a sequência dos recíprocos dos números triangulares é a sequência das diferenças, onde $\frac{2}{n(n+1)}$, pertence à sequência das diferenças originada pela sequência:

$$\frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{2}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{5}, \dots, \frac{2}{n}, \frac{2}{n+1}, \dots$$

aplicando o raciocínio exposto anteriormente, verificou que esta sequência dá origem à sequência das diferenças:

$$\frac{2}{1} - \frac{2}{2}, \frac{2}{2} - \frac{2}{3}, \frac{2}{3} - \frac{2}{4}, \dots, \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$$

onde o termo $\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} = \frac{2}{n(n+1)}$ é a sequência das diferenças, e somar os termos dessa sequência é obter como resposta, $\frac{2}{1} - \frac{2}{n+1}$.

Logo,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}\right] = \lim_{n\to\infty} \left(2 - \frac{2}{n+1}\right) = 2 - \frac{2}{\infty + 1} = 2$$

ou seja, concluiu que a soma da série infinita é 2.

A soma de séries surgiu novamente no Triângulo Harmónico, cujas semelhanças com o Triângulo Aritmético (ou de Pascal) fascinaram Leibniz.

Triângulo Aritmético

1	1	1	1	1	1	1 ···
1	2	3	4	5	6 ···	
1	3	6	10	15 ···		
1	4	10	20 ···			
1	5	15 ···				
1	6 ···					

Triângulo Harmónico

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}\cdots$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}\cdots$	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{60}\cdots$		
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{60}\cdots$			
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{30}\cdots$				
$\frac{1}{6}\cdots$					

Figura 12 – Comparação do triângulo aritmético com o triângulo harmónico , in (Boyer, 1993, p. 294)

> *"No triângulo aritmético cada elemento (que não esteja na primeira coluna), é a diferença dos dois termos logo abaixo dele e à esquerda; no triângulo termos logo acima dele, e à direita. Além disso, no triângulo aritmético cada termo (que não esteja na primeira linha ou coluna) é a soma de todos os termos na linha acima dele e à esquerda, ao passo que no triângulo harmónico, cada termo é a soma de todos os termos na linha abaixo dele e à direita"*(Boyer, 1993, p. 294) .

Também Jacques Bernoulli (1654 – 1705), ficou fascinado pela série dos recíprocos dos números figurados e, embora soubesse que a série dos recíprocos dos quadrados perfeitos era convergente, não conseguiu achar a sua soma.

Johann Friederich Carl Gauss (1777 – 1855) nasceu em Brunswick, Alemanha, no seio de uma família humilde, mas com o incentivo de sua mãe, obteve brilhantismo na sua carreira. Eves (1995) refere que Gauss foi uma das mais notáveis crianças prodígio.

Diz-se que aos dez anos de idade, durante uma aula de Matemática o Professor teria pedido que todos os alunos obtivessem a soma dos números de 1 a 100. Em muito pouco tempo, Gauss apresentou o resultado correto, 5050, mas sem apresentar nenhum cálculo.

Gauss teria calculado mentalmente a soma da progressão aritmética:

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 97 + 98 + 99 + 100$$

Teria observado, que a soma de todos os números de 1 a 100 era igual a cinquenta vezes a soma do primeiro com o último (1 + 100 = 101), do segundo com o penúltimo (2 + 99 = 101), e assim por diante. Ora, 50×101 é igual a 5050. Assim, multiplicou a constante pelo número de termos e dividiu pela metade, chegando à fórmula da soma dos n primeiros termos da progressão aritmética:

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \times n}{2}.$$

Segundo Lima e outros (p. 13) na doutrina de Darwin também podemos encontrar as Progressões Aritméticas e Geométricas. Num dos quatro itens fundamentais da sua doutrina, podemos encontrar uma referência às Progressões Geométricas e Aritméticas, uma influência das ideias de Thomas Malthus.

Os estudos de Malthus, sobre a evolução da população, levaram-no a concluir que as populações crescem em Progressão Geométrica, ao mesmo tempo em que as reservas alimentares para elas crescem apenas em Progressão Aritmética. Em consequência destas conclusões, Darwin afirmou que:

> *"(...)devido a tal desproporção, os indivíduos empenhar*-se-*iam numa luta pela vida, ao final da qual seriam seleccionados os mais fortes ou os mais aptos – a selecção natural – de alguns indivíduos em detrimento de muitos outros"* (Lima, Silva, Côa, Carrara, & Furlan, p. 24).

1.2. Conceito de Sequência na Atualidade

Definição Intuitiva de Sequência

O termo sequência está relacionado com conjuntos de objetos dispostos segundo uma dada ordem.

O estudo das sequências surge da necessidade de analisar as situações mais simples do nosso dia-a-dia, descrever regularidades, interpretar interdependências e generalizar. Este conceito foi aperfeiçoado ao longo de muitos séculos de história e descobertas.

No decorrer do Programa do 3º ciclo do Ensino Básico os alunos trabalham com sequências numéricas finitas ou infinitas (estas últimas chamadas sucessões), com o objetivo de aprofundar o estudo, já iniciado em ciclos anteriores.

Ponte e outros (2009a) referem que o tópico "Sequências e Regularidades" percorre todo o ensino básico, tendo como principal objetivo contribuir para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos.

De seguida, faremos uma breve análise da definição de sequência apresentada nos manuais escolares do 7º ano.

> *"Uma Sequência numérica ou Sequência de números é uma lista ordenada e finita de números"* (Neves, Leite, Silva, & Silva, 2010, p. 113).

> *"Uma Sequência numérica é um conjunto de números escritos numa certa ordem"* (Marques & Ferreira, 2010, p. 62).

> *"Uma Sequência numérica ou Sequência de números é uma lista de números, eventualmente relacionados entre si, escritos por uma certa ordem"*(Faria, Guerreiro, & Almeida, 2010, p. 82).

> *"Sequências numéricas são conjuntos de números escritos numa determinada ordem"* (Passos & Correia, 2010, p. 113).

Em todas as definições apresentadas, a noção de sequência não é muito desenvolvida, tendo em conta os objetivos a atingir, com o estudo das sequências neste nível de escolaridade. No entanto, mais tarde os alunos aprofundarão este conceito (no 11º ano), aquando o estudo das "Sucessões".

Tendo em conta que um dos objetivos deste trabalho é aprofundar os conhecimentos teóricos sobre sequências e sucessões, explicitaremos, de seguida, os conceitos e propriedades, com que no decorrer desta dissertação trabalharemos.

Calado baseando-se em José Vicente Gonçalves, define sucessão do seguinte modo:

> *"Chama-se sucessão numérica toda a colecção de números dispostos numa certa ordem (uns após outros), tornando deste modo possível a sua enumeração"* (1952, p. 277).

Por sua vez, este autor distingue sucessões finitas e infinitas referindo que:

> *"Se ao enumerar os termos duma sucessão se verifica que há um último termo, a sucessão é finita. Se, pelo contrário, após um termo há sempre outro, a sucessão chama-se infinita"* (1952, p. 278).

O conceito de sucessão foi desde sempre, objeto de estudo de muitos matemáticos.

Silva e Paulo referem-se a sucessão do seguinte modo:

> *"Suponhamos que, por um processo qualquer, se faz corresponder, a cada número natural n, um determinado número real u_n. Fica então definida uma função real da variável natural n, e os valores de u_n, dispostos por ordem crescente dos valores de n, formam uma sucessão infinita.*
>
> $$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$
>
> *Os valores de u_n dizem-se termos da sucessão: u_1 o primeiro termo, u_2 o segundo termo, etc.; u_n diz-se termo de ordem n ou termo geral da sucessão"* (1968, p. 146).

Por sua vez, Apostol define sucessão como:

> *"Uma função $\boldsymbol{f}$, cujo domínio é o conjunto de todos os inteiros positivos, diz-se uma sucessão infinita. O valor da função $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{n})$ diz-se termo de ordem n da sucessão"* (1979, p. 439).

Lima define sequência do seguinte modo:

"Sequência de números reais é uma função x: IN → IR, definida no conjunto IN={1,2,3,...} dos números naturais e tomando valores no conjunto IR dos números reais. O valor de x(n), para todo o n∈IN, será representado por x_n e chamado o termo de ordem n, ou n-ésimo termo da sequência" (1992, p. 62).

Silva define sucessão como:

"Uma sucessão de números reais é uma aplicação de N em R.
Pode assim representar-se por:

$$u\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$n \longrightarrow u(n)$$

*Usualmente representa-se u(n) por u_n e a sucessão designa-se simplesmente por (u_n). Aos elementos do contradomínio chamam-se **termos** da sucessão; u_n é o termo de ordem n ou termo de índice n e diz-se **termo geral** ou termo gerador da sucessão"* (1994, p. 43).

Existem diferentes formas de definir uma sucessão. Podemos defini-la descrevendo os seus termos, ou seja, conhecendo os seus primeiros termos até uma determinada ordem, e o padrão pelo qual se geram, obtendo novos termos. Podemos, de outro modo, conhecendo o seu termo geral definir a sucessão e obter os seus termos.

Desenvolveremos, de seguida, o conceito de monotonia de uma Sucessão, analisando-o, segundo o ponto de vista de vários autores.

Segundo Silva e Paulo uma sucessão monótona é:

"Uma variável u_n diz-se crescente quando cada um dos seus valores é menor que o valor seguinte; isto é, quando se tem $u_n < u_{n+1}$, qualquer que seja o valor de n.
(...) A variável u_n diz-se decrescente, se cada um dos seus valores é maior que o seguinte.
(...) uma sucessão é monótona (crescente ou decrescente), quando o seu termo geral é uma variável monótona (crescente ou decrescente)."

(1968, p. 148)

De acordo com Silva:

"Uma Sucessão é crescente se e só se, para todo o índice n, u_n for inferior ou igual a u_{n+1}, ou seja , os termos de (un) crescem com os índices. Simbolicamente,

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq u_{n+1}$ " (1994, p. 43)

Este autor esclarece ainda que:

"Uma sucessão é decrescente se e só se, para todo o índice n, u_n será superior ou igual a u_{n+1}. Ou seja, os termos de (un) decrescem com os índices. Simbolicamente,

$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_{n+1}$ " (1994, p. 43)

Relativamente à monotonia das sucessões, temos ainda de distinguir sucessão crescente ou decrescente, de sucessão estritamente crescente ou estritamente decrescente, pelo que Silva (1994) refere que *"a sucessão é **estritamente crescente** ou **estritamente decrescente** quando a desigualdade lata for substituída pela desigualdade estrita1."*

Segundo Silva:

*"As sucessões crescentes ou decrescentes dizem-se **monótonas** e as estritamente crescentes ou estritamente decrescentes dizem-se **estritamente monótonas**"* (1994, p. 43).

Caraça define sucessão monótona, por si designada como *"monotónica"*, como:

"Uma sucessão monotónica crescente é caracterizada pela propriedade

$$a_{n+1} > a_n$$

que nos indica que cada termo é superior ao anterior" (1998, p. 225).

Este autor esclarece, ainda, que:

"Uma sucessão monotónica decrescente é caracterizada pela propriedade

$a_{n+1} < a_n$"

(1998, p. 226)

Passaremos de seguida a definir sucessão limitada, que segundo Silva e Paulo pode ser definida do seguinte modo:

> *"Uma variável u_n diz-se limitada, quando todos os seus valores têm módulo inferior a um certo número; isto é, quando existe algum número L tal que seja $|u_n|<L$, para todo o valor de n.*
> *Também se dirá neste caso que a sucessão de termo geral u_n é limitada."*
> (1968, p. 149)

Por sua vez, Caraça define sucessão limitada como:

> *"Uma sucessão diz-se limitada quando todos os seus termos estão encerrados entre dois números, ou, por outras palavras, estão dentro dum intervalo finito"* (1998, p. 222).

Silva explicita que:

> *"(...) a sucessão é **limitada** se e só se o seu contradomínio está contido nalgum intervalo de extremidades reais, isto é, se existem números reais A e B tais que:* $\{u_n\} \subset [A, B]$*"* (1994, p. 43)

Silva e outros referem que:

"*Uma Sucessão (u_n) diz-se:*

- *minorada se e só se existe algum número real **a** tal que, para todo o* $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$*, se tenha* $\boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{u_n}$ *;*
- *majorada se e só se existe algum número real **b** tal que, para todo o* $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}$*, se tenha* $\boldsymbol{u_n} \leq \boldsymbol{b}$ *"* (2011, p. 53).

Importante também será definir limite de uma sucessão, que Silva define do seguinte modo:

> *"Dizemos que uma sucessão (u_n) de números reais **converge** (ou tende) para um número real L (que se diz **limite** da sucessão) se e só se qualquer que seja o número real (ε), existir uma ordem p depois da qual a distância entre qualquer termo da sucessão e L é menor do que ε, isto é:*
>
> $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+, \exists\, p \in \mathbb{N}, \forall\, n \in \mathbb{N}: n > p \Rightarrow |u_n - L| < \varepsilon$" (1994, p. 44)

Por sua vez, Caraça refere que:

"Diz-se que a sucessão numerável a_n tem por limite o número L, quando n tende para infinito, e escreve-se

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$

quando a diferença $a_n - L$ é infinitésima com $\frac{1}{n}$." (1998, p. 216)

De acordo com Calado:

"Diz-se que a sucessão

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

tende ou converge para o limite finito A quando $A - u_n$ é um infinitamente pequeno." (1952, p. 288)

Silva e Paulo definem este conceito do seguinte modo:

"Diz-se que uma variável u_n, função de n, tende para um número a (ou tem por limite a), quando a variável $u_n - a$ é um infinitésimo." (1968, p. 159)

Ainda segundo os referidos autores, a definição anterior é equivalente à seguinte:

"Diz-se que a variável u_n, tende para a, quando, por menor que seja o número positivo δ, existe uma ordem a partir da qual todos os valores de u_n, são valores aproximados de a a menos de δ." (1968, p. 161)

Caraça define infinitésimo do seguinte modo:

"Dá-se o nome de infinitésimo a toda a variável representativa de um conjunto de pontos pertencentes à vizinhança da origem quando nessa variável considerarmos sucessivamente valores $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ tais que $| x_n | < \delta$ para todos os valores de $n > n_1$ e todo o $\delta > 0$." (1998, p. 207)

Por sua vez Silva e Paulo:

"Diz-se que uma variável u_n, função de n, é um infinitésimo, quando, para todo o número positivo δ, existe um correspondente número p, tal que $| u_n | < \delta$, desde que $n > p$" (1968, p. 154).

