

Francisco José da Silva Ferreira Marinho

Difracção espacial e dispersão temporal: estudo unificado

*Tese submetida à Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
para obtenção do grau de Doutor em Física*

Elaborada sob orientação do Prof. Doutor Luís Miguel Bernardo, Professor Catedrático do Departamento de Física da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, e co-orientação do Prof. Doutor José Manuel Marques Martins de Almeida, Professor Associado do Departamento de Física da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro.

Departamento de Física da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro
Vila Real, 4 de Outubro de 2007

Para a Helena, Francisca e Raul.

Agradecimentos

Ao meu orientador Prof. Doutor Luís Miguel Bernardo pela confiança depositada em mim ao aceitar-me como seu aluno de doutoramento. Pela disponibilidade, sempre presente, para ajudar nos períodos mais difíceis. Pela paciência infinita que demonstrou, mesmo quando eu não conseguia cumprir com o prometido. E em especial por ter partilhado comigo o seu conhecimento científico, sem o qual esta trabalho de tese não teria sido possível.

Ao Prof. Doutor José Manuel Almeida pelo seu apoio e amizade. E pela sua insistência, porque se não fosse por ela, provavelmente, ainda não teria iniciado este trabalho.

Ao Centro de Lasers e Óptica Quântica - CLOQ, na pessoa do seu director, pela disponibilidade facultada das suas instalações e meios.

Aos colaboradores do CLOQ, pelas inúmeras trocas de ideias e sugestões.

À Senhora Engenheira Noémia Portugal, minha querida Sogra, pelas suas valiosíssimas sugestões.

À Helena por me aturar nos momentos de mau humor.

À minha Mãe por se preocupar.

Resumo

Neste trabalho de Tese é feito um estudo teórico da propagação da radiação electromagnética em dois regimes ópticos distintos; no regime da difracção espacial de ondas luminosas monocromáticas e no regime da propagação de impulsos ópticos ultracurtos em meios dispersivos. O estudo é feito dentro de uma perspectiva unificadora, onde se demonstra que a propagação nos dois regimes é formalmente equivalente, isto é, demonstra-se que existe uma analogia perfeita entre a propagação nos dois regimes - analogia DEDT, resolvendo-se, assim, a limitação existente na analogia DEDT primitiva, a qual só é válida dentro da aproximação de 2ª ordem na dispersão temporal.

Relacionado com a analogia DEDT, foi também realizado um estudo da lente temporal electro-óptica, onde se propõe um modelo teórico mais realista, relativamente ao modelo existente até à data. O modelo primitivo só é válido para impulsos de duração superior a 1ps e na condição de existir um ajuste perfeito entre a velocidade de grupo do impulso e a velocidade de fase da micro-onda. O modelo proposto neste trabalho é válido para impulsos com durações de sub-picosegundos, tem em conta o possível desajuste das velocidades e possibilita caracterizar convenientemente o funcionamento da lente, em particular a definição dos coeficientes de aberração. Demonstra-se, também, que a lente temporal electro-óptica é formalmente equivalente, no regime da difracção espacial, à lente espacial GRIN (*GRIN - graded index*). O estudo da lente temporal electro-óptica é complementado com a demonstração do seu funcionamento por simulação numérica.

Abstract

This Thesis presents a theoretical study of the electromagnetic radiation propagation in two distinct optical regimes; in the space diffraction regime of monochromatic light waves and in the dispersive media propagation regime of ultrashort optical pulses. The study is made under a unifying perspective, where it is demonstrated that the propagation in both regimes is formally equivalent, in other words, it is shown the existence of a perfect analogy between the propagation in the two regimes – space diffraction/time dispersion (SDTD) analogy. In this way, it is overcome the limitation of the primitive SDTD analogy, which is only valid under the second order dispersion approximation.

Related to the SDTD analogy, it is also made a study of the electro-optic time lens, where it is proposed a more realistic theoretical model relatively to the previously existing one. This last model is only valid for above 1 ps pulses and in the case of existence of a perfect match between the pulse group velocity and the micro-wave phase velocity. The proposed model is suitable for sub-picosecond pulses; it takes in account the possible velocities mismatch and it allows the appropriate function characterization of the lens, particularly the definition of the aberration coefficients. It is also demonstrated that the electro-optic time lens is formally equivalent, in the space diffraction regime, to the GRIN space lens (GRIN - graded index). The study of the electro-optic time lens is complemented with the demonstration of its operation through numerical simulation.

Trabalhos publicados

Artigos em revistas científicas internacionais:

- *Extended analogies between time-dispersion and space-diffraction propagations*, Francisco J. Marinho, Luis M. Bernardo, J. Opt. Soc. Am. A 23(9), 2331-2334, Setembro 2006.
- *Graded-index time-lens implementation*, Francisco J. Marinho, Luis M. Bernardo, Optics Letters 31(11), 1723-1725, Junho 2006.

Apresentações orais em conferências internacionais:

- *Electrooptic Time Lens Model for Femtosecond Pulses*, Francisco J. Marinho, Luis M. Bernardo, aceite na Conferência da SPIE - *Photonics Europe 2008*.
- *Electro-optic graded-index time-lens*, Francisco J. Marinho e Luis M. Bernardo, SEON 2006 - *IV Symposium on Enabling Optical Networks and Sensors*, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, Junho 2006.

Apresentação oral em conferência nacional:

- *Estudo da analogia entre a difracção espacial e a dispersão temporal*, Francisco J. Marinho, Luis M. Bernardo, III Jornadas IFIMUP 2007 - Instituto de Física dos Materiais da Universidade do Porto, Maio 2007.

Poster em conferência nacional:

- *Lente electro-óptica temporal: modelo e características*, Francisco J. Marinho, Luis M. Bernardo, Conferência Nacional de Física, Aveiro, Setembro 2006.

Conteúdo

Resumo	vii
Abstract	ix
Trabalhos publicados	xi
Conteúdo	xv
Lista de Tabelas	xvii
Lista de Figuras	xxi
1. Introdução	1
1.1 Motivação	2
1.2 Estrutura do trabalho	3
1.3 Fundamentos teóricos da difracção e dispersão	4
1.3.1 Equação de onda escalar	4
1.3.2 Aproximação da variação lenta da envolvente	6
2. Analogia entre a difracção espacial e a dispersão temporal	9
2.1 Equação diferencial de propagação em meios dispersivos	10
2.2 Teoria escalar da difracção - Aproximação de Huygens-Fresnel	12
2.2.1 Aproximação de Fresnel	14
2.3 Equação diferencial da difracção - aproximação paraxial	15
2.4 Equação diferencial da difracção - fora de eixo	16
2.4.1 Propagação na direcção \mathbf{k}_0 de um sinal a 1-D	21
2.4.2 Propagação na direcção \mathbf{k}_0 de um sinal 2D	22

2.4.3	Validade da expansão em série de Taylor de $\beta(\mathbf{k}_\perp)$	23
2.4.4	Integral de propagação - fora de eixo	29
2.5	Analogia entre a difracção espacial e a dispersão temporal	30
2.5.1	Analogia DEDT primitiva	30
2.5.2	Extensão à analogia DEDT primitiva	31
2.6	Conclusão	34
3.	Lente temporal	35
3.1	Lente temporal “delgada”	36
3.1.1	Lente temporal electro-óptica “delgada”	37
3.1.2	Lente temporal paramétrica	39
3.2	Lente espacial GRIN	41
3.2.1	Lente espacial GRIN - aproximação paraxial	44
3.2.2	Lente espacial GRIN - sistema processador de sinais	45
3.3	Lente temporal electro-óptica	48
3.3.1	Lente temporal GRIN ideal	49
3.3.2	Lente temporal GRIN não ideal	53
3.3.3	Coefficientes de aberração da lente temporal electro-óptica	59
3.3.4	Importância da diferença de velocidades $v_g - v_M$ na lente temporal electro-óptica	63
3.3.5	Justificação para o uso de modos centrados com a lente $\phi_n(\tau - \alpha\xi)$	65
3.4	Conclusão	67
4.	Simulações	69
4.1	Simulação da propagação fora de eixo em difracção	69
4.2	Representação modal de um impulso	74
4.3	Lente temporal electro-óptica de Niobato de Lítio	79
4.3.1	Variação da escala da lente temporal electro-óptica	79
4.3.2	Lente temporal electro-óptica: Processador de sinal	82
4.3.3	Importância dos coeficientes de aberração	88
4.3.4	Importância da diferença nas velocidades de grupo do impulso e de fase da micro-onda	92
4.4	Conclusão	98
5.	Conclusões Finais	99
5.1	Considerações finais e perspectivas de trabalho	101

A. Convenções usadas	103
B. Solução da equação de difusão	105
C. Função Hermite-Gaussiana - Definição e Propriedades	107
D. Implementação numérica do modelo da lente temporal electro-óptica	109
Referências	117

Lista de Tabelas

2.1	Número de termos a incluir na expansão de $\beta(k_x)$	29
2.2	Resumo da analogia DEDT primitiva; relação entre os vários parâmetros dos dois fenômenos. GVD - dispersão da velocidade de grupo (<i>Group Velocity Dispersion</i>).	31
2.3	Resumo da extensão à analogia DEDT primitiva; relação entre os vários parâmetros dos dois fenômenos. GVD - <i>Group Velocity Dispersion</i> , TOD - <i>Third Order Dispersion</i>	32
3.1	Tabela de correspondência entre parâmetros da lente espacial GRIN e da lente temporal GRIN.	52

Lista de Figuras

1.1	Esquema da analogia DEDT primitiva	2
2.1	Geometria de difracção.	13
2.2	Relações geométricas entre os vectores associados à propagação na direcção \mathbf{k}_0	17
2.3	Relações geométricas entre os vectores associados à propagação da frequência espacial \mathbf{k} em torno de \mathbf{k}_0	20
2.4	Coordenadas espaciais locais	21
2.5	Estudo da propagação da função de transmitância $A(x)$ quando iluminada por uma onda plana de direcção \mathbf{k}_0	24
2.6	Variação da grandeza relativa δ_{32}	27
2.7	Variação da grandeza relativa δ_{42}	27
2.8	Variação da grandeza relativa δ_{52}	28
2.9	Relação de dispersão geométrica	33
3.1	Meio GRIN.	42
3.2	Meio GRIN como sistema óptico processador de sinal.	46
3.3	Meio GRIN como lente.	47
3.4	Sistema óptico temporal formador de imagem	51
3.5	Variação relativa dos quatro primeiros coeficientes de aberração D_m^{2j} ($j = \pm 1, \pm 2$) em função do parâmetro $\omega_M \sigma_\tau$	61
3.6	Variação relativa dos quatro primeiros coeficientes de aberração D_m^{2j} ($j = \pm 1, \pm 2$) em função do parâmetro $\omega_M \sigma_\tau$ para as ordens $m = \{10, 100\}$	62
4.1	Perfil de intensidade da propagação de uma função rectângulo de largura $a = 50 \mu\text{m}$; $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ e $\gamma = 6^\circ$. Nos dois gráficos os três perfis são praticamente coincidentes; daí só ser visível o perfil a vermelho. (a) $N_f = 1$; (b) $N_f = 10$	71
4.2	Perfil de intensidade da propagação de uma função rectângulo de largura $a = 50 \mu\text{m}$; $\lambda = 0,6328 \mu\text{m}$ e $\gamma = 32^\circ$. (a) $N_f = 1$ (os perfis a verde e vermelho são praticamente coincidentes); (b) $N_f = 10$	72

4.3	Perfil de intensidade da propagação de uma função rectângulo de largura $a = 50 \mu\text{m}$; $\lambda = 0,6328 \mu\text{m}$ e $\gamma = 48^\circ$. (a) $N_f = 1$ (os perfis a verde e vermelho são praticamente coincidentes); (b) $N_f = 10$	73
4.4	Coefficientes de projecção de vários perfis do impulso nas funções próprias HG. (a) perfil Gaussiano; (b) perfil sech.	76
4.5	Representação do perfil do impulso em função do número de modos HG	77
4.6	Variação do parâmetro de escala da lente temporal electro-óptica σ_τ em função da frequência da micro-onda moduladora ω_M e da frequência portadora do impulso ω_0 para: (a) $\Delta n_0 = 10^{-6}$; (b) $\Delta n_0 = 10^{-4}$	80
4.7	Variação do parâmetro $\omega_M \sigma_\tau$ da lente temporal electro-óptica em função da frequência da micro-onda moduladora ω_M e da frequência portadora do impulso ω_0 para: (a) $\Delta n_0 = 10^{-6}$; (b) $\Delta n_0 = 10^{-4}$	81
4.8	Variação do logaritmo da distância de Fourier, $\log_{10}(L_F)$, da lente temporal electro-óptica de LiNbO_3 , em função da frequência da micro-onda moduladora ω_M e da frequência portadora do impulso ω_0 para $\Delta n_0 = 10^{-4}$; L_F em cm.	82
4.9	Evolução de um impulso de perfil gaussiano, $\sigma_p = 800$ fs, no interior da lente temporal electro-óptica de comprimento $2L_F$: (a) amplitude, (b) fase.	84
4.10	Evolução de um impulso de perfil gaussiano, $\sigma_p = 300$ fs, no interior da lente temporal electro-óptica de comprimento $2L_F$: (a) amplitude, (b) Fase.	85
4.11	Evolução de um impulso de perfil gaussiano, $\sigma_p = 200$ fs, no interior da lente temporal electro-óptica de comprimento $2L_F$: (a) amplitude; (b) fase.	86
4.12	Variação da fase do impulso à entrada ($z = 0$) e saída ($z = 2L_F$) da lente temporal electro-óptica, referente às Figs. 4.10-4.11: (a) $\sigma_p = 200$ fs, (b) $\sigma_p = 300$ fs.	87
4.13	Variação da diferença na amplitude do impulso entre os três modelos de lente temporal electro-óptica para $\sigma_p = 6$ ps: (a) parabólico - 1ª ordem, (b) 1ª ordem - 2ª ordem.	89
4.14	Variação da diferença na amplitude do impulso entre os três modelos de lente temporal electro-óptica para $\sigma_p = 1$ ps: (a) parabólico - 1ª ordem, (b) 1ª ordem - 2ª ordem.	90
4.15	Fase do impulso para os três modelos de lente temporal electro-óptica para $z = 7.78$ cm: (a) $\sigma_p = 6$ ps (as linhas verde e vermelha são coincidentes), (b) $\sigma_p = 1$ ps.	91
4.16	Posição do impulso à saída da lente, relativamente ao eixo da lente temporal EO. σ_p - FWHM em amplitude do impulso, α - definido pela Eq. (3.72), L - comprimento da lente e ω_M - frequência de modulação.	93
4.17	Perfil de amplitude e fase do impulso à saída da lente em função das diferenças nas velocidades para $\sigma_p = 500$ fs e $L = 5$ cm: (a) amplitude (no gráfico os perfis vermelho e verde são quase coincidentes), (b) fase.	95
4.18	Perfil de amplitude e fase do impulso à saída da lente em função do avanço temporal inicial da lente τ_0 para $\sigma_p = 500$ fs, $L = 10$ cm e $n_M = 1.004n_g$: (a) amplitude (no gráfico, os perfis azul e vermelho são coincidentes), (b) fase.	96

4.19	Representação modal do impulso à saída da lente; amplitude dos modos usados nas simulações: (a) $L = 5$ cm, (b) $L = 10$ cm e $n_M = 1.004n_g$	97
5.1	Esquema da nova analogia DEDT	100

Introdução

Quando decidi iniciar o meu trabalho de doutoramento, uma das questões que se me colocou desde o início, foi qual a área da Física mais interessante e mais motivadora para estudo e investigação no meu caso pessoal. Até à data, o meu percurso científico foi na área da óptica de Fourier e processamento óptico de informação; daí estar naturalmente inclinado a abordar um tema dentro dessa mesma área. Por outro lado, porém, o trabalho de doutoramento era um bom pretexto para iniciar o estudo numa área da Física totalmente distinta, possibilitando-me assim alargar o espectro do meu conhecimento científico.

O meu orientador, Prof. Doutor Luís Bernardo sugeriu como tema de doutoramento, estudar a relação formal entre dois regimes distintos de propagação do campo electromagnético, a propagação no regime da difracção espacial e a propagação de impulsos em meios dispersivos, visando um trabalho essencialmente teórico. A proposta deste tema veio de encontro às minhas melhores expectativas, visto que o estudo da relação formal entre os dois regimes de propagação implicava, por um lado, o estudo do fenómeno da difracção óptica o qual se enquadrava perfeitamente na minha área científica inicial, e por outro lado, surgia a possibilidade de estudar a propagação de impulsos em meios dispersivos, um assunto relativamente novo para mim.

Nesta tese são apresentados os resultados do trabalho efectuado nos últimos três anos sobre o estudo da relação formal entre a propagação no regime da difracção espacial e a propagação de impulsos ópticos no regime da dispersão temporal - analogia difracção espacial dispersão temporal (analogia DEDT).

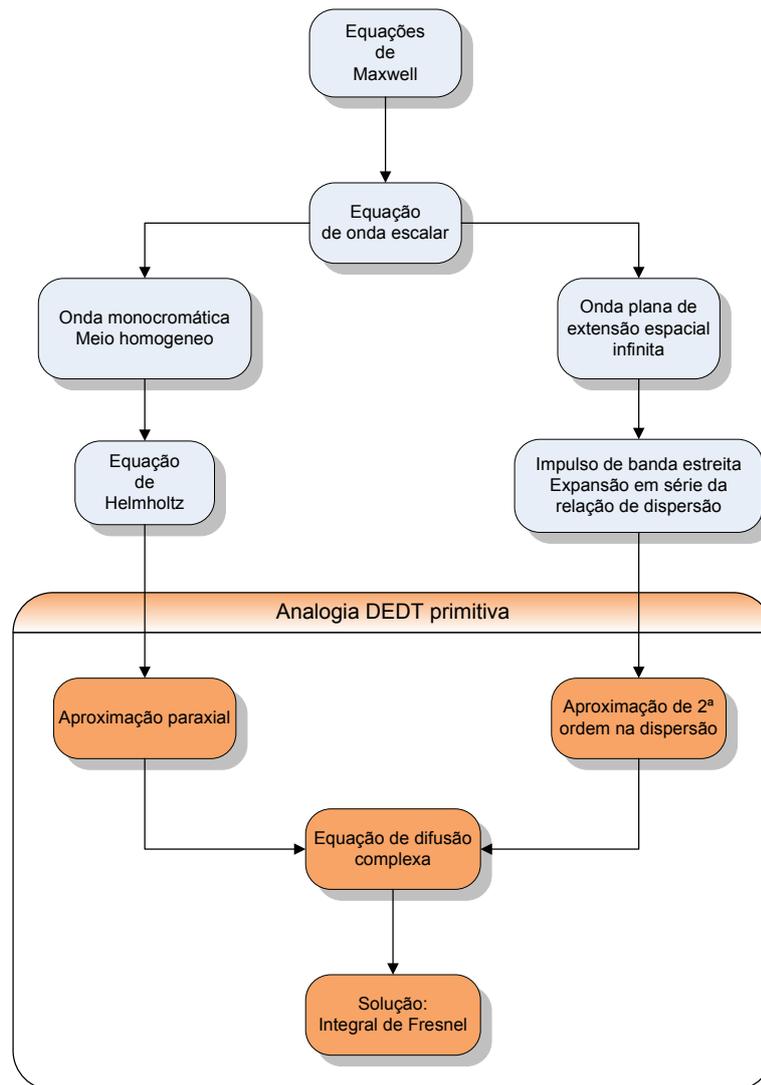


Figura 1.1: Esquema da analogia DEDT primitiva, representando-se à esquerda as concepções ligadas ao espaço e à direita as que estão relacionadas com o tempo.

1.1 Motivação

Tradicionalmente, o estudo da propagação no regime da difracção espacial e no regime da dispersão temporal é realizado de forma independente um do outro, resultando duas teorias formalmente distintas. Aparentemente, a abordagem dos fenómenos físicos nos dois regimes não apresenta grande semelhança física, dado que conceitos como, por exemplo, a relação de dispersão $n(\omega)$ não tem análogo na difracção, assim como não existe na dispersão o conceito análogo ao holograma.

No entanto, desde, pelo menos, os anos 60 do século XX [1–4] é conhecida uma analogia físico-matemática parcial entre a difracção e a dispersão, esquematizada na Fig. 1.1. Esta

analogia DEDT inicial só trouxe consequências práticas a partir dos anos 80, em parte devido à evolução no campo da geração de impulsos ópticos curtos (da ordem do picosegundo de duração) e na possibilidade prática de construir uma lente temporal [5] (lente temporal electro-óptica) análoga ao conceito de lente espacial na difracção. Desde então, a analogia DEDT tem vindo a ganhar relevância, em particular, pela introdução no domínio da dispersão de vários conceitos existentes na difracção.

Se a analogia DEDT inicial, mesmo sendo parcial, possibilitou, por exemplo, solucionar o problema da compressão/expansão de impulsos da ordem do picosegundo, indo buscar à teoria da difracção o conceito de redução/ampliação de imagem, então, é legítimo supor que uma analogia DEDT mais extensa, ou até mesmo completa, pode, em princípio, abrir um leque extenso de novas formas de abordagem do fenómeno da dispersão. Pode ainda, sendo completa, possibilitar um tratamento unificado dos dois fenómenos. Foi esta ideia que sugeriu o estudo do tema desta tese: analogia DEDT.

1.2 Estrutura do trabalho

Para além deste 1º capítulo introdutório, onde se apresentam os fundamentos teóricos comuns aos dois fenómenos físicos, difracção e dispersão, o trabalho comporta mais quatro capítulos.

No 2º capítulo, é apresentada uma extensão à analogia DEDT primitiva, na qual se demonstra existir uma analogia completa, independente do grau de aproximação que se faça, em qualquer um dos regimes de propagação, isto é, tem-se uma correspondência entre todos os parâmetros que caracterizam a propagação nos dois regimes. Consegue-se esta nova analogia, através de uma abordagem mais genérica da propagação em difracção - propagação fora de eixo.

O conceito de lente temporal é abordado no 3º capítulo, onde a lente temporal electro-óptica é estudada em pormenor. É proposto um modelo teórico para a lente temporal electro-óptica mais realista do que o existente até à data, sendo válido para impulsos sub-picosegundo de duração. Demonstra-se também que a lente temporal electro-óptica ideal é análoga na difracção à lente espacial GRIN (GRIN - *graded-index*).

No 4º capítulo é apresentado um conjunto de simulações numéricas da propagação de impulsos numa lente temporal electro-óptica, com o objectivo de caracterizar e demonstrar o funcionamento da lente. É usada nas simulações a curva de dispersão do cristal de Niobato de Lítio $LiNbO_3$, cristal normalmente usado no fabrico de lentes temporais electro-ópticas.

No último capítulo, são apresentadas as conclusões finais deste trabalho de tese e são

também feitas algumas considerações, relativamente a questões com interesse a serem abordadas no futuro.

1.3 Fundamentos teóricos da difracção e dispersão

1.3.1 Equação de onda escalar

Tanto a difracção como a dispersão têm como primeiro princípio, a teoria do electromagnetismo clássico, descrita pelas equações de Maxwell [6, 7],

$$\nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) - \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = \mathbf{J}_l, \quad (1.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0, \quad (1.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho_l, \quad (1.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (1.1d)$$

em que, \mathbf{E} , \mathbf{H} , \mathbf{D} e \mathbf{B} são, respectivamente, os vectores campo eléctrico, campo magnético, densidade de fluxo eléctrico e densidade de fluxo magnético; ρ_l e \mathbf{J}_l são, respectivamente, a densidade de cargas livres e vector densidade de corrente. A relação entre os vectores do campo e da densidade de fluxo resulta da resposta do meio à presença do campo electromagnético, dada por

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad (1.2a)$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{M}), \quad (1.2b)$$

em que ϵ_0 é a permitividade eléctrica do vácuo, μ_0 é a susceptibilidade magnética do vácuo; \mathbf{P} e \mathbf{M} são, respectivamente, as polarizações eléctrica e magnética induzidas. Para o propósito em discussão nesta tese, pode assumir-se um meio sem cargas livres ($\rho_l = 0, \mathbf{J}_l = 0$) e não magnético ($\mathbf{M} = 0$).

Derivando em ordem ao tempo a Eq. (1.1a), substituindo o rotacional da Eq. (1.1b) e usando as relações (1.2), resulta

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{P}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)), \quad (1.3)$$

onde se usou a identidade $\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} \equiv \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E}$. Os termos à direita da igualdade da Eq. (1.3) são os responsáveis pelo acoplamento entre as componentes vectoriais do campo

eléctrico. Para obter a equação de onda escalar é necessário desacoplar estas componentes, pelo que é necessário analisar em pormenor os dois referidos termos.

Comecemos pelo termo que envolve a polarização eléctrica \mathbf{P} . A relação fenomenológica entre a polarização \mathbf{P} e o campo eléctrico \mathbf{E} para um meio linear (relação de dispersão) é dada por [6]

$$P_i(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{ij}(\mathbf{r}, t - t') E_j(\mathbf{r}, t') dt', \quad (1.4)$$

em que χ_{ij} é o tensor susceptibilidade eléctrica do meio. Esta relação é válida dentro da aproximação do dipólo eléctrico e admitindo que a resposta do meio é local.

No caso da difracção e da propagação de impulsos em fibras, considera-se que o meio é isotrópico, logo o tensor χ_{ij} passa a escalar. No caso da propagação de impulsos em cristais, admite-se que o campo eléctrico está linearmente polarizado, segundo uma das direcções principais do cristal; logo, nesta configuração, tem-se $\chi_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Dentro destas duas hipóteses, o acoplamento entre as componentes do campo, introduzido pela polarização eléctrica é desfeito.

Passemos, agora, para o termo $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ da Eq. (1.3). Para simplificar, a análise será feita no domínio das frequências temporais. Reconhecendo na Eq. (1.4) uma convolução no tempo, ela fica no domínio das frequências sob a forma de um produto, admitindo ainda que o meio é isotropico a Eq. (1.4) fica

$$\mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \chi(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \quad (1.5)$$

em que as grandezas intervenientes estão relacionadas através da transformada de Fourier¹ com as grandezas da Eq. (1.4). Usando a equação de Maxwell (1.1c) (com $\rho_l = 0$) e a relação (1.2a) tem-se

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) &= \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, \omega)) \\ &= \nabla \cdot (\epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \chi(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)) \\ &= \epsilon_0 \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + \epsilon_0 (\mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \cdot \nabla \chi(\mathbf{r}, \omega) + \chi(\mathbf{r}, \omega) \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (1.6)$$

se $\chi(\mathbf{r}, \omega)$ variar lentamente ao longo de um comprimento de onda da luz [8] (ou uma condição mais forte: considerando o meio homogéneo, isto é, χ independente da posição), temos $\nabla \cdot \chi(\mathbf{r}, \omega) \approx 0$, o que implica de (1.6) $\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \approx 0$ que por sua vez implica $\nabla \cdot$

¹ Ver definições da Transformada de Fourier em Apêndice A.

$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \approx 0$, resultando assim o desacoplamento total entre as componentes vectoriais do campo eléctrico na equação de onda (1.3).

Resumindo, a equação de onda vectorial (1.3), considerando o meio isotrópico e supondo uma variação espacial lenta de $\chi(\mathbf{r}, \omega)$, fica reduzida à equação de onda escalar,

$$\nabla^2 E_i(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P_i(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (1.7)$$

a qual terá de ser satisfeita por cada uma das componentes i do campo eléctrico, sendo $c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$ a velocidade da luz no vácuo.

A Eq. (1.7) é o ponto de partida comum para a análise dos dois fenómenos físicos: propagação livre na difracção e propagação de um impulso óptico num meio dispersivo. A partir deste ponto o estudo dos dois fenómenos físicos diverge na sua análise. No caso da difracção, tratando-se de um fenómeno estacionário, a dispersão do meio é desprezada e a dependência temporal na Eq. (1.7) desaparece. No caso da propagação de impulsos em meios dispersivos, o efeito da difracção é desprezado, ficando na Eq. (1.7) apenas a coordenada temporal e a coordenada espacial associada à direcção de propagação.

1.3.2 Aproximação da variação lenta da envolvente

O sistema de equações (1.4) e (1.7) não tem solução exacta conhecida. Portanto, para se conseguir soluções aproximadas do sistema, é usual utilizar o método da variação lenta da envolvente [9, 10] - SVEA (*slowly varying envelope approximation*). O método consiste em identificar a parte do campo que apresenta uma variação mais acentuada nas coordenadas, separando-a da restante que, por hipótese, varia mais lentamente,

$$E(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \{A(\mathbf{r}, t) \exp[i(\omega_0 t - \beta_0 z)]\}, \quad (1.8)$$

em que, $A(\mathbf{r}, t)$ é a componente (amplitude complexa) de variação lenta e a exponencial contém a variação mais acentuada do campo.

A justificação para o uso da SVEA baseia-se na hipótese aceitável de que a amplitude complexa varia pouco durante uma escala de tempo da ordem do período médio da onda, $T_0 = 2\pi/\omega_0$ (sendo ω_0 a frequência média da onda) e ao longo de uma escala espacial da ordem do comprimento de onda médio, $\lambda_0 = cT_0/n(\omega_0)$. Formalmente, estas considerações

podem ser expressas na forma [11]

$$\left| \frac{\partial A}{\partial z} \right| \ll \beta_0 |A| \quad (1.9a)$$

$$\left| \frac{\partial A}{\partial \tau} \right| \ll \omega_0 |A| \quad (1.9b)$$

em que τ é o chamado tempo próprio da onda (Eq. (2.12)). Na prática, o que as condições (1.9) significam é que a SVEA é válida para ondas cuja extensão espacial do campo, a , é muito superior ao comprimento de onda $a/\lambda \gg 1$, uma aproximação que na difracção é normalmente válida, e que a duração temporal da onda, τ_p , é muito superior ao período médio da onda $\tau_p \gg T_0$ [3]. Por exemplo para um impulso de perfil gaussiano de largura temporal a meia altura - FWHM (*full width half maximum*) τ_p , na região visível do espectro $\omega_0 \sim 10^{15} \text{ s}^{-1}$, temos que a SVEA, para este caso, pode ser usada para descrever impulsos cuja duração mínima seja da ordem $\tau_p \sim 10 \text{ fs}$. Para impulsos na região do visível com duração inferior a 10 fs, a SVEA em princípio não pode ser aplicada, outro tipo de aproximação é necessário [11].

Analogia entre a difracção espacial e a dispersão temporal

A teoria que estabelece a analogia entre a difracção espacial e a dispersão temporal (doravante referida apenas por analogia DEDT) é conhecida desde, pelo menos, os finais dos anos sessenta devido aos trabalhos de Akhmanov e outros [2, 3]. Esta teoria, apesar de se ter mantido inalterada desde a sua apresentação inicial, possibilitou novas abordagens no campo da dispersão temporal. Desde então, vários outros autores, tendo como ponto de partida a analogia, introduziram, no campo da física da propagação de impulsos em meios dispersivos, vários conceitos pertencentes ao fenómeno da difracção espacial; as matrizes ABCD [12–17], o conceito de formação de imagem [18–33], o efeito Talbot [34–40], entre outros [41–45].

No entanto, esta teoria primitiva que estabelece a analogia apresenta uma dificuldade: deixa de ser válida quando introduzimos termos de ordem superior à segunda na expansão em série de Taylor da relação de dispersão do meio [46]. Isto é, só existe uma analogia entre a difracção na aproximação paraxial e a propagação em meios dispersivos na aproximação de segunda ordem na dispersão do meio.

Neste capítulo é apresentada uma extensão à analogia primitiva, a qual vem estabelecer uma correspondência completa entre a difracção espacial e a propagação de um impulso num meio dispersivo. A analogia é completa nos dois sentidos, isto é, seja qual for o grau de aproximação introduzido, quer na difracção, quer na dispersão, esta nova analogia continua a ser válida.

Inicialmente, antes de apresentar a teoria que estabelece a nova analogia, é descrita, para efeito de comparação, a analogia primitiva. Como a semelhança entre os dois fenómenos se estabelece a partir da comparação entre as equações diferenciais que descrevem a propagação

nos dois regimes, este capítulo, no seu essencial, incide sobre a derivação destas equações diferenciais.

2.1 Equação diferencial de propagação em meios dispersivos

Tem surgido na literatura várias formas de deduzir a equação diferencial que descreve a propagação de impulsos em meios dispersivos [6, 9, 19, 47]. Nesta secção é apresentada uma dedução análoga à usada em [6, 19], visto ser formalmente semelhante à usada para deduzir a equação diferencial da propagação livre na difracção da secção 2.4.

Começando pela equação de onda escalar (1.7), expressa no domínio das frequências temporais, e usando a relação (1.5), tem-se

$$\left(\nabla_{\perp}^2 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) E(\mathbf{r}, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon(\mathbf{r}, \omega) E(\mathbf{r}, \omega) = 0, \quad (2.1)$$

em que,

$$E(\mathbf{r}, \omega) = \mathcal{F}\{E(\mathbf{r}, t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} E(\mathbf{r}, t) \exp(-i\omega t) dt, \quad (2.2)$$

$\nabla_{\perp}^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ é o Laplaciano transversal e $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = (1 + \chi(\mathbf{r}, \omega))$ é a permitividade eléctrica do meio. Considerando o meio homogéneo, $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega) = \varepsilon(\omega)$, e ignorando o efeito da difracção, $\nabla_{\perp}^2 = 0$, obtêm-se a equação de Helmholtz no domínio das frequências.

$$\frac{\partial^2 E(z, \omega)}{\partial z^2} + \beta^2(\omega) E(z, \omega) = 0, \quad (2.3)$$

em que $\beta^2(\omega) = \omega^2 \mu \varepsilon(z, \omega)$. Para uma onda unidireccional, a solução de (2.3) toma a forma

$$E(z, \omega) = E(0, \omega) \exp[-i\beta(\omega)z]. \quad (2.4)$$

Usando a aproximação da variação lenta da envolvente SVEA, vai analisar-se o efeito da propagação na envolvente associada ao campo

$$E(z, t) = A(z, t) \exp[i(\omega_0 t - \beta_0 z)], \quad (2.5)$$

sendo β_0 a constante de propagação associada à frequência portadora ω_0 . O espectro deste

campo é

$$E(z, \omega) = A(z, \omega - \omega_0) \exp(-i\beta_0 z), \quad (2.6)$$

em que $A(z, \omega - \omega_0)$ é o espectro da envolvente, relativamente à frequência portadora ω_0 . Para que a equação (2.6) seja solução da equação de onda (2.3), ela terá de obedecer à lei de propagação (2.4). Igualando (2.4) e (2.6), resulta

$$A(z, \omega - \omega_0) = A(0, \omega - \omega_0) \exp[-i(\beta(\omega) - \beta_0)z], \quad (2.7)$$

em que $A(0, \omega - \omega_0) = E(0, \omega)$. A função $\beta(\omega)$ depende das propriedades dispersivas do meio que, em geral, não tem forma analítica conhecida. De forma a incluir o efeito da dependência espectral de $\beta(\omega)$ na propagação, é usual expandir $\beta(\omega)$ em série de Taylor, em torno da frequência portadora ω_0 , admitindo $(\omega - \omega_0)/\omega_0 \ll 1$,

$$\begin{aligned} \beta(\omega) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{d^n \beta}{d\omega^n} \right)_{\omega_0} (\omega - \omega_0)^n \\ &= \beta_0 + \beta_1 \Omega + \frac{\beta_2}{2} \Omega^2 + \dots + \frac{\beta_n}{n!} \Omega^n + \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

em que $\Omega = \omega - \omega_0$ sendo $\beta_n = (d^n \beta / d\omega^n)$ avaliado em $\omega = \omega_0$. Substituído (2.8) em (2.7), resulta a equação de propagação do espectro da envolvente

$$A(z, \Omega) = A(0, \Omega) \exp \left[-i \left(\beta_1 \Omega + \frac{\beta_2}{2!} \Omega^2 + \dots \right) z \right], \quad (2.9)$$

invocando a SVEA, derivando apenas uma vez em ordem a z ,

$$\frac{\partial A(z, \Omega)}{\partial z} = -i \left(\beta_1 \Omega + \frac{\beta_2}{2!} \Omega^2 + \dots \right) A(z, \Omega), \quad (2.10)$$

e aplicando a transformada de Fourier inversa, resulta

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(z, t)}{\partial z} &= -\beta_1 \frac{\partial A(z, t)}{\partial t} + i \frac{\beta_2}{2!} \frac{\partial^2 A(z, t)}{\partial t^2} + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-i)^{n+1}}{n!} \beta_n \frac{\partial^n A(z, t)}{\partial t^n}. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Fazendo, agora, uma mudança para o referencial do tempo próprio do impulso,

$$\tau = t - \beta_1 z \quad (2.12a)$$

$$\xi = z, \quad (2.12b)$$

obtém-se a equação diferencial que descreve a propagação de um impulso num meio dispersivo,

$$\frac{\partial A(\xi, \tau)}{\partial \xi} - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-i)^{n+1}}{n!} \beta_n \frac{\partial^n A(\xi, \tau)}{\partial \tau^n} = 0. \quad (2.13)$$

O valor máximo do índice n nesta equação indica a ordem de aproximação na relação de dispersão. Assim na aproximação de segunda ordem na dispersão ($n_{\max} = 2$), obtém-se a equação diferencial parabólica (equação de difusão complexa)

$$\frac{\partial A(\xi, \tau)}{\partial \xi} - i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} = 0, \quad (2.14)$$

cuja solução pode ser escrita na forma do integral de propagação de Fresnel (Apêndice B)

$$\begin{aligned} A(\xi, \tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} A(0, \tau') \exp [i(\tau - \tau')^2 / 2\beta_2 \xi] d\tau' \\ &= \exp(i\tau^2 / 2\beta_2 \xi) \int_{-\infty}^{\infty} A(0, \tau') \exp(i\tau'^2 / 2\beta_2 \xi) \exp(-i\tau\tau' / \beta_2 \xi) d\tau'. \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.2 Teoria escalar da difracção - Aproximação de Huygens-Fresnel

Partindo da equação de onda escalar (1.7), sabendo que a difracção é um fenómeno estacionário, propondo uma solução do tipo monocromática

$$E(\mathbf{r}, t) = E(\mathbf{r}) \exp(i\omega_0 t), \quad (2.16)$$

introduzindo a resposta do meio (1.5) e desprezando a dispersão temporal,

$$P(\mathbf{r}) = \epsilon_0 \chi(\mathbf{r}) E(\mathbf{r}) \exp(i\omega_0 t), \quad (2.17)$$

obtém-se

$$\nabla^2 E(\mathbf{r}) + \frac{\omega_0^2}{c^2} n^2(\mathbf{r}) E(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.18)$$

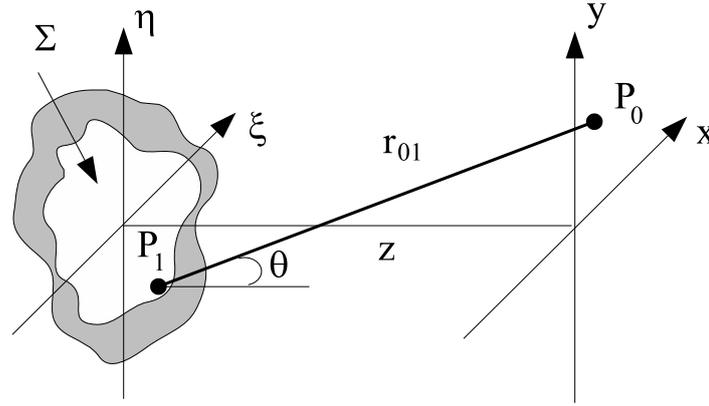


Figura 2.1: Geometria de difracção.

em que $n(\mathbf{r}) = \sqrt{1 + \chi(\mathbf{r})}$ é o índice de refração do meio para a frequência ω_0 . A generalização para ondas quase monocromáticas pode ser feita invocando o princípio da linearidade da equação de onda, em que o valor do campo num ponto do espaço é o resultado da sobreposição das várias componentes espectrais, cada uma das quais evolui de acordo com a Eq. (2.18) [8].

Considerando o meio homogéneo, isto é, $n(\mathbf{r}) = n_0$, da Eq. (2.18) resulta a equação de Helmholtz

$$(\nabla^2 + k_0^2) E(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.19)$$

em que $k_0 = n_0 \omega_0 / c = 2\pi / \lambda_0$ é o numero de onda e λ_0 é o comprimento de onda. Esta equação descreve a propagação livre na difracção de uma frente de onda monocromática. A sua solução pode ser obtida na forma de integral - aproximação de Huygens-Fresnel, previsto pela formulação de Rayleigh-Sommerfeld para a difracção [8]. Tendo em atenção a Fig. 2.1, o integral de Huygens-Fresnel pode ser descrito matematicamente, em coordenadas rectangulares, na forma

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \frac{1}{i\lambda_0} \int \int_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{\exp(-ik_0 r_{01})}{r_{01}} \cos \theta d\xi d\eta \\ &= \frac{z}{i\lambda_0} \int \int_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{\exp(-ik_0 r_{01})}{r_{01}^2} d\xi d\eta \end{aligned} \quad (2.20)$$

em que $U(x, y)$ e $U(\xi, \eta)$ são, respectivamente, a amplitude complexa do campo no plano perpendicular (x, y) e (ξ, η) , $\cos \theta = z/r_{01}$ e r_{01} é dado por

$$r_{01} = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \quad (2.21)$$

Na derivação da Eq. (2.20), para além da aproximação inerente à teoria escalar, considera-se que a distância de observação é muito superior ao comprimento de onda da luz, isto é, $r_{01} \gg \lambda_0$.

2.2.1 Aproximação de Fresnel

A aproximação de Fresnel consiste em supor $z \gg (x - \xi)_{max}$ e $z \gg (y - \eta)_{max}$. Assim pode aproximar-se r_{01} por uma expansão binomial

$$\begin{aligned} r_{01} &= z \sqrt{1 + \left(\frac{x - \xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{y - \eta}{z}\right)^2} \\ &\approx z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - \xi}{z}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y - \eta}{z}\right)^2 \right] \end{aligned} \quad (2.22)$$

Para o termo r_{01}^2 no denominador da eq. (2.20) retém-se apenas o primeiro termo da expansão, isto é, $r_{01} \approx z$. No entanto, para o termo r_{01} na exponencial deve reter-se os dois primeiros termos da expansão binomial, devido ao facto de r_{01} estar a multiplicar por um número grande k_0 . O resultado destas aproximações é

$$U(x, y) = \frac{e^{-ik_0z}}{i\lambda_0z} \int \int_{\Sigma} U(\xi, \eta) \exp \left\{ -i \frac{k_0}{2z} [(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2] \right\} d\xi d\eta. \quad (2.23)$$

Visto de outra forma, o integral (2.23) não é nada mais do que uma convolução

$$U(x, y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \quad (2.24)$$

cujo kernel é

$$h(x, y) = \frac{e^{-ik_0z}}{i\lambda_0z} \exp \left[-i \frac{k_0}{2z} (x^2 + y^2) \right]. \quad (2.25)$$

Invocando o teorema da convolução a equação (2.24) fica

$$\begin{aligned} U(x, y) &= \mathcal{F}^{-1} \{ \mathcal{F} \{ U(\xi, \eta) \} \mathcal{F} \{ h(x, y) \} \} \\ &= \mathcal{F}^{-1} \{ U(k_x, k_y) h(k_x, k_y) \}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Isto é, a propagação livre, no espaço das frequências espaciais (espaço de Fourier), corresponde à multiplicação por um termo de fase quadrático

$$h(k_x, k_y) \propto \exp \left[i \frac{z}{2k_0} (k_x^2 + k_y^2) \right], \quad (2.27)$$

sendo $h(k_x, k_y)$ a função de transferência da propagação livre.

2.3 Equação diferencial da difracção - aproximação paraxial

Na derivação da equação diferencial da difracção, na aproximação paraxial, considera-se um feixe óptico a propagar-se ao longo do eixo dos z , isto é, o feixe encontra-se confinado, essencialmente, ao longo deste eixo. Portanto, a variação mais acentuada na fase da onda será ao longo do eixo dos z [27, 47]. Podemos, então, explicitar esta dependência considerando

$$E(\mathbf{r}) = A(\mathbf{r}) \exp(-ik_0z), \quad (2.28)$$

onde $A(\mathbf{r})$ é a amplitude complexa que descreve o perfil transversal do feixe. Substituindo a expressão (2.28) na equação de Helmholtz (2.19), resulta

$$\nabla^2 A(\mathbf{r}) - 2ik_0 \frac{\partial A(\mathbf{r})}{\partial z} = 0. \quad (2.29)$$

Como a dependência mais acentuada em z foi retirada de $A(\mathbf{r})$ (Eq. (2.28)), a restante dependência em z terá, em geral, uma variação lenta, comparativamente a $\exp(-ik_0z)$ e à variação transversal do feixe - *aproximação paraxial*. Pode expressar-se matematicamente esta variação lenta de $A(\mathbf{r})$ em z na forma

$$\left| \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right| \ll \begin{cases} \left| \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \right|, \\ \left| \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} \right|, \\ \left| 2k_0 \frac{\partial A}{\partial z} \right|. \end{cases} \quad (2.30)$$

Isto é, a aproximação paraxial, matematicamente, corresponde à aproximação da variação lenta da envolvente - SVEA. Desprezando a derivada parcial de segunda ordem em z , invocando a SVEA, resulta a equação de onda paraxial

$$\frac{\partial^2 A(\mathbf{r})}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A(\mathbf{r})}{\partial y^2} - 2ik_0 \frac{\partial A(\mathbf{r})}{\partial z} = 0, \quad (2.31)$$

ou de forma mais compacta

$$\frac{\partial A(\mathbf{r}_\perp, z)}{\partial z} + \frac{i}{2k_0} \nabla_\perp^2 A(\mathbf{r}_\perp, z) = 0, \quad (2.32)$$

em que $\nabla_\perp^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ é o Laplaciano transversal e \mathbf{r}_\perp representa as coordenadas transversais, $\mathbf{r}_\perp \equiv (x, y)$.

Demonstra-se no Apêndice B que a solução da Eq. (2.32), a menos de factores constantes, toma a forma do integral de propagação na aproximação de Fresnel, Eq. (2.23). Isto é, pode-se dizer que a aproximação de Huygens-Fresnel é formalmente equivalente à aproximação paraxial na equação diferencial da difracção.

2.4 Equação diferencial da difracção - fora de eixo

Como a analogia DEDT é formulada, tradicionalmente, a partir da comparação entre as equações diferenciais que descrevem a propagação nos dois regimes (2.14) e (2.32), ela está limitada pelo lado da difracção, à introdução da aproximação paraxial e à ausência de uma frequência espacial portadora, enquanto que, no caso da dispersão, essa portadora está sempre presente, ω_0 . Estas aproximações introduzidas muito cedo na equação de Helmholtz (Eq. (2.19)), tem como consequência a perda de algumas das analogias DEDT. Nesta secção mostra-se que, para recuperar as analogias perdidas, é necessário introduzir na análise da propagação uma frequência espacial portadora, equivalente à frequência temporal portadora na dispersão. Nesta nova análise nenhuma aproximação do tipo paraxial é considerada inicialmente [48–59].

Esta nova abordagem tem igualmente a vantagem de permitir analisar a difracção de um sinal que se propaga ao longo de uma ordem de difracção diferente de zero e ao longo de um sistema óptico desalinhado [60, 61].

Para fazer a análise deste caso começa-se, como não poderia deixar de ser, com a equação de Helmholtz (2.19), mas em vez de considerar uma propagação ao longo do eixo dos z impõe-se que seja ao longo de uma direcção arbitrária paralela ao vector \mathbf{k}_0 ,

$$\mathbf{k}_0 = \mathbf{k}_{\perp 0} + \mathbf{k}_{z_0} = k_{x_0} \hat{\mathbf{x}} + k_{y_0} \hat{\mathbf{y}} + k_{z_0} \hat{\mathbf{z}}, \quad (2.33)$$

em que $\mathbf{k}_{\perp 0}$ e \mathbf{k}_{z_0} são as projecções de \mathbf{k}_0 , respectivamente, na direcção z e no plano transversal (x, y) , de acordo com a geometria da Fig. 2.2.

Como a ideia é obter uma analogia entre a difracção e a dispersão, vai resolver-se a

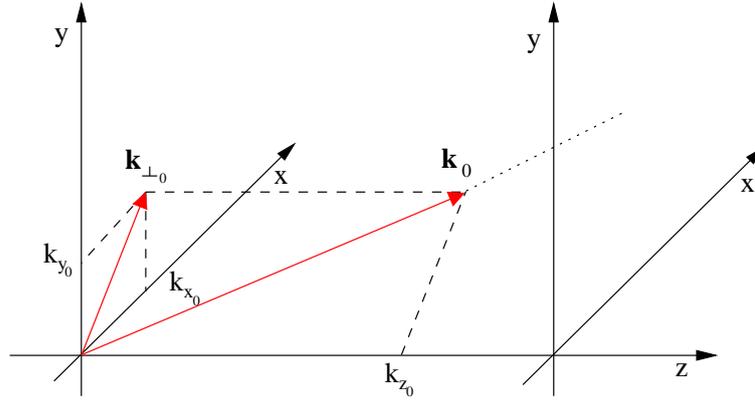


Figura 2.2: Relações geométricas entre os vectores associados à propagação na direcção \mathbf{k}_0 .

equação de Helmholtz (2.19) de forma análoga à que foi usada para obter a equação diferencial de propagação em meios dispersivos (secção 2.1).

Aplicando a transformada de Fourier, nas coordenadas transversais $\mathbf{r}_\perp = (x, y)$, à equação de Helmholtz (2.19), trabalhando assim no espaço das frequências espaciais transversais, obtém-se

$$\mathcal{F} \{ (\nabla^2 + k_0^2) E(\mathbf{r}_\perp, z) \} = (-k_\perp^2 + k_0^2) E(\mathbf{k}_\perp, z) + \frac{\partial^2 E(\mathbf{k}_\perp, z)}{\partial z^2} = 0, \quad (2.34)$$

onde

$$E(\mathbf{k}_\perp, z) = \mathcal{F} \{ E(\mathbf{r}_\perp, z) \} = \iint_{-\infty}^{+\infty} E(\mathbf{r}_\perp, z) \exp(i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp) d\mathbf{r}_\perp, \quad (2.35)$$

e $k_\perp^2 = \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{k}_\perp = k_x^2 + k_y^2$. A solução desta equação é

$$E(\mathbf{k}_\perp, z) = E(\mathbf{k}_\perp, 0) \exp \left[-i (k_0^2 - k_\perp^2)^{1/2} z \right]. \quad (2.36)$$

Esta equação não é mais do que a equação de propagação do espectro angular [8]. Como se está interessado na análise do efeito da propagação no perfil transversal e como o feixe se encontra confinado essencialmente ao longo da direcção \mathbf{k}_0 , a variação mais acentuada, na fase da onda, será ao longo desta direcção. Pode separar-se esta variação acentuada introduzindo a SVEA, isto é

$$E(\mathbf{r}_\perp, z) = A(\mathbf{r}_\perp, z) \exp \left[-i(\mathbf{k}_{\perp 0} \cdot \mathbf{r}_\perp + k_{z0} z) \right], \quad (2.37)$$

cuja transformada de Fourier é

$$E(\mathbf{k}_\perp, z) = A(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}_{\perp 0}, z) \exp(-ik_{z_0}z). \quad (2.38)$$

Para que esta equação seja solução de (2.34) terá de obedecer à equação de propagação (2.36). Igualando (2.38) e (2.36) obtém-se

$$A(\Delta\mathbf{k}_\perp, z) = A(\Delta\mathbf{k}_\perp, 0) \exp[-i(\beta(\mathbf{k}_\perp) - k_{z_0})z], \quad (2.39)$$

em que $A(\Delta\mathbf{k}_\perp, 0) \equiv E(\mathbf{k}_\perp, 0)$,

$$\Delta\mathbf{k}_\perp = \mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}_{\perp 0}, \quad (2.40)$$

e

$$\beta(\mathbf{k}_\perp) = \sqrt{k_0^2 - k_\perp^2}. \quad (2.41)$$

É de salientar que na obtenção da equação (2.39), não é feita nenhuma aproximação, para além da inerente à teoria escalar da difracção; a exponencial na equação (2.39) pode ser entendida como a função de transferência da propagação livre para além da aproximação paraxial [8].

A função $\beta(\mathbf{k}_\perp)$, dada pela Eq. (2.41), tem uma forma analítica fechada, no entanto, como se pretende obter uma equação diferencial para $A(\mathbf{r}_\perp, z)$, vai expandir-se $\beta(\mathbf{k}_\perp)$ em série de Taylor em torno de $\mathbf{k}_{\perp 0}$, na aproximação de $\Delta\mathbf{k}_\perp^2/k_{z_0}^2 \ll 1$,

$$\begin{aligned} \beta(\mathbf{k}_\perp) &= k_{z_0} \sqrt{1 - \frac{k_\perp^2 - k_{\perp 0}^2}{k_{z_0}^2}} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{1}{n!} (\Delta\mathbf{k}_\perp \cdot \nabla_{k_\perp})^n \beta(\mathbf{k}_\perp) \right]_{\mathbf{k}_\perp = \mathbf{k}_{\perp 0}} \\ &= k_{z_0} - \frac{1}{k_{z_0}} \mathbf{k}_{\perp 0} \cdot \Delta\mathbf{k}_\perp - \frac{1}{2k_{z_0}} \left(\Delta\mathbf{k}_\perp^2 + \frac{1}{k_{z_0}^2} (\mathbf{k}_{\perp 0} \cdot \Delta\mathbf{k}_\perp)^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{2k_{z_0}^3} \left(\mathbf{k}_{\perp 0} \cdot \Delta\mathbf{k}_\perp^3 + \frac{1}{k_{z_0}^2} (\mathbf{k}_{\perp 0} \cdot \Delta\mathbf{k}_\perp)^3 \right) \\ &\quad - \frac{1}{8k_{z_0}^3} \left(\Delta\mathbf{k}_\perp^4 + \frac{6}{k_{z_0}^2} (\mathbf{k}_{\perp 0} \cdot \Delta\mathbf{k}_\perp)^2 \Delta\mathbf{k}_\perp^2 + \frac{5}{k_{z_0}^4} (\mathbf{k}_{\perp 0} \cdot \Delta\mathbf{k}_\perp)^4 \right) \\ &\quad + \dots, \end{aligned} \quad (2.42)$$

em que $\nabla_{k_\perp} = \hat{\mathbf{k}}_x \partial / \partial k_x + \hat{\mathbf{k}}_y \partial / \partial k_y$. Esta expansão pode ser simplificada, notando que, para n

inteiro, temos

$$\begin{aligned} (\mathbf{k}_{\perp 0} \cdot \Delta \mathbf{k}_{\perp})^{2n} &= (k_{\perp 0} \Delta k_{\perp} \cos(\theta))^{2n} = \alpha^{2n} (\mathbf{k}_{\perp 0}) k_{z_0}^{2n} \Delta \mathbf{k}_{\perp}^{2n}, \\ (\mathbf{k}_{\perp 0} \cdot \Delta \mathbf{k}_{\perp})^{2n+1} &= (\mathbf{k}_{\perp 0} \cdot \Delta \mathbf{k}_{\perp})^{2n} (\mathbf{k}_{\perp 0} \cdot \Delta \mathbf{k}_{\perp}) = \alpha^{2n} (\mathbf{k}_{\perp 0}) k_{z_0}^{2n} \mathbf{k}_{\perp 0} \cdot \Delta \mathbf{k}_{\perp}^{2n+1}, \end{aligned}$$

em que a quantidade

$$\alpha(\mathbf{k}_{\perp 0}) = \frac{k_{\perp 0}}{k_{z_0}} \cos(\theta), \quad (2.43)$$

é uma função característica da frequência espacial portadora e θ é o ângulo entre os vectores $\mathbf{k}_{\perp 0}$ e $\Delta \mathbf{k}_{\perp}$, representados na Fig. 2.3. Desta forma pode definir-se os cinco primeiros coeficientes da expansão

$$\beta_0(\mathbf{k}_{\perp 0}) = k_{z_0}, \quad (2.44a)$$

$$\boldsymbol{\beta}_1(\mathbf{k}_{\perp 0}) = -\frac{\mathbf{k}_{\perp 0}}{k_{z_0}}, \quad (2.44b)$$

$$\beta_2(\mathbf{k}_{\perp 0}) = -\frac{1}{k_{z_0}} (1 + \alpha^2(\mathbf{k}_{\perp 0})), \quad (2.44c)$$

$$\boldsymbol{\beta}_3(\mathbf{k}_{\perp 0}) = -\frac{3\mathbf{k}_{\perp 0}}{k_{z_0}^3} (1 + \alpha^2(\mathbf{k}_{\perp 0})), \quad (2.44d)$$

$$\beta_4(\mathbf{k}_{\perp 0}) = -\frac{3}{k_{z_0}^3} \left[1 + 6\alpha^2(\mathbf{k}_{\perp 0}) \left(1 + \frac{5}{6}\alpha^2(\mathbf{k}_{\perp 0}) \right) \right], \quad (2.44e)$$

pelo que a expansão (2.42) pode ser escrita:

$$\beta(\mathbf{k}_{\perp}) = \beta_0 + \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \Delta \mathbf{k}_{\perp} + \frac{1}{2!} \beta_2 \Delta \mathbf{k}_{\perp}^2 + \frac{1}{3!} \boldsymbol{\beta}_3 \cdot \Delta \mathbf{k}_{\perp}^3 + \frac{1}{4!} \beta_4 \Delta \mathbf{k}_{\perp}^4 + \dots, \quad (2.45)$$

em que $\beta_n \equiv \beta_n(\mathbf{k}_{\perp 0})$.