Calado define infinitamente pequeno ou infinitésimo do seguinte modo:

"Consideremos a sucessão

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

Diz-se que o termo geral u_n desta sucessão tende para zero ou é um infinitamente pequeno, quando dado um número δ positivo, por menor que seja, é possível determinar uma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão sejam, em valor absoluto, menores do que esse número dado." (1952, p. 286)

De acordo com Silva e Paulo (1968), *"o limite a pode ser sempre calculado com a aproximação que for necessária, visto que a própria variável u_n vai fornecendo valores aproximados de a, com erro tão pequeno quanto se quiser"*. Só em casos excecionais podemos determinar o valor exato do limite.

Será também importante, distinguir infinitamente grande positivo e infinitamente grande negativo. Assim, Silva e Paulo definem estes conceitos do seguinte modo:

"Diz-se que uma variável u_n, função de n, é um infinitamente grande positivo, quando, para todo o número positivo L, se pode achar um correspondente número p, de modo que seja $u_n > L$, desde que seja $n > p$." (1968, p. 150)

"Diz-se que uma variável u_n, função de n, é um infinitamente grande negativo, quando a variável $-u_n$ (simétrica de u_n) é um infinitamente grande positivo" (1968, p. 151).

Calado define infinitamente grande do seguinte modo:

"Consideremos a sucessão

$$u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$$

Diz-se que o termo geral u_n desta sucessão é um infinitamente grande, quando, dado um número A, positivo, por maior que seja, é possível determinar uma ordem a partir da qual todos os termos da sucessão sejam, em valor absoluto, maiores que esse número dado" (1952, p. 283).

Por sua vez, Caraça refere que:

"Uma sucessão numerável a_n tem por limite mais-infinito quando n tende para infinito e escreve-se

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$$

quando a todo o número positivo Δ se pode fazer corresponder um inteiro n_1 tal que

$$n > n_1 \ \rightarrow \ a_n > \Delta \text{ ''} \quad \text{(1998, p. 220).}$$

"Uma sucessão numerável a_n tem por limite menos-infinito quando n tende para infinito e escreve-se

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$$

quando a todo o número negativo –Δ se pode fazer corresponder um inteiro n_1 tal que

$$n > n_1 \ \rightarrow \ a_n < -\Delta \text{ “} \quad \text{(1998, p. 220).}$$

Seguidamente abordaremos a classificação de sucessões.

Assim, Silva e Paulo referem que:

"Uma variável u_n diz-se convergente, quando tem um limite finito; diz-se divergente no caso oposto, isto é, quando tende para ∞ ou não tende para limite nenhum" (1968, p. 168).

Os autores esclarecem, ainda, que *"uma variável divergente diz-se propriamente divergente, quando tende para infinito com sinal determinado (...); diz-se oscilante, no caso oposto."*

Uma sucessão será oscilante, de acordo com Silva e Paulo (1968), *"quando tende para ∞ sem sinal determinado (...) ou quando não tende para limite nenhum".*

Igualmente importante é a noção de subsucessão, que de seguida apresentamos:

> *"Dada uma sucessão (u_n) chamaremos **subsucessão** de (u_n) a qualquer sucessão (v_n) que resulte da primeira por supressão de termos. É evidente que se uma sucessão (u_n) converge para L então qualquer subsucessão (v_n) também converge para L"*(Silva J. C., 1994, p. 44).

Passaremos, de seguida a aprofundar o estudo das sucessões, descrevendo as noções de progressão aritmética e geométrica.

Segundo Neves e outros (2011), as sequências aritméticas estudadas no 3º ciclo dão lugar, no ensino secundário, às sucessões aritméticas, e que, de acordo com Calado (1952) se caraterizam pelo facto da *"diferença entre qualquer termo e o precedente ser constante"*.

Neves e outros definem progressão aritmética do seguinte modo:

> *"Uma Sucessão (a_n) é uma progressão aritmética se existe um número real r tal que $a_{n+1} - a_n = r, \forall n \in \mathbb{N}$. Ao número r chama-se razão da progressão aritmética"* (2011, p. 35).

Por sua vez Calado refere que "*numa progressão aritmética, qualquer termo é a soma do 1.º termo com um múltiplo da razão*", de onde se conclui que:

> *"Numa progressão aritmética, qualquer termo é igual à soma do 1.º termo com o produto da razão pelo número de termos que o precedem. (...) de um modo geral,*
>
> $$u_n = u_1 + (n-1)\,r$$
>
> *(...) a expressão anterior é por isso a expressão matemática do **termo geral** duma progressão aritmética."* (1952, p. 385)

De acordo com Silva e outros:

> *"Conhecido um qualquer termo de ordem k de uma progressão aritmética de razão r, o seu termo geral é:*
>
> $$u_n = u_k + (n-k)\,r\ , para\ todo\ o\ K, n \in \mathbb{N}\text{"}$$ (2011, p. 19)

Segundo Calado a igualdade anterior pode ser traduzida como:

"Numa progressão aritmética, qualquer termo é igual à soma de outro termo com o produto da razão pela diferença das ordens dos termos considerados" (1952, p. 387) .

Segundo Calado a monotonia de uma progressão aritmética é determinada pelo sinal da razão, uma vez que:

"Se a razão duma progressão aritmética é positiva a progressão é crescente e reciprocamente.
Se a razão é negativa a progressão é decrescente e reciprocamente."
(1952, p. 383)

A seguir são enunciados dois teoremas que estabelecem duas importantes propriedades dos termos equidistantes dos extremos de qualquer progressão aritmética finita. Assim, segundo Calado:

"A soma de dois termos equidistantes dos extremos de qualquer progressão aritmética limitada (2) *é igual à soma dos extremos"* (1952, p. 390).

"O termo médio duma progressão aritmética com um número ímpar de termos é igual à média aritmética dos extremos" (1952, p. 391).

Vamos agora fazer referência à soma dos termos de uma progressão aritmética.

De acordo com Calado:

"A soma dos termos duma progressão aritmética limitada é igual ao produto da semi-soma dos extremos pelo número de termos da progressão."
(1952, p. 391)

Por sua vez, Silva e outros referem que:

"A soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética é:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = \frac{n(u_1+u_n)}{2}$$ " (2011, p. 23).

(2) O autor utiliza o termo "limitada", para se referir a um número finito de termos.

Relativamente às progressões geométricas, estas caracterizam-se, segundo Calado (1952), pelo facto de ser *"constante o quociente entre um termo e o precedente."*

Segundo Neves e outros uma progressão geométrica é:

"Uma sucessão (a_n) de termos não nulos é uma progressão geométrica se existe um número real r, não nulo, tal que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = r, \forall \mathrm{n} \in \mathbb{N} \text{ ou } a_{n+1} = a_n \times r, \forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}$$

Ao número r chama-se razão da progressão" (2011, p. 45).

Calado (1952) refere que a determinação de qualquer termo de uma progressão geométrica "é igual *ao produto do 1.º termo por uma potência da razão"*, de onde se conclui que:

"Qualquer termo duma progressão geométrica é igual ao produto do 1.º termo pela potência da razão de expoente igual ao número de termos que precedem o termo considerado. (...) dum modo geral,

$$u_n = u_1 \times r^{n-1}$$

*(...) a expressão anterior é por isso a expressão matemática do **termo geral** duma progressão geométrica"* (1952, p. 400).

Silva e outros referem que:

"Conhecido um qualquer termo de ordem k de uma progressão geométrica de razão r, o seu termo geral é dado por:

$$u_n = u_k \, r^{n-k} \, , para\ todo\ o\ K, n \in \mathbb{N}"$$ (2011, p. 27).

Segundo Calado a igualdade anterior pode ser traduzida como:

"Numa progressão geométrica, qualquer termo é igual ao produto doutro termo pela potência da razão de expoente igual à diferença das ordens dos termos considerados" (1952, p. 401).

A monotonia de uma progressão geométrica é determinada pelo valor da razão.

Calado refere que:

"Se a razão duma progressão geométrica é maior do que 1, a progressão é crescente ou decrescente conforme o 1.º termo é positivo ou negativo, respectivamente.
Se a razão é menor do que 1 mas positiva, a progressão é crescente ou decrescente conforme o 1.º termo é negativo ou positivo.
Se a razão é negativa, a progressão é alternada, isto é, os termos decrescem e crescem alternadamente" (1952, p. 398).

Os termos equidistantes dos extremos de uma progressão geométrica finita, verificam segundo Calado, o seguinte:

"O produto de dois termos equidistantes dos extremos duma progressão geométrica é igual ao produto dos extremos" (1952, p. 407).

Relativamente à soma de um número finito de termos de uma progressão geométrica, Calado explicita que:

"A soma dos termos duma progressão geométrica limitada (3) obtém-se subtraindo do 1.º termo o produto da razão pelo último termo e dividindo o resultado pela diferença entre a unidade e a razão" (1952, p. 403).

Por sua vez, segundo Silva e outros:

"A soma dos n primeiros termos de uma progressão geométrica de razão

$r \neq 0$ e primeiro termo u_1 é:

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n = u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$$ " (2011, p. 30)

(3) O autor utiliza o termo "limitada", para se referir a um número finito de termos.

CAPÍTULO 2 - As Sequências no 3º Ciclo

2.1. Orientações Metodológicas para o Ensino da Matemática

> *"A Matemática é uma ciência. Como todas as ciências, não é um corpo de conhecimentos estático, está e sempre esteve em evolução"*
>
> (APM, 1995, p.23)

Todos os dias o Professor toma decisões sobre como deve estruturar o processo de aprendizagem dos seus alunos, e os temas que pretende estudar e desenvolver. Estas decisões irão determinar o que os alunos aprendem e também o modo como o fazem. São as ações do Professor que irão incentivar os alunos a pensar, questionar, resolver problemas e a discutir as conclusões a que chegaram.

Para que o ensino-aprendizagem da Matemática se torne dinâmico e interessante, despertando, no aluno, o interesse pelo estudo, o Professor deve adotar novas metodologias.

Não existe uma metodologia/estratégia única e perfeita que oriente os alunos para uma aprendizagem da Matemática bem sucedida. Pelo contrário, para que os alunos aprendam Matemática com motivação, o Professor terá que adaptar diversas metodologias, ao tipo de alunos a que se destinam, que segundo Associação de Professores de Matemática - APM (1995), devem contemplar os aspetos cognitivos, afetivos e sociais da aprendizagem e, dar ênfase a situações concretas, aos aspetos intuitivos da Matemática e ao raciocínio indutivo, privilegiando atividades de exploração, conjeturação e prova matemáticas, bem como as aplicações da Matemática e a resolução de problemas. Por outro lado, devem, também estimular a comunicação oral e escrita, a discussão e reflexão, a troca e confronto de ideias, experiências e processos de trabalho.

É por isso essencial, que o Professor diversifique as abordagens dos conteúdos em estudo, o estilo de trabalho, as situações que propõe e os materiais, com o intuito de favorecer uma melhor adequação em relação ao aluno, ao Professor e à Matemática, das metodologias utilizadas.

De acordo com APM, a Matemática não se resume a um conjunto de conceitos e regras, nem à prova dedutiva mecanizada. Deste modo, é essencial que as atividades que apresentamos aos nossos alunos, estimulem o rigor no pensamento e desenvolvam o raciocínio lógico, contemplando, também, os vários aspetos da atividade e do raciocínio matemáticos dando especial ênfase "*ao explorar, conjeturar e demonstrar, generalizar e aplicar, formular e resolver problemas, a criação de modelos matemáticos*" (1995, p. 31)

Ainda segundo APM (1995), a resolução de problemas contribui para uma maior flexibilidade curricular e, do ponto de vista da aprendizagem, uma situação problemática proporciona aos nossos alunos contextos únicos, propiciadores de aquisição e desenvolvimento relevantes.

Por outro lado, Ponte e outros (2007) referem que, a aprendizagem da Matemática depende essencialmente do trabalho desenvolvido pelo aluno, que, por sua vez é orientado e estruturado pelas tarefas propostas pelo Professor. De acordo com as orientações previstas no Currículo Nacional (Ministério da Educação, 2001), devem proporcionar-se ao aluno diversos tipos de experiências Matemáticas, nomeadamente resolvendo problemas, realizando atividades de investigação, desenvolvendo projetos, participando em jogos e ainda resolvendo exercícios que proporcionem uma prática compreensiva de procedimentos.

Ainda de acordo com estes autores, o ensino-aprendizagem da Matemática tem de contemplar diversos momentos: realização de tarefas; confronto de resultados; discussão de estratégias e formalização de conceitos e representações matemáticas.

> *"Ouvir e praticar são actividades importantes na aprendizagem da Matemática mas, ao seu lado, o fazer, o argumentar e o discutir surgem com importância crescente nessa aprendizagem"* (Ponte et al., 2007, p. 8).

São também objetivos do Programa de Matemática do Ensino Básico, o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas e a promoção do raciocínio e comunicação matemáticos. Assim, as situações que o Professor propõe aos alunos devem contemplar, sempre que possível, a resolução de problemas, seguida de uma reflexão sobre as suas resoluções e as dos colegas, "*procurando que eles os explicitem com clareza, que analisem e reajam aos raciocínios dos colegas*" (Ponte et al., 2007, p. 9).