Para obter a equação diferencial da propagação, deriva-se (2.39) em ordem a z apenas uma vez, invocando a SVEA,

$$\frac{\partial A(\Delta \mathbf{k}_{\perp}, z)}{\partial z} = -i[\beta(\mathbf{k}_{\perp}) - k_{z_0}]A(\Delta \mathbf{k}_{\perp}, z), \quad (2.46)$$

substitui-se a expansão (2.42) nesta equação e depois de aplicar a transformada de Fourier

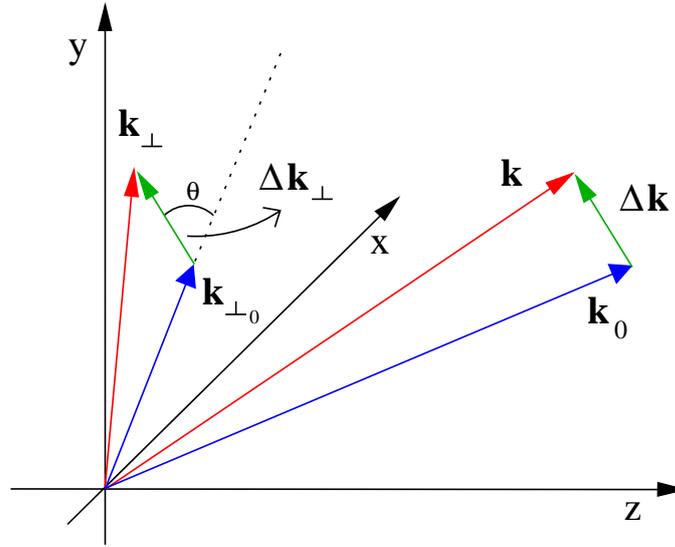


Figura 2.3: Relações geométricas entre os vectores associados à propagação da frequência espacial \mathbf{k} em torno de \mathbf{k}_0 .

inversa obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(\mathbf{r}_\perp, z)}{\partial z} = & \left\{ -\frac{1}{k_{z0}} \mathbf{k}_{\perp 0} \cdot \nabla_\perp - \frac{i}{2k_{z0}} \left[\nabla_\perp^2 + \frac{1}{k_{z0}^2} (\mathbf{k}_{\perp 0} \cdot \nabla_\perp)^2 \right] \right. \\ & + \frac{1}{2k_{z0}^3} \left[\mathbf{k}_{\perp 0} \cdot \nabla_\perp^3 + \frac{1}{k_{z0}^2} (\mathbf{k}_{\perp 0} \cdot \nabla_\perp)^3 \right] \\ & \left. + \frac{i}{8k_{z0}} \left[\nabla_\perp^4 + \frac{6}{k_{z0}^2} (\mathbf{k}_{\perp 0} \cdot \nabla_\perp)^2 \nabla_\perp^2 + \frac{5}{k_{z0}^4} (\mathbf{k}_{\perp 0} \cdot \nabla_\perp)^4 \right] + \dots \right\} A(\mathbf{r}_\perp, z), \end{aligned} \quad (2.47)$$

em que $\nabla_\perp = \hat{\mathbf{x}}\partial/\partial x + \hat{\mathbf{y}}\partial/\partial y$. Faz notar-se que, neste passo, não se usaram os coeficientes β_n definidos pelas Eqs. (2.44), visto que, à parte de β_0 e β_1 , eles são funções das frequências do sinal devido à presença da quantidade α . No entanto, as definições introduzidas pelas Eqs. (2.44) irão ser úteis, mais à frente, aquando do estudo da analogia entre a difracção e a dispersão.

O último passo para simplificar a Eq. 2.47 consiste em fazer uma mudança de variáveis, às quais se poderá chamar de coordenadas espaciais locais,

$$\mathbf{u}_\perp = \mathbf{r}_\perp + \beta_1 z = \mathbf{r}_\perp - \frac{\mathbf{k}_{\perp 0}}{k_{z0}} z, \quad (2.48a)$$

$$\xi = z. \quad (2.48b)$$

Esta mudança de variáveis tem uma explicação geométrica simples. A nova coordenada transversal \mathbf{u}_\perp está deslocada relativamente à coordenada \mathbf{r}_\perp de $z\mathbf{k}_{\perp 0}/k_{z0}$; a origem do

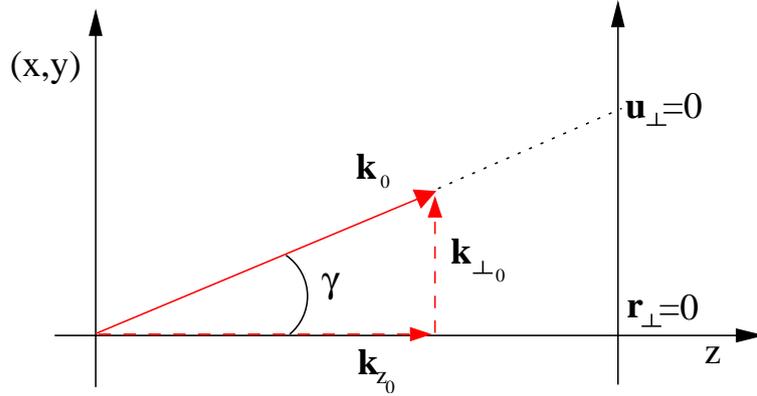


Figura 2.4: Coordenadas espaciais locais: $\tan(\gamma) = k_{\perp 0}/k_{z_0}$, $\mathbf{r}_{\perp} - \mathbf{u}_{\perp} = z \tan(\gamma) = z k_{\perp 0}/k_{z_0}$.

sistema de eixos da coordenada \mathbf{u}_{\perp} é o ponto de intercepção da linha contendo o vector \mathbf{k}_0 ligado a $x = y = z = 0$ com o plano de observação (figura 2.4). Com esta mudança de variáveis, da equação (2.47), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(\mathbf{u}_{\perp}, \xi)}{\partial \xi} = & \left\{ -\frac{i}{2k_{z_0}} \left[\nabla_{\perp}^2 + \frac{1}{k_{z_0}^2} (\mathbf{k}_{\perp 0} \cdot \nabla_{\perp})^2 \right] \right. \\ & + \frac{1}{2k_{z_0}^3} \left[\mathbf{k}_{\perp 0} \cdot \nabla_{\perp}^3 + \frac{1}{k_{z_0}^2} (\mathbf{k}_{\perp 0} \cdot \nabla_{\perp})^3 \right] \\ & \left. + \frac{i}{8k_{z_0}} \left[\nabla_{\perp}^4 + \frac{6}{k_{z_0}^2} (\mathbf{k}_{\perp 0} \cdot \nabla_{\perp})^2 \nabla_{\perp}^2 + \frac{5}{k_{z_0}^4} (\mathbf{k}_{\perp 0} \cdot \nabla_{\perp})^4 \right] + \dots \right\} A(\mathbf{u}_{\perp}, \xi), \end{aligned} \quad (2.49)$$

em que $\nabla_{\perp} = \hat{\mathbf{u}}_x \partial / \partial u_x + \hat{\mathbf{u}}_y \partial / \partial u_y$.

Finalmente, tem-se a Eq. (2.49) que descreve a propagação na difracção de um sinal com perfil transversal $A(\mathbf{u}_{\perp}, \xi)$ segundo uma direcção arbitrária \mathbf{k}_0 , a qual vai para além da aproximação paraxial.

Se nesta análise retivermos apenas os três primeiros termos da expansão em série de $\beta(\mathbf{k}_{\perp})$ (Eq. (2.42)), isto é, $\beta_n(\mathbf{k}_{\perp}) \approx 0$ para $n > 2$ e no limite quando $\mathbf{k}_{\perp 0} \rightarrow 0$ temos $\mathbf{u}_{\perp} \rightarrow \mathbf{r}_{\perp}$ e a equação de propagação (2.49) fica reduzida à equação diferencial de propagação na aproximação paraxial da secção 2.3, Eq. (2.32).

2.4.1 Propagação na direcção \mathbf{k}_0 de um sinal a uma dimensão

Na análise que conduziu à Eq. (2.49) verifica-se que ela depende de grandezas vectoriais, situação que era de esperar visto que o espaço na direcção transversal é a duas dimensões. A forma da Eq. (2.49) não é a mais adequada para o estudo da analogia DEDT, porque

apresenta uma dimensão extra relativamente à Eq. (2.13).

Como o objectivo final é estudar a analogia DEDT, vai analisar-se a Eq. (2.49) a uma dimensão, introduzindo um sinal a uma dimensão do tipo $A(\mathbf{u}_\perp, \xi) \equiv A(u_x, \xi)$ e $k_{\perp 0} \equiv k_{x_0}$. Nesta situação resulta $\partial/\partial u_y = 0$ e os coeficientes de expansão de $\beta(k_{x_0})$ ficam constantes tomando a forma

$$\beta_0(k_{x_0}) = k_{z_0}, \quad (2.50a)$$

$$\beta_1(k_{x_0}) = -\frac{k_{x_0}}{k_{z_0}}, \quad (2.50b)$$

$$\beta_2(k_{x_0}) = -\frac{1}{k_{z_0}}(1 + \alpha^2), \quad (2.50c)$$

$$\beta_3(k_{x_0}) = -\frac{3k_{x_0}}{k_{z_0}^3}(1 + \alpha^2), \quad (2.50d)$$

$$\beta_4(k_{x_0}) = -\frac{3}{k_{z_0}^3}(1 + 6\alpha^2 + 5\alpha^4). \quad (2.50e)$$

sendo $\alpha = \pm k_{x_0}/k_{z_0}$ em que para sinais a uma dimensão o ângulo θ entre k_{x_0} e Δk_x toma o valor 0 ou π . A equação (2.49) para sinais 1D transforma-se em:

$$\frac{\partial A(u_x, \xi)}{\partial \xi} = +i \frac{\beta_2}{2!} \frac{\partial^2 A(u_x, \xi)}{\partial u_x^2} - \frac{\beta_3}{3!} \frac{\partial^3 A(u_x, \xi)}{\partial u_x^3} - i \frac{\beta_4}{4!} \frac{\partial^4 A(u_x, \xi)}{\partial u_x^4} + \dots, \quad (2.51)$$

ou de forma condensada

$$\frac{\partial A(u_x, \xi)}{\partial \xi} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{i^{n+1}}{n!} \beta_n \frac{\partial^n A(u_x, \xi)}{\partial u_x^n} = 0. \quad (2.52)$$

Esta equação, versão 1D da Eq. (2.49), tem uma forma comparável à da Eq. (2.13) da dispersão, permitindo o estudo da analogia DEDT que será feito na secção 2.5.

2.4.2 Propagação na direcção \mathbf{k}_0 de um sinal do tipo

$$A(\mathbf{u}_\perp, \xi) = A_x(u_x, \xi) + A_y(u_y, \xi)$$

O carácter vectorial da Eq. (2.49) pode ser vantajosamente aproveitado para criar uma analogia entre a difracção e a propagação de impulsos em meios dispersivos birrefringentes [62, 63]. Com esse objectivo, vai analisar-se a propagação de um sinal do tipo $A(\mathbf{u}_\perp, \xi) = A_x(u_x, \xi) + A_y(u_y, \xi)$, introduzindo este sinal na Eq. (2.49). Notando que as derivadas

cruzadas de $A(\mathbf{u}_\perp, \xi)$ são idênticamente nulas, isto é

$$\frac{\partial^{n+m} A(\mathbf{u}_\perp, \xi)}{\partial u_x^n \partial u_y^m} = 0, \quad (2.53)$$

para qualquer $n, m > 0$, a Eq. (2.49) pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(\mathbf{u}_\perp, t)}{\partial \xi} &= \frac{i}{2!} \boldsymbol{\beta}_2 \cdot \nabla_\perp^2 A(\mathbf{u}_\perp, t) - \frac{1}{3!} \boldsymbol{\beta}_3 \cdot \nabla_\perp^3 A(\mathbf{u}_\perp, t) - \frac{i}{4!} \boldsymbol{\beta}_4 \cdot \nabla_\perp^4 A(\mathbf{u}_\perp, t) + \dots \\ &= - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{i^{n+1}}{n!} \boldsymbol{\beta}_n \cdot \nabla_\perp^n A(\mathbf{u}_\perp, t), \end{aligned} \quad (2.54)$$

onde se definiu o operador $\nabla_\perp^n = \hat{\mathbf{u}}_x \partial^n / \partial u_x^n + \hat{\mathbf{u}}_y \partial^n / \partial u_y^n$ e os coeficientes $\boldsymbol{\beta}_n$ são dados por

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta}_2 &= (\beta_{2_x}, \beta_{2_y}) = -\frac{1}{k_{z_0}} [(1 + \alpha_x^2) \hat{\mathbf{u}}_x + (1 + \alpha_y^2) \hat{\mathbf{u}}_y] \\ \boldsymbol{\beta}_3 &= (\beta_{3_x}, \beta_{3_y}) = -\frac{3}{k_{z_0}^3} [k_{x_0} (1 + \alpha_x^2) \hat{\mathbf{u}}_x + k_{y_0} (1 + \alpha_y^2) \hat{\mathbf{u}}_y] \\ \boldsymbol{\beta}_4 &= (\beta_{4_x}, \beta_{4_y}) \\ &= -\frac{3}{k_{z_0}^3} [(1 + 6\alpha_x^2(1 + 5\alpha_x^2/6)) \hat{\mathbf{u}}_x + (1 + 6\alpha_y^2(1 + 5\alpha_y^2/6)) \hat{\mathbf{u}}_y] \\ &\dots, \end{aligned} \quad (2.55)$$

em que $\alpha_x = k_{x_0}/k_{z_0}$ e $\alpha_y = k_{y_0}/k_{z_0}$.

A equação diferencial vectorial (2.54) pode ser separada nas suas componentes,

$$\begin{aligned} \frac{\partial A_x(u_x, t)}{\partial \xi} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{i^{n+1}}{n!} \beta_{n_x} \frac{\partial^n A_x(u_x, t)}{\partial u_x^n} &= 0, \\ \frac{\partial A_y(u_y, t)}{\partial \xi} + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{i^{n+1}}{n!} \beta_{n_y} \frac{\partial^n A_y(u_y, t)}{\partial u_y^n} &= 0, \end{aligned} \quad (2.56)$$

resultando num sistema de duas equações diferenciais independentes com a forma da Eq. (2.52), tendo por isso a forma apropriada para o estudo comparativo com a propagação de impulsos em meios dispersivos birrefringentes.

2.4.3 Validade da expansão em série de Taylor de $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{k}_\perp)$

Apesar de $\boldsymbol{\beta}(\mathbf{k}_\perp)$ ter uma forma analítica conhecida Eq. (2.41), foi feita a sua expansão em série de Taylor de forma a obter uma equação diferencial que possibilite o estudo da analogia

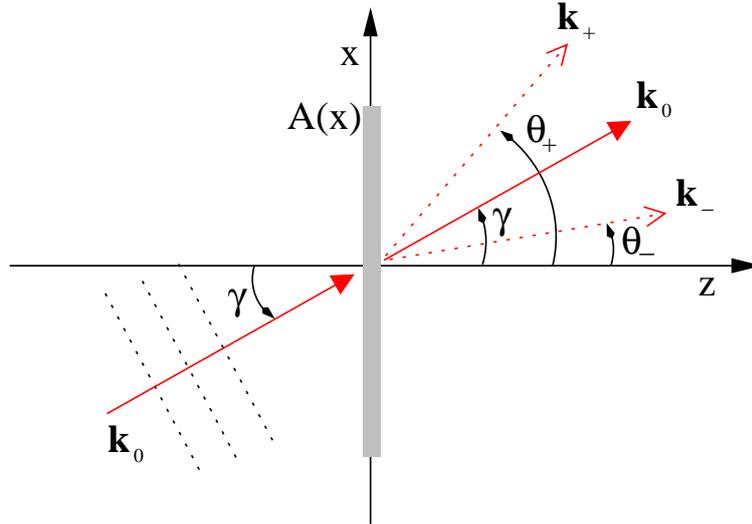


Figura 2.5: Estudo da propagação da função de transmitância $A(x)$ quando iluminada por uma onda plana de direcção \mathbf{k}_0 .

DEDT. No entanto, o conhecimento da forma analítica de $\beta(\mathbf{k}_\perp)$ pode ser usado para analisar o comportamento da expansão em série de Taylor em função de vários parâmetros: em particular em função do ângulo de propagação γ da Fig. 2.4 (ou de forma equivalente do parâmetro α) e das frequências do sinal \mathbf{k}_\perp . Para tal, vamos estudar a propagação do campo no sistema da Fig. 2.5, em que uma transparência, com função de transmitância $A(x)$, é iluminada por uma onda plana, segundo uma direcção \mathbf{k}_0 que faz um ângulo γ com o eixo z .

Sem perda de generalidade, mantendo o problema a uma dimensão transversal e, usando o princípio de sobreposição da equação de onda, vamos estudar a propagação de cada componente espectral E_k do campo. Imediatamente à direita da transparência, cada componente espectral do campo irá propagar-se segundo uma direcção \mathbf{k} , sendo $|\mathbf{k}| = k = k_0$, na forma

$$E_k(x, z) = E_k \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) = E_k \exp[-ik_0(x \sin \theta + y \cos \theta)], \quad (2.57)$$

em que a direcção de propagação θ é dada pela lei das redes de difracção [64]

$$\sin \theta_\pm = \pm \frac{|k_x|}{k_0} + \sin \gamma, \quad (2.58)$$

sendo k_x a componente espectral da função de transmitância $A(x)$ e onde se explicitou a dependência de θ no sinal da componente espectral k_x . Combinando as Eqs. (2.37) e (2.57)

resulta

$$\begin{aligned}
 A_{k_x}(x, z) &= E_k(x, z) \exp(i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}) \\
 &= E_k \exp[-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}_0) \cdot \mathbf{r}] \\
 &= E_k \exp\{-ik_0[(\sin\theta - \sin\gamma)x + (\cos\theta - \cos\gamma)z]\},
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

e introduzindo a mudança de coordenadas (2.48), chegamos à equação de propagação da componente espectral k_x da envolvente $A(x)$ nas coordenadas espaciais locais

$$A_{k_x}(u_x, \xi) = E_k \exp\{-ik_0[(\sin\theta - \sin\gamma)(u_x + \xi \tan\gamma) + (\cos\theta - \cos\gamma)\xi]\}. \tag{2.60}$$

Esta equação terá de satisfazer a equação de propagação (2.52), logo, substituindo a Eq. (2.60) na Eq. (2.52) resulta

$$k_0[(\sin\theta - \sin\gamma)\tan\gamma + (\cos\theta - \cos\gamma)] = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} k_0^n (\sin\theta - \sin\gamma)^n, \tag{2.61}$$

e resolvendo em ordem a $\cos\theta$ fica

$$\cos\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} k_0^{n-1} (\sin\theta - \sin\gamma)^n. \tag{2.62}$$

Usando os coeficientes de expansão β_n dados pelas Eqs. (2.50), facilmente se identifica o sumatório presente na Eq. (2.62) como a expansão em série de Taylor da função de $\sin\theta \sqrt{1 - \sin^2\theta}$ em torno de $\sin\gamma$

$$\sqrt{1 - \sin^2\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} k_0^{n-1} (\sin\theta - \sin\gamma)^n, \tag{2.63}$$

resultando na Eq. (2.62) uma identidade trigonométrica.

Resumindo, reter um número finito de termos na equação de propagação (2.52) é equivalente a introduzir o mesmo número de termos no cálculo do $\cos\theta$ na Eq. (2.62), no que resulta na introdução de um erro na direcção de propagação θ . Estamos, então, em condições de estudar a validade da aproximação da série de Taylor de $\beta(k_x)$, usando para isso a Eq. (2.62).

Recorrendo à lei das redes de difracção (2.58) na Eq. (2.62), resulta

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{1}{k_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} k_x^n \\ &= \cos\gamma - \tan\gamma \left(\frac{k_x}{k_0} \right) + \frac{\beta_2}{2} \frac{k_x^2}{k_0} + \frac{1}{k_0} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} k_x^n \\ &= \cos\gamma - \tan\gamma \left(\frac{k_x}{k_0} \right) + \frac{\beta_2}{2} \frac{k_x^2}{k_0} \left[1 + \sum_{n=3}^{\infty} \delta_{n2} \right],\end{aligned}\tag{2.64}$$

onde se introduziram os parâmetros δ_{n2} definidos por

$$\delta_{n2} = \frac{2}{n!} \frac{\beta_n}{\beta_2} k_x^{n-2},\tag{2.65}$$

que caracterizam a grandeza dos termos de ordem n na série (2.64), relativamente ao termo de segunda ordem (termo em β_2). Vamos limitar a nossa análise apenas aos primeiros três parâmetros δ_{n2} :

$$\delta_{32} = \frac{\beta_3}{3\beta_2} k_x = \frac{\sin\gamma}{\cos^2\gamma} \frac{k_x}{k_0},\tag{2.66a}$$

$$\delta_{42} = \frac{\beta_4}{3\beta_2} k_x^2 = \frac{1 + 5 \tan^2\gamma}{4 \cos^2\gamma} \left(\frac{k_x}{k_0} \right)^2,\tag{2.66b}$$

$$\delta_{52} = \frac{2\beta_5}{5!\beta_3} k_x^3 = \frac{\tan\gamma}{4 \cos^5\gamma} (3 + 4 \sin^2\gamma) \left(\frac{k_x}{k_0} \right)^3.\tag{2.66c}$$

Estabelecendo $\delta_{n2} > 10^{-2}$ como condição para a introdução dos termos até à ordem n na série (2.64) e usando ainda como padrão o limite de validade na aproximação paraxial para a propagação no eixo ($\gamma = 0$), obtém-se:

$$\delta_{42}|_{\gamma=0} = \frac{1}{4} \left(\frac{k_x}{k_0} \right)^2 \sim \frac{1}{100} \Rightarrow k_x \sim \frac{k_0}{5},\tag{2.67}$$

isto é, para frequências do sinal da ordem de $k_0/5$ a aproximação paraxial deixa de ser válida, sendo necessário a introdução de termos de ordem superior. Portanto, vamos limitar a análise a sinais cuja frequência máxima é metade deste valor, $k_{x_{max}} = k_0/10$. Este critério implica aceitar um erro máximo na direcção de propagação θ inferior a $0,1^\circ$.

Nos gráficos das figuras 2.6, 2.7 e 2.8 está representada a variação dos três primeiros parâmetros δ_{n2} em função do ângulo de propagação γ , para vários valores da frequência k_x

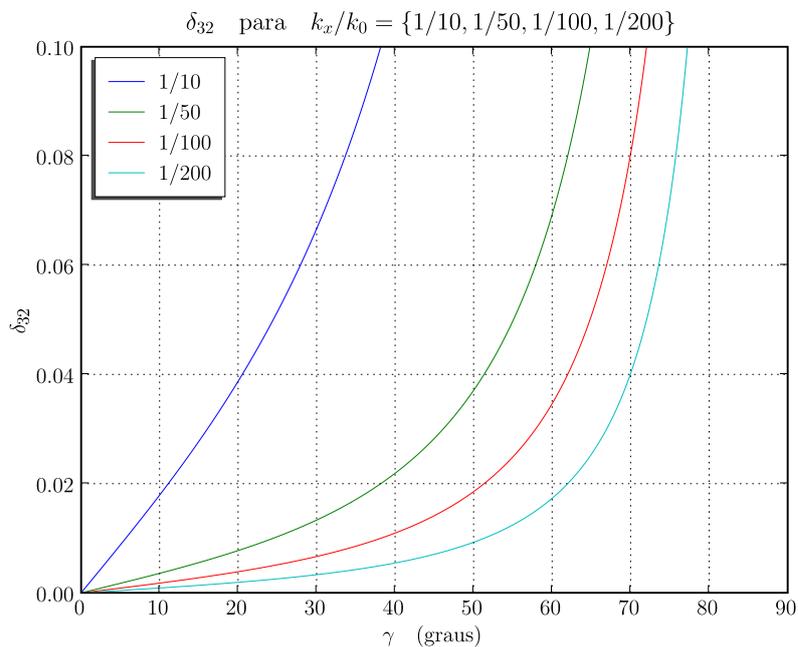


Figura 2.6: Variação da grandeza relativa δ_{32} em função do ângulo γ para $k_x/k_0 = \{1/10, 1/50, 1/100, 1/200\}$.

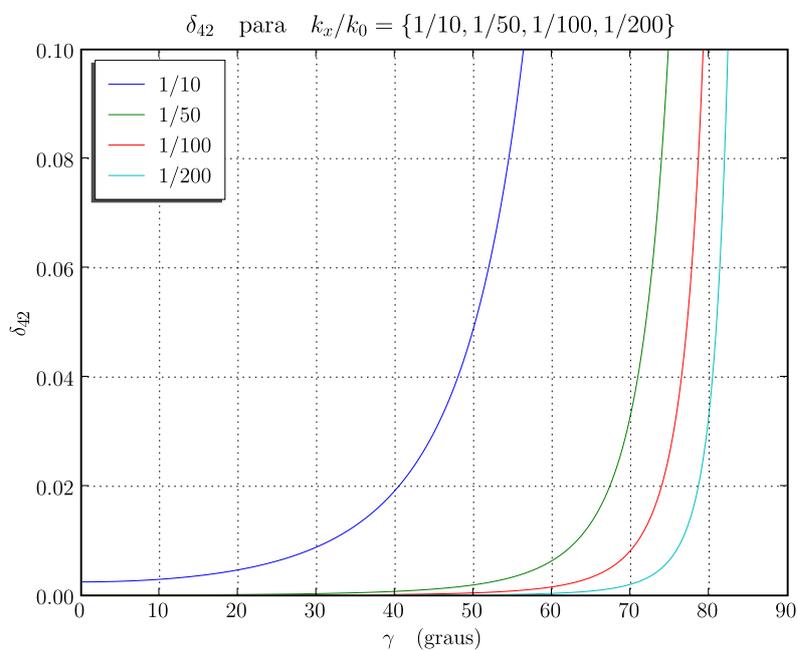


Figura 2.7: Variação da grandeza relativa δ_{42} em função do ângulo γ para $k_x/k_0 = \{1/10, 1/50, 1/100, 1/200\}$.