Segundo orientações do Programa de Matemática do Ensino Básico, as situações a propor aos alunos, tanto numa fase de exploração de um conceito como na fase de consolidação e aprofundamento, devem envolver contextos matemáticos e não matemáticos e estar relacionados com situações do quotidiano dos alunos.

Uma outra caraterística que influencia diretamente a aprendizagem dos alunos é o modo como o Professor comunica. A comunicação deve ter também um lugar destacado na prática letiva do Professor. Na aula devem proporcionar-se momentos de discussão oral, onde os alunos poderão confrontar as suas estratégias de resolução de problemas e identificar os raciocínios produzidos pelos seus colegas.

Deve ainda referir-se que a produção de textos matemáticos, contribui diretamente para que os alunos comuniquem mais aprofundadamente os seus raciocínios e estratégias expondo os seus argumentos, sensibilizando-os, também, para a importância do rigor no uso da linguagem Matemática.

2.2. Orientações para o Ensino das Sequências no 3º Ciclo

Ensinar Matemática requer do Professor uma atitude especial. Não basta conhecer, é preciso saber motivar, transmitir, abordar os temas em estudo de forma enriquecedora e principalmente estabelecer analogias entre a Matemática e as atividades comuns do dia-a-dia. Mas como é possível concretizar todas estas tarefas? Como poderá o Professor motivar o aluno, ensiná-lo a pensar e torná-lo autónomo? A resposta a todas estas questões é simples: ensinar com gosto e diversificar o mais possível as estratégias de ensino-aprendizagem.

O Novo Programa de Matemática do Ensino Básico constitui uma oportunidade única de mudança a muitos níveis, nomeadamente ao nível da atitude do Professor perante a aprendizagem dos alunos.

O ensino da Matemática, ao longo dos três ciclos da escolaridade básica, deve ser orientado por duas finalidades fundamentais:

- *"Promover a aquisição de informação, conhecimento e experiência em Matemática e o desenvolvimento da capacidade da sua integração e mobilização em contextos diversificados;*
- *Desenvolver atitudes positivas face à Matemática e a capacidade de apreciar esta ciência"* (Ponte et al., 2007, p. 3).

Para atingir a primeira finalidade, é necessário desenvolver nos alunos:

- ✓ *"compreensão de conceitos, relações, métodos e procedimentos matemáticos e da capacidade de os utilizar na análise, interpretação e resolução de situações em contexto matemático e não matemático;*
- ✓ *capacidade de analisar informação e de resolver e formular problemas, incluindo os que envolvem processos de modelação Matemática;*
- ✓ *capacidade de abstracção e generalização e de compreender e elaborar argumentações Matemáticas e raciocínios lógicos;*
- ✓ *capacidade de comunicar em Matemática, oralmente e por escrito, descrevendo, explicando e justificando as suas ideias, procedimentos e raciocínios, bem como os resultados e conclusões a que chega."*

(Ponte et al., 2007, p. 3)

Para atingir a segunda finalidade, é necessário desenvolver nos alunos:

- ✓ *"autoconfiança nos seus conhecimentos e capacidades Matemáticas, e autonomia e desembaraço na sua utilização;*
- ✓ *à vontade e segurança em lidar com situações que envolvam Matemática na vida escolar, corrente, ou profissional;*
- ✓ *interesse pela Matemática e em partilhar aspectos da sua experiência nesta ciência;*
- ✓ *compreensão da Matemática como elemento da cultura humana, incluindo aspectos da sua história;*
- ✓ *capacidade de reconhecer e valorizar o papel da Matemática nos vários sectores da vida social e em particular no desenvolvimento tecnológico e científico;*
- ✓ *capacidade de apreciar aspectos estéticos da Matemática."*

(Ponte et al., 2007, p. 3)

Ponte e outros (2007) referem que a aprendizagem da Matemática se deve essencialmente ao trabalho desenvolvido pelo aluno, que por sua vez, se estrutura nas orientações e tarefas propostas pelo Professor. Como tal, é importante que o aluno seja confrontado com diversos tipos de experiências matemáticas, nomeadamente: resolução de problemas, de atividades de carácter exploratório, jogos lúdicos e, sempre que possível através da resolução de exercícios que proporcionem uma prática compreensiva de procedimentos.

Segundo estes autores é essencial que o Professor dê indicações claras aos alunos sobre as suas expectativas relativamente às tarefas que propõe e, sempre que necessário, os apoie e oriente na realização das mesmas, para que os alunos não desmotivem perante as dificuldades com que se deparam.

No final da realização das atividades propostas, deverá haver uma reflexão/discussão dos resultados obtidos e das estratégias utilizadas, chegando, deste modo, com a ajuda do Professor à formalização de resultados e conceitos, definidos para as atividades propostas.

> *"Ouvir e praticar são actividades importantes na aprendizagem da Matemática mas, ao seu lado, o fazer, o argumentar e o discutir surgem com importância crescente nessa aprendizagem"* (Ponte et al., 2007, p. 10).

Ponte e outros (2007) referem ainda que, as situações a propor aos alunos devem estar relacionadas com o seu dia-a-dia e devem ser apresentadas de forma clara, de modo a que os alunos possam aplicar os conceitos adquiridos em anos anteriores. Por outro lado, as situações/conceitos que são menos conhecidas, devem ser exploradas e orientadas pelo Professor, de modo a não constituírem um obstáculo à aprendizagem.

As orientações do Programa de Matemática, salientam que, apesar de ser essencial trabalhar com situações do dia-a-dia, é igualmente importante trabalhar em contextos de matemática pura, quer numérica, geométrica ou algebricamente.

Desenvolver a capacidade de resolução de problemas, bem como o raciocínio e comunicação matemáticos, são também, objetivos de aprendizagem, que assumem no Novo Programa um lugar de destaque. Deste modo, o Professor deve estruturar as atividades da aula, de forma a promover o desenvolvimento das capacidades referidas, proporcionando, sempre que possível, situações de discussão conjunta, em que os alunos após terem resolvido problemas, façam uma análise dos seus raciocínios e resultados obtidos. A partir da discussão desses resultados, os alunos têm oportunidade de comparar as suas estratégias com as dos colegas, enriquecendo assim, as suas aprendizagens.

Para complementar a discussão oral de resultados, os alunos devem também, ser incentivados a desenvolverem, de forma clara as suas ideias por escrito, bem como, argumentar os resultados obtidos. Assim, revela-se essencial que o Professor valorize os raciocínios dos alunos, incentivando-os a exprimirem-se com clareza e rigor, desenvolvendo, deste modo, a comunicação matemática.

Ponte e outros (2007), referem também que as sugestões metodológicas descritas anteriormente, serão complementadas através da exploração de conexões, diversificação dos recursos utilizados, valorização do cálculo mental, da História da Matemática e do papel da Matemática no mundo atual, e das diferentes formas de trabalho na sala de aula.

As representações Matemáticas têm um papel especialmente importante ao longo da aprendizagem da Matemática nos diferentes ciclos. Assim, é essencial que os conceitos matemáticos mais importantes envolvam, sempre que possível, mais do que uma forma de representação.

> *"(...)Os alunos têm de compreender que existe uma variedade de representações para as ideias Matemáticas, e a capacidade de passar informação de uma forma de representação para outra é tão importante como saber reconhecer as convenções inerentes a cada tipo de representação…"* (Ponte et al., 2007, p. 9).

Gradualmente, através da expressão dos seus raciocínios surge a necessidade de representar objetos e relações matemáticas, começando por o fazer usando a sua própria simbologia. Nessa altura, será pertinente que o Professor confronte os alunos com a necessidade de definir uma linguagem comum, introduzindo, progressivamente as representações matemáticas convencionais.

Deve referir-se também que, tão importante como o domínio dos conteúdos em estudo é compreender como os conhecimentos matemáticos se relacionam entre si e ser capaz de aplicar a linguagem numérica e algébrica na resolução de problemas geométricos, em diversos contextos.

Boavida e outros referem que a resolução de problemas é "*uma actividade muito absorvente, pois quem resolve um problema é desafiado a pensar para além do ponto de partida, a pensar de modo diferente, a ampliar o seu pensamento e, por estas vias, a racionar matematicamente"* (2008, p. 14)

Estes autores referem ainda que, a resolução de problemas envolve duas componentes principais. A primeira é a exploração do problema, onde o aluno poderá descobrir possíveis relações, usando para isso o raciocínio e estratégias que o conduzam em busca da solução. A segunda, é a verificação da solução encontrada, que envolve testar essas relações e usar raciocínios e processos dedutivos, incluindo apresentar contraexemplos e justificar as generalizações. As justificações que o aluno deve apresentar dependem do seu nível de desenvolvimento e poderão ser formais ou através das suas próprias palavras.

> *"(...) Esta componente criativa da resolução de problemas ajuda o Professor e os alunos a formular novos problemas e a criar experiências mais ricas a partir dos problemas iniciais.*
> (Boavida, Paiva, Cebola, Vale, & Pimentel, 2008, p. 14)

É importante que o Professor motive os alunos para a resolução de problemas, orientando-os, sempre que necessário, na exploração de ideias e definição de estratégias.

Além de todas as vantagens, já referidas, deve salientar-se que a resolução de problemas proporciona entre outros, o uso de diferentes representações; desenvolve a comunicação, o espírito crítico e o raciocínio matemático e permite o estabelecimento de conexões entre diferentes temas matemáticos.

Ponte e outros (2007) referem que a Matemática no Ensino Básico deve contribuir para o desenvolvimento pessoal do aluno, proporcionando a formação Matemática necessária a outras disciplinas e, ao mesmo tempo, contribuir para a plena realização na participação e desempenho sociais e na aprendizagem ao longo da vida.

2.3. O Estudo da Álgebra no Ensino Básico

O Programa de Matemática do Ensino Básico estrutura-se, ao longo dos ciclos, em quatro grandes temas: Números e operações, Álgebra, Geometria e Organização e tratamento de dados.

Segundo Ponte e outros (2009a), o grande objetivo do estudo da Álgebra no ensino básico é desenvolver o pensamento algébrico dos alunos. Este pensamento para além de contemplar a capacidade de manipulação de símbolos, contempla também muitos outros objetivos, nomeadamente: compreensão de padrões, relações e funções; representação e análise de situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos; uso de modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas; análise da variação em diversos contextos.

Tal como é referido no Programa de Matemática do Ensino Básico, as ideias algébricas estão presentes em todos os ciclos do Ensino Básico, tal como iremos verificar, de seguida.

De acordo com Ponte e outros (2009a) é referido que o estudo do tópico Sequências e Regularidades é estudado ao longo de todo o ensino básico, tendo como principal objetivo desenvolver o pensamento algébrico dos alunos.

Estes autores referem, ainda, o modo como o estudo do tópico Sequências e Regularidades é desenvolvido ao longo do Ensino Básico, adaptando os conteúdos em estudo ao nível de desenvolvimento dos alunos. Deste modo, ao longo do 1.º ciclo, este tópico integra o tema Números e Operações, onde se exploram regularidades numéricas em Sequências bem como, em tabelas de números. Os alunos deverão ser capazes de identificar a lei de formação de uma dada sequência, bem como descreve-la por palavras suas, desenvolvendo, deste modo, o seu sentido de número e a sua capacidade de generalização. Ao longo dos 2.º e 3.º ciclos, este tópico está incluído no tema Álgebra, e envolve a exploração de Sequências como o uso da linguagem simbólica para as representar. No 2.º ciclo, são formalizados conceitos como termo e ordem. Ao longo 3.º ciclo, os alunos deverão ser capazes de expressar generalizações, através de linguagem algébrica, nomeadamente para representar o termo geral de uma sequência.

1º Ciclo

De acordo com Ponte e outros (2007), no 1.º ciclo a Álgebra está presente no trabalho desenvolvido com Sequências, ao estabelecerem-se relações entre números e entre números e operações, e também no estudo de propriedades geométricas como a simetria.

Ao longo deste ciclo dá-se especial importância à exploração de situações relacionadas com regularidades de acontecimentos, formas, desenhos e conjuntos de números. Assim, é importante que se proporcionem situações onde os alunos possam procurar regularidades em sequências finitas e infinitas (sucessões). É também importante a apresentação de padrões de pontos, de modo a que os alunos os possam observar e representar tanto numérica como algebricamente, estabelecendo, deste modo, ligações entre a aritmética e a geometria.

> *"Este trabalho com regularidades generalizáveis, segundo regras que os alunos podem formular por si próprios, ajuda a desenvolver a capacidade de abstracção e contribui para o desenvolvimento do pensamento algébrico."*
>
> (Ponte et al., 2007, p. 14)

Objetivos gerais de aprendizagem – 1º Ciclo

Com a sua aprendizagem, no âmbito deste tema, os alunos devem:

- *"ser capazes de apreciar ordens de grandeza de números e compreender o efeito das operações;*
- *ser capazes de estimar e de avaliar a razoabilidade dos resultados;*
- *desenvolver destrezas de cálculo numérico mental e escrito;*
- *ser capazes de resolver problemas, raciocinar e comunicar em contextos numéricos"* (Ponte et al., 2007, p. 13).

Tabela I – Objetivos específicos e estratégias do tópico "Regularidades" para o 1º Ciclo

Tópicos e Objetivos Específicos - 1ºCiclo		
Tópicos	**Objetivos Específicos**	**Estratégias**
Regularidades **• Sequências** ✓ **1º e 2º Ano**	• Elaborar Sequências de números segundo uma dada lei de formação e investigar regularidades em Sequências e em tabelas de números.	• Explorar regularidades em tabelas numéricas e tabuadas, em particular as dos múltiplos. • Usar tabelas na resolução de problemas que envolvam raciocínio proporcional.
✓ **3º e 4º Ano**	• Investigar regularidades numéricas. • Resolver problemas que envolvam o raciocínio proporcional.	

(Ponte et al., 2007, p. 17)

2º Ciclo

Ponte e outros (2007) salientam que no 2.º ciclo, a Álgebra surge como um tema matemático individualizado. Neste ciclo aprofunda-se o estudo das relações e regularidades, através da exploração de padrões, determinação de termos de uma sequência a partir da sua lei de formação e determinação de uma lei de formação a partir do estudo da relação entre termos. Por outro lado os alunos desenvolvem também a capacidade de identificar relações, descrevendo-as simbolicamente.

Ainda neste ciclo os alunos começam a expressar relações Matemáticas através de igualdades e desigualdades.

Objetivos gerais de aprendizagem – 2º Ciclo

Com a sua aprendizagem, no âmbito deste tema, os alunos devem:

- *“ser capazes de explorar e investigar regularidades;*
- *compreender a noção de proporcionalidade directa e usar o raciocínio proporcional;*
- *ser capazes de resolver problemas, raciocinar e comunicar recorrendo a representações simbólicas”* (Ponte et al., 2007, p. 40).

Tabela II – Objetivos específicos e estratégias do tópico "Sequências e Regularidades" para o 2º Ciclo

Tópicos e Objetivos Específicos - 2ºCiclo		
Tópicos	**Objetivos Específicos**	**Estratégias**
• **Sequências e Regularidades**	• Identificar e dar exemplos de Sequências e regularidades numéricas e não numéricas. • Determinar o termo seguinte (ou o anterior) a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação. • Determinar termos de ordens variadas de uma sequência, sendo conhecida a sua lei de formação. • Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica. • Representar simbolicamente relações descritas em linguagem natural e reciprocamente. • Interpretar diferentes representações de uma relação e relacioná-las. • Investigar regularidades numéricas.	• Propor exemplos que evidenciem as propriedades comutativa, associativa e distributiva das operações estudadas. • Propor situações que possibilitem a 'visualização' de expressões algébricas. • Usar a calculadora na exploração de regularidades numéricas.

(Ponte et al., 2007, p. 41)

3º Ciclo

Ponte e outros (2007) referem que no 3.º ciclo, alarga-se e aprofunda-se o estudo de Sequências iniciado nos ciclos anteriores, com o estudo de padrões geométricos e regularidades em Sequências numéricas finitas ou infinitas (sucessões), dando ênfase à representação simbólica do termo geral, fundamental para o desenvolvimento da noção de variável e para a compreensão da linguagem algébrica.

Objetivos gerais de aprendizagem – 3º Ciclo

Com a sua aprendizagem, no âmbito deste tema, os alunos devem:

- *"ser capazes de interpretar e representar situações em contextos diversos, usando linguagem e procedimentos algébricos;*
- *compreender o conceito de função e ser capazes de o usar em diversas situações, em particular de proporcionalidade directa e inversa;*
- *ser capazes de interpretar fórmulas em contextos matemáticos e não matemáticos;*
- *ser capazes de resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos."*

(Ponte et al., 2007, p. 55)

Tabela III – Objetivos específicos e estratégias do tópico "Sequências e Regularidades" para o 3º Ciclo

Tópicos e Objetivos Específicos - 3ºCiclo		
Tópicos	**Objetivos Específicos**	**Estratégias**
Sequências e Regularidades • Termo geral de uma sequência numérica • Representação •Expressões algébricas	• Compreender a noção de termo geral de uma sequência numérica e representá-lo usando símbolos matemáticos adequados. • Determinar um termo geral de uma sequência numérica e termos de várias ordens a partir do termo geral. • Compreender os diferentes papéis dos símbolos em Álgebra. •Simplificar expressões algébricas	• Propor a representação de Sequências de frações em que os numeradores e os denominadores tenham relações simples.

(Ponte et al., 2007, p. 56)

2.4. Objetivos a atingir com o estudo das Sequências no 3º Ciclo

Segundo Ponte e outros (2009b), no Programa de Matemática do ensino básico, Sequências e regularidades, Funções e Equações são três tópicos interligados. Inicialmente é apresentado o estudo das Sequências que, podem ser encaradas como funções de variável natural. Por sua vez as equações constituem uma das formas possíveis de representar relações funcionais. Didaticamente o estudo destes tópicos de modo relacionado é muito vantajoso e facilita a compreensão dos mesmos.

Deste modo, o trabalho dos alunos nestes tópicos é decisivo para que sejam alcançados os objetivos gerais de aprendizagem previstos para o ensino da Álgebra no Programa de Matemática do Ensino Básico (3.º ciclo), que de seguida apresentamos:

- *"Ser capazes de interpretar e representar situações em contextos diversos, usando linguagem e procedimentos algébricos;*
- *Ser capazes de interpretar fórmulas em contextos matemáticos e não matemáticos;*
- *Ser capazes de resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos;*
- *Resolver problemas em contextos matemáticos e não matemáticos, adaptando, concebendo e pondo em prática estratégias variadas, discutindo as soluções encontradas e os processos utilizados;*
- *Raciocinar matematicamente, formulando e testando conjecturas e generalizações, e desenvolvendo e avaliando argumentos matemáticos incluindo cadeias dedutivas;*
- *Comunicar oralmente e por escrito, recorrendo à linguagem natural e à linguagem Matemática, interpretando, expressando e discutindo resultados, processos e ideias matemáticos."*

(Ponte, Matos, & Branco, 2009b, p. 3)

Segundo as orientações emanadas pelas competências essenciais do Currículo Nacional do Ensino Básico, Ministério da Educação (2001), no domínio da álgebra, ao longo de todos os ciclos, os alunos devem atingir as seguintes competências:

- *“A predisposição para procurar padrões e regularidades e para formular generalizações em situações diversas, nomeadamente em contextos numéricos e geométricos;*
- *A aptidão para analisar as relações numéricas de uma situação, explicitá-las em linguagem corrente e representá-las através de diferentes processos, incluindo o uso de símbolos;*
- *A aptidão para construir e interpretar tabelas de valores, gráficos, regras verbais e outros processos que traduzam relações entre variáveis, assim como para passar de umas formas de representação para outras, recorrendo ou não a instrumentos tecnológicos;*
- *A aptidão para concretizar, em casos particulares, relações entre variáveis e fórmulas e para procurar soluções de equações simples;*
- *A sensibilidade para entender e usar as noções de correspondência e de transformação em situações concretas diversas.”*

(Ministério da Educação, 2001, p. 66)

Relativamente às Sequências, os objetivos a atingir com o estudo deste tópico no 3º ciclo do ensino básico são:

- *“Compreender a noção de termo geral de uma sequência numérica e representá-lo usando símbolos matemáticos adequados;*
- *Determinar um termo geral de uma sequência numérica e termos de várias ordens a partir do termo geral;*
- *Simplificar expressões algébricas.”*

(Ponte, Matos, & Branco, 2009b, p. 9)

CAPÍTULO 3 - Tarefas para o Desenvolvimento do Tópico das Sequências

3.1. Proposta de Planificação do Tópico Sequências

O Professor tem um papel fundamental na planificação das atividades a propor aos seus alunos.

Diariamente, é confrontado com diversas dificuldades, como sejam: gestão temporal das tarefas, o tipo de tarefas que propõe, o nível de desenvolvimento dos alunos a que se destinam e além de outros, os objetivos que pretende atingir com a realização das atividades que propõe. A conjugação de todos estes fatores só é possível a partir de uma planificação eficaz das tarefas a propor.

Decisões sobre o tipo de trabalho que os alunos irão desenvolver, o modo como irão trabalhar individualmente ou em grupo, como se irão constituir os grupos ou se haverá momentos de trabalho em grande grupo, dependem não só da natureza das atividades propostas mas, também, dos objetivos definidos.

Apresentamos neste trabalho uma possível planificação para este tópico, a desenvolver nos 7º e 8º anos, adaptada dos Materiais de apoio ao Professor, da brochura da Direção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular da autoria de Ponte e outros (2009b).

A presente planificação encontra-se de acordo com o Programa de Matemática / Orientações de Organização do Ensino - Aprendizagem para o 3º Ciclo do Ensino Básico em vigor.

Foram tidas em conta todas as orientações explicitadas no documento Currículo Nacional do Ensino Básico – Competências Essenciais (Ministério da Educação, 2001).

Tabela IV – Planificação do Tópico Sequências

Proposta de Planificação do Tópico "Sequências" para os 7º e 8º Anos				
Blocos	**Tópico**	**Objetivos específicos**	**Notas**	**Tarefas**
1	*Termo geral de uma sequência numérica *Representação *Expressões algébricas	*Compreender a noção de termo geral de uma sequência numérica e representá-lo usando símbolos matemáticos adequados. *Determinar um termo geral de uma sequência numérica e termos de várias ordens a partir do termo geral. *Simplificar expressões algébricas	*Propor a representação de Sequências de frações em que os numeradores e os denominadores tenham relações simples.	**Tarefa 1 -"Sequência de Desenhos I"-7ºAno**
1				**Tarefa 2 –"Sequência de Desenhos II"-7ºAno**
1				**Tarefa 3 -"Festa de Aniversário"-7º Ano**
1				**Tarefa 4 -"Sequências Numéricas"-7ºAno**
1				**Tarefa 5 -"Construindo Torres"-7ºAno**
1				**Tarefa 6 -"Brincando com Legos"-8ºAno**
1				**Tarefa 7 -"O Mealheiro"-8ºAno**

3.2. Propostas de Tarefas para o Desenvolvimento do Tópico Sequências

"N*ão se pode conceber a Matemática sem conceitos, definições, axiomas, teoremas, demonstrações, algoritmos ou fórmulas. São partes integrantes desta ciência. Contudo, os problemas – a sua formulação e resolução – são a essência da Matemática."*

(Boavida, Paiva, Cebola, Vale, & Pimentel, 2008, p. 13)

Um dos principais objetivos de Programa de Matemática é desenvolver a autonomia dos alunos.

A literacia Matemática dos alunos é avaliada pelo modo como aplicam os conhecimentos, as capacidades e as atitudes na resolução de problemas. Deste modo, é essencial proporcionar-lhes experiências diversificadas que permitam desenvolver a sua capacidade de resolução de problemas, e mais tarde serem capazes de aplicar os conceitos matemáticos adquiridos ao longo da sua vida.

Ponte (2005) refere que um problema apresenta, normalmente, um grau de dificuldade mais elevado. No entanto, se o problema for muito difícil, o aluno desistirá rapidamente da sua resolução. Por outro lado, se o problema for demasiado fácil, então não será um problema mas sim um exercício.

Por outro lado, de acordo com NCTM os alunos tornam-se mais confiantes e motivados, quando são desafiados a resolver problemas com grau de dificuldade elevado pois, ficam ansiosos por chegar à resposta correta, de forma autónoma, ficando, deste modo, mais confiantes das suas capacidades e no final, "*obtêm uma sensação especial de realização que, por sua vez, aumenta a sua vontade de continuar e de aprofundar o seu envolvimento na Matemática"* (2007, p. 22).

A aprendizagem da Matemática será ainda mais enriquecida, se for possível consolidar os conceitos adquiridos com a realização de todo o tipo de atividades: mais rotineiras que apelam, nomeadamente à memória e ao treino ou outras mais desafiantes, como seja a resolução de problemas/tarefas.

Ponte (2005) é da opinião que para além de selecionar boas tarefas, o Professor tem de ter especial atenção ao modo como as propõe e orienta na sala de aula.

Este autor referiu a existência de distintos tipos de tarefas matemáticas: problemas, exercícios, investigações, projetos e tarefas de modelação. Estas atividades distinguem-se, tendo em conta os objetivos, grau de dificuldades e duração.

Assim, as duas dimensões fundamentais de uma tarefa são o grau de desafio matemático e o grau de estrutura. O grau de desafio matemático relaciona-se com a dificuldade de uma questão e varia, naturalmente, entre os desafios “reduzido” e “elevado”. O grau de estrutura varia entre os polos “aberto” e “fechado”.

Uma tarefa fechada é aquela onde é claramente esclarecido o que é dado e o que é pedido. Por sua vez, uma tarefa aberta nem sempre é definido de forma clara, o que é dado, o que é pedido, ou em ambas as coisas. Assim, a partir destas duas dimensões, obtêm-se quatro quadrantes, de acordo com a figura 13:

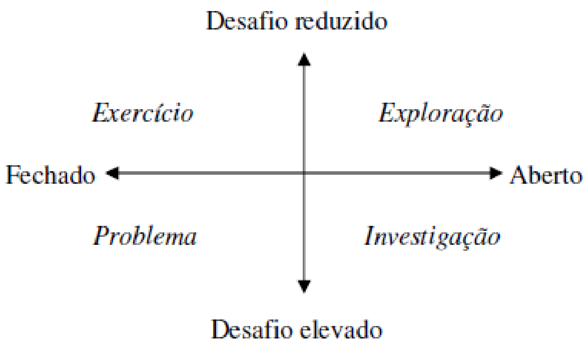


Figura 13 - Relação entre diversos tipos de tarefas, em termos do seu grau de desafio e de abertura , in (Ponte, 2005, p. 10)

Ponte resumiu o esquema anterior, do seguinte modo:

*“Uma **tarefa de exploração** é uma tarefa aberta e de desafio reduzido (1ºquadrante);*
*Um **exercício** é uma tarefa fechada e de desafio reduzido (2ºquadrante);*
*Um **problema** é uma tarefa também fechada, mas com elevado desafio (3º quadrante);*
*Uma **investigação** tem um grau de desafio elevado, mas é uma tarefa aberta (4º quadrante)”* (2005, p. 8).

Para Ponte (2005), os exercícios têm como objetivo, consolidar os conhecimentos já anteriormente adquiridos, pondo-os em prática.

A principal diferença entre as tarefas de exploração e as de investigação está no grau de desafio, que cada uma delas comporta. Numa tarefa de exploração o aluno pode começar a trabalhar *"sem muito planeamento. Caso contrário, será talvez melhor falar em tarefa de investigação"* (Ponte, 2005, p. 8).