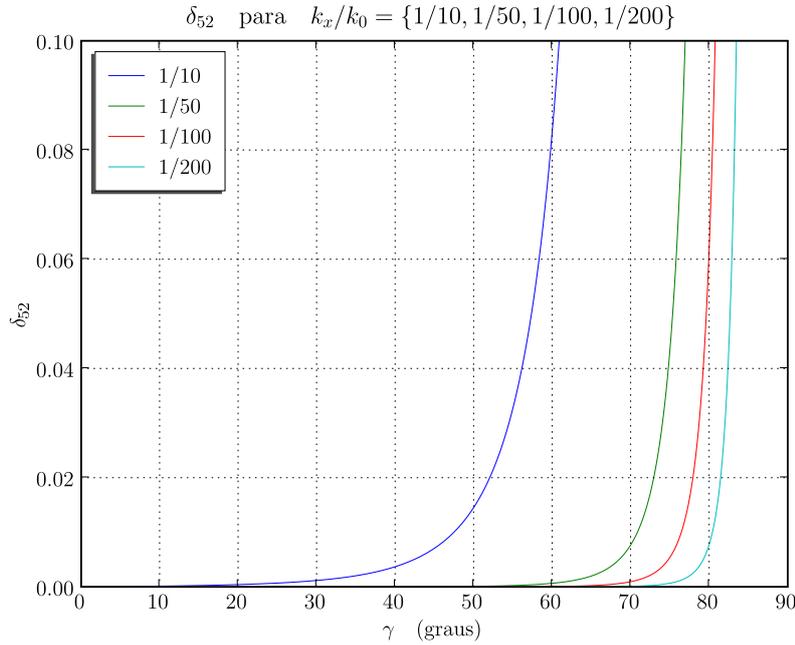


Figura 2.8: Variação da grandeza relativa δ_{52} em função do ângulo γ para $k_x/k_0 = \{1/10, 1/50, 1/100, 1/200\}$.

do sinal. Da análise dos gráficos verifica-se que, os parâmetros δ_{n2} são funções crescentes do ângulo de propagação γ ; como consequência, a convergência da série (2.64) é tanto mais lenta quando maior for γ . Pode verificar-se que, para ângulos $\gamma \geq 90^\circ$ a série deixa de convergir; no entanto esta situação não apresenta nenhuma dificuldade à teoria, visto que $\gamma = 90^\circ$ representa, fisicamente, a não existência de propagação segundo a direcção z .

Verifica-se, também, da análise dos gráficos que a introdução dos termos até à ordem n na série (2.64) é imposta, para além do ângulo γ , pela maior frequência k_x presente no sinal. No caso em análise, é imposta pela curva correspondente a $k_x = k_0/10$.

Sendo assim, podemos determinar o ângulo de propagação γ a partir do qual se devem introduzir os termos até à ordem n na série (2.64). Resolvendo a equação $\delta_{n2} = 10^{-2}$ com $k_x = k_0/10$, obtém-se os resultados resumidos na tabela 2.1. Para $\gamma > 64^\circ$, resulta da equação das redes de difracção (2.58) $\sin\theta > 1$, isto é, temos uma onda evanescente, que tende rapidamente para zero com a distância de propagação z .[†]

Em conclusão, a expansão em série de $\beta(k_x)$, dentro dos limites de validade da teoria escalar da difracção, é bem comportada (converge). Uma correcta propagação de um sinal, usando a Eq. (2.52), pressupõe um conhecimento, à priori, da frequência máxima do sinal, para se poder avaliar, a partir dos parâmetros δ_{n2} , o número mínimo de termos da expansão

[†] Para uma correcta análise das ondas evanescentes, é necessário o uso da teoria vectorial da difracção.

Tabela 2.1: Número de termos a incluir na expansão de $\beta(k_x)$ em função da direcção de propagação γ para uma frequência máxima do sinal $k_x = k_0/10$.

Direcção de propagação	Termos a reter na expansão de $\beta(k_x)$
$\gamma \lesssim 6^\circ$	β_2
$6^\circ \lesssim \gamma \lesssim 32^\circ$	β_2 e β_3
$32^\circ \lesssim \gamma \lesssim 48^\circ$	β_2, β_3 e β_4
$48^\circ \lesssim \gamma \lesssim 64^\circ$	$\beta_2, \beta_3, \beta_4, \beta_5, \dots$
$\gamma \gtrsim 64^\circ$	onda evanescente

de $\beta(k_x)$, a reter na equação de propagação (2.52).

2.4.4 Integral de propagação - fora de eixo

O objectivo desta secção é encontrar uma solução para a equação diferencial da difracção fora de eixo (2.49), na forma de integral, semelhante ao integral de Huygens-Fresnel da secção 2.2.

Aplicando a transformada de Fourier inversa na variável $\Delta \mathbf{k}_\perp$ à Eq. (2.39) tem-se

$$A(\mathbf{r}_\perp, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} A(\Delta \mathbf{k}_\perp, 0) \exp[-i(\beta(\mathbf{k}_\perp) - k_{z_0})z] \exp(-i\Delta \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{r}_\perp) d\Delta \mathbf{k}_\perp. \quad (2.68)$$

Introduzindo a mudança de variável (2.48) e a expansão em série de Taylor de $\beta(\mathbf{k}_\perp)$ (2.45), resulta

$$A(\mathbf{u}_\perp, \xi) = \iint_{-\infty}^{+\infty} A(\Delta \mathbf{k}_\perp, 0) H(\Delta \mathbf{k}_\perp, \xi) \exp(-i\Delta \mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{u}_\perp) d\Delta \mathbf{k}_\perp, \quad (2.69)$$

em que

$$H(\Delta \mathbf{k}_\perp, \xi) = \exp \left[-i \left(\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\beta_n}{n!} \Delta \mathbf{k}_\perp^n \right) \xi \right]. \quad (2.70)$$

Como os coeficientes $\beta_n(\mathbf{k}_\perp)$ dependem de $\Delta \mathbf{k}_\perp$ através do termo $\cos^2 \theta$ vai aproximar-se o $\cos^2 \theta$ pelo seu valor médio $1/2$, tornando os coeficientes $\beta_n(\mathbf{k}_\perp)$ independentes de $\Delta \mathbf{k}_\perp$. Faz-se notar que, para sinais unidimensionais, os coeficientes $\beta_n(k_x)$ são independentes de Δk_x logo, neste caso, não está a impor-se nenhum tipo de aproximação.

Dentro desta suposição, e, retendo apenas o termo em $\beta_2(\mathbf{k}_\perp)$, resulta a função de transferência nas coordenadas (\mathbf{u}_\perp, ξ) na aproximação paraxial

$$H(\Delta\mathbf{k}_\perp, \xi) = \exp \left[-i \left(\frac{\beta_2}{2} \Delta\mathbf{k}_\perp^2 \right) \xi \right]. \quad (2.71)$$

Substituindo (2.71) na Eq. (2.69) e aplicando o teorema da convolução, resulta o integral de propagação

$$A(\mathbf{u}_\perp, \xi) = \iint_{-\infty}^{+\infty} A(\mathbf{r}_\perp, 0) H(\mathbf{r}_\perp - \mathbf{u}_\perp, \xi) d\mathbf{r}_\perp, \quad (2.72)$$

em que $H(\mathbf{u}_\perp, \xi)$ é resposta impulsional da propagação livre numa direcção \mathbf{k}_0 , dada por

$$\begin{aligned} H(\mathbf{u}_\perp, \xi) &= \mathcal{F}^{-1} \{ H(\Delta\mathbf{k}_\perp, \xi) \} \\ &= \frac{ik_{z_0}}{(1 + \alpha^2)\xi} \exp \left[-i \frac{k_{z_0} \mathbf{u}_\perp^2}{2(1 + \alpha^2)\xi} \right], \end{aligned} \quad (2.73)$$

sendo $\alpha = k_{\perp_0}/2k_{z_0}$.

No limite $\mathbf{k}_{\perp_0} \rightarrow 0$, o integral de propagação (2.72) reduz-se ao integral de Fresnel (2.24).

2.5 Analogia entre a difracção espacial e a dispersão temporal

A analogia DEDT é caracterizada, tradicionalmente, a partir da comparação entre as equações que descrevem a propagação do sinal/impulso nos dois regimes, espacial e temporal.

2.5.1 Analogia DEDT primitiva

A analogia DEDT primitiva é caracterizada a partir da comparação entre as Eqs. (2.14) e (2.32) [27]. Desde logo se constata que esta analogia é incompleta; só é possível estabelecê-la dentro da aproximação paraxial no caso da difracção, e, dentro da aproximação até à segunda ordem na dispersão, no caso da propagação de um impulso num meio dispersivo. Se tentarmos incluir termos de ordem superior à segunda, na dispersão, a analogia quebra, isto é, deixa de ser válida, como foi referido em [65].

A título de comparação com a extensão à analogia DEDT da secção 2.5.2, é apresentado na tabela 2.2, um resumo da analogia DEDT primitiva. Só existe equivalência entre três parâmetros: direcção de propagação, coordenada transversal/perfil e termo de

Tabela 2.2: Resumo da analogia DEDT primitiva; relação entre os vários parâmetros dos dois fenómenos. GVD - dispersão da velocidade de grupo (*Group Velocity Dispersion*).

	Dispersão temporal	Difracção espacial
Direcção de propagação	ξ	z
Coordenada do perfil	τ	x
Dispersão de 2 ^o ordem (GVD)	β_2	$-1/k_0$

dispersão/difracção β_2 . Apesar de terem sido usados, na derivação da Eq. (2.14), os termos de dispersão de ordem zero (velocidade de fase) e um (velocidade de grupo), estes não têm análogo na derivação da equação de propagação em difracção Eq. (2.32).

2.5.2 Extensão à analogia DEDT primitiva

Como já foi referido a analogia DEDT primitiva foi formulada através das equações diferenciais usuais que descrevem a propagação nos dois regimes. No caso da dispersão, a frequência portadora é normalmente introduzida à priori (Eq. (2.5)), enquanto que na difracção, a frequência espacial portadora é considerada nula (propagação no eixo) e a aproximação paraxial é normalmente aplicada (Eq. (2.32)). Além disto, a equação da dispersão é posteriormente convertida numa propagação no eixo (portadora nula) deslocando a frequência temporal central para zero, através de uma mudança de variável (Eq. (2.12)). Como consequência destes procedimentos, perdem-se algumas das analogias entre os dois regimes. Para recuperar estas analogias, introduziu-se no formalismo da difracção uma frequência espacial portadora (secção 2.4), equivalente à frequência temporal portadora, tal como foi inicialmente proposto por Naulleau [66], e onde a aproximação paraxial não é usada. Com esta nova abordagem da difracção, consegue-se recuperar todas as analogias perdidas, resultando numa analogia DEDT completa.

A extensão à analogia DEDT primitiva é caracterizada a partir da comparação entre as equações diferenciais de propagação nos dois regimes, Eqs. (2.13) e (2.52). Embora nestas equações de propagação não apareça explicitamente uma equivalência entre os termos em β_0 e β_1 , ela está presente nas equações de mudança de variáveis para o tempo/espaço próprio, Eqs. (2.12), (2.48) e nas equações de propagação do espectro (2.7), (2.39).

Na tabela 2.3 encontra-se resumida a extensão à analogia DEDT primitiva, onde se

identifica a relação de equivalência entre os vários parâmetros. Em particular, tem-se uma correspondência entre todos os coeficientes da expansão de $\beta(\omega)$ e $\beta(k_x)$ e surge na difracção o análogo da frequência portadora ω_0 , que é k_{x_0} .

Tabela 2.3: Resumo da extensão à analogia DEDT primitiva; relação entre os vários parâmetros dos dois fenómenos. GVD - *Group Velocity Dispersion*, TOD - *Third Order Dispersion*.

	Dispersão temporal	Difracção espacial
Direcção de propagação	ξ	ξ
Coordenada do perfil	τ	u_x
Frequência	ω	k_x
Frequência portadora	ω_0	k_{x_0}
Largura espectral	Ω	Δk_x
Relação de dispersão	$n(\omega)$	$n(k_x)$
Velocidade de fase	$v(\omega)$	$v(k_x)$
Constante de propagação	$\beta(\omega)$	$\beta(k_x)$
Constante de propagação da portadora	β_0	k_{z_0}
Velocidade de grupo	β_1^{-1}	$-k_{z_0}/k_{x_0}$
Dispersão de 2ª ordem (GVD)	β_2	$-(1 + \alpha^2)/k_{z_0}$
Dispersão de 3ª ordem (TOD)	β_3	$-3(1 + \alpha^2)k_{x_0}/k_{z_0}$
Dispersão de ordem n	β_n	β_n

Levando a analogia DEDT mais longe, pode definir-se o equivalente à relação de dispersão, isto é, a dependência do índice de refração na frequência temporal $n(\omega)$, a partir da relação

$$\beta(\omega) = n(\omega)\omega/c = \frac{\omega}{v(\omega)}, \quad (2.74)$$

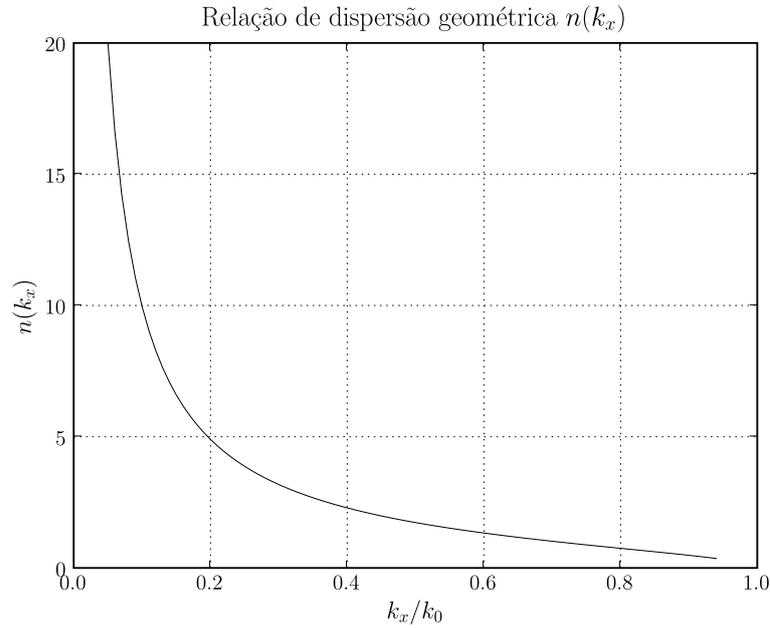


Figura 2.9: Relação de dispersão geométrica $n(k_x)$ equivalente à relação de dispersão temporal ($c_s = 1$).

em que $v(\omega)$ é a velocidade de fase. A relação equivalente na difracção à Eq. (2.74) é

$$\beta(k_x) = n(k_x)k_x/c_s = \frac{k_x}{v(k_x)}, \quad (2.75)$$

em que c_s é o equivalente à velocidade da luz no vácuo e $v(k_x)$ é o equivalente à velocidade de fase na dispersão. Como esta velocidade é adimensional, será mais apropriado chamar-lhe taxa de variação de fase no espaço. Da Eq. (2.75) resulta o equivalente à relação de dispersão, que à falta de melhor, podemos chamar-lhe relação de dispersão geométrica, visto que resulta da orientação geométrica do vector \mathbf{k}_0 , relativamente ao sistema de eixos,

$$n(k_x) \equiv \frac{c_s}{v(k_x)}. \quad (2.76)$$

No gráfico da Fig. 2.9 está representada a variação de $n(k_x)$ em função de k_x/k_0 para $c_s = 1$. A relação de dispersão geométrica $n(k_x)$ não tem uma existência física, é apenas um conceito introduzido pela analogia DEDT. A forma correcta de interpretar a figura 2.9 é a seguinte: a propagação livre em difracção é formalmente equivalente à propagação de um impulso num meio dispersivo cuja relação de dispersão, a menos de um factor de escala, tem a forma da curva do gráfico da Fig. 2.9.

2.6 Conclusão

Da análise da propagação livre fora de eixo da secção 2.4, resultou um conjunto de novas analogias entre a propagação em dispersão e difracção. Ficou demonstrado que, para obter uma analogia DEDT completa, é necessário uma abordagem fora de eixo da propagação livre, em difracção [67–69].

A analogia DEDT, proposta neste capítulo, não se trata de uma nova analogia relativamente à analogia DEDT primitiva, trata-se sim, de uma analogia mais extensa em que a analogia primitiva é, apenas, um caso particular. Podemos considerar a analogia DEDT, proposta neste capítulo completa, visto que existe uma equivalência entre todos os parâmetros presentes nos dois regimes, dispersão e difracção.

Outra consequência desta analogia DEDT é a introdução do equivalente ao conceito de aberração temporal introduzido por Bennett [70], que considera aberração as alterações introduzidas no impulso devido à presença dos termos em β_3 e superiores. Estas aberrações temporais são análogas às aberrações de difracção, que consistem em correcções à aproximação paraxial na propagação livre [71–77], as quais são de natureza diferente das aberrações definidas no âmbito de um sistema formador de imagem [78–80].

Fora do âmbito da analogia DEDT, a análise da propagação livre fora de eixo da alínea 2.4 poderá ser aplicada no estudo da propagação de sinais em sistemas ópticos desalinhados e na propagação de sinais, segundo a direcção das várias ordens de difracção de uma rede de difracção.

Lente temporal

O estudo da analogia DEDT, realizado no capítulo anterior, embora tenha interesse teórico, por si só não apresenta de imediato consequências práticas relevantes.

Por outro lado, o fenómeno da difracção aplicado ao processamento óptico de informação, envolve o estudo da propagação do sinal num sistema óptico, formado por vários tipos de elementos ópticos. O elemento óptico fundamental, comum a estes sistemas ópticos é a lente espacial.

A função de uma lente espacial (delgada) consiste na multiplicação do sinal de entrada por um termo de fase quadrático do tipo

$$\exp \left[i \frac{k_0(x^2 + y^2)}{2f} \right], \quad (3.1)$$

em que f é a chamada distância focal da lente, que, para uma lente refractiva, depende da geometria da duas faces da lente e do índice de refracção n do material que a constitui.

Portanto, se queremos introduzir, na física da propagação de impulsos em meios dispersivos, conceitos análogos aos do processamento óptico de informação em difracção, então, é de fundamental importância introduzir, no fenómeno da dispersão, o conceito de lente temporal que realize uma função sobre o impulso análoga à Eq. (3.1). Usando a analogia DEDT expressa pela tabela 2.3, a função da lente temporal terá de ser do tipo [17]

$$\exp \left[-i \frac{\tau^2}{2\beta_2 f} \right], \quad (3.2)$$

em que f é a distância focal, que naturalmente dependerá do tipo de implementação física da lente.

O conceito de lente temporal foi pela primeira vez implementado por Kolner em 1988 [5],

que usou um cristal electro-óptico para criar uma modulação de fase do tipo dado pela Eq. (3.2). Actualmente existem várias formas de implementar uma lente temporal: modulação de fase electro-óptica [5, 18, 81–84], geração da soma ou diferença de frequências (S/DFG - *sum/difference-frequency generation*) - lente temporal paramétrica [19, 20], modulação cruzada de fase (XPM - *cross-phase modulation*) [85] e auto modulação de fase (SFM - *self-phase modulation*) [28].

Nenhum dos modelos teóricos que descrevem estas formas de implementação da lente temporal têm em consideração a propagação do impulso no interior da lente, isto é, considera-se que $\beta_i = 0$ para $i \geq 2$. Como tal, podemos considerá-las análogas à lente espacial delgada, a qual também despreza a propagação do sinal no interior da lente.

Neste capítulo, é feito o estudo da propagação de um impulso num cristal electro-óptico cujo índice de refração é modulado por uma micro-onda considerando apenas a aproximação de segunda ordem na dispersão, $\beta_i = 0$ para $i \geq 3$. Demonstra-se ainda que, este sistema pode comportar-se como uma lente de perfil de índice parabólico temporal análoga à lente GRIN espacial (GRIN - *graded-index*)[86].

3.1 Lente temporal “delgada”

Nesta secção são apresentados os vários tipos da lente temporal “delgada” (ou instantânea), em particular, da lente electro-óptica e da lente paramétrica.

A análise do modelo de lente temporal, do tipo SFM [28], não é explorada neste trabalho, visto que esta lente não é passiva pelo facto de depender do perfil do próprio impulso. A fase introduzida por este tipo de lente num impulso de perfil $A(\tau)$ é dada por

$$\phi(\tau) = B|A(\tau)|^2, \quad (3.3)$$

em que B é uma constante característica do processo SFM. Por exemplo, para um impulso de perfil gaussiano $A(\tau) = A_0 \exp(-\tau^2/2\tau_0^2)$, expandindo em série de Taylor o perfil de intensidade, retendo apenas os dois primeiros termos resulta

$$\phi(\tau) = BA_0^2 \left(1 - \frac{\tau^2}{2\tau_0^2} \right). \quad (3.4)$$

O termo de fase introduzido é quadrático no tempo τ mas a distância focal desta lente é função do perfil do impulso, isto é, a lente comporta-se de forma diferente para impulsos de diferentes perfis, uma situação indesejada em várias situações. Por exemplo, este tipo de

lente não pode ser usado num sistema genérico formador de imagem temporal, visto que a condição de formação de imagem apenas é válida para um perfil particular do impulso de entrada.

A lente temporal implementada a partir da XFM [85] tem um princípio de funcionamento muito semelhante ao da lente temporal SFM. A diferença encontra-se no termo de fase introduzido pela lente que depende do perfil de intensidade de um outro impulso. O seu funcionamento, porém, como lente temporal só resulta em condições muito especiais, em particular no caso dos dois impulsos terem um perfil aproximadamente gaussiano, limitando assim a sua versatilidade. Por esta razão, a análise do seu funcionamento também não é abordada neste trabalho.

3.1.1 Lente temporal electro-óptica “delgada”

Uma das formas de obter uma lente temporal baseia-se no princípio da modulação electro-óptica, em que o impulso atravessa um cristal electro-óptico, no qual o índice de refração é modulado por um campo sinusoidal de frequência ω_M na região das micro-ondas.

Para caracterizar o efeito da lente estudar-se-á a propagação de um impulso ao longo do cristal electro-óptico. Considerando o impulso linearmente polarizado, a propagação ao longo do cristal é descrita pela equação de onda escalar (1.7)

$$\nabla^2 E(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}, \quad (3.5)$$

em que o subscrito i da componente do campo foi removido. O efeito da modulação, no índice de refração do cristal, está incluído no termo de polarização $P(\mathbf{r}, t)$ na forma, $P(\mathbf{r}, t) = P_L(\mathbf{r}, t) + \Delta P(\mathbf{r}, t)$, em que $P_L(\mathbf{r}, t)$ é a polarização linear e $\Delta P(\mathbf{r}, t)$ é a perturbação em $P(\mathbf{r}, t)$ devido ao efeito do campo da micro-onda, dado por [46]

$$\Delta P(\mathbf{r}, t) = -\epsilon_0 n_0^4 r_{\text{ef}} E_M(\mathbf{r}, t) E(\mathbf{r}, t), \quad (3.6)$$

em que n_0 é o índice de refração do cristal para a frequência portadora do impulso ω_0 , r_{ef} é o coeficiente electro-óptico efectivo do cristal e $E_M(\mathbf{r}, t)$ é o campo da micro-onda modulador, que, por hipótese, toma a forma sinusoidal, copropagante com o impulso

$$E_M(\mathbf{r}, t) = E_{M0} \cos(\omega_M t - k_M z). \quad (3.7)$$

Para resolver a equação de onda (3.5), vamos aplicar a SVEA ao impulso, cuja forma é $E(\mathbf{r}, t) = A(z, t) \exp[i(\omega_0 t - \beta_0 z)]$, e introduzir a aproximação de 1º ordem na dispersão ($\beta_i =$

0 para $i \geq 2$) na Eq. (3.5), resultando

$$\left[\frac{\partial A(z,t)}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A(z,t)}{\partial t} \right] \exp[i(\omega_0 t - \beta_0 z)] = i \frac{\mu_0}{2\beta_0} \frac{\partial^2 \Delta P(z,t)}{\partial t^2}. \quad (3.8)$$

Ao usar as Eqs. (3.6) e (3.7) o termo do lado direito desta equação toma a forma:

$$\begin{aligned} i \frac{\mu_0}{2\beta_0} \frac{\partial^2 \Delta P(z,t)}{\partial t^2} &\approx -i \frac{\mu_0 \omega_0^2}{2\beta_0} \Delta P(z,t) \\ &= i \frac{\omega_0}{2c} n_0^3 r_{\text{ef}} A(z,t) E_{M0} \cos[i(\omega_M t - k_M z)] \exp[i(\omega_0 t - \beta_0 z)], \end{aligned} \quad (3.9)$$

em que $\omega_0/\beta_0 = c/n_0$ e onde se considerou a frequência da onda moduladora muito pequena comparada com a frequência portadora do impulso, isto é, $\omega_M \ll \omega_0$. Substituindo a Eq. (3.9) na Eq. (3.8) e mudando para o tempo próprio do impulso através da mudança de variável (2.12) resulta

$$\frac{\partial A(\xi, \tau)}{\partial \xi} = i \frac{\omega_0}{2c} n_0^3 r_{\text{ef}} E_{M0} \cos(\omega_M \tau + \varphi) A(\xi, \tau), \quad (3.10)$$

em que

$$\begin{aligned} \varphi &= \omega_M \xi (\beta_1 - k_M/\omega_M) \\ &= \omega_M \xi (1/v_g - 1/v_M) \\ &= \frac{\omega_M \xi}{\Delta v}, \end{aligned} \quad (3.11)$$

é o desvio de fase resultante da diferença $v_g - v_M$, sendo $v_g = \beta_1^{-1}$ a velocidade de grupo do impulso, $v_M = \omega_M/k_M$ a velocidade de fase da micro-onda moduladora e $1/\Delta v = 1/v_g - 1/v_M$. A equação diferencial de 1ª ordem (3.10) tem como solução

$$A(\xi, \tau) = A(0, \tau) \exp \left[i \frac{\omega_0 n_0^3 r_{\text{ef}} E_{M0} \xi}{2c} \text{sinc}(\varphi/2) \cos(\omega_M \tau + \varphi/2) \right], \quad (3.12)$$

em que $\text{sinc}(x) = \sin x/x$. Como o objectivo é obter a função de uma lente, vamos por hipótese supor que:

- existe um perfeito ajuste nas velocidades, $\varphi = 0$,
- a duração do impulso é muito menor do que $1/\omega_M$.

Nestas condições, $\text{sinc}(0) = 1$ e o coseno pode ser aproximado pelos dois primeiros termos

da série de Taylor, resultando da Eq. (3.12)

$$A(\xi, \tau) = A(0, \tau) \exp[i\Gamma_0] \exp\left[-i\frac{\Gamma_0(\omega_M \tau)^2}{2}\right], \quad (3.13)$$

em que $\Gamma_0 = \omega_0 n_0^3 r_{\text{ef}} E_{M0} \xi / 2c$.

Resumindo, dentro das aproximações que levaram à Eq. (3.13) o cristal electro-óptico modulado por uma micro-onda funciona como uma lente temporal, cujo tempo focal, definido por Kolner [23], é

$$f_K = \frac{\omega_0}{\Gamma_0 \omega_M^2} \quad (3.14)$$

3.1.2 Lente temporal paramétrica¹

Numa lente temporal paramétrica, as características de amplitude e fase da lente são obtidas a partir de um impulso óptico de bombagem, por um processo não linear de soma/diferença de frequências, o perfil do impulso de saída é uma réplica do impulso de entrada com a característica de fase do impulso de bombagem.

Existe várias formas de obter impulsos ópticos de bombagem com as características da lente desejadas; a dispersão de um impulso laser ultra-curto [88] e a auto-modulação de fase [89] são processos que podem ser usados para produzir um impulso de bombagem com o *chirp* linear desejado.

Com o objectivo de demonstrar o princípio básico de funcionamento da lente temporal paramétrica vai descrever-se, de forma bastante simples, o funcionamento de um processo não linear de soma de frequências. Os dois campos de entrada no cristal não linear, campo de bombagem e campo de sinal, respectivamente, com frequências portadoras, ω_p e ω_1 e vectores de onda segundo a direcção z , k_p e k_1 , podem ser descritos da forma

$$E_p(z, t) = A_p(z, t - z/v_g) \exp[i(\omega_p t - k_p z)], \quad (3.15a)$$

$$E_1(z, t) = A_1(z, t - z/v_g) \exp[i(\omega_1 t - k_1 z)], \quad (3.15b)$$

em que as velocidades de grupo das duas ondas foram consideradas iguais.

Se considerarmos um acoplamento de energia fraco entre os impulsos de entrada e o impulso de saída, então podemos, em primeira aproximação, supor que os perfis das envolventes não variam com z ; $A_p(z, t - z/v_g) \equiv A_p(t - z/v_g)$, $A_1(z, t - z/v_g) \equiv A_1(t - z/v_g)$.

¹ Adaptado da referência [87]

O campo à saída do cristal da terceira onda toma a forma

$$E_2(z, t) = A_2(z, t - z/v_g) \exp [i(\omega_2 t - k_2 z)], \quad (3.16)$$

em que o perfil à entrada do cristal é nulo, $A_2(0, t - z/v_g) = 0$.