Ponte (2005) referiu também que, outras duas dimensões de grande importância serão a duração e o contexto de cada tarefa. A duração da realização de uma tarefa matemática é muito variável, pois pode requerer pouco tempo, ou alongar-se bastante mais e demorar dias ou meses. Assim, uma tarefa pode ser de curta ou longa duração, como se indica na figura 14.

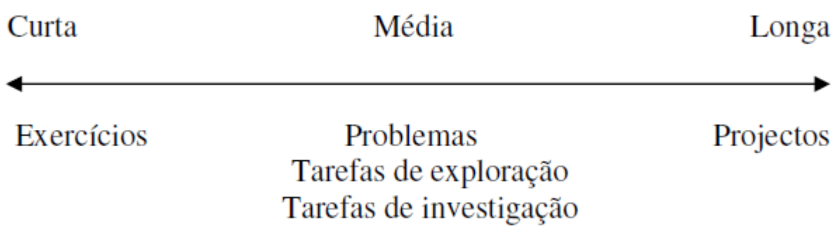


Figura 14 - Diversos tipos de tarefas, quanto à duração, in (Ponte, 2005, p. 10)

De acordo com o esquema, podemos dizer que os exercícios são normalmente tarefas com uma duração mais curta, os problemas, tarefas de exploração e investigação, têm uma duração média e, por último uma tarefa de longa duração, que tem em comum muitas das características das investigações, é um projeto.

As tarefas de longa duração podem ser mais ricas, permitindo aprofundar as aprendizagens e tornando-as mais interessantes, no entanto há um elevado risco dos alunos se dispersarem durante a sua realização, entrarem num impasse e acabarem por desmotivar, abandonando a sua realização, sem atingir os objetivos propostos para a mesma.

Um outro tipo de tarefas são as de modelação, que são normalmente tarefas *"de natureza problemática e desafiante, constituindo problemas ou investigações, conforme o grau de estruturação do respetivo enunciado"* (Ponte, 2005, p. 10).

Para Ponte (2005) os exercícios, como os problemas ou as investigações podem surgir em contextos da realidade, como de semirrealidade ou de Matemática pura, de acordo com o esquema seguinte:

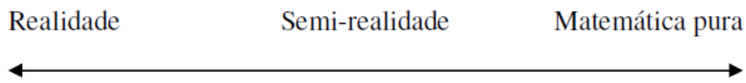


Figura 15 - Diversos tipos de tarefas quanto ao contexto, in (Ponte, 2005, p. 10)

Não menos importante é o papel que os jogos têm na aprendizagem da Matemática. Um jogo constitui de algum modo um problema, *"as regras estão bem definidas e o objectivo é vencer o jogo, seja este individual ou colectivo, com dois ou mais intervenientes".* (Ponte, 2005, p. 12)

Com a realização de jogos os alunos tentarão encontrar estratégias eficazes para vencerem, o que constitui um desafio, por vezes difícil.

De acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico, os trabalhos com Sequências, que aqui exploramos, deve revestir-se de um cunho exploratório e investigativo. Para isso, são propostas tarefas que possibilitam a formulação de estratégias, explicitação de raciocínios e ao mesmo tempo, utilização de conhecimentos e capacidades anteriormente desenvolvidas, constituindo um ponto de partida para a formalização de novos conceitos e representações.

Assim e de acordo com Ponte (2005) a aplicação de estratégias de ensino-aprendizagem com uma vertente exploratória proporcionará a realização de atividades de exploração, possibilitará a realização de algumas investigações, projetos, problemas e exercícios, valorizando a reflexão e discussão de ideias e estratégias.

A realização de tarefas abertas, de carácter exploratório e investigativo é uma das estratégias principais que contribui para o pleno desenvolvimento dos objetivos do Programa de Matemática do Ensino Básico.

As tarefas que de seguida apresentamos foram elaboradas de modo a possibilitar ao aluno a aquisição de conceitos relacionados com o tópico em estudo, atraindo e obtendo, ao mesmo tempo, o interesse do mesmo pelo assunto.

Cada uma destas tarefas foi pensada para ser realizada, regra geral, num bloco de 90 minutos. A realização de cada tarefa, de acordo com as orientações do Programa de

Matemática, deve incluir três momentos distintos. Numa primeira fase deve fazer-se uma breve apresentação da tarefa, de modo a motivar os alunos para o desenvolvimento da mesma. O Professor pode, nesta fase, dar indicações acerca do modo de trabalhar, bem como, do momento em que se iniciará a discussão geral.

Numa segunda fase, os alunos trabalham de forma autónoma nas questões que lhes foram propostas. Nesta fase, o Professor deve acompanhar de forma passiva os alunos, intervindo, apenas, quando achar essencial.

Finalmente, numa terceira fase, realiza-se a discussão final. Nesta fase os alunos farão uma breve apresentação do trabalho desenvolvido, comparando, depois as suas conclusões com as dos restantes colegas.

Em cada uma das tarefas, que de seguida apresentamos, para além da proposta de trabalho para os alunos, são sugeridas algumas orientações para o desenvolvimento da mesma. Os conhecimentos prévios dos alunos representam os pré-requisitos e capacidades que estes devem possuir para poderem trabalhar na tarefa proposta. Se os alunos não dominarem de modo satisfatório estes conhecimentos prévios, o Professor deverá rever com eles as ideias principais ou propor-lhes a realização de um trabalho preliminar apropriado.

Nos objetivos específicos, são indicados os principais objetivos de aprendizagem a atingir com a realização da tarefa. Estes objetivos correspondem a uma parte dos objetivos do tópico indicado no programa.

Nas capacidades transversais são indicadas as que serão trabalhadas na realização da tarefa – Resolução de Problemas, Raciocínio e Comunicação Matemática.

As orientações sobre o desenvolvimento da tarefa contêm sugestões sobre o modo como pode ser estruturado e conduzido o ensino-aprendizagem.

Por último deve referir-se que este trabalho teria sido mais valorizado se, tivesse sido possível aplicar as tarefas propostas em contexto de sala de aula e posteriormente analisados os resultados da sua aplicação. Tal não foi possível, pois não lecionei os níveis aos quais estas tarefas se destinavam. No entanto, temos a certeza que estas tarefas serão uma mais-valia para o desenvolvimento dos conceitos em estudo.

3.2.1. Tarefa 1: "Sequência de desenhos I"

O pai da Joaninha deu-lhe quatro tipos de desenhos fotocopiados, para ela colorir, com guaches. De seguida a Joaninha pendurou-os, com molas, para secarem.

O modo como os trabalhos foram pendurados **obedece a um padrão** e, neste momento já pendurou seis desenhos, de acordo com a figura seguinte:

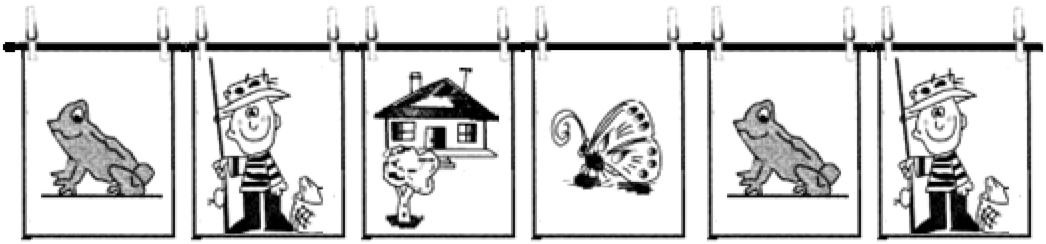


Figura 16 – Sequência de desenhos I

a) Qual será o próximo desenho que a Joaninha irá pendurar?

b) Qual será o desenho que ocupará a 12ª posição?

c) Qual será o desenho que ocupará o 16º lugar?

d) Qual vai ser o desenho que ocupará a posição número 59? Explica o teu raciocínio.

e) Utilizando este padrão, a Joaninha construiu uma sequência de figuras onde utilizou 20 desenhos da "casa". Qual é o número mínimo de desenhos utilizados pela Joaninha nesta sequência? Explica o teu raciocínio.

3.2.2. Considerações sobre a Tarefa 1: "Sequência de desenhos I"

Esta tarefa permite a conexão com o tema **Números e operações**, pois aborda os múltiplos e os critérios de divisibilidade de um número. Desta forma, os alunos iniciam a exploração das posições dos elementos de uma sequência sem abordar diretamente os conceitos de termo, ordem ou lei de formação.

Conhecimentos prévios dos alunos

- Conceito de múltiplo de um número e conhecimento dos critérios de divisibilidade, bem como da sua aplicação.
- Identificar Sequências e regularidades numéricas e não numéricas.
- Determinar o termo seguinte a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação.
- Determinar termos de ordens variadas de uma sequência, sendo conhecida a sua lei de formação.
- Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica.

Objetivos específicos

- Determinar o termo seguinte (ou o anterior) a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação.
- Explicar e justificar ideias, processos e resultados matemáticos.
- Formular e testar conjeturas e generalizações fazendo deduções informais.
- Discutir ideias, processos e resultados matemáticos.

Desenvolvimento da tarefa

- Trabalho de Pares ou em pequenos grupos.
- Duração total da Tarefa: 60 minutos, sendo:
  - ✓ Apresentação da Tarefa – 5 minutos;
  - ✓ Trabalho Autónomo dos alunos – 30 minutos;
  - ✓ Apresentação e discussão de resultados – 20 minutos;
  - ✓ Síntese Final – 5 minutos.

Capacidades transversais: Raciocínio e comunicação Matemática.

3.2.3. Tarefa 2: "Sequência de desenhos II"

A Joaninha utilizando apenas dois tipos de desenhos resolveu formar um outro padrão.

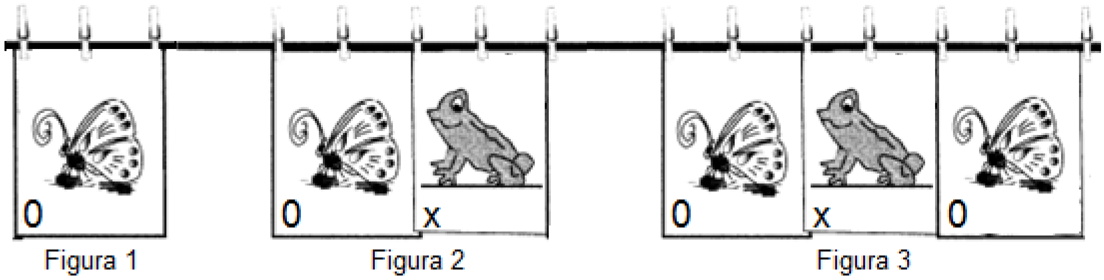


Figura 17 – Sequência de desenhos II

a) Continua este padrão desenhando os dois grupos de figuras seguintes. Para isso, utiliza os símbolos que se encontram no canto inferior esquerdo de cada desenho.

b) O número de molas necessárias para pendurar os desenhos pelo método da Joaninha origina uma sequência numérica.
Completa a tabela.

Ordem do Termo (n.º de ordem da figura)	1	2	3	4
Termo (n.º de molas da figura)				

c) Escreve os sete primeiros termos desta sequência numérica.

d) Quantas molas terá a 20ª figura?

e) Haverá alguma figura com 101 molas? Caso exista, determina a sua ordem.

f) Haverá alguma figura com 120 molas? Caso exista, determina a sua ordem.

g) Descreve uma regra que permita determinar o número total de molas de qualquer figura desta sequência.

h) Escreve uma expressão algébrica que possa traduzir a regra descrita na alínea anterior.

3.2.4. Considerações sobre a Tarefa 2: "Sequência de desenhos II"

Nesta tarefa a formulação e o teste de conjeturas assumem um papel importante.

Os alunos utilizarão estratégias muito diferenciadas para poderem retirar conclusões. O Docente deve garantir que as diferentes estratégias utilizadas sejam apresentadas e comparadas, promovendo a discussão entre os diferentes grupos, nomeadamente, na análise às relações entre termos, de modo aos alunos indicarem o termo geral da sequência, utilizando linguagem simbólica.

Conhecimentos prévios dos alunos

- Identificar sequências e regularidades numéricas e não numéricas.
- Determinar o termo seguinte a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação.
- Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica.

Objetivos específicos

- Compreender a noção de termo geral de uma sequência numérica e representá-lo usando símbolos matemáticos adequados.
- Determinar o termo geral de uma sequência numérica e termos de várias ordens a partir do termo geral.
- Explicar e justificar ideias, processos e resultados matemáticos.
- Formular e testar conjeturas e generalizações fazendo deduções informais.
- Discutir ideias, processos e resultados matemáticos.

Desenvolvimento da tarefa

- Trabalho de Pares ou em pequenos grupos.
- Duração total da Tarefa: 90 minutos, sendo:
  - ✓ Apresentação da Tarefa – 5 minutos;
  - ✓ Trabalho Autónomo dos alunos – 50 minutos;
  - ✓ Apresentação e discussão de resultados – 30 minutos;
  - ✓ Síntese Final – 5 minutos.

Capacidades transversais: Raciocínio e comunicação Matemática.

3.2.5. Tarefa 3: “Festa de Aniversário”

(Tarefa com uso de computadores, com recurso ao Geogebra e a um applet criado para o efeito, denominado “Festa de Aniversário”)

No ambiente de trabalho, faz um duplo clique sobre o ícone que diz “Festa de Aniversário”.