Os dois impulsos de entrada dão origem a uma polarização não linear co-propagante,

$$\begin{aligned} P^{(2)}(z, t) &= \chi_{ef}^{(2)} E_1(z, t) E_p(z, t) \\ &= \chi_{ef}^{(2)} A_1(t - z/v_g) A_p(t - z/v_g) \exp [i(\omega_2 t - k_S z)], \end{aligned} \quad (3.17)$$

sendo $\omega_2 = \omega_1 + \omega_p$, $k_S = k_1 + k_p$ e $\chi_{ef}^{(2)}$ a susceptibilidade não linear de 2ª ordem efectiva do cristal. Dentro da aproximação SVEA, a evolução do perfil de saída no interior do cristal não linear é descrita pela equação [87]

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{v_g} \frac{\partial}{\partial t} \right) A_2(z, t - z/v_g) = -i \frac{\omega_2 \mu_0 c}{2n_2} P^{(2)}(z, t) \exp [-i(\omega_2 t - k_2 z)], \quad (3.18)$$

sendo n_2 o índice de refração visto por $E_2(z, t)$. Substituindo a Eq. (3.17) na Eq. (3.18) e mudando para o tempo próprio de impulso Eq. (2.12) resulta

$$\frac{\partial A_2(z, \tau)}{\partial \xi} = C A_1(\tau) A_p(\tau) \exp (i \Delta k \xi) \quad (3.19)$$

em que $\Delta k = k_S - k_2$ é o desfaseamento entre os três vectores de onda e C é uma constante. Integrando a Eq. (3.19) ao longo da distancia de interacção L obtém-se a solução

$$A_2(L, \tau) = C' A_1(\tau) A_p(\tau) \text{sinc}(\Delta k L / 2), \quad (3.20)$$

em que a constante C' é definida por

$$C' = -i \frac{\omega_2 \mu_0 c}{2n_2} \chi_{ef}^{(2)} \exp (i \Delta k L / 2). \quad (3.21)$$

Da Eq. (3.20) verifica-se que, para obter a máxima conversão possível, a constante de propagação do campo com frequência ω_2 tem que satisfazer a igualdade $k_2 = k_S$, isto é, tem que existir um ajuste perfeito de fase. Na prática, existem várias técnicas para satisfazer esta condição, como seja a sintonização angular e a de temperatura. Com uma escolha apropriada dos materiais pode-se construir uma lente temporal paramétrica com $\Delta k = 0$.

Dentro das simplificações introduzidas nesta análise, considerando um perfeito ajuste de

fase e separando a envolvente de bombagem $A_p(\tau)$ nas componentes amplitude real $P(\tau)$ e fase $H(\tau)$, obtém-se à saída do cristal

$$A_2(L, \tau) \propto A_1(\tau)H(\tau)P(\tau), \quad (3.22)$$

o desejado efeito de lente, caso a fase da onda de bombagem seja quadrática no tempo (*chirp* linear).

Existe uma desvantagem da lente temporal paramétrica relativamente à lente temporal electro-óptica. Numa lente temporal electro-óptica o sinal de entrada é modificado por uma variação temporal do índice de refração; logo a eficiência de saída neste sistema pode ser muito alta. Numa lente temporal paramétrica o sinal de saída é proporcional ao sinal de entrada e ao campo de bombagem, Eq. (3.20); a eficiência de conversão é determinada pela intensidade da bombagem, a susceptibilidade efectiva do material e a distância de interacção. A pequena distância de interacção e a pequena susceptibilidade não linear encontrada na grande maioria dos materiais disponíveis, resulta numa eficiência de saída muito menor do que aquela que se pode obter na lente temporal electro-óptica. Esta desvantagem pode limitar o uso da lente temporal paramétrica particularmente num sistema onde seja necessário o uso de várias lentes temporais em cascata.

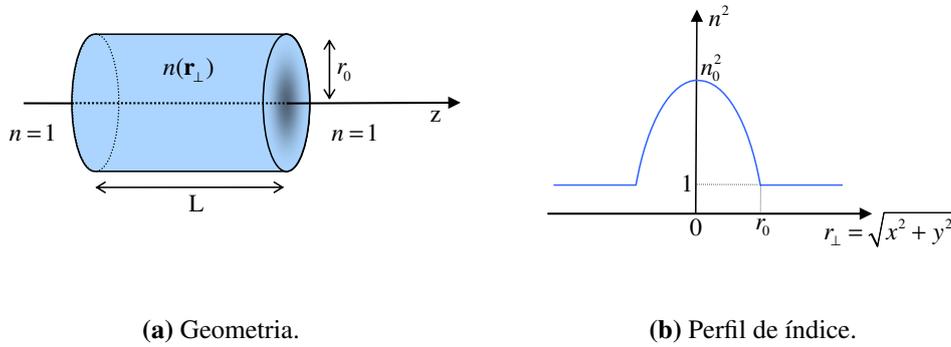
3.2 Lente espacial GRIN

No modelo da lente temporal electro-óptica da secção 3.1.1, o impulso, ao longo da propagação no cristal, “vê” sempre o mesmo perfil temporal parabólico no índice de refração, resultante da modulação pela micro-onda. Esta descrição do fenómeno é bastante semelhante à descrição em difracção, da propagação de um sinal num meio com perfil transversal parabólico no índice de refração (meio GRIN - *graded-index*); o sinal “vê” sempre o mesmo perfil transversal de índice ao longo da propagação no meio GRIN. É natural, portanto, supor que o modelo físico-matemático também revele estas semelhanças.

Com este objectivo em mente, vamos analisar a propagação, na difracção, de um sinal num meio com um perfil transversal no índice de refração do tipo parabólico, de forma a servir de comparação com a propagação de um impulso num cristal electro-óptico modulado por uma micro-onda, tratado nas alíneas seguintes.

Um meio GRIN pode ser caracterizado por um perfil transversal no índice de refração na forma [90]

$$n^2(\mathbf{r}_\perp) = \begin{cases} n_0^2 \left(1 - \frac{n_2}{n_0} \mathbf{r}_\perp^2\right) & \text{para } r_\perp \leq r_0 \\ 1 & \text{para } r_\perp > r_0 \end{cases}, \quad (3.23)$$



(a) Geometria.

(b) Perfil de índice.

Figura 3.1: Meio GRIN.

em que $r_{\perp} = \sqrt{x^2 + y^2}$, $r_0 = \sqrt{(n_0^2 - 1)/(n_0 n_2)}$ e z é a coordenada longitudinal coincidente com o eixo do meio GRIN (Fig. 3.1). Substituindo a Eq. (3.23) na equação de onda (2.18) obtém-se

$$\nabla^2 E(\mathbf{r}_{\perp}, z) + k_0^2 \left(1 - \frac{n_2}{n_0} \mathbf{r}_{\perp}^2 \right) E(\mathbf{r}_{\perp}, z) = 0, \quad (3.24)$$

em que $k_0 = \omega_0 n_0 / c = 2\pi n_0 / \lambda$ é a constante de propagação num meio homogêneo de índice n_0 e λ é o comprimento de onda no vácuo.

Usando o método da separação de variáveis para resolver a Eq. (3.24) e propondo uma solução do tipo $E(\mathbf{r}_{\perp}, z) = A_x(x)A_y(y) \exp(-i\beta z)$, resulta o par de equações diferenciais

$$\frac{\partial^2 A_x(x)}{\partial x^2} + \left[\beta_x^2 - \frac{k_0^2 n_2}{n_0} x^2 \right] A_x(x) = 0, \quad (3.25a)$$

$$\frac{\partial^2 A_y(y)}{\partial y^2} + \left[\beta_y^2 - \frac{k_0^2 n_2}{n_0} y^2 \right] A_y(y) = 0, \quad (3.25b)$$

sendo $\beta_x^2 + \beta_y^2 = k_0^2 - \beta^2$. Estas duas equações são formalmente equivalentes, logo, só é necessário analisar a solução de uma delas, aplicando as mesmas conclusões à outra equação.

Escolhendo a equação na variável x e definindo o parâmetro de escala σ_x

$$\sigma_x = \sqrt{1/k_0} (n_0/n_2)^{1/4}, \quad (3.26)$$

a Eq. (3.25a) toma a forma

$$\sigma_x^2 \frac{\partial^2 A_x(x)}{\partial x^2} + \left(\sigma_x^2 \beta_x^2 - \frac{x^2}{\sigma_x^2} \right) A_x(x) = 0. \quad (3.27)$$

Esta equação é formalmente equivalente à Eq. (C.3) do Apêndice C, logo, partilham o mesmo conjunto de soluções, as funções Hermite-Gaussianas (HG), que para a variável x toma a forma

$$\phi_l(x) = C_l H_l(x/\sigma_x) \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}\right). \quad (3.28)$$

Chega-se às mesmas expressões para y bastando, para isso, fazer a substituição $x \rightarrow y$. Comparando a eq. (3.27) com a Eq. (C.3), os valores próprios associados às funções próprias HG são,

$$\sigma_x^2 \beta_x^2 \equiv 2l + 1 \Rightarrow \beta_x \equiv \beta_l = \left[2k_0 \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} (l + 1/2)\right]^{1/2}, \quad (3.29)$$

com forma idêntica para $\beta_y \equiv \beta_m$.

Resumindo, a solução da Eq. (3.24) toma a forma

$$E_{lm}(\mathbf{r}_\perp, z) = \phi_l(x) \phi_m(y) \exp(-i\beta_{lm}z), \quad (3.30)$$

sendo

$$\begin{aligned} \beta_{lm} &= \sqrt{k_0^2 - \beta_l^2 - \beta_m^2} \\ &= k_0 \left[1 - \frac{2}{k_0} \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} (l + m + 1)\right]^{1/2}, \end{aligned} \quad (3.31)$$

como na região visível do espectro temos $\sqrt{n_2}/k_0 \ll 1$, então podemos aproximar β_{lm} pelos dois termos da expansão em série de Taylor

$$\beta_{lm} \approx k_0 - \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} (l + m + 1). \quad (3.32)$$

Como as funções HG formam um conjunto completo e ortogonal de funções, qualquer função regular pode ser expressa à custa delas. No caso da função ser unidimensional (1D) $A(x)$ pode escrever-se:²

$$A(x) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \phi_l(x), \quad (3.33)$$

em que a_l é a projecção de $A(x)$ na função HG de ordem l ,

$$a_l = \int_{-\infty}^{+\infty} A(x) \phi_l(x) dx. \quad (3.34)$$

² A generalização para 2-D é imediata visto os modos serem separáveis na coordenadas x e y .

Considerando um sinal 1-D à entrada do meio GRIN $E(x, 0) = A(x, 0) = A(x)$, ele propaga-se no interior desse meio de acordo com a equação

$$E(x, z) = \exp(-ik_0z) \sum_{l=0}^{\infty} a_l \phi_l(x) \exp \left[i \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} (l + 1/2) z \right]. \quad (3.35)$$

3.2.1 Lente espacial GRIN - aproximação paraxial

Como a analogia DEDT está assente na aproximação da variação lenta da envolvente (SVEA) e a solução (3.30) não implica esta aproximação, então, por uma questão de consistência formal, devemos resolver a Eq. (3.24) dentro desta aproximação.

Neste caso, procuramos uma solução do tipo $E(\mathbf{r}_{\perp}, z) = A(\mathbf{r}_{\perp}, z) \exp(-ik_0z)$, em que $A(\mathbf{r}_{\perp}, z)$ é a envolvente lenta. Dentro da aproximação SVEA (aproximação paraxial) a Eq. (3.24) toma a forma [65]

$$-2ik_0 \frac{\partial A(\mathbf{r}_{\perp}, z)}{\partial z} + \nabla_{\perp}^2 A(\mathbf{r}_{\perp}, z) - \frac{k_0^2 n_2}{n_0} \mathbf{r}_{\perp}^2 A(\mathbf{r}_{\perp}, z) = 0, \quad (3.36)$$

propondo uma solução do tipo $A(\mathbf{r}_{\perp}, z) = A_x(x)A_y(y) \exp(i\hat{\beta}z)$, resulta

$$\sigma_x^2 \frac{\partial^2 A_x(x)}{\partial x^2} + \left[2\hat{\beta}_x k_0 \sigma_x^2 - \frac{x^2}{\sigma_x^2} \right] A_x(x) = 0, \quad (3.37)$$

onde se introduziu o parâmetro de escala σ_x da Eq. (3.26). De forma equivalente, obtém-se uma equação idêntica para y , sendo $\hat{\beta} = \hat{\beta}_x + \hat{\beta}_y$. Comparando a Eq. (3.37) com as Eqs. (3.27), verifica-se que são formalmente equivalentes, logo partilham o mesmo conjunto de funções próprias, as funções HG (3.28). Os valores próprios associados serão dados, comparando as Eqs. (3.27), (3.29) e (3.37), por

$$\hat{\beta}_x \equiv \frac{\beta_x^2}{2k_0} \equiv \hat{\beta}_l = \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} (l + 1/2). \quad (3.38)$$

Portanto, a constante de propagação do modo (l, m) do campo é

$$\begin{aligned} \beta_{lm} &= k_0 - \hat{\beta} = k_0 - \hat{\beta}_x - \hat{\beta}_y \\ &= k_0 - \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} (l + m + 1). \end{aligned} \quad (3.39)$$

Considerando o sinal 1-D $E(x, 0) = A(x, 0) = A(x)$ à entrada do meio GRIN, a sua envolvente

propaga-se no interior desse meio sob a forma

$$A(x, z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l \phi_l(x) \exp \left[i \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} (l + 1/2) z \right], \quad (3.40)$$

e o campo propaga-se de acordo com a Eq. (3.35).

Resumindo, a única diferença entre a solução da equação de propagação num meio GRIN sem a aproximação SVEA, Eq. (3.24), e a solução da mesma equação na aproximação SVEA, Eq. (3.36), encontra-se apenas na constante de propagação de cada modo do campo, Eqs. (3.31) e (3.39), sendo a diferença entre elas da ordem do terceiro termo da expansão em série de Taylor da Eq. (3.31), $n_2 k_0^{-2}$. O perfil dos modos do campo são iguais nas duas equações, (3.24) e (3.36).

3.2.2 Lente espacial GRIN - sistema processador de sinais

O meio GRIN pode ser usado de duas formas distintas: como lente, fazendo parte de um sistema óptico, ou genericamente como sistema processador de sinais [91, 92].

Mendlovic e outros [93–96] usaram a propagação de um sinal num meio GRIN para definir a transformada de Fourier fraccionária em óptica. Estes autores demonstraram que a distribuição transversal do sinal entre dois planos separados de z no meio GRIN se relacionam através de uma transformada de Fourier fraccionária de ordem p , sendo $p = z/L_F$ em que

$$L_F = \pi/2 \sqrt{n_0/n_2}, \quad (3.41)$$

é o comprimento de Fourier do meio GRIN. Isto é, dois planos do meio GRIN, separados de L_F , relacionam-se por uma transformação de Fourier ($p = 1$).

Uma forma simples de verificar esta relação, é usar o formalismo das matrizes $ABCD$. A matriz $ABCD$ de transformação entre dois planos à distância z no meio GRIN é [90]

$$M_{\text{GRIN}}(z) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{n_2/n_0}z) & \frac{1}{\sqrt{n_0 n_2}} \sin(\sqrt{n_2/n_0}z) \\ -\sqrt{n_0 n_2} \sin(\sqrt{n_2/n_0}z) & \cos(\sqrt{n_2/n_0}z) \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

Uma onda plana à entrada do meio GRIN é focada num ponto a uma distância z (transformada de Fourier) dada pela solução $A = 0$ em que A é o elemento da matriz do meio GRIN, no que resulta $A = \cos(\sqrt{n_2/n_0}z) = 0 \Rightarrow z \equiv L_F = \pi/2 \sqrt{n_0/n_2}$.

Obtém-se uma relação de imagem invertida (transformada de Fourier fraccionária de ordem 2) entre os dois planos quando $B = 0$, no que resulta $z = 2L_F$. Resumindo, um sinal

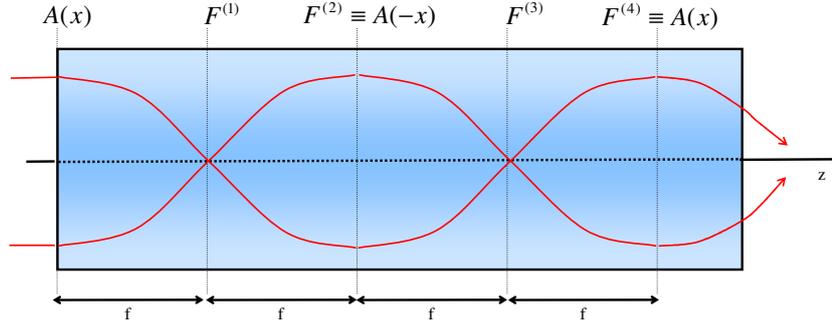


Figura 3.2: Meio GRIN como sistema óptico processador de sinal.

ao longo da propagação no meio GRIN vai sofrendo sucessivas transformadas de Fourier fraccionária de ordem crescente (Fig. 3.2), e conseqüentemente o meio GRIN pode ser usado como sistema processador de sinais.

O meio GRIN pode também ser usado como lente, fazendo parte integrante de um sistema óptico. Para tal vamos analisar o sistema óptico da Fig. 3.3. A relevância da análise deste sistema óptico tornar-se-à evidente aquando do estudo da analogia DEDT entre a lente espacial GRIN e a lente temporal GRIN da secção 3.3.1.

A matriz $ABCD$ de transformação entre os planos P_a e P_b da Fig. 3.3 é dada por [97, 98]

$$S = \begin{pmatrix} 1 & z_b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/n_b \end{pmatrix} M_{\text{GRIN}}(L) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n_a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & z_a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.43)$$

Fazendo a multiplicação das matrizes, obtêm-se os elementos $ABCD$ da matriz S do sistema

$$A = \frac{1}{n_b} \left[n_b \cos(\sqrt{n_2/n_0}L) - n_0 z_b \sqrt{n_2/n_0} \sin(\sqrt{n_2/n_0}L) \right], \quad (3.44a)$$

$$B = \frac{1}{n_0} \left\{ n_a \sqrt{n_0/n_2} \sin(\sqrt{n_2/n_0}L) + n_0 z_a \cos(\sqrt{n_2/n_0}L) + \frac{n_0 z_b}{n_b} \left[n_a \cos(\sqrt{n_2/n_0}L) - n_0 z_a \sqrt{n_2/n_0} \sin(\sqrt{n_2/n_0}L) \right] \right\}, \quad (3.44b)$$

$$C = -\frac{n_0}{n_b} \sqrt{n_2/n_0} \sin(\sqrt{n_2/n_0}L), \quad (3.44c)$$

$$D = \frac{1}{n_b} \left[n_a \cos(\sqrt{n_2/n_0}L) - n_0 z_a \sqrt{n_2/n_0} \sin(\sqrt{n_2/n_0}L) \right], \quad (3.44d)$$

sendo $\det(S) = AD - BC = n_a/n_b$. Uma onda plana à entrada do sistema é focada num ponto

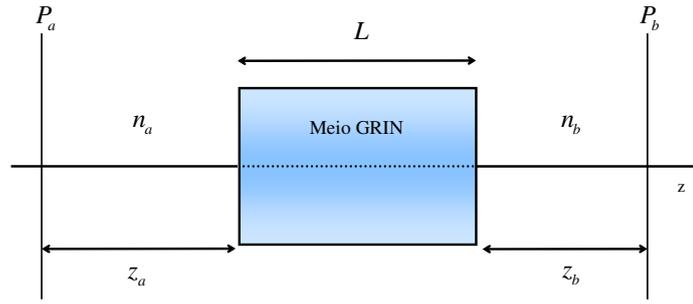


Figura 3.3: Meio GRIN como lente.

a uma distância z_b dada pela solução $A = 0$, no que resulta da Eq.3.44a

$$f_L \equiv z_b = \frac{n_b}{n_0} \sqrt{\frac{n_0}{n_2}} \cot(\sqrt{n_2/n_0}L), \quad (3.45)$$

em que f_L é a distância focal equivalente da lente GRIN, o uso do subscrito L é para explicitar a dependência da distância focal no comprimento da lente GRIN. Se $\sqrt{n_2/n_0}L \ll 1$ então podemos aproximar f_L por

$$f_L \approx \frac{n_b}{n_2 L}. \quad (3.46)$$

A condição para haver uma relação de imagem entre os planos P_a e P_b é $B = 0$, resultando a condição de formação de imagem

$$\frac{n_a}{z_a} + \frac{n_b}{z_b} = \frac{n_b}{f_L} \left(1 - \frac{n_a n_b}{n_0 n_2} \frac{1}{z_a z_b} \right), \quad (3.47)$$

se $L \ll z_a, z_b$ a condição de formação de imagem toma a forma simples

$$\frac{n_a}{z_a} + \frac{n_b}{z_b} = \frac{n_b}{f_L}. \quad (3.48)$$

Concluindo, a análise da propagação de um sinal num meio GRIN pode resumir-se em três pontos:

- a propagação de um sinal no interior do meio GRIN pode ser descrito à custa das funções HG,
- a distância de Fourier do meio GRIN L_F , distância que estabelece uma relação de transformada de Fourier entre dois planos, é dada pela Eq. (3.41),

- o meio GRIN é equivalente a uma lente refractiva, cuja distância focal f_L é dada pela Eq. (3.45).

3.3 Lente temporal electro-óptica

O estudo da propagação de um impulso num cristal com modulação electro-óptica, abordado na secção 3.1.1, foi realizado na aproximação de 1ª ordem na dispersão ($\beta_n = 0$ para $n \geq 2$). Noutras palavras considerou-se que o perfil do impulso se mantém constante durante a propagação, viajando com uma velocidade igual à sua velocidade de grupo, ou, dito de outra forma, a evolução do perfil do impulso dentro do cristal não é afectada. Por esta razão classificou-se como lente temporal “delgada” o modelo da secção 3.1.1.

No entanto, para impulsos sub-picosegundo, o modelo da lente temporal “delgada” poderá não ser o mais adequado para descrever a sua propagação num cristal electro-óptico. Noutras palavras, o comprimento característico ao longo do qual o efeito da dispersão de 2ª ordem, mesmo que β_2 seja pequeno, altera significativamente a envolvente de um impulso é da ordem do comprimento do cristal. O seu valor é dado por [11]

$$L_{\beta_2} = \frac{\tau_0^2}{|\beta_2|}, \quad (3.49)$$

em que τ_0 é a duração do impulso e β_2 é coeficiente de dispersão de 2ª ordem do cristal, ou dispersão da velocidade de grupo (GVD - *group velocity dispersion*).

Se, por exemplo, queremos estudar a propagação de impulsos de comprimento de onda $\lambda = 1 \mu\text{m}$ e largura temporal $50 \text{ fs} < \tau_0 < 500 \text{ fs}$, ao longo de um cristal de LiNbO_3 ($\beta_2 = 0,263 \text{ fs}^2/\mu\text{m}$ para $\lambda = 1 \mu\text{m}^\dagger$), resulta para o comprimento característico L_{β_2}

$$\begin{aligned} L_{\beta_2}(500 \text{ fs}) &\approx 100 \text{ cm}, \\ L_{\beta_2}(50 \text{ fs}) &\approx 1 \text{ cm}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

Como na prática a distância de propagação de um impulso numa lente temporal electro-óptica é $L \sim 10 \text{ cm}$ [5] num cristal em *bulk*, podendo chegar a $L \sim 160 \text{ cm}$ numa configuração de lente temporal multi-passo [83] e $L \sim 1 \text{ cm}$ em moduladores electro-ópticos integrados [99], pode concluir-se que um modelo que descreva a propagação de impulsos sub-picosegundo numa lente temporal electro-óptica deve ter em conta a dispersão da velocidade de grupo do impulso (GVD). No entanto, para impulsos cuja duração seja superior a 1 ps, o

[†] Dados retirados de <http://www.redoptronics.com/crystals.html>

modelo da lente temporal “delgada” da secção 3.1.1 poderá ser em princípio adequado.

3.3.1 Lente temporal GRIN ideal

Tendo em atenção as considerações inicialmente feitas sobre a propagação de impulsos sub-picosegundo em cristais, vamos introduzir na equação de propagação a aproximação de 2ª ordem na dispersão ($\beta_2 \neq 0$). Com base no modelo da lente temporal electro-óptica “delgada” da secção 3.1.1, (Eq. (3.10)) em que se introduz a dispersão de 2ª ordem obtém-se a seguinte equação que descreve a lente electro-óptica [86]

$$\frac{\partial A(\xi, \tau)}{\partial \xi} - i \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} = i \frac{\omega_0}{2c} n_0^3 r_{ef} E_{M0} \cos(\omega_M \tau + \varphi) A(\xi, \tau), \quad (3.51)$$

usando $\beta_0 = \omega_0 n_0 / c$ e introduzindo o valor máximo da modulação do índice no cristal

$$\Delta n_0 = \frac{n_0^3 r_{ef} E_{M0}}{2}, \quad (3.52)$$

a Eq. (3.51) fica

$$\frac{1}{i} \frac{\partial A(\xi, \tau)}{\partial \xi} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} - \beta_0 \frac{\Delta n_0}{n_0} \cos(\omega_M \tau + \varphi) A(\xi, \tau) = 0. \quad (3.53)$$

Como o objectivo é encontrar a função da lente temporal GRIN ideal, vamos usar as mesmas suposições da secção 3.1.1:

- existe um perfeito ajuste nas velocidades do impulso e da micro-onda, $\varphi = 0$,
- a duração do impulso é muito menor do que $1/\omega_M$.

Dentro destas suposições a Eq. (3.53) toma a forma

$$\frac{1}{i} \frac{\partial A(\xi, \tau)}{\partial \xi} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} - \beta_0 \frac{\Delta n_0}{n_0} \left(1 - \frac{\omega_M^2 \tau^2}{2} \right) A(\xi, \tau) = 0. \quad (3.54)$$

em que se aproximou o $\cos(\omega_M \tau)$ pelos seus dois primeiros termos da série de Taylor. Para encontrar uma solução desta equação, usando o método da separação de variáveis, vamos propor uma solução do tipo $A(\xi, \tau) = A(\tau) \exp(i\hat{\beta}\xi)$, que, após substituição na Eq. (3.54), conduz a:

$$\frac{\partial^2 A(\tau)}{\partial \tau^2} + \left[2 \frac{\beta_0}{\beta_2} \left(\frac{\Delta n_0}{n_0} - \frac{\hat{\beta}}{\beta_0} \right) - \frac{\beta_0}{\beta_2} \frac{\Delta n_0}{n_0} \omega_M^2 \tau^2 \right] A(\tau) = 0. \quad (3.55)$$

Definindo o parâmetro de escala σ_τ como

$$\sigma_\tau = (n_0\beta_2)^{1/4} (\Delta n_0\beta_0\omega_M^2)^{-1/4}, \quad (3.56)$$

a Eq. (3.55) fica

$$\sigma_\tau^2 \frac{\partial^2 A(\tau)}{\partial \tau^2} + \left[2\sigma_\tau^2 \frac{\beta_0}{\beta_2} \left(\frac{\Delta n_0}{n_0} - \frac{\hat{\beta}}{\beta_0} \right) - \frac{\tau^2}{\sigma_\tau^2} \right] A(\tau) = 0, \quad (3.57)$$

a qual apresenta uma forma equivalente à Eq. (C.3), partilhando, portanto, o mesmo conjunto de soluções, as funções HG

$$\phi_l(\tau) = C_l H_l(\tau/\sigma_\tau) \exp\left(-\frac{\tau^2}{2\sigma_\tau^2}\right). \quad (3.58)$$

Comparando (3.57) e (C.3), os valores próprios associados tomam a forma:

$$\hat{\beta} \equiv \hat{\beta}_l = \beta_0 \left[\frac{\Delta n_0}{n_0} - \omega_M \sqrt{\frac{\beta_2 \Delta n_0}{\beta_0 n_0}} (l + 1/2) \right]. \quad (3.59)$$

Considerando a envolvente de um impulso à entrada da lente temporal $A(0, \tau) = A(\tau)$, então, à distância ξ na lente, a envolvente será dada por

$$A(\xi, \tau) = \exp\left(i\beta_0 \frac{\Delta n_0}{n_0} \xi\right) \sum_{l=0}^{\infty} a_l \phi_l(\tau) \exp\left[-i\beta_0 \omega_M \sqrt{\frac{\beta_2 \Delta n_0}{\beta_0 n_0}} (l + 1/2) \xi\right], \quad (3.60)$$

em que a_l é a projecção de $A(\tau)$ na função HG de ordem l , obtida pela Eq. (3.34) com $x \rightarrow \tau$.