Imagina que a Joaninha vai realizar uma festa de aniversário, utilizando mesas todas iguais, encostadas umas às outras, colocando as cadeiras como as figuras sugerem:

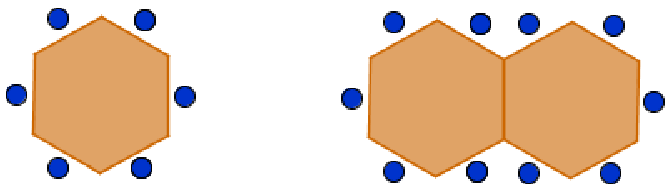
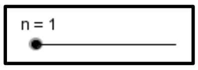


Figura 1 Figura 2

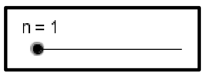
Figura 18 – Sequência de mesas

a) Desenha as próximas duas figuras da sequência.

Confirma no computador se as tuas figuras estão corretas. Para tal, clica no botão 

de modo a que a figura apresentada fique com o aspeto da Figura 2 representada acima. Clica depois mais 2 vezes para verificares como serão as 2 figuras seguintes da sequência.

b) Quantas cadeiras serão necessárias se forem utilizadas 9 mesas?

Confirma no computador se acertaste. Para tal, clica no botão 

até teres uma figura com o comprimento de 9 mesas.

c) Explica como determinas o número de cadeiras se conheceres o número de mesas utilizadas.

d) Se representares por *n* o número de mesas, escreve uma expressão algébrica que represente o número de cadeiras.

e) Se a Joaninha convidar 97 pessoas, qual é o número mínimo de mesas que irá precisar? Sobram alguns lugares?

3.2.6. Considerações sobre a Tarefa 3: "Festa de Aniversário"

Na realização desta tarefa os alunos utilizarão um applet do Geogebra, como auxílio para a determinação dos termos e do termo geral de uma sequência.

Os alunos utilizarão estratégias muito diferenciadas para poderem retirar conclusões. O Docente deve garantir que as diferentes estratégias utilizadas sejam apresentadas e comparadas, promovendo a discussão entre os diferentes grupos, nomeadamente, na análise às relações entre termos, de modo aos alunos indicarem o termo geral da sequência, utilizando linguagem simbólica.

Conhecimentos prévios dos alunos

- Identificar Sequências e regularidades numéricas e não numéricas.
- Determinar o termo seguinte a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação.
- Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica.

Objetivos específicos

- Compreender a noção de termo geral de uma sequência numérica e representá-lo usando símbolos matemáticos adequados.
- Determinar o termo geral de uma sequência numérica e termos de várias ordens a partir do termo geral.
- Explicar e justificar ideias, processos e resultados matemáticos.
- Formular e testar conjeturas e generalizações fazendo deduções informais.
- Discutir ideias, processos e resultados matemáticos.

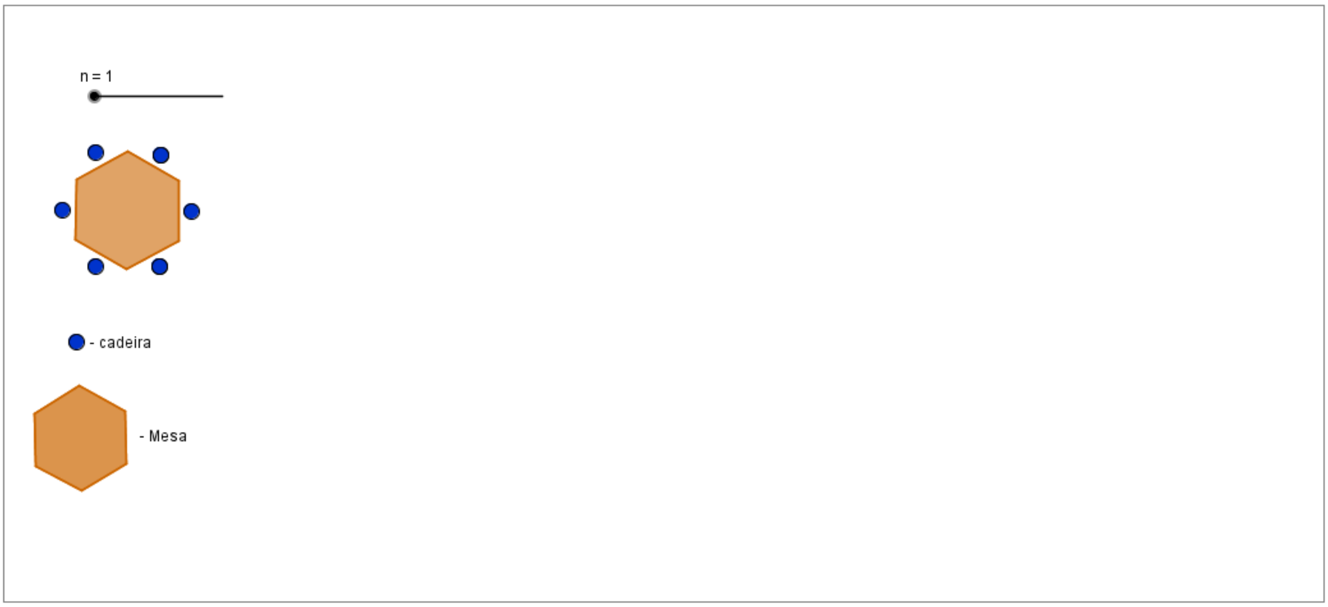
Desenvolvimento da tarefa

- Trabalho de Pares ou em pequenos grupos.
- Duração total da Tarefa: 60 minutos, sendo:
  - ✓ Apresentação da Tarefa – 5 minutos;
  - ✓ Trabalho Autónomo dos alunos – 30 minutos;
  - ✓ Apresentação e discussão de resultados – 15 minutos;
  - ✓ Síntese Final – 10 minutos.

Capacidades Transversais: Raciocínio e comunicação Matemática.

<u>Applet da tarefa</u>

Festa de Aniversário

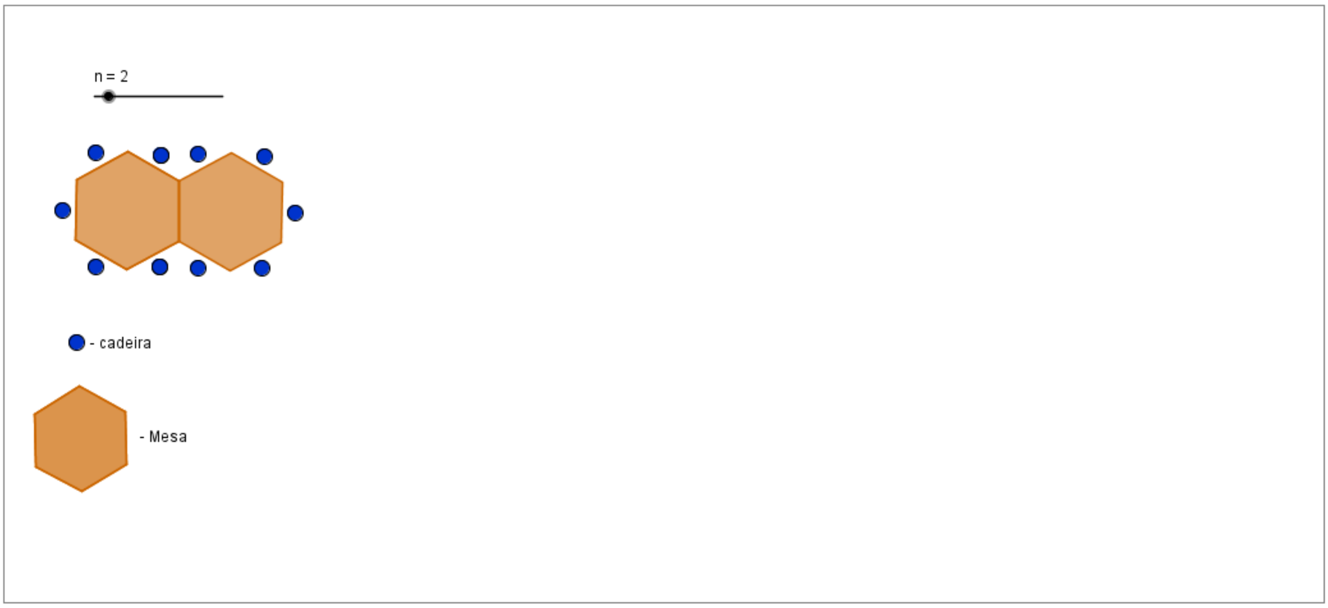


Isaac Reis, Criado com

GeoGebra

Figura 19 – 1º Applet da sequência de mesas

Festa de Aniversário

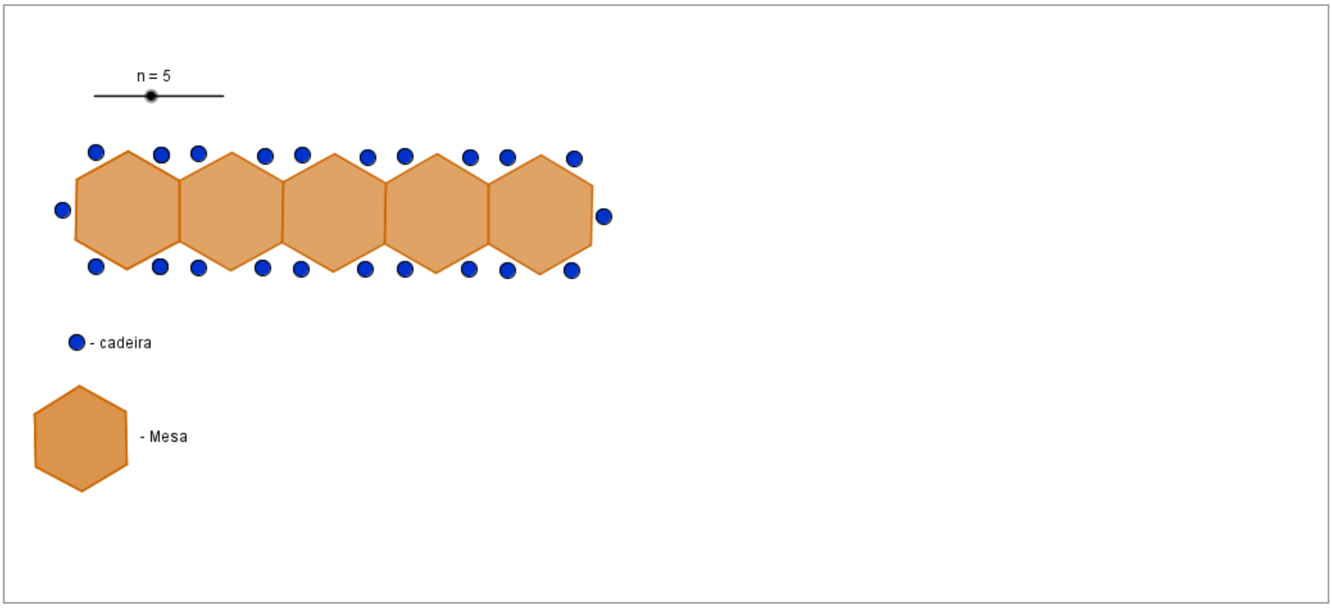


Isaac Reis, Criado com

GeoGebra

Figura 20 – 2º Applet da sequência de mesas

Festa de Aniversário



Isaac Reis, Criado com

GeoGebra

Figura 21 – 3º Applet da sequência de mesas

3.2.7. Tarefa 4: "Sequências numéricas"

1. Determina os cinco primeiros termos de cada uma das Sequências seguintes, a partir os seus termos gerais:

1.1. $\boldsymbol{2n}$

1.2. $\boldsymbol{3n-4}$

1.3. $\boldsymbol{-5n+2}$

1.4. $\boldsymbol{7-4n}$

1.5. $\boldsymbol{\frac{1}{4}n+3}$

1.6. $\boldsymbol{\frac{1}{2n}}$

1.7. $\boldsymbol{\frac{2n}{n+1}}$

1.8. $\boldsymbol{\frac{n-1}{n+4}}$

2. Considera a sequência de termo geral $\boldsymbol{2n-1}$.

2.1. Determina o termo de ordem 25 da sequência.

2.2. Determina o trigésimo primeiro termo da sequência.

2.3. O número 21 é termo da sequência? Explica o teu raciocínio.

2.4. O número 30 é termo da sequência? Explica o teu raciocínio.

3. Nas alíneas seguintes encontram-se diversas Sequências numéricas. Para cada uma delas indica os próximos dois termos e o termo geral.

3.1. 3, 6, 9, 12, …

3.2. 5, 7, 9, 11, …

3.3. -2, 0, 2, 4, …

3.4. 1, 4, 9, 16, …

3.5. 1, 8, 27, 64, …

3.6. $\boldsymbol{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}}, \ldots$

3.7. $\boldsymbol{1, \frac{4}{3}, \frac{6}{4}, \frac{8}{5}}, \ldots$

Adaptado de (Ponte, Matos, & Branco, Materiais de apoio ao Professor com tarefas para o 3º ciclo - 7º Ano, 2009, p. 34)

3.2.8. Considerações sobre a Tarefa 4: "Sequências Numéricas"

Nesta tarefa os alunos verificarão se alguns números são, ou não, termos de uma sequência numérica. Ainda na resolução da tarefa, para determinar o termo geral das Sequências, poderá ser importante a utilização de tabelas na exploração das Sequências numéricas, facilitando a construção de uma relação entre a ordem e o termo.

Conhecimentos prévios dos alunos

- Determinar o termo seguinte (ou o anterior) a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação.
- Determinar termos de ordens variadas de uma sequência, sendo conhecida a lei de formação.
- Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica.
- Identificar e dar exemplos de frações equivalentes a uma dada fração na sua forma irredutível.

Objetivos específicos

- Explorar Sequências envolvendo frações.
- Formular e testar conjeturas.
- Exprimir resultados, processos e ideias Matemáticas, oralmente e por escrito, usando notação, simbologia e vocabulário próprio.

Desenvolvimento da tarefa

- Trabalho de Pares ou em pequenos grupos.
- Duração total da Tarefa: 90 minutos, sendo:
    - ✓ Apresentação da Tarefa – 5 minutos;
    - ✓ Trabalho Autónomo dos alunos – 40 minutos;
    - ✓ Apresentação e discussão de resultados – 30 minutos;
    - ✓ Síntese Final – 15 minutos.

Capacidades transversais: Raciocínio e comunicação Matemática.

3.2.9. Tarefa 5: "Construindo Torres"

As quatro primeiras figuras de uma sequência estão representadas de seguida.

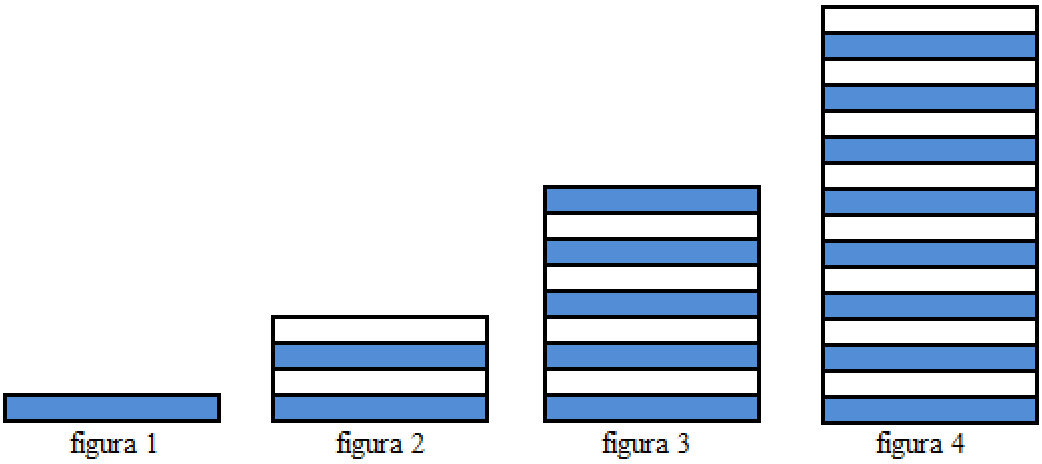


Figura 22 – Sequência de Torres

a) Desenha a figura 5 desta sequência. Quantos retângulos tem esta figura?

b) Completa a seguinte tabela:

Ordem do Termo (n.º de ordem da figura)	1	2	3	4	5	6
Termo (n.º de retângulos da figura)	1	4				

c) Escreve uma expressão algébrica que permita determinar o número de retângulos em cada uma das figuras. Explica o teu raciocínio.

d) Utiliza a expressão que escreveste na alínea anterior para determinar o número de retângulos da figura 11.

e) O número 199 será termo da sequência? Explica o teu raciocínio.

f) Qual será a ordem do termo 289? Explica o teu raciocínio.

3.2.10. Considerações sobre a Tarefa 5: "Construindo Torres"

Esta tarefa permite a conexão com o tema Números e operações, pois aborda as noções de quadrado perfeito e raiz quadrada.

Nesta tarefa os alunos tentarão resolver as alíneas construindo figuras suficientes para poderem retirar conclusões. Nesta fase, o docente deve propor aos alunos a utilização de um processo alternativo, tentando descobrir uma regra que permita retirar as mesmas conclusões.

<u>Conhecimentos prévios dos alunos</u>

- Compreender a noção de quadrado perfeito.
- Identificar Sequências e regularidades numéricas e não numéricas.
- Determinar o termo seguinte a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação.
- Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica.

<u>Objetivos específicos</u>

- Compreender a noção de termo geral de uma sequência numérica e representá-lo usando símbolos matemáticos adequados.
- Determinar o termo geral de uma sequência numérica e termos de várias ordens a partir do termo geral.
- Explicar e justificar ideias, processos e resultados matemáticos.
- Formular e testar conjeturas e generalizações fazendo deduções informais.
- Discutir ideias, processos e resultados matemáticos.

<u>Desenvolvimento da tarefa</u>

- Trabalho de Pares ou em pequenos grupos.
- Duração total da Tarefa: 90 minutos, sendo:
    - ✓ Apresentação da Tarefa – 5 minutos;
    - ✓ Trabalho Autónomo dos alunos – 45 minutos;
    - ✓ Apresentação e discussão de resultados – 30 minutos;
    - ✓ Síntese Final – 10 minutos.

<u>Capacidades transversais:</u> Raciocínio e comunicação Matemática.

3.2.11. Tarefa 6:"Brincando com Legos"

A Joaninha tem uma caixa de legos todos do mesmo tamanho, azuis e amarelos. Com eles construiu a seguinte sequência de figuras, que seguem a mesma lei de formação.

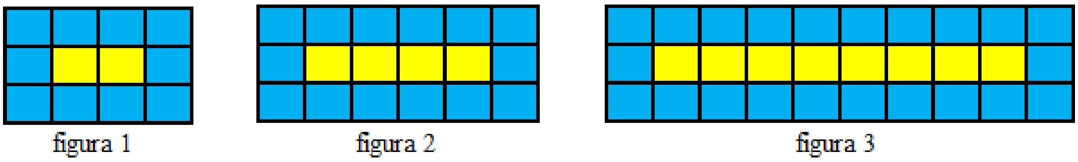


Figura 23 – Sequência de legos

a) Quantas peças de lego amarelas terá a Joaninha utilizado para construir a 4ª figura?

b) Completa a seguinte tabela:

N.º da figura	1	2	3	4	5	6
N.º de peças de lego amarelas utilizadas						

c) Escreve o termo geral da sequência das peças de lego amarelas utilizadas.

d) Existirá alguma figura da sequência formada por 128 legos amarelos? Explica o teu raciocínio.

e) Existirá alguma figura da sequência formada por 180 legos amarelos? Explica o teu raciocínio.

f) Completa a seguinte tabela:

N.º da figura	**N.º de peças de lego azuis utilizadas**
1	
2	
3	
4	
…	
n	$2^{n+1} + 6$

g) Determina o número de peças de lego azuis utilizadas para construir a 11ª figura.

3.2.12. Considerações sobre a Tarefa 6: "Brincando com Legos"

Nesta tarefa a formulação e o teste de conjeturas assumem um papel importante.

Os alunos utilizarão estratégias muito diferenciadas para poderem retirar conclusões. O Docente deve garantir que as diferentes estratégias utilizadas sejam apresentadas e comparadas, promovendo a discussão entre os diferentes grupos. É importante que os alunos contactem com diferentes tipos de representações, devendo o Docente alertar para o facto de certas representações, em determinadas situações, serem mais indicadas do que outras.

<u>Conhecimentos prévios dos alunos</u>

- Compreender a noção de potência de um número.
- Identificar Sequências e regularidades numéricas e não numéricas.
- Determinar o termo seguinte a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação.
- Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica.

<u>Objetivos específicos</u>

- Compreender a noção de termo geral de uma sequência numérica e representá-lo usando símbolos matemáticos adequados.
- Determinar o termo geral de uma sequência numérica e termos de várias ordens a partir do termo geral.
- Explicar e justificar ideias, processos e resultados matemáticos.
- Formular e testar conjeturas e generalizações fazendo deduções informais.
- Discutir ideias, processos e resultados matemáticos.

<u>Desenvolvimento da tarefa</u>

- Trabalho de Pares ou em pequenos grupos.
- Duração total da Tarefa: 90 minutos, sendo:
    - ✓ Apresentação da Tarefa – 5 minutos;
    - ✓ Trabalho Autónomo dos alunos – 45 minutos;
    - ✓ Apresentação e discussão de resultados – 30 minutos;
    - ✓ Síntese Final – 10 minutos

<u>Capacidades transversais:</u> Raciocínio e comunicação Matemática.

3.2.13. Tarefa 7: "O Mealheiro"

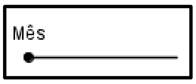
(Tarefa com uso de computadores, com recurso ao Geogebra e a um applet criado para o efeito, denominado "Mealheiro")

No ambiente de trabalho, faz um duplo clique sobre o ícone que diz "Mealheiro".

No início do ano, o Pai da Joaninha resolveu colocar no seu mealheiro, por mês, moedas de 1€, seguindo uma determinada lei de formação, conforme as figuras sugerem.

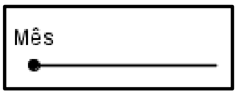
Figura 24 – Sequência de moedas

a) Quantas moedas é que o pai da Joaninha lhe dará em Abril? E em Maio?

Confirma no computador se as tuas figuras estão corretas. Para tal, clica no botão 

de modo a que a figura apresentada fique com o aspeto da Figura 3 representada acima. Clica depois mais 2 vezes para verificares como serão as 2 figuras seguintes da sequência.

b) Em que mês é que o pai da Joaninha lhe dará 64 moedas?

Confirma no computador se acertaste. Para tal, clica no botão 

até teres uma figura com 64 moedas.

c) Escreve, na forma de potência de base dois, o número de moedas que o pai lhe dará em Fevereiro.

d) Escreve, na forma de potência de base dois, o número de moedas que o pai lhe dará em Março.

e) Descreve uma regra que permita determinar o número de moedas que a Joaninha terá por mês.

f) Se representares por n o número de meses (por exemplo, Janeiro corresponde a $n = 1$, Fevereiro a $n = 2$, …), escreve uma expressão algébrica que represente o número de moedas que a Joaninha receberá por mês.

g) Quantas moedas lhe dará o seu pai em Outubro?

h) No final do ano quanto recebeu?

3.2.14. Considerações sobre a Tarefa 7: “O Mealheiro”

Na realização desta tarefa os alunos utilizarão um applet do Geogebra, como auxílio para a determinação dos termos e do termo geral de uma sequência.

Os alunos utilizarão estratégias muito diferenciadas para poderem retirar conclusões. O Docente deve garantir que as diferentes estratégias utilizadas sejam apresentadas e comparadas, promovendo a discussão entre os diferentes grupos, nomeadamente, na análise às relações entre termos, de modo aos alunos indicarem o termo geral da sequência, utilizando linguagem simbólica.

Conhecimentos prévios dos alunos

- Compreender a noção de potência de um número.
- Identificar Sequências e regularidades numéricas e não numéricas.
- Determinar o termo seguinte a um dado termo e ampliar uma sequência numérica, conhecida a sua lei de formação.
- Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica.

Objetivos específicos

- Compreender a noção de termo geral de uma sequência numérica e representá-lo usando símbolos matemáticos adequados.
- Determinar o termo geral de uma sequência numérica e termos de várias ordens a partir do termo geral.
- Explicar e justificar ideias, processos e resultados matemáticos.
- Formular e testar conjeturas e generalizações fazendo deduções informais.
- Discutir ideias, processos e resultados matemáticos.

Desenvolvimento da tarefa

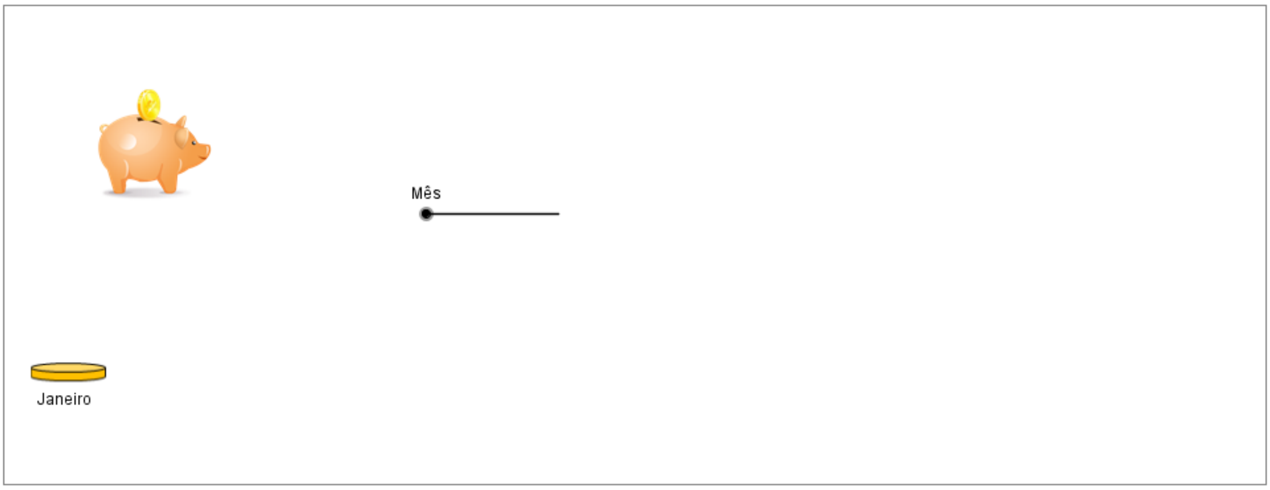
- Trabalho de Pares ou em pequenos grupos.
- Duração total da Tarefa: 60 minutos, sendo:
  - ✓ Apresentação da Tarefa – 5 minutos;
  - ✓ Trabalho Autónomo dos alunos – 30 minutos;
  - ✓ Apresentação e discussão de resultados – 15 minutos;
  - ✓ Síntese Final – 10 minutos

<u>Capacidades transversais</u>

- Raciocínio matemático.
- Comunicação Matemática.
- Resolução de problemas.