Estamos, agora, em condições de poder estabelecer a analogia entre a propagação de um sinal num meio espacial GRIN e a propagação de um impulso num cristal electro-óptico. Comparando as Eqs. (3.40) e (3.26) da difracção, com as Eqs. (3.60) e (3.56) da dispersão, pode definir-se a analogia entre parâmetros através da tabela de correspondência 3.1.

As Eqs. (3.40) e (3.60) não são completamente equivalentes, visto que a Eq. (3.60) contém um termo adicional de fase, $\exp(i\beta_0 \Delta n_0 \xi / n_0)$. Este termo de fase tem uma justificação física simples; trata-se de um termo de correcção a β_0 , devido ao facto do centro do impulso ($\tau = 0$) e a sua frequência portadora “ver” sempre o valor de índice de refracção $n_0 - \Delta n_0$. Como $\beta_0 \equiv \beta_0(n_0) = \omega_0 n_0 / c$, uma variação δn_0 produz uma variação $\delta \beta_0 = \omega_0 \delta n_0 / c$ logo

$$\begin{aligned} \beta_0(n_0 - \Delta n_0) - \beta_0(n_0) &\approx \omega_0(n_0 - \Delta n_0 - n_0)/c, \\ \beta_0(n_0 - \Delta n_0) &\approx \beta_0(n_0)(1 - \Delta n_0/n_0). \end{aligned} \quad (3.61)$$

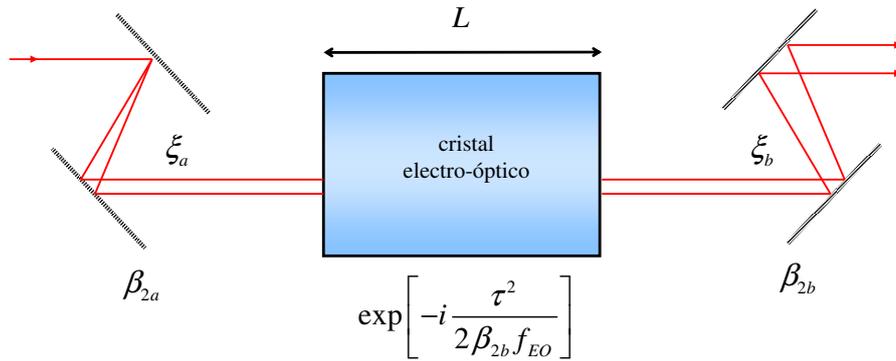


Figura 3.4: Sistema óptico temporal formador de imagem. A dispersão de entrada e saída estão representadas por um par de redes de difração, a função da lente é implementada pelo cristal electro-óptico.

Distância focal

Para encontrar na dispersão o conceito análogo à distância focal equivalente da lente espacial GRIN Eq. (3.45) vamos, primeiro, estabelecer a analogia da condição de formação de imagem na difração. Tendo em atenção a figura 3.4 e usando a Eq. (2.15), o integral de propagação desde a entrada no sistema até à sua saída é

$$A_{out}(\tau) = \iint A_{in}(\tau_0) \exp\left[i\frac{(\tau_0 - \tau_1)^2}{2\beta_{2a}\xi_a}\right] \exp\left[-i\frac{\tau_1^2}{2\beta_{2b}f_{EO}}\right] \exp\left[i\frac{(\tau_1 - \tau)^2}{2\beta_{2b}\xi_b}\right] d\tau_0 d\tau_1, \quad (3.62)$$

onde se introduziu a função da lente Eq. (3.2) (o subscripto EO é para frisar que se trata da distância focal da lente electro-óptica). Do integral de propagação (3.62) resulta a condição de formação de imagem no tempo

$$\frac{1}{\beta_{2a}\xi_a} + \frac{1}{\beta_{2b}\xi_b} = \frac{1}{\beta_{2b}f_{EO}}, \quad (3.63)$$

no que resulta

$$A_{out}(\tau) \propto \exp\left[i\frac{\tau^2}{2M\beta_{2b}\xi_b f_{EO}}\right] A_{in}(\tau/M), \quad (3.64)$$

em que

$$M = -\frac{\beta_{2b}\xi_b}{\beta_{2a}\xi_a}, \quad (3.65)$$

é a ampliação do sistema. Isto é, à parte do termo de fase, o impulso de saída é uma imagem do impulso de entrada ampliada do factor M . Se multiplicarmos a Eq. (3.48) por $2\pi/\lambda$ sendo λ o comprimento de onda da luz no vácuo, resulta

$$\frac{k_a}{z_a} + \frac{k_b}{z_b} = \frac{k_b}{f_L}, \quad (3.66)$$

em que $k_{a,b} = 2\pi n_{a,b}/\lambda$. Usando a tabela de correspondência da analogia DEDT 2.3 chega-se à conclusão que as Eqs. (3.63) e (3.66) são análogas desde que f_{EO} seja análogo de f_L . A distância focal f_{EO} pode exprimir-se à custa da Eq. (3.45) e das tabelas 3.1 e 2.3, como

$$\begin{aligned} f_{EO} &= \frac{\beta_2}{\beta_{2b}} \frac{\cot\left(L\sqrt{\frac{\Delta n_0}{n_0}}\beta_0\beta_2\omega_M^2\right)}{\sqrt{\frac{\Delta n_0}{n_0}}\beta_0\beta_2\omega_M^2} \\ &\approx \left(\frac{\Delta n_0}{n_0}\beta_0\beta_{2b}\omega_M^2 L\right)^{-1}, \end{aligned} \quad (3.67)$$

onde foi feita a aproximação $L\sqrt{\frac{\Delta n_0}{n_0}}\beta_0\beta_2\omega_M^2 \ll 1$.

Tabela 3.1: Tabela de correspondência entre parâmetros da lente espacial GRIN e da lente temporal GRIN.

	Lente temporal GRIN	Lente espacial GRIN (1-D)
Fase	$-i\Phi$	$i\Phi$
Variável de propagação	ξ	z
Variável de perfil	τ	x
GVD ou taxa de difracção	β_2	$1/k_0$
Parâmetro característico	$\beta_0\beta_2\omega_M^2\Delta n_0/n_0$	n_2/n_0
Factor de escala $\sigma_{\{\tau,x\}}$	$(n_0\beta_2)^{1/4}(\Delta n_0\beta_0\omega_M^2)^{-1/4}$	$\sqrt{1/k_0}(n_0/n_2)^{1/4}$
Distância de Fourier L_F	$\pi/2(\beta_0\beta_2\omega_M^2\Delta n_0/n_0)^{-1/2}$	$\pi/2\sqrt{n_0/n_2}$
Distância focal f	$\left(\frac{\Delta n_0}{n_0}\beta_0\beta_{2b}\omega_M^2 L\right)^{-1}$	n_b/n_2L
Formação de imagem	$1/\beta_{2a}\xi_a + 1/\beta_{2b}\xi_b = 1/\beta_{2b}f_{EO}$	$k_a/z_a + k_b/z_b = k_b/f_L$
Ampliação M	$-\beta_{2b}\xi_b/\beta_{2a}\xi_a$	$-k_az_b/k_bz_a$

Para terminar, falta só verificar que a distância focal equivalente da lente temporal GRIN dada pela Eq. (3.67) é fisicamente equivalente ao tempo focal definido por Kolner [23], Eq. (3.14). A condição de formação de imagem para o sistema da Fig. 3.4 introduzida por Kolner é

$$\frac{1}{\beta_{2a}\xi_a} + \frac{1}{\beta_{2b}\xi_b} = \frac{\omega_0}{f_K}, \quad (3.68)$$

logo o termo à direita desta igualdade terá de ser igual ao termo à direita da igualdade da Eq. (3.63). Introduzindo a versão aproximada de f_{EO} da Eq. (3.67) e usando a Eq. (3.52) resulta

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta_{2b}f_{EO}} &\approx \frac{\Delta n_0}{n_0} \beta_0 \omega_M^2 L \\ &= \Gamma_0 \omega_M^2 = \frac{\omega_0}{\Gamma_0 \omega_M^2} \\ &= \frac{\omega_0}{f_K}. \end{aligned} \quad (3.69)$$

Fica assim demonstrada a consistência física entre as Eqs. (3.63) e (3.68); a relação entre as duas definições é

$$f_{EO} = \frac{1}{\omega_0 \beta_{2b}} f_K. \quad (3.70)$$

3.3.2 Lente temporal GRIN não ideal

O modelo da lente temporal GRIN da secção anterior pressupõe um ajuste perfeito entre a velocidade de grupo do impulso v_g e a velocidade de fase da onda moduladora v_M . Na prática, existem várias técnicas que garantem um ajuste quase-perfeito entre elas [99], mas o ajuste perfeito nas velocidades é praticamente impossível [100].

Devido a este desajuste nas velocidades v_g e v_M , o impulso no cristal afasta-se da zona central da modulação do índice, e, se o desajuste for grande, afastar-se-á da zona parabólica da modulação do índice de refração, invalidando esta aproximação.

Para resolver estas limitações associadas ao modelo da lente temporal GRIN ideal da secção anterior, é necessário utilizar um modelo mais realista na resolução da equação diferencial (3.53), onde nenhuma aproximação seja feita *a priori*. Reescrevendo a Eq. (3.53) na forma

$$\frac{2}{i\beta_2} \frac{\partial A(\xi, \tau)}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 A(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} = 2 \frac{\beta_0}{\beta_2} \frac{\Delta n_0}{n_0} \cos[\omega_M(\tau - \alpha\xi)] A(\xi, \tau), \quad (3.71)$$

sendo

$$\alpha = -\frac{1}{\Delta v} = -\frac{n_g}{c} \left(1 - \frac{n_M}{n_g} \right), \quad (3.72)$$

em que n_g é o índice de refração de grupo do impulso e n_M é o índice de refração efectivo da micro-onda moduladora, vamos, então, tentar resolver a Eq. (3.71), usando a teoria dos modos acoplados [46, 101, 102]. A escolha do tipo de modos a usar na teoria é algo arbitrária; a única condição que se impõem é que sejam um conjunto completo e ortogonal de funções. Como estamos interessados no funcionamento do cristal electro-óptico como lente temporal, é natural supor que as funções próprias da lente temporal GRIN ideal, funções HG, sejam as mais apropriadas para descrever a propagação do impulso. Se estivéssemos interessados na região linear do coseno, que é o caso do processo de desvio de frequência (*frequency shift*), então a escolha cairia sobre as funções do tipo onda plana [103, 104]. Propondo uma solução para a Eq. (3.71) do tipo

$$A(\xi, \tau) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\xi) \phi_n(\tau - \alpha\xi), \quad (3.73)$$

em que as funções $\phi_n(\tau - \alpha\xi)$ são as funções próprias HG centradas com a lente temporal electro-óptica, modos próprios locais da lente³. Substituindo a Eq. (3.73) na Eq. (3.71) resulta

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \left[\frac{2}{i\beta_2} \left(\phi_n \frac{\partial a_n}{\partial \xi} + a_n \frac{\partial \phi_n}{\partial \xi} \right) - a_n \frac{\partial^2 \phi_n}{\partial \tau^2} - 2 \frac{\beta_0 \Delta n_0}{\beta_2 n_0} \cos(\omega_M (\tau - \alpha\xi)) a_n \phi_n \right] = 0, \quad (3.74)$$

onde, por conveniência de notação e sem perda de legibilidade, a dependência explícita nas variáveis ξ e τ de $a(\xi)$ e $\phi_n(\tau - \alpha\xi)$ foi omitida, isto é, $a_n \equiv a(\xi)$ e $\phi_n \equiv \phi_n(\tau - \alpha\xi)$. Calculando as derivadas de ϕ_n usando as relações (C.4) do Apêndice C, resulta

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{+\infty} \left\{ \frac{\sigma_\tau^2}{i\beta_2} \left[\frac{\partial a_n}{\partial \xi} \phi_n - \frac{\alpha}{\sigma_\tau} a_n \left(\sqrt{2n} \phi_{n-1} - \frac{\tau - \alpha\xi}{\sigma_\tau} \phi_n \right) \right] \right. \\ & \quad - a_n \left[\sqrt{n(n-1)} \phi_{n-2} - \sqrt{2n} \frac{\tau - \alpha\xi}{\sigma_\tau} \phi_{n-1} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(\tau - \alpha\xi)^2}{\sigma_\tau^2} \right) \phi_n \right] \\ & \quad \left. + \frac{1}{\omega_M \sigma_\tau^2} \cos(\omega_M (\tau - \alpha\xi)) a_n \phi_n \right\} = 0, \end{aligned} \quad (3.75)$$

onde foi introduzido o parâmetro de escala σ_τ dado pela Eq. (3.56). Projectando esta equação

³ A justificação para o uso das funções HG centradas com a lente é apresentada na secção 3.3.5

no modo HG de ordem m , isto é, multiplicando a Eq. (3.75) por ϕ_m e integrando em τ , resulta

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \frac{\sigma_\tau^2}{i\beta_2} \left[\frac{\partial a_n}{\partial \xi} \phi_n - \frac{\alpha}{\sigma_\tau} a_n \left(\sqrt{2n} \phi_{n-1} - \frac{\tau - \alpha\xi}{\sigma_\tau} \phi_n \right) \right] \right. \\ \left. - a_n \left[\sqrt{n(n-1)} \phi_{n-2} - \sqrt{2n} \frac{\tau - \alpha\xi}{\sigma_\tau} \phi_{n-1} - \frac{1}{2} \left(1 - \frac{(\tau - \alpha\xi)^2}{\sigma_\tau^2} \right) \phi_n \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{\omega_M \sigma_\tau^2} \cos(\omega_M(\tau - \alpha\xi)) a_n \phi_n \right\} \phi_m d\tau = 0, \end{aligned} \quad (3.76)$$

onde aparecem, à parte de factores independentes de τ , termos na forma

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n \phi_m d\tau = a_m, \quad (3.77a)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\partial a_n}{\partial \xi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n \phi_m d\tau = \frac{\partial a_m}{\partial \xi}, \quad (3.77b)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sqrt{2n} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{n-1} \phi_m d\tau = \sqrt{2(m+1)} a_{m+1}, \quad (3.77c)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n \frac{\tau - \alpha\xi}{\sigma_\tau} \phi_m d\tau = \sqrt{\frac{m}{2}} a_{m-1} + \sqrt{\frac{m+1}{2}} a_{m+1}, \quad (3.77d)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sqrt{n(n-1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{n-2} \phi_m d\tau = \sqrt{(m+2)(m+1)} a_{m+2}, \quad (3.77e)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \sqrt{2n} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_{n-1} \frac{\tau - \alpha\xi}{\sigma_\tau} \phi_m d\tau = m a_m + \sqrt{(m+2)(m+1)} a_{m+2}, \quad (3.77f)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n \left(\frac{\tau - \alpha\xi}{\sigma_\tau} \right) \phi_m d\tau = \frac{1}{2} \left[\sqrt{m(m-1)} a_{m-2} + (2m+1) a_m \right. \\ \left. + \sqrt{(m+1)(m+2)} a_{m+2} \right], \end{aligned} \quad (3.77g)$$

onde foram usadas as relações (C.2) e (C.5) do Apêndice C. O termo em coseno da Eq.

(3.76) pode ser calculado com a ajuda da relação (C.6b), resultando

$$\begin{aligned}
& \sum_{n=0}^{+\infty} (\omega_M \sigma_\tau)^{-2} a_n \int \phi_n \cos(\omega_M(\tau - \alpha\xi)) \phi_m d\tau = \\
& = \sum_{j=j_c}^{+\infty} (-2)^{-j} (\omega_M \sigma_\tau)^{2j-2} \sqrt{\frac{m!}{(m+2j)!}} \exp\left(-(\omega_M \sigma_\tau)^2 / 4\right) L_m^{2j}\left((\omega_M \sigma_\tau)^2 / 2\right) a_{m+2j} \\
& = \sum_{j=j_c}^{+\infty} (-1)^j C_m^{2j} a_{m+2j},
\end{aligned} \tag{3.78}$$

sendo $j_c = -m/2$ para m par e $j_c = -(m-1)/2$ para m ímpar e onde se definiram os coeficientes

$$C_m^j = (\sqrt{2})^{-j} (\omega_M \sigma_\tau)^{j-2} \sqrt{\frac{m!}{(m+j)!}} \exp\left(-(\omega_M \sigma_\tau)^2 / 4\right) L_m^j\left((\omega_M \sigma_\tau)^2 / 2\right), \tag{3.79}$$

em que L_m^j são os polinómios de Laguerre generalizados. Substituindo as relações (3.77) e (3.78) na Eq. (3.76) e após alguma álgebra, chega-se a um sistema de equações diferenciais de 1ª ordem de coeficientes constantes acopladas

$$\begin{aligned}
& \frac{\sigma_\tau^2}{i\beta_2} \frac{da_m}{d\xi} - \frac{1}{4} \left(\sqrt{m(m-1)} a_{m-2} - (2m+1)a_m + \sqrt{(m+1)(m+2)} a_{m+2} \right) \\
& + \frac{\sigma_\tau \alpha}{i\beta_2} \left(\sqrt{m/2} a_{m-1} - \sqrt{(m+1)/2} a_{m+1} \right) = \sum_{j=j_{\min}}^{\infty} (-1)^{-j} C_m^{2j} a_{m+2j},
\end{aligned} \tag{3.80}$$

sendo $a_m = 0$ para $m < 0$.

Resumindo, a equação diferencial (3.53) de 2ª ordem em τ e 1ª ordem em ξ de coeficientes não constantes que descreve a propagação de um impulso numa lente electro-óptica não ideal foi substituída pelo sistema de equações acopladas (3.80) de 1ª ordem em ξ de coeficientes constantes.

São essencialmente duas as vantagens da Eq. (3.80) relativamente à Eq. (3.53):

- A implementação numérica da (3.80) é, em princípio, mais fácil e eficiente do que a implementação numérica da Eq. (3.53). É numericamente vantajoso substituir uma equação diferencial em duas variáveis de 2ª ordem de coeficientes não constantes por um sistema de equações diferenciais de 1ª ordem numa só variável de coeficientes constantes fracamente acoplado⁴.

⁴ No capítulo 4 demonstra-se, numericamente, que para impulsos sub-picosegundo o acoplamento ± 1 é

- A vantagem mais significativa do modelo representado pelas Eqs. (3.80) está na possibilidade de, sem resolver o sistema de equações, poder caracterizar-se convenientemente o funcionamento da lente em função dos vários parâmetros que a definem. Uma caracterização muito mais difícil de conseguir a partir da inspecção directa da Eq. (3.53).

Estamos, agora, em condições de poder caracterizar o funcionamento da lente temporal electro-óptica a partir do modelo representado pelo sistema de equações (3.80). A primeira questão que se coloca da observação directa das Eqs. (3.80) resulta do facto de existir um acoplamento infinito nas equações. À partida, parece um problema de difícil solução, mas, como será demonstrado, este acoplamento pode ser reduzido drasticamente. Então como podemos eliminar esse acoplamento infinito e quais as consequências físicas dessa aproximação?

Aproximação parabólica

Como, desde o início deste capítulo, estamos interessados no efeito de lente temporal, impõe-se identificar nas Eqs. (3.80) em que condição se pode considerar a aproximação parabólica. Se, por hipótese, considerarmos $(\omega_M \sigma_\tau)^2 \lll 1$, então podemos aproximar os coeficientes de acoplamento C_m^{2j} , a menos de termos da ordem de $(\omega_M \sigma_\tau)^2$, por

$$C_m^{-2} \approx -\frac{\sqrt{m(m-1)}}{4}, \quad (3.81a)$$

$$C_m^0 \approx \frac{1}{(\omega_M \sigma_\tau)^2} - \frac{2m+1}{4}, \quad (3.81b)$$

$$C_m^2 \approx \frac{\sqrt{(m+1)(m+2)}}{4}, \quad (3.81c)$$

$$C_m^{2j} \approx 0 \quad \text{para } |j| > 1. \quad (3.81d)$$

Substituindo estas relações nas Eqs. (3.80), resulta

$$\frac{\sigma_\tau^2}{i\beta_2} \frac{da_m}{d\xi} + \left(m + \frac{1}{2} - \frac{1}{(\omega_M \sigma_\tau)^2} \right) a_m = -\frac{\sigma_\tau \alpha}{i\beta_2} \left(\sqrt{m/2} a_{m-1} - \sqrt{(m+1)/2} a_{m+1} \right), \quad (3.82)$$

Considerando, agora, que existe um ajuste perfeito entre a velocidade de fase da onda moduladora e a velocidade de grupo do impulso ($\alpha = 0$) - condição necessária para a lente temporal GRIN ideal - o acoplamento entre modos desaparece, resultando o sistema de

suficiente para descrever a propagação do impulso na lente electro-óptica.

equações diferenciais de 1ª ordem desacoplado

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_\tau^2}{i\beta_2} \frac{\partial a_m}{\partial \xi} - \left[\frac{1}{\omega_M^2 \sigma_\tau^2} - (m + 1/2) \right] a_m &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\partial a_m}{\partial \xi} - i\beta_0 \left(\frac{\Delta n_0}{n_0} - \omega_M \sqrt{\frac{\beta_2 \Delta n_0}{\beta_0 n_0}} (m + 1/2) \right) a_m &= 0, \end{aligned} \quad (3.83)$$

em que para obter a última equação se fez uso da definição do parâmetro de escala da lente, Eq. (3.56). As soluções deste sistema de equações são, como não poderia deixar de ser, as constantes de propagação dos modos HG da lente temporal GRIN "ideal", Eq. (3.59)

$$a_m(\xi) = a_m(0) \exp \left[i\beta_0 \left(\frac{\Delta n_0}{n_0} - \omega_M \sqrt{\frac{\beta_2 \Delta n_0}{\beta_0 n_0}} (m + 1/2) \right) \xi \right]. \quad (3.84)$$

Concluindo, o sistema de equações (3.82) descreve a propagação de um impulso numa lente temporal electro-óptica na aproximação parabólica, considerando o possível desajuste nas velocidades das duas ondas. Esta diferença nas velocidades introduz um acoplamento do modo m com os modos $m \pm 1$. Como as funções HG tem uma paridade bem definida [105]; para m par (ímpar) a função HG é par (ímpar). A diferença nas velocidades das duas ondas tem como consequência a introdução de uma assimetria, à saída da lente, no perfil de entrada do impulso. Esta assimetria é tanto maior quanto maior for a diferença nas velocidades isto é, quanto maior for α .

Aproximação de 1ª ordem ou quase-parabólica

A aproximação quase-parabólica ou correcção de 1ª ordem à lente temporal GRIN ideal resulta em considerar uma condição menos restritiva $(\omega_M \sigma_\tau)^2 \ll 1$ do que na aproximação parabólica. Neste caso, podemos reter a forma exacta dos coeficientes C_m^{2j} para $j = -1, 0, +1$ e desprezar os coeficientes para $|j| > 1$, resultando de (3.80) o sistema de equações

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_\tau^2}{i\beta_2} \frac{da_m}{d\xi} - \frac{1}{4} \left\{ \left(\sqrt{m(m-1)} - 4C_m^{-2} \right) a_{m-2} + \left(\sqrt{(m+1)(m+2)} - 4C_m^{+2} \right) a_{m+2} \right\} \\ + \left(\frac{2m+1}{4} - C_m^0 \right) a_m \\ = \frac{\sigma_\tau \alpha}{i\beta_2} \left(\sqrt{m/2} a_{m-1} - \sqrt{(m+1)/2} a_{m+1} \right). \end{aligned} \quad (3.85)$$

Aproximação de ordem n

Neste grau de aproximação, despreza-se, no sistema de equações (3.80), todos os coeficientes C_m^{2j} para $|j| > n$.

O grau de aproximação a usar está dependente, essencialmente, da largura temporal do impulso ao longo da propagação no interior da lente. Verifica-se no Capítulo 4, que, para impulsos cuja largura seja da ordem de $2/\omega_M$, a aproximação de 2ª ordem ($|j|_{max} = 2$) é suficiente para descrever correctamente a propagação do impulso no interior da lente.

Nota final

No modelo da lente temporal electro-óptica, considerando a aproximação parabólica expressa pela Eq. (3.82), verifica-se que a aproximação (3.81b) do coeficiente C_m^0 contém o termo $1/(\omega_M \sigma_\tau)^2$; este termo pode ser várias ordens de grandeza superior a todos os outros termos presentes nas Eqs. (3.80). Esta grande diferença na ordem de grandeza dos termos pode conduzir a um mau condicionamento numérico do sistema de Eqs. (3.80).

Este problema pode ser facilmente solucionado, notando que, o termo $1/(\omega_M \sigma_\tau)^2$ é independente da ordem m do modo e representa, fisicamente, um termo de fase constante comum a todos os modos HG, e como tal, não tem significado físico relevante. Portanto, pode ser retirado do sistema de Eqs. (3.80) sem alterar o significado físico das equações. Definindo o novo coeficiente modal b_m da forma

$$a_m = b_m \exp\left(i \frac{\beta_2}{\omega_M^2 \sigma_\tau^4} \xi\right), \quad (3.86)$$

e substituindo, por exemplo, no modelo da aproximação parabólica Eq. (3.82), resulta

$$\frac{\sigma_\tau^2}{i\beta_2} \frac{db_m}{d\xi} + \left(m + \frac{1}{2}\right) b_m = -\frac{\sigma_\tau \alpha}{i\beta_2} \left(\sqrt{m/2} b_{m-1} - \sqrt{(m+1)/2} b_{m+1}\right). \quad (3.87)$$

Este sistema de equações é numericamente melhor condicionado, visto que, os termos restantes são da mesma ordem de grandeza. O mesmo procedimento pode ser feito no sistema de equações da lente temporal electro-óptica não ideal, Eqs. (3.80).

3.3.3 Coeficientes de aberração da lente temporal electro-óptica

Como foi afirmado na secção anterior, os coeficientes C_m^{2j} do modelo da lente temporal electro-óptica não ideal são termos de correcção ao perfil parabólico da lente temporal ideal. Para estudar o comportamento destes termos de correcção, é conveniente definir uns novos

coeficientes

$$D_m^{2j} = \begin{cases} \frac{\sqrt{m(m-1)}}{4} - C_m^{-2} & \text{para } j = -1 \\ \frac{2m+1}{4} + \frac{1}{(\omega_M \sigma_\tau)^2} - C_m^0 & \text{para } j = 0 \\ \frac{\sqrt{(m+2)(m+1)}}{4} - C_m^2 & \text{para } j = +1 \\ C_m^{2j} & \text{para } |j| > 1 \end{cases} \quad (3.88)$$

Na definição dos coeficientes D_m^0 foi, explicitamente, retirado o termo $1/(\omega_M \sigma_\tau)^2$ porque, como já foi explicado, é várias ordens de grandeza superior aos outros termos envolvidos na Eq. (3.80) e a sua remoção não traz implicações físicas visto ser comum a todos os modos.

Aos coeficientes D_m^{2j} para $|j| > 1$ poderemos dar o nome, dentro do espírito da analogia DEDT, de coeficientes de aberração, visto tratar-se de termos que introduzem uma correcção ao perfil parabólico da lente temporal.

Nos gráficos da Fig. 3.5 está representada a variação relativa D_m^{2j}/D_m^0 para os quatro primeiros coeficientes de aberração ($j = \pm 1, \pm 2$) em função da ordem m do modo e do parâmetro $\omega_M \sigma_\tau$. O estudo desta variação é restrito ao intervalo $0 < \omega_M \sigma_\tau < 0.5$, porque, como se demonstra na secção 4.3.1, este é o intervalo de valores do parâmetro $\omega_M \sigma_\tau$ com interesse prático.

Da análise dos gráficos da Fig. 3.5 podemos constatar que os coeficientes de aberração de ordem superior ($j = \pm 2$) são cerca de uma ordem de grandeza inferiores aos de primeira ordem ($j = \pm 1$).

Para o mesmo modo m e ordem j , os coeficientes de aberração são função crescente do parâmetro $\omega_M \sigma_\tau$. Este comportamento pode ser explicado como a seguir se indica. Para lentes funcionalmente iguais (σ_τ igual) Eq. (3.56), o aumento na frequência ω_M da onda moduladora é acompanhado por uma diminuição temporal da região parabólica (proporcional a $1/\omega_M$). Para uma região parabólica mais estreita o modo HG, que representa o impulso, "vê" uma modulação de índice mais afastada do perfil parabólico, daí necessitar de uma maior correcção à sua propagação no interior da lente.