Applet da tarefa

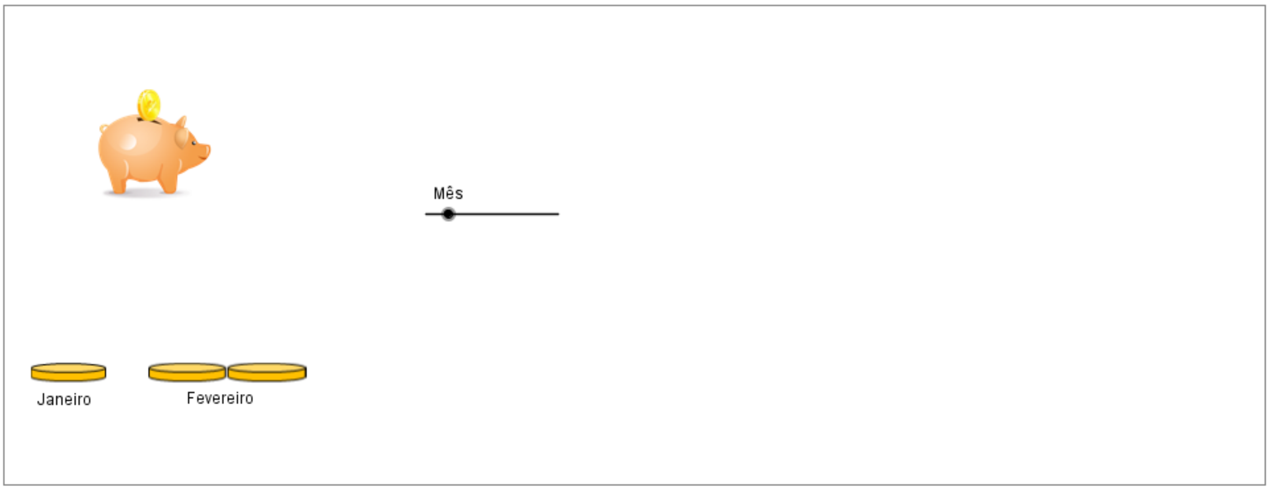
O Mealheiro



Isaac Reis, Criado com GeoGebra

Figura 25 - 1º Applet da sequência de moedas

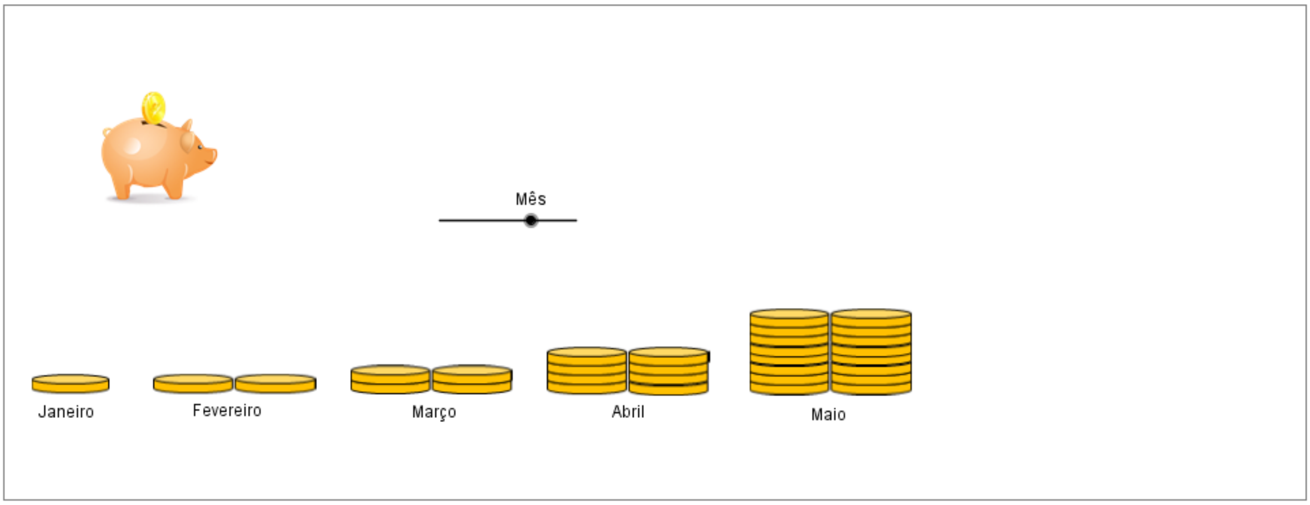
O Mealheiro



Isaac Reis, Criado com GeoGebra

Figura 26 – 2º Applet da sequência de moedas

O Mealheiro



Isaac Reis, Criado com

GeoGebra

Figura 27 – 3º Applet da sequência de moedas

CAPÍTULO 4 – Conclusões e Trabalho Futuro

> *"Os alunos terão mais sucesso com um programa de Matemática que incentive o seu desejo natural de compreender aquilo que lhes é pedido para aprender"* (NCTM, 2007, p.22).

Aprender Matemática é essencialmente aprender uma determinada forma de pensar.

Com o trabalho que desenvolvemos fizemos uma análise detalhada das metodologias e finalidades propostas no Programa de Matemática do Ensino Básico, mais especificamente no que se refere ao desenvolvimento do tópico das Sequências.

Introduzir cada tema em estudo como uma "exploração única", fortalecer a autonomia dos alunos com a realização de cada tarefa proposta e, transmitir o gosto pelo estudo da Matemática são, concerteza, os desafios mais entusiasmantes com que todos os Professores se deparam no seu dia a dia. Esses objetivos só serão atingidos na sua plenitude através de muita dedicação, rigor, pesquisa e atualização constante, por parte de cada um de nós, ou seja uma busca incessante de conhecimento Matemático.

Com a realização deste trabalho pudemos aprofundar o conhecimento do Programa de Matemática do Ensino Básico, bem como, os seus princípios fundamentais e metodologias propostas, que consideramos uma mais-valia para enriquecer quer as práticas letivas, quer as aprendizagens que todos os dias proporcionamos aos nossos alunos.

Consideramos que o Programa de Matemática do Ensino Básico é uma oportunidade única de mudança no ensino da Matemática, permitindo que os nossos alunos aprendam muito mais com as suas explorações e descobertas, incentivando também os Professores a tornarem os seus alunos mais ativos e construtores da sua própria aprendizagem, promovendo *"uma educação em Matemática, sobre a Matemática e através da Matemática, contribuindo para a formação geral do aluno"* (Ponte, Matos, & Branco, 2009b, p. 59).

Limitações do estudo

Chegados à fase final deste trabalho consideramos que, a realização de um estudo mais aprofundado sobre o desenvolvimento do tópico Sequências no Novo Programa do 3º ciclo do Ensino Básico cumpriu os objetivos inicialmente definidos.

Complementamos ainda, este estudo com a proposta de tarefas que visam, o desenvolvimento deste tópico segundo as orientações do Programa de Matemática do Ensino Básico.

As tarefas apresentadas, têm uma vertente de exploração e descoberta que, com certeza, conduzirão os alunos a aprendizagens Matemáticas ricas, de forma motivante.

Estamos certos que estas tarefas constituirão um excelente recurso, para o desenvolvimento deste tópico e, para que todos os objetivos definidos para cada tarefa sejam atingidos, é também apresentada uma sugestão de planificação e orientações para a aplicação de cada uma delas.

Contudo, pensamos que, uma das lacunas deste trabalho, advém do facto de não ter sido possível aplicar estas tarefas em sala de aula. Dessa forma a análise/previsão dos resultados obtidos teria sido mais exata. Embora tentada, essa aplicação não foi possível, pois durante o desenvolvimento deste trabalho, não me foram atribuídos níveis, que me permitissem lecionar estes conteúdos e consequentemente aplicar as tarefas propostas.

Por último, devo referir que este trabalho foi mais um passo no processo contínuo de crescimento e aprendizagem como pessoa, professor e educador. A análise aprofundada do Programa de Matemática do Ensino Básico, suas metodologias e orientações, mudou a minha perspetiva do papel que o Professor tem na sala de aula e mais especificamente na aprendizagem dos alunos. Deste modo, sinto que hoje, desempenho melhor as minhas funções docentes, estando certo que este caminho de aprendizagem não termina aqui.

Recomendações para trabalhos futuros

Os conhecimentos produzidos a partir deste trabalho representam o ponto de partida para o desenvolvimento do tópico Sequências, segundo as orientações do Novo Programa do 3º ciclo do Ensino Básico.

Em termos de propostas para trabalhos futuros, existem muitas linhas de desenvolvimento que podem ser seguidas. Assim, outras recomendações decorrentes deste trabalho referem-se a:

- Aplicação das tarefas propostas para o desenvolvimento do tópico Sequências, a alunos do 7º ano, seguida de posterior análise e reflexão dos resultados obtidos;
- Aplicação de tarefas, a alunos do 8º ano, de modo a desenvolver intuitivamente a noção de limite;
- Aprofundamento do tema "Sucessões" do 11º e 12º anos, segundo a perspetiva de aprendizagem por tarefas de Investigação e Exploração.

BIBLIOGRAFIA

APM, Associação de Professores de Matemática. (1995). *Renovação de Currículo de Matemática* (4ª ed.). Lisboa: Edições APM.

Apostol, T. M. (1979). *Cálculo: Cálculo com funções de uma variável, com uma introdução à Álgebra Linear* (2ª ed., Vol. 1). Barcelona: Reverté, Ltda.

Boavida, A. M., Paiva, A. L., Cebola, G., Vale, I., & Pimentel, T. (2008). *A Experiência Matemática no Ensino Básico.* Portugal: Direção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular; Ministério da Educação.

Boyer, C. B. (1993). *História da Matemática* (2ª ed.). (E. F. Gomide, Trad.) São Paulo: Edgard Blücher.

Calado, J. J. (1952). *Compêndio de Álgebra - 2º Ciclo.* Lisboa: Livraria Popular de Francisco Franco.

Caraça, B. J. (1998). *Conceitos Fundamentais da Matemática.* Lisboa: Gradiva.

Carvalho, R. M. (2007). *História da Matemática. A invenção do Cálculo por Newton e Leibniz e sua evolução para o Cálculo Contemporâneo. (Monografia de Especialização em Matemática para Professores, Universidade Federal de Minas Gerais).*

Estrada, M. F., Sá, C. C., Queiró, J. F., Silva, M. d., & Costa, M. J. (2004). *História da Matemática* (1ª ed.). Lisboa: Universidade Aberta.

Eves, H. (1995). *Introdução à História da Matemática* (6ª ed.). (H. D. Hygino, Trad.) São Paulo, Campinas: UNICAMP.

Faria, L., Guerreiro, L., & Almeida, P. R. (2010). *Matemática Dinâmica 7* (1ª ed., Vol. 1). Porto: Porto Editora.

Guerreiro, J. S. (1981). *Curso de Matemáticas Gerais* (Vols. 1 - Conjuntos. Noções de Álgebra). Lisboa: Livraria Escolar.

Jerónimo, A. A. (1995). *Elementos Cálculo Diferencial e Integral em* R^n. Lisboa: McGraw-Hill.

Jorge, A. M., Alves, C. B., Coruchinho, C., Fonseca, G., Barbedo, J., & Simões, M. (2011). *Matemática A - 11* (1ª ed., Vol. 3). Porto: Areal Editores.

Lima, E. L. (1992). *Curso de Análise.* Rio de Janeiro.

Marques, M., & Ferreira, P. (2010). *Matemática 7º Ano* (1ª ed., Vol. 1). Lisboa: Santillana.

Ministério da Educação. (2001). *Currículo Nacional do Ensino Básico. Competências Essenciais.* Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

Monteiro, A. J. (1980). *Álgebra Linear e Geometria Analítica.* Lisboa: Associação de Estudantes da FCL.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar. [Tradução Portuguesa da edição original, Principles and Standars for School Mathematics, 2000].* Lisboa: APM.

Neves, M. A., Leite, A., Silva, A. P., & Silva, J. N. (2010). *Matemática 7* (1ª ed., Vol. 1). Porto: Porto Editora.

Neves, M. A., Pereira, A., & Silva, J. N. (2011). *Matemática A - 11º Ano* (1ª ed., Vol. 3). Porto: Porto Editora.

Passos, I. C., & Correia, O. F. (2010). *Matemática em acção 7* (1ª ed., Vol. 1). Lisboa: Lisboa Ediora.

Piskounov, N. (1978). *Cálculo Diferencial e Integral* (Vol. 2). Porto: Edições Lopes da Silva.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), O professor e o desenvolvimento. Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., et al. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Portugal: Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular . Ministério da Educação.

Ponte, J. P., Matos, A., & Branco, N. (2009a). *Álgebra no Ensino Básico.* Portugal: Direcção Geral de Inovação e de desenvolvimento Curricular ; Ministério da Educação.

Ponte, J. P., Matos, A., & Branco, N. (2009b). *Materiais de apoio ao Professor com tarefas para o 3º ciclo - 7º Ano.* Portugal: Direcção Geral de Inovação e de desenvolvimento Curricular ; Ministério da Educação.

Santos, F. B. (2008). *Sebenta de Matemáticas Gerais. Sucessões e Séries* (13ª ed., Vol. 1). Lisboa: Plátano Editora.

Silva, J. C. (1994). *Princípios de Análise Matemática Aplicada.* Lisboa: McGraw-Hill.

Silva, J. C., Pinto, J., & Machado, V. (2011). *ALEPH 11* (1ª ed., Vol. 3). Lisboa: Asa.

Silva, J. S., & Paulo, J. D. (1968). *Compêndio de Álgebra - 6º ano* (Vol. 1º). Braga: Livraria Cruz.

WEBGRAFIA

Lima, V. S., Silva, A. R., Côa, A., Carrara, A., & Furlan, C. R. (s.d.). *Progressões aritméticas e geométricas: história e conceitos.* Disponível em http://www.somaticaeducar.com.br/arquivo/ material/112008-08-23-19-28-11.pdf. Acedidoem 24 de Março de 2010.

Pombo, O. (2004). *A Harmonia dos Pitagóricos.* Disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/ opombo/seminario/musica/pitagoras.htm. Acedido em 12 de Novembro de 2011.

Sampaio, J. C. (s.d.). *O ensino da álgebra elementar através de sua história.* Disponível em http://www.dm.ufscar.br/~sampaio/sequencias.PDF. Acedido em 15 de Dezembro de 2011.

Varandas, J. M. (2002). *Matemáticos Gregos.* Disponível em http://www.educ.fc.ul.pt/icm/ icm2001/icm23/biografiadiofanto.htm. Acedido em 13 de Novembro de 2011.