Para a mesma ordem do coeficiente de aberração (mesmo j) a sua grandeza relativa aumenta com a ordem m do modo. A explicação para este comportamento é simples. A extensão temporal $\Delta\tau$ do modo HG aumenta com a ordem m [106]

$$\Delta\tau \propto \sqrt{m+1/2}, \quad (3.89)$$

e quanto maior for a extensão do modo HG mais ele se afasta da zona parabólica do perfil de

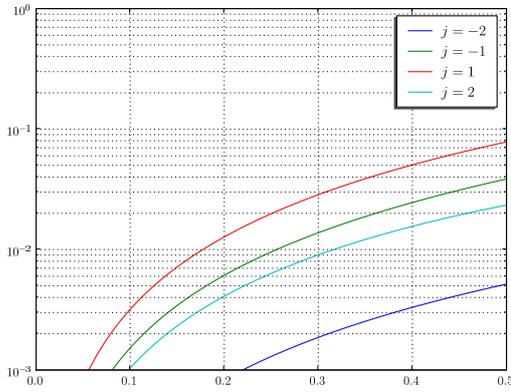
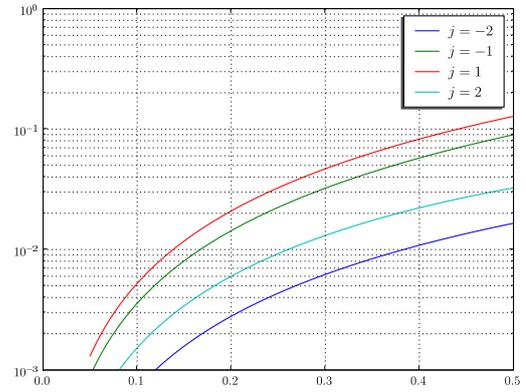
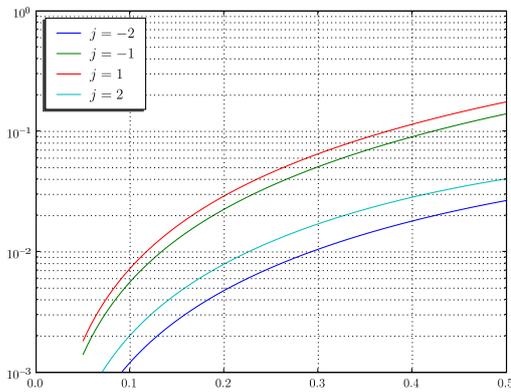
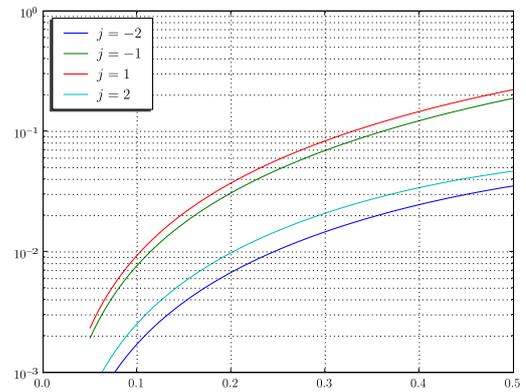
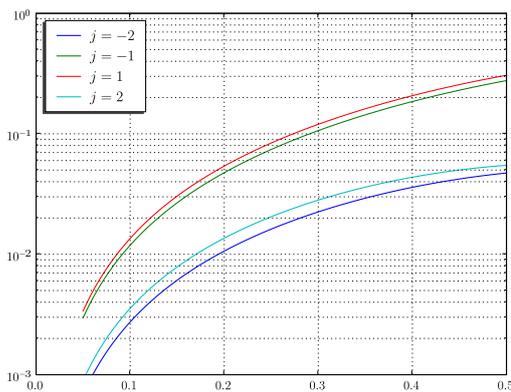
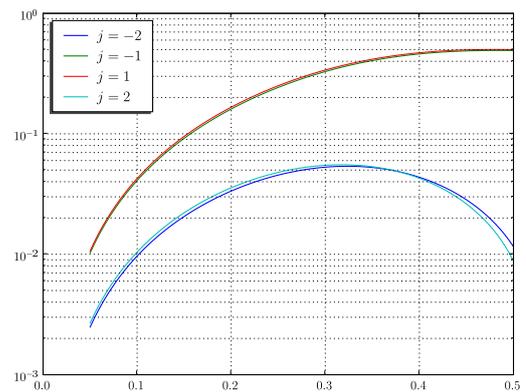
(a) $m = 5$ (b) $m = 10$ (c) $m = 15$ (d) $m = 20$ (e) $m = 30$ (f) $m = 100$

Figura 3.5: Variação relativa dos quatro primeiros coeficientes de aberração D_m^{2j} ($j = \pm 1, \pm 2$) em função do parâmetro $\omega_M \sigma_\tau$ para as ordens $m = \{5, 10, 15, 20, 30, 100\}$.

índice da lente, isto é, quanto maior for a ordem m , menos parabólico é o perfil de índice que o modo "vê", e terá de sofrer, por consequência, uma maior correcção, na sua propagação no interior da lente.

No gráfico 3.5f, para $m = 100$ e $j = \pm 2$, observa-se um decréscimo relativo de D_m^{2j} a partir de $\omega_M \sigma_\tau > 0.33$. Como se pode observar nos gráficos da Fig. 3.6, este decréscimo relativo de D_m^{2j} é o início de um comportamento oscilatório que tende para zero com o aumento de $\omega_M \sigma_\tau$. Verificou-se que este comportamento é em princípio comum a todos os D_m^{2j} para $|j| > 2$ e inicia-se mais cedo (menor $\omega_M \sigma_\tau$) com o aumento da ordem m do modo. O caso de D_m^{2j} para $j = \pm 1$ apresenta um comportamento distinto, tende, com o aumento de $\omega_M \sigma_\tau$, a estabilizar num valor limite diferente de zero.

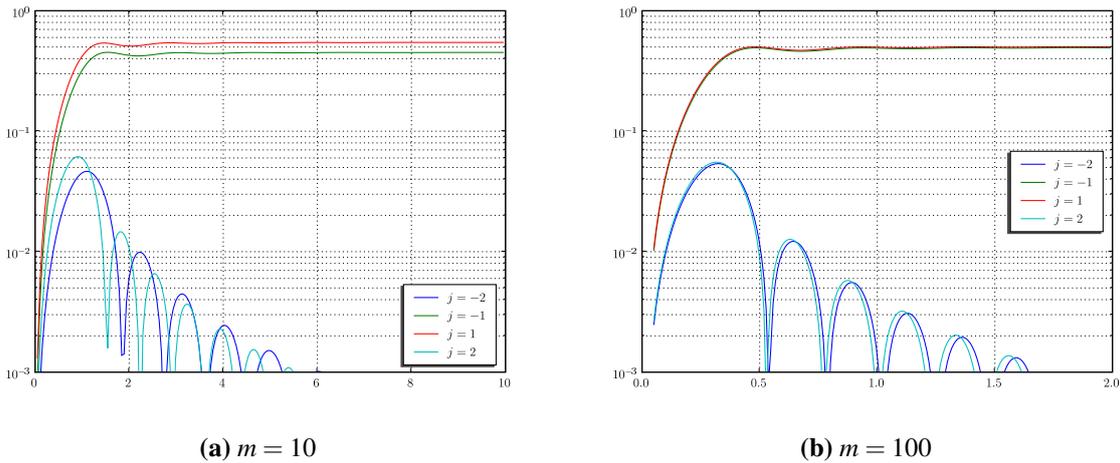


Figura 3.6: Variação relativa dos quatro primeiros coeficientes de aberração D_m^{2j} ($j = \pm 1, \pm 2$) em função do parâmetro $\omega_M \sigma_\tau$ para as ordens $m = \{10, 100\}$.

Demonstra-se, no Capítulo 4, que a introdução dos coeficientes de aberração ($j = \pm 1, \pm 2$) no modelo da lente temporal electro-óptica é condicionada pela duração temporal máxima do impulso no interior da lente, sendo necessária, apenas, para impulsos cuja a duração máxima é da ordem de $2/\omega_M$. Para impulsos sub-picosegundo (inferior a $2/\omega_M$), o modelo da lente temporal electro-óptica na aproximação parabólica (Eq. (3.87)) é suficiente para descrever convenientemente a propagação do impulso dentro da lente.

3.3.4 Importância da diferença de velocidades $v_g - v_M$ na lente temporal electro-óptica

Analisando em pormenor as Eqs. (3.87), podemos inferir o grau de importância do desajuste entre a velocidade de fase da micro-onda v_M e a velocidade de grupo do impulso v_g , ou, de forma equivalente, a diferença entre o índice refração efectivo da micro-onda n_M e o índice de refração de grupo do impulso n_g .

A variação de b_m em ξ é governada por três termos - os termos em $b_{m\pm 1}$ e o próprio termo em b_m . Comparando a grandeza relativa destes termos, podemos chegar a um valor máximo de $n_M - n_g$, a partir do qual o perfil do impulso é significativamente alterado pela lente temporal electro-óptica. Aproximando a equação diferencial (3.87) por uma equação de diferenças

$$\frac{db_m}{d\xi} \approx \frac{b_m(\xi + L) - b_m(\xi)}{L}, \quad (3.90)$$

em que L é a distância de propagação na lente temporal, resulta

$$b_m(\xi + L) \approx -\frac{\alpha L}{\sigma_\tau} \left(\sqrt{m/2} b_{m-1}(\xi) - \sqrt{(m+1)/2} b_{m+1}(\xi) \right) + \left(1 - i \frac{\beta_2 L}{\sigma_\tau^2} \left(m + \frac{1}{2} \right) \right) b_m(\xi). \quad (3.91)$$

A partir do termo associado a b_m podemos identificar, grosso modo, dois regimes; regime em que a distância de propagação na lente é muito pequena, tal que o efeito da dispersão de 2ª ordem no impulso é desprezável

$$L \ll L_v \equiv \frac{\sigma_\tau^2}{\beta_2(m+1/2)}, \quad (3.92)$$

e o regime em que a distância de propagação é suficientemente grande para que o impulso sinta o efeito da dispersão de 2ª ordem

$$L \gtrsim L_v. \quad (3.93)$$

L_v é a distância característica de propagação na lente que define a separação entre os dois regimes.

Considerando $b_{m\pm 1} \sim b_m$ (como se justificará na secção 4.2), podemos fazer a aproximação

$$\sqrt{m/2} b_{m-1} - \sqrt{(m+1)/2} b_{m+1} \approx \frac{b_m}{2m\sqrt{2m}} (m+1/2), \quad (3.94)$$

e substituindo esta aproximação na Eq. (3.91) resulta

$$b_m(\xi + L) \approx - \left(\frac{\alpha \sigma_\tau}{\beta_2 2m \sqrt{2m}} L/L_v - (1 - iL/L_v) \right) b_m(\xi). \quad (3.95)$$

Nesta equação o termo que contém α sobrepõe-se aos restantes termos se

$$\begin{cases} \alpha > 2m \sqrt{2m} \frac{\beta_2 L_v}{\sigma_\tau L} & \text{para } L \ll L_v \\ \alpha > 2m \sqrt{2m} \frac{\beta_2}{\sigma_\tau} & \text{para } L \gtrsim L_v \end{cases}, \quad (3.96)$$

ou em termos dos índices de refração, usando a Eq. (3.72),

$$\begin{cases} n_M > \left(1 + 2m \sqrt{2m} \frac{\beta_2 L_v}{\beta_1 \sigma_\tau L} \right) n_g & \text{para } L \ll L_v \\ n_M > \left(1 + 2m \sqrt{2m} \frac{\beta_2}{\beta_1 \sigma_\tau} \right) n_g & \text{para } L \gtrsim L_v \end{cases}, \quad (3.97)$$

para $n_M > n_g$ e

$$\begin{cases} n_M < \left(1 - 2m \sqrt{2m} \frac{\beta_2 L_v}{\beta_1 \sigma_\tau L} \right) n_g & \text{para } L \ll L_v \\ n_M < \left(1 - 2m \sqrt{2m} \frac{\beta_2}{\beta_1 \sigma_\tau} \right) n_g & \text{para } L \gtrsim L_v \end{cases}, \quad (3.98)$$

para $n_M < n_g$.

As relações (3.97) e (3.98) foram obtidas para um modo m e não para o impulso. Para estudar o efeito da diferença de velocidades no perfil do impulso devemos usar, nas Eqs. (3.92), (3.97) e (3.98), o valor de m dado pela média pesada

$$\bar{m} = \frac{\sum_m m |a_m|}{\sum_m |a_m|}, \quad (3.99)$$

ou, se o número de modos necessário para representar o impulso for da ordem da unidade, usar o maior valor de m .

As relações (3.97) e (3.98) dão-nos uma ideia sobre a ordem de grandeza que terá que existir na diferença entre o índice de refração efectivo da onda moduladora e o índice de refração de grupo do impulso, para que essa diferença resulte numa alteração significativa no perfil do impulso à saída da lente.

Exemplo

Consideremos uma lente temporal electro-óptica de $LiNbO_3$ de escala $\sigma_\tau = 255$ fs, $\beta_2 = 0.263$ fs²/μm, $\beta_1 = 7.41$ fs/μm para um impulso de comprimento de onda da portadora $\lambda = 1$ μm com largura a meia altura em amplitude $\sigma_p = 500$ fs. Este impulso, à entrada da lente, necessita de $m = 5$ modos para ser correctamente representado. Para estes valores obtemos, da Eq. (3.92), $L_v \approx 4.5$ cm e da Eq. (3.97) o valor máximo do índice da micro-onda a partir do qual o perfil do impulso é alterado significativamente,

$$\begin{cases} (n_M)_{max} \approx \left(1 + \frac{0,02}{L(\text{cm})}\right) n_g & \text{para } L \ll 4.5 \text{ cm} \\ (n_M)_{max} \approx 1,0044 n_g & \text{para } L \gtrsim 4.5 \text{ cm} \end{cases} \quad (3.100)$$

Concluindo, se o comprimento efectivo do cristal for da ordem dos 5 cm, temos então de garantir que a diferença de índices das duas ondas seja inferior a 0.004 para que o impulso não seja distorcido no interior da lente.

3.3.5 Justificação para o uso de modos centrados com a lente

$$\phi_n(\tau - \alpha\xi)$$

Como foi dito anteriormente a escolha das funções próprias a usar na teoria dos modos acoplados é algo arbitrária, a única condição que as funções têm de satisfazer é que seja um conjunto completo e ortogonal.

À partida a escolha mais apropriada do conjunto de funções a usar recai sobre as funções HG centradas com o impulso $\phi_n(\tau)$, visto que são função de apenas uma variável e consequentemente poder resultar daí um sistema de equações diferenciais acopladas mais simples. Mas como será demonstrado esse não é o caso.

Começando pela Eq.(3.53) que descreve a propagação do impulso na lente temporal electro-óptica, usando a identidade trigonométrica $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$, a Eq. (3.53) fica

$$\frac{1}{i} \frac{\partial A(\xi, \tau)}{\partial \xi} - \frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 A(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} - \beta_0 \frac{\Delta n_0}{n_0} [\cos(\varphi) \cos(\omega_M \tau) - \sin(\varphi) \sin(\omega_M \tau)] A(\xi, \tau) = 0. \quad (3.101)$$

Vamos então resolver esta equação usando a teoria dos modos acoplados seguindo um procedimento em tudo semelhante ao usado na secção 3.3.2, propondo uma solução do tipo (3.73), substituindo os modos centrados com a lente $\phi_n(\tau - \alpha\xi)$ pelos modos centrados com

o impulso $\phi_n(\tau)$,

$$A(\xi, \tau) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n(\xi) \phi_n(\tau). \quad (3.102)$$

Introduzindo esta solução na Eq. (3.101) e projectando o resultado no modo $\phi_m(\tau)$ chega-se à equação

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_\tau^2}{i\beta_2} \frac{\partial a_m}{\partial \xi} - \left[\frac{1}{4} \sqrt{(m+1)(m+2)} a_{m+2} - \frac{1}{2} (m+1/2) a_m + \frac{1}{4} \sqrt{m(m-1)} a_{m-2} \right] \\ & - \frac{\cos(\varphi)}{\sigma_\tau^2 \omega_M^2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega_M \tau) \phi_n \phi_m d\tau \\ & + \frac{\sin(\varphi)}{\sigma_\tau^2 \omega_M^2} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\omega_M \tau) \phi_n \phi_m d\tau = 0. \end{aligned} \quad (3.103)$$

Os termos desta equação em $\sin(\omega_M \tau)$ e $\cos(\omega_M \tau)$ podem ser calculados com a ajuda das relações (C.6) do Apêndice C,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega_M \tau) \phi_n \phi_m d\tau = (\omega_M \sigma_\tau)^2 \sum_{j=j_c}^{+\infty} (-1)^{-j} C_m^{2j} a_{m+2j}, \quad (3.104a)$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\omega_M \tau) \phi_n \phi_m d\tau = (\omega_M \sigma_\tau)^2 \sum_{j=j_s}^{+\infty} (-1)^{-j} C_m^{2j+1} a_{m+2j+1}, \quad (3.104b)$$

em que os limites inferiores dos sumatórios em j são $j_c = -\text{int}(m/2)$ e $j_s = -\text{int}((m+1)/2)$ e os coeficientes C_m^j são os mesmos definidos na Eq. (3.79). Substituindo as Eqs. (3.104) na Eq. (3.103) resulta um sistema de equações diferenciais de 1ª ordem em ξ de coeficientes não constantes infinitamente acopladas.

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma_\tau^2}{i\beta_2} \frac{\partial a_m}{\partial \xi} - \left[\frac{1}{4} \sqrt{(m+1)(m+2)} a_{m+2} - \frac{1}{2} (m+1/2) a_m + \frac{1}{4} \sqrt{m(m-1)} a_{m-2} \right] \\ & - \sum_{j=(j_c, j_s)}^{+\infty} [\cos(\varphi) (-1)^{-j} C_m^{2j} a_{m+2j} - \sin(\varphi) (-1)^{-j} C_m^{2j+1} a_{m+2j+1}] = 0. \end{aligned} \quad (3.105)$$

Comparando a estrutura desta equação com a Eq. (3.80) facilmente se chega à conclusão que a Eq. (3.80) é bem mais simples do que a Eq. (3.105). As diferença entre as duas são:

- os termos de acoplamento da Eq. (3.105) são oscilatórios em ξ devido à presença do $\sin(\varphi)$ e do $\cos(\varphi)$ ($\varphi \propto \xi$). No caso da Eq. (3.80) os termos são constantes.

- A Eq. (3.105) tem mais um acoplamento infinito.

Todas estas diferenças tornam a caracterização do modelo de lente temporal electro-óptica representado pela Eq. (3.105) mais difícil do que a partir do modelo representado pela Eq. (3.80). A implementação numérica da Eq. (3.105) introduz um conjunto de dificuldades adicionais relativamente à Eq. (3.80).

Concluindo, as dificuldades adicionais do modelo das funções HG centradas com o impulso, justificam a preferência pelo modelo das funções HG centradas com a lente.

3.4 Conclusão

Neste capítulo foi proposto um modelo da lente temporal electro-óptica mais realista do que o existente até esta altura. O modelo proposto neste trabalho tem em conta a dispersão do impulso no interior da lente e tem em consideração o possível desajuste entre a velocidade de grupo do impulso e a velocidade de fase da micro-onda, sendo portanto apropriado para descrever a propagação de impulsos com duração de sub-picosegundo.

No caso da lente temporal electro-óptica ideal ($v_g = v_M$) demonstra-se que o seu funcionamento é formalmente análogo ao da lente espacial GRIN. Tendo como consequências imediatas poder trazer para o domínio do tempo toda a teoria associada às lentes espaciais GRIN e, em particular, poder definir a transformada de Fourier fraccionária [94, 96, 107–111] e a função de distribuição de Wigner [44, 45, 93, 112, 113] à custa dos parâmetros característicos da lente temporal electro-óptica ideal.

O modelo da lente temporal electro-óptica não ideal ($v_g \neq v_M$) possibilita nomeadamente

- Definir e caracterizar os coeficientes de aberração da lente.
- Caracterizar qualitativamente a importância do desajuste nas velocidades de grupo do impulso e de fase da micro-onda no perfil do impulso.
- Uma implementação numérica mais simples do que aquela que seria necessário para implementar a Eq. (3.71).

Simulações

O objectivo deste capítulo é ilustrar qualitativamente algumas das considerações apresentadas nos dois Capítulos anteriores, por meio de simulações numéricas.

São apresentadas simulações da propagação livre fora de eixo em difracção, onde se analisa, após a propagação, a variação na distribuição de amplitude do sinal de entrada em função da direcção de propagação. É, também, apresentado o estudo da propagação de um impulso numa lente temporal electro-óptica, usando para isso, o modelo proposto no capítulo 3. Este estudo tenta, simultaneamente, caracterizar a lente temporal electro-óptica e comparar o funcionamento, dentro do modelo proposto, dos vários níveis de aproximação permitidos pelo modelo.

4.1 Simulação da propagação fora de eixo em difracção

Nesta secção é apresentado um conjunto de simulações da propagação em difracção, a uma dimensão, de uma função rectângulo para várias direcções de propagação γ e para dois regimes de propagação, caracterizado pelo número de Fresnel [8]

$$N_F = \frac{a^2}{4\lambda z}, \quad (4.1)$$

em que a é a largura do rectângulo, λ o comprimento de onda e z a distância de propagação segundo o eixo dos zz .

A simulação resulta da implementação numérica da Eq. (2.39) sendo $\beta(k_x)$ calculado a partir da versão a uma dimensão da Eq. (2.42). Os valores dos parâmetros usados nas simulações são:

- largura da abertura rectangular $a = 50 \mu\text{m}$,

- comprimento de onda luz $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$,
- número de Fresnel $N_F = \{1, 10\}$ que corresponde a uma distância de propagação segundo o eixo dos zz , respectivamente $z = \{988, 99\} \mu\text{m}$,
- direcção de propagação $\gamma = \{6^\circ, 32^\circ, 48^\circ\}$,
- grau de aproximação no cálculo de $\beta(k_x)$: de β_2 até β_4 ,
- número de pontos de amostragem das funções $n = 2^{13}$ e
- extensão espacial de amostragem $\Delta x = 128 a = 6.4 \text{ mm}$.

O valor da largura do rectângulo $a = 50 \mu\text{m}$ foi escolhido de forma que a frequência $k_0/10$ tenha um peso relativo suficientemente grande no conjunto espectral da função rectângulo (função sinc), o qual corresponde à posição do 7º lobolo lateral do sinc. Simultaneamente, pretende-se poder reconstruir aproximadamente o rectângulo, a partir da função sinc, filtrada com um filtro passa baixo de largura $k_0/5$.

A escolha dos restantes valores para os parâmetros de simulação teve como objectivo satisfazer as condições de equivalência entre a transformada de Fourier continua e a transformada de Fourier discreta [114] e, em particular, garantir uma amostragem correcta das funções (no sentido de Nyquist), tanto no domínio espacial como no domínio espectral.

Normalmente, a dificuldade no cálculo correcto da transformada de Fresnel (propagação no eixo) está em garantir uma amostragem correcta da fase quadrática Eq. (2.27) [115–124]. A variação mais lenta desta fase é na região em torno da origem, sendo maior quanto mais se afasta desse ponto. Na propagação fora de eixo, o termo de fase pode ter uma variação mais rápida devido à presença de termos superiores ao quadrado e encontra-se deslocado relativamente à origem do eixo, tanto mais quando maior for o ângulo γ .

No que diz respeito à amostragem da fase, as características presentes na propagação fora do eixo apresentam, por isso, uma dificuldade adicional, relativamente à propagação no eixo. O conjunto dos valores escolhidos para os parâmetros de simulação, não sendo únicos, garantem a correcta amostragem das funções intervenientes e servem o propósito desta secção: demonstrar os resultados resumidos na tabela 2.1 (pág. 29).

Analisando globalmente os gráficos das figuras 4.1-4.3, podemos dizer que as correcções na amplitude, introduzidas pelos termos em β_3 e β_4 , são mais visíveis para valores maiores de N_F (pequena distância de propagação) e localizam-se, essencialmente, na região central do perfil. As correcções para pequenos valores de N_F são visíveis nas regiões limítrofes da distribuição. A explicação é simples: para $N_F = 10$, as frequências mais elevadas (a variação

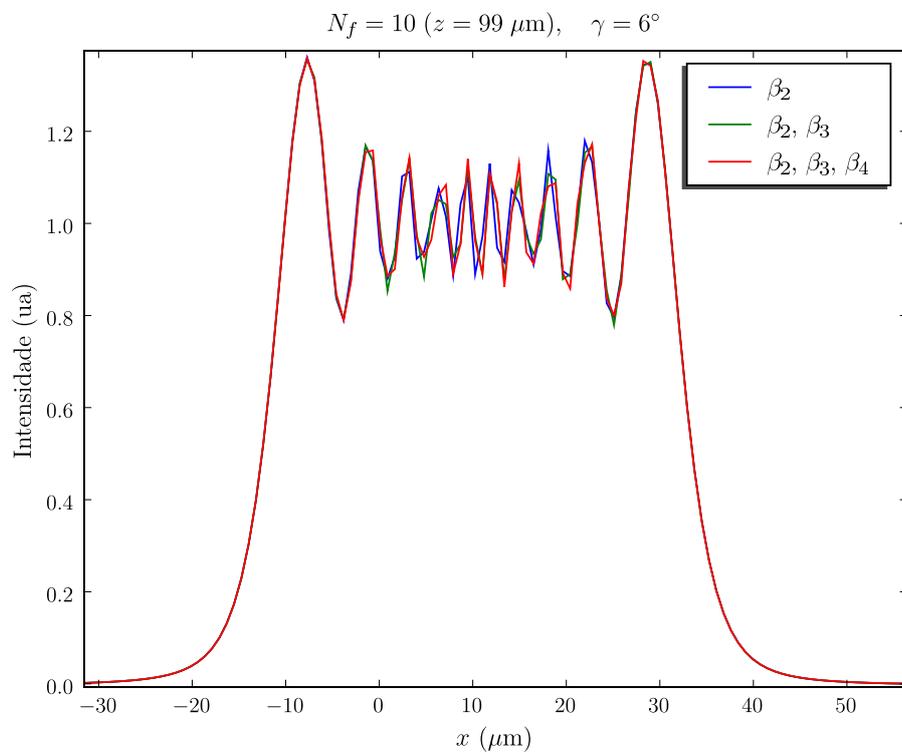
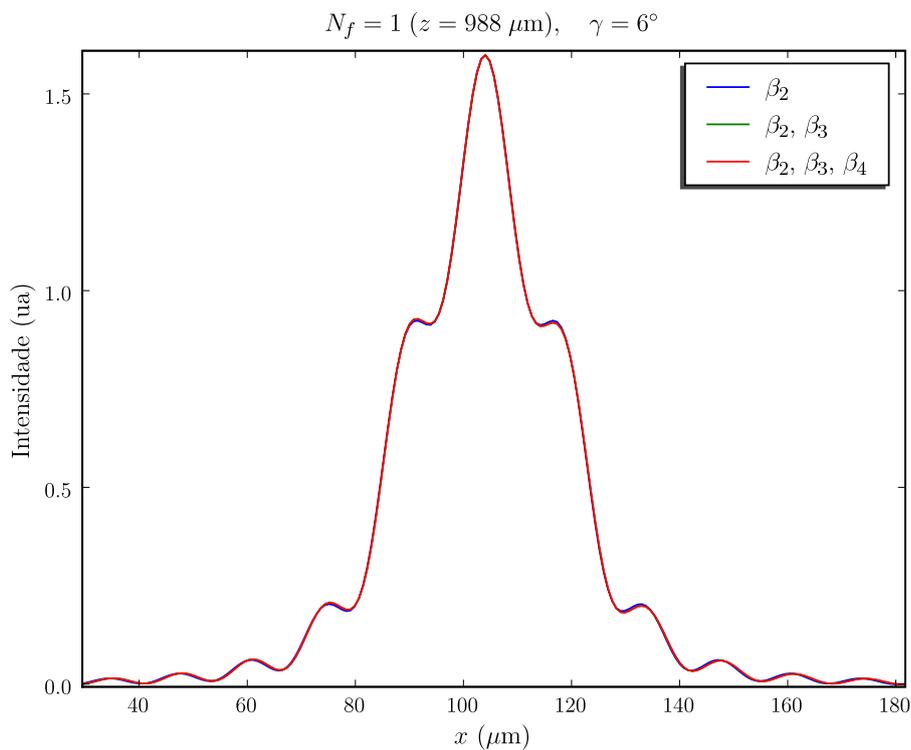


Figura 4.1: Perfil de intensidade da propagação de uma função rectângulo de largura $a = 50 \mu\text{m}$; $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$ e $\gamma = 6^\circ$. Nos dois gráficos os três perfis são praticamente coincidentes; daí só ser visível o perfil a vermelho. (a) $N_f = 1$; (b) $N_f = 10$.

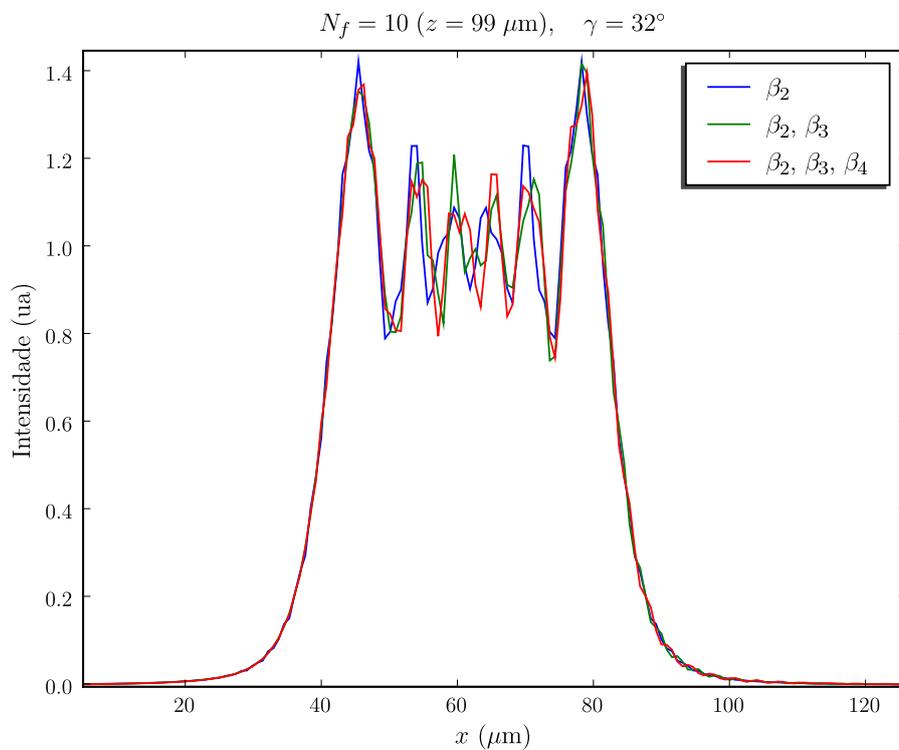
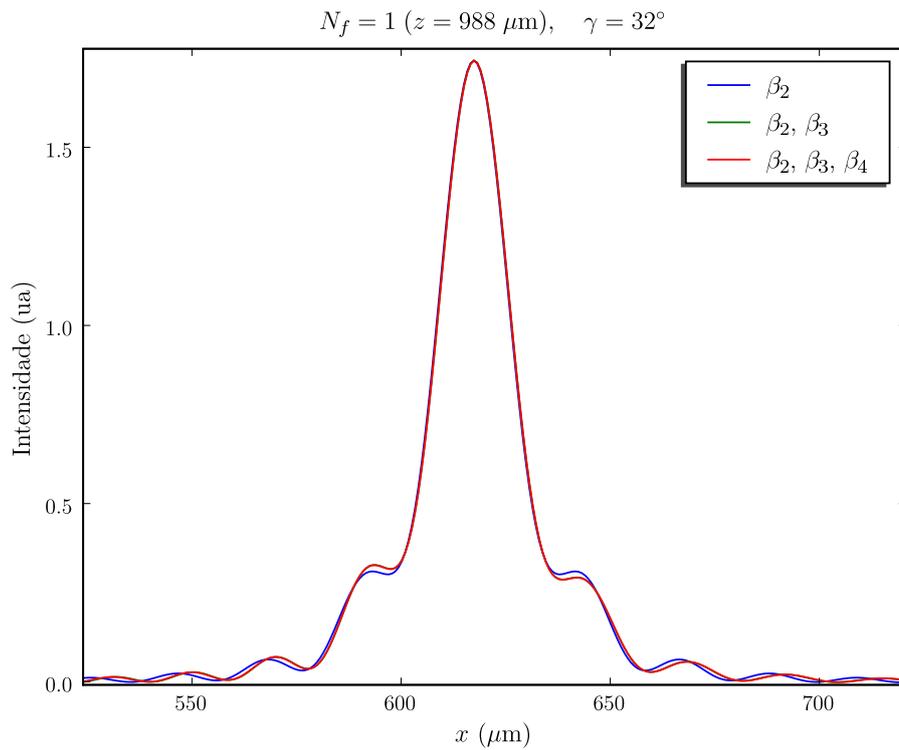


Figura 4.2: Perfil de intensidade da propagação de uma função rectângulo de largura $a = 50 \mu\text{m}$; $\lambda = 0,6328 \mu\text{m}$ e $\gamma = 32^\circ$. (a) $N_f = 1$ (os perfis a verde e vermelho são praticamente coincidentes); (b) $N_f = 10$.

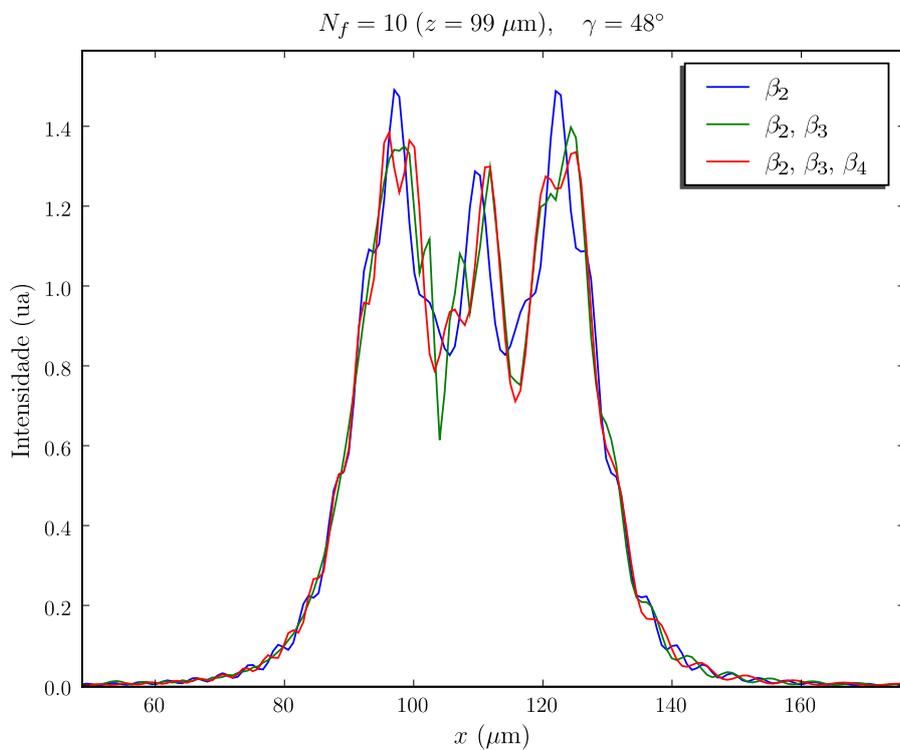
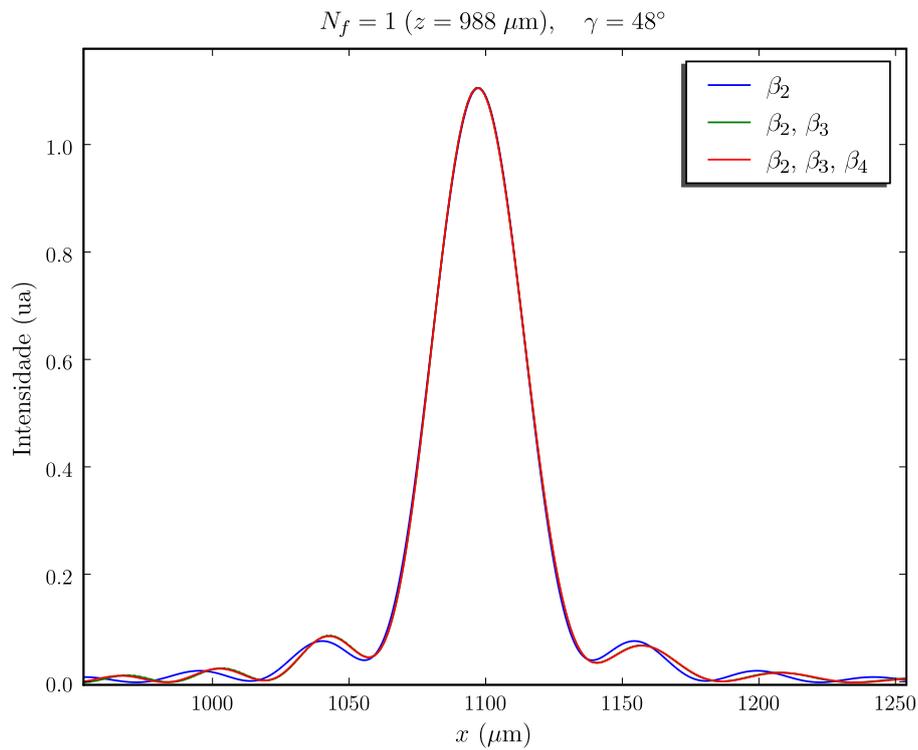


Figura 4.3: Perfil de intensidade da propagação de uma função rectângulo de largura $a = 50 \mu\text{m}$; $\lambda = 0,6328 \mu\text{m}$ e $\gamma = 48^\circ$. (a) $N_f = 1$ (os perfis a verde e vermelho são praticamente coincidentes); (b) $N_f = 10$.

mais rápida do perfil) encontram-se na sua região central e para $N_F = 1$ aquelas frequências situam-se na região limítrofe.

Para a direcção de propagação $\gamma = 6^\circ$ (Fig. 4.1), a introdução dos termos em β_3 e β_4 não provocam uma alteração significativa ao perfil. Para $\gamma = 32^\circ$ e 48° (Figs. 4.2 e 4.3) as correcções introduzidas pelos termos em β_3 e β_4 são mais significativas, observando-se, inclusivamente, diferenças entre a correcção com β_3 e β_4 , sendo esta diferença mais visível para $\gamma = 48^\circ$.

Embora a análise que levou aos resultados expressos na tabela 2.1 (pág. 29) tenha sido feita sem considerar o peso relativo da frequência $k_0/10$ no conjunto espectral do sinal, esses resultados estão qualitativamente de acordo com os resultados das simulações apresentadas nesta secção.

4.2 Representação modal de um impulso

Para estudar a propagação de um impulso numa lente temporal electro-óptica é necessário projectar o perfil do impulso nos modos próprios HG da lente.

Em teoria, a equivalência formal entre o perfil real do impulso e a sua representação, a partir das funções HG, só é possível usando um número infinito de modos, Eq. (3.33). Na prática, esta condição não é viável, sendo necessário encontrar o número finito de modos HG que represente de forma suficientemente aproximada o perfil real do impulso.

Na lente espacial GRIN o número máximo de modos HG que podem ser usados para representar o sinal à entrada da lente é imposto pela abertura física da lente [106]. Quanto maior for a ordem m do modo HG, maior é a sua extensão espacial; logo existe uma ordem máxima a partir da qual os modos deixam de “caber” dentro da lente, isto é, não se propagam.

No caso da lente temporal GRIN, podemos definir como abertura da lente a região em que a modulação do índice é aproximadamente parabólica $\sim 2/\omega_M$. Tratando-se apenas de uma definição, ela não impõe uma limitação física ao número de modos que podem propagar-se na lente. Expliquemos com um exemplo: consideremos um impulso de duração temporal muito inferior à abertura da lente, e para o qual é grande o número de modos HG necessário para o representar, tal que os modos de maior ordem têm uma extensão temporal superior à abertura da lente ($> 2/\omega_M$). Se durante a propagação, no interior da lente, o impulso se mantém sempre dentro da região parabólica, então, todos os modos HG (que no seu conjunto representam o impulso) devem propagar-se dentro da mesma condição física (aproximação parabólica). Não é fisicamente correcto limitar o número máximo de modos HG, visto serem necessários para reconstruir correctamente o impulso no interior da lente.

No entanto, existe uma limitação matemática, inerente ao facto da teoria de propagação de impulsos em meios dispersivos estar assente na aproximação da variação lenta da envolvente - SVEA, descrita na secção 1.3.2, isto é, não se pode representar um impulso com os modos de mais elevada ordem m que violem esta aproximação.

Impõe-se, então, saber quantos modos HG são permitidos pela aproximação SVEA. Para fazer uma estimativa deste número, vamos considerar um impulso com um perfil $A(\tau) = \phi_{2m}(\tau)$. Substituindo este perfil na condição SVEA Eq. (1.9b) resulta

$$\left| \frac{\partial H_{2m}}{\partial \tau} - \frac{\tau}{\sigma_\tau} H_{2m} \right| \ll |\omega_0 H_{2m}|, \quad (4.2)$$

na região de variação mais rápida de H_{2m} (na vizinhança de $\tau = 0$) e para m elevado podemos, usando a relação assintótica (C.7) do apêndice C, reescrever a desigualdade (4.2) na forma

$$\left| \frac{2\sqrt{m}}{\sigma_\tau} \sin(2\sqrt{m}/\sigma_\tau) \right| \ll |\omega_0 \cos(2\sqrt{m}/\sigma_\tau)|. \quad (4.3)$$

Integrando o $|\sin()|$ e o $|\cos()|$ ao longo de um período, resulta a condição para o número máximo de modos permitidos pela aproximação SVEA

$$m_{max} \ll \left(\frac{\omega_0 \sigma_\tau}{2} \right)^2. \quad (4.4)$$

Para valores típicos, $\omega_0 \sim 1 \text{ fs}^{-1}$ e $\sigma_\tau \gtrsim 200 \text{ fs}$, temos

$$m_{max} < 10^4, \quad (4.5)$$

isto é, o número máximo de modos permitidos pela aproximação SVEA é da ordem de 10^3 . Este número de modos é, em princípio, suficiente para representar um impulso da ordem dos 10 fs, duração limite do impulso permitido pela aproximação SVEA.

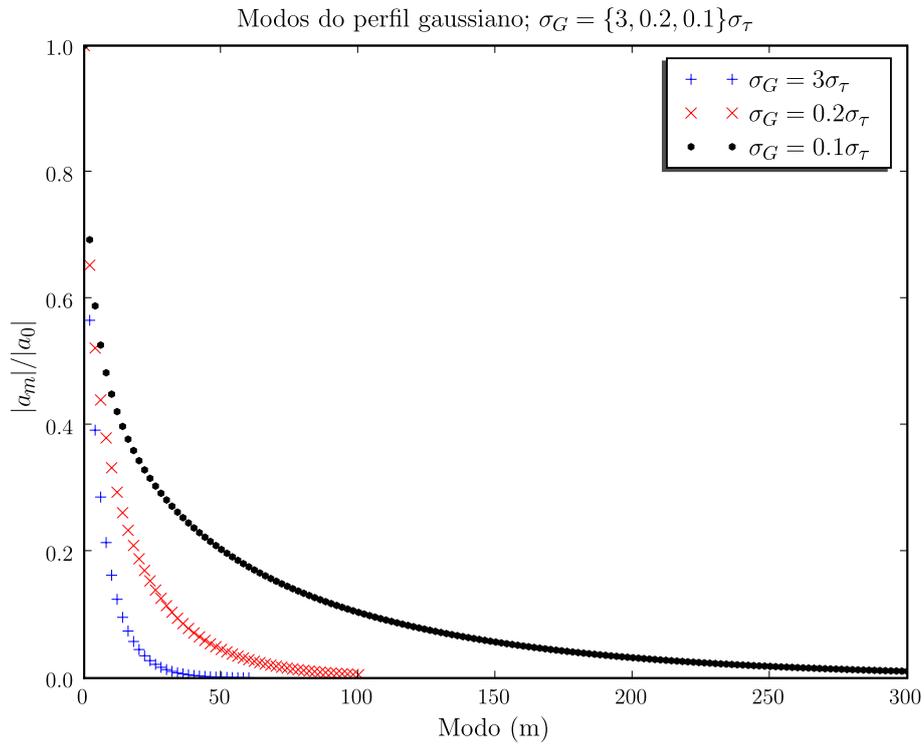
Para estudar a representação modal de um impulso calcularam-se os coeficientes de projecção para várias larguras de um impulso de dois tipos de perfis, gaussiano

$$\exp\left(-\frac{\tau^2}{2\sigma_G^2}\right) \quad (4.6)$$

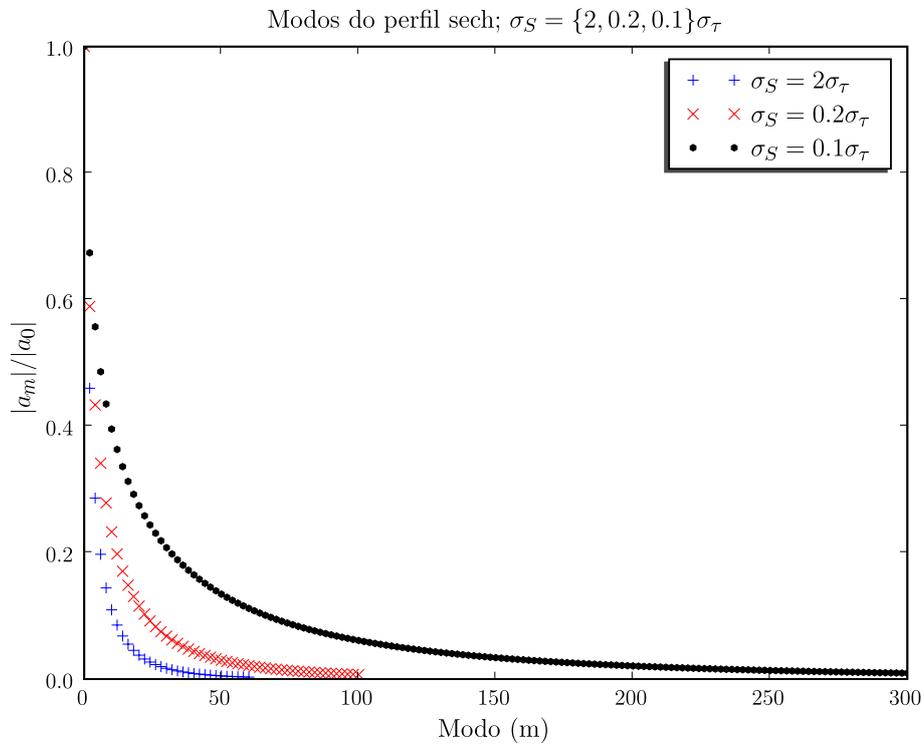
e sech

$$\text{sech}(\tau/\sigma_S). \quad (4.7)$$

Nos gráficos da Fig. 4.4, estão representados os coeficientes de projecção a_m normaliza-



(a)



(b)

Figura 4.4: Coeficientes de projecção de vários perfis do impulso nas funções próprias HG. (a) perfil Gaussiano; (b) perfil sech.

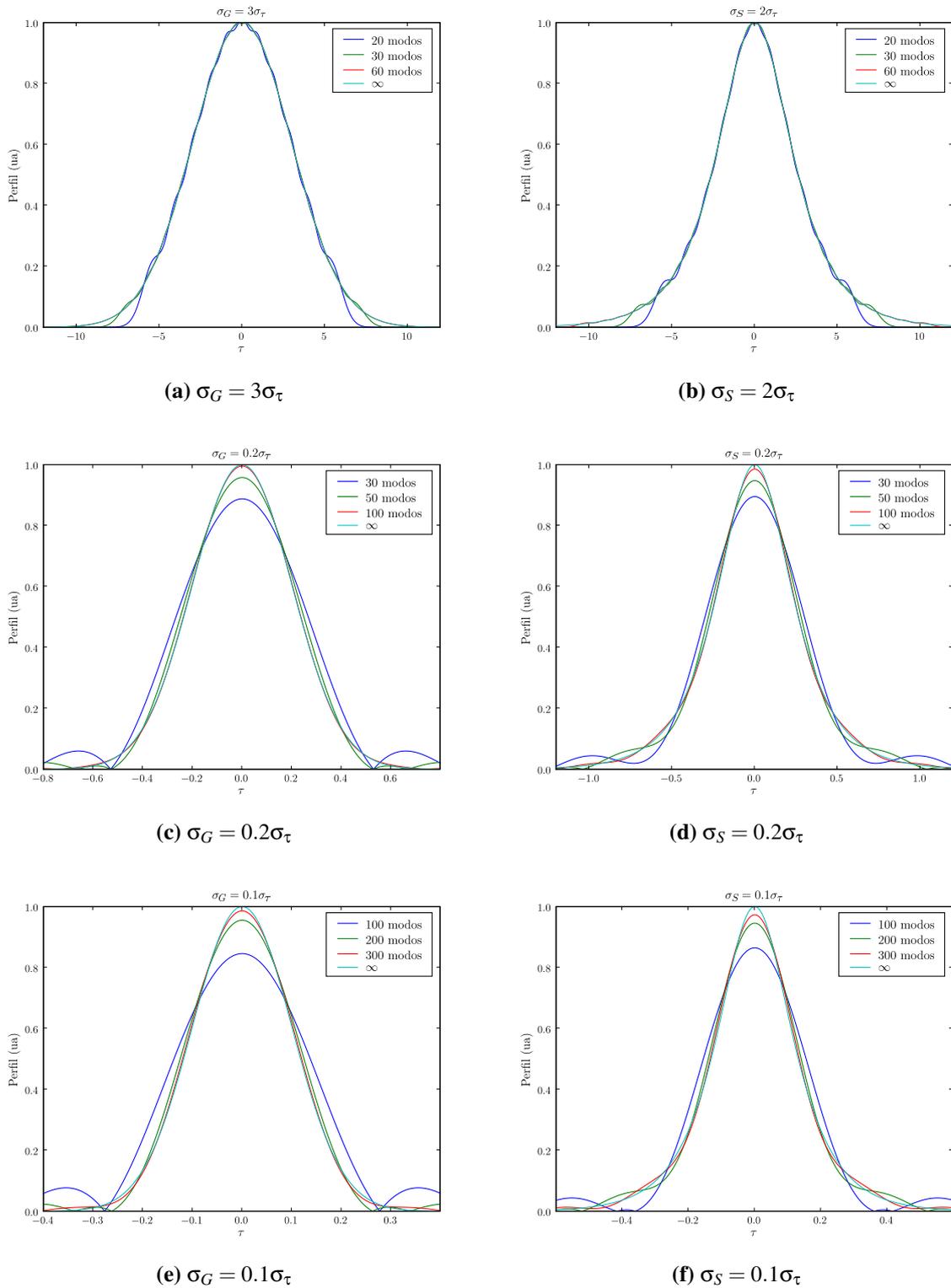


Figura 4.5: Representação do perfil do impulso em função do número de modos HG; (a) (para 60 modos e infinito os perfis coincidem), (c) e (e) perfil gaussiano; (b), (d) e (f) perfil sech. Tempo τ em unidades de σ_τ .

dos para os dois tipos de perfil. Como era de prever, quanto menor for a razão entre a largura do impulso $\{\sigma_G, \sigma_S\}$ e a escala da lente temporal EO σ_τ maior é a contribuição dos modos de ordem superior na reconstrução do impulso, isto é, mais modos serão necessários para reconstruir de forma suficientemente aproximada, o perfil real do impulso. Esta afirmação está ilustrada nos gráficos da Fig. 4.5, onde a reconstrução dos dois perfis do impulso em função do número de modos usados é comparada com o perfil real. O tempo τ nos gráficos está em unidades de σ_τ . Nos gráficos 4.5a e 4.5b, a má reconstrução da região limítrofe do impulso é explicada pelo facto do modo HG de maior ordem, usado na reconstrução, ter uma duração temporal inferior à do impulso. Nos restantes gráficos da Fig 4.5, a má reconstrução resulta do facto da largura espectral do impulso ser superior à largura espectral do modo HG de maior ordem, isto é, os modos usados na reconstrução não têm espectro suficiente para representar o impulso.

A título de exemplo, para $\sigma_\tau = 200$ fs e $\sigma_G = 0.1\sigma_\tau = 20$ fs são necessários cerca de 300 modos HG para reconstruir o perfil do impulso gaussiano, valor inferior a m_{max} calculado anteriormente.

Neste trabalho, foi usado um critério gráfico para determinar o número de modos HG necessário para representar convenientemente o perfil real do impulso. Quando graficamente não havia diferenças entre o perfil real e o reconstruído, verificou-se que a diferença média na amplitude entre os dois perfil era sempre inferior a 10^{-3} , isto é

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |A_{real}(\tau_i) - A_{rec}(\tau_i)| < 10^{-3}. \quad (4.8)$$

4.3 Lente temporal electro-óptica de Niobato de Lítio

O objectivo desta secção é caracterizar o funcionamento da lente temporal EO. É usada nas simulações a curva de dispersão do cristal de Niobato de Lítio, $LiNbO_3$, normalmente usado no fabrico de lentes temporais EO. O uso do $LiNbO_3$ na construção das lentes temporais EO justifica-se pelos elevados valores dos coeficientes electro-ópticos que este cristal apresenta.

Embora este estudo seja exclusivamente sobre a lente temporal EO de $LiNbO_3$, ele pode ser generalizado para qualquer outro cristal, desde que as características de dispersão sejam da mesma ordem de grandeza das do $LiNbO_3$.

No Apêndice D é apresentado o algoritmo que implementa numericamente a propagação de um impulso numa lente temporal EO.

4.3.1 Variação da escala da lente temporal electro-óptica

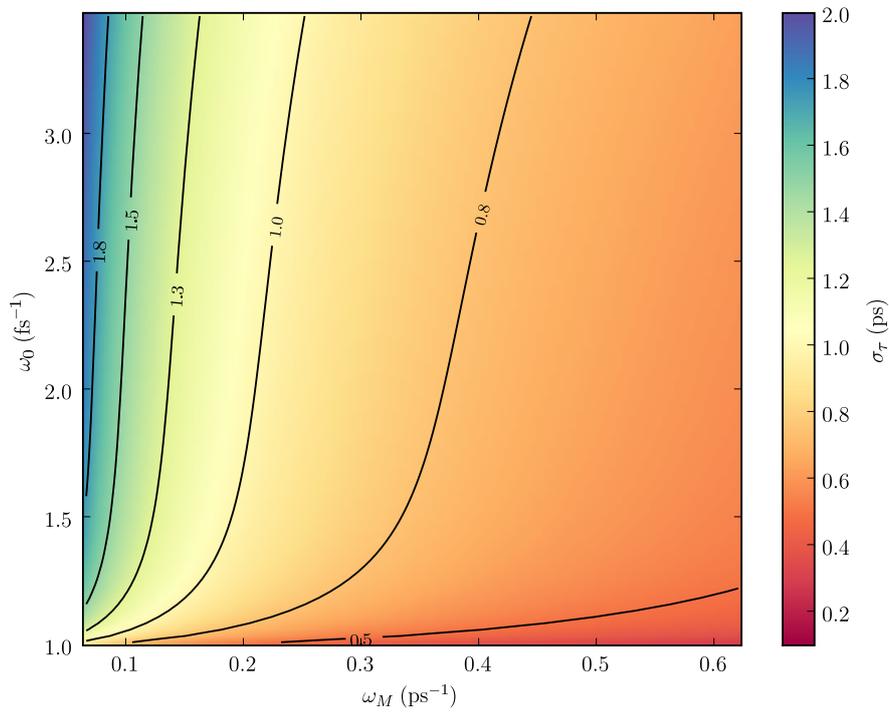
A escala da lente temporal EO definida pela Eq. (3.56) é o parâmetro que caracteriza por completo a lente. Numa observação mais cuidada da Eq. (3.56), verifica-se que estão presentes todas as grandezas de que depende o funcionamento da lente temporal EO:

- propriedades ópticas do cristal: n_0 , β_0 e β_2 ,
- frequência da micro-onda moduladora: ω_M ,
- e a modulação máxima do índice Δn_0 , o qual depende do processo de fabrico da lente, nomeadamente, das dimensões geométricas do cristal, eficiência do efeito-electro-óptico, tensão eléctrica da micro-onda, etc.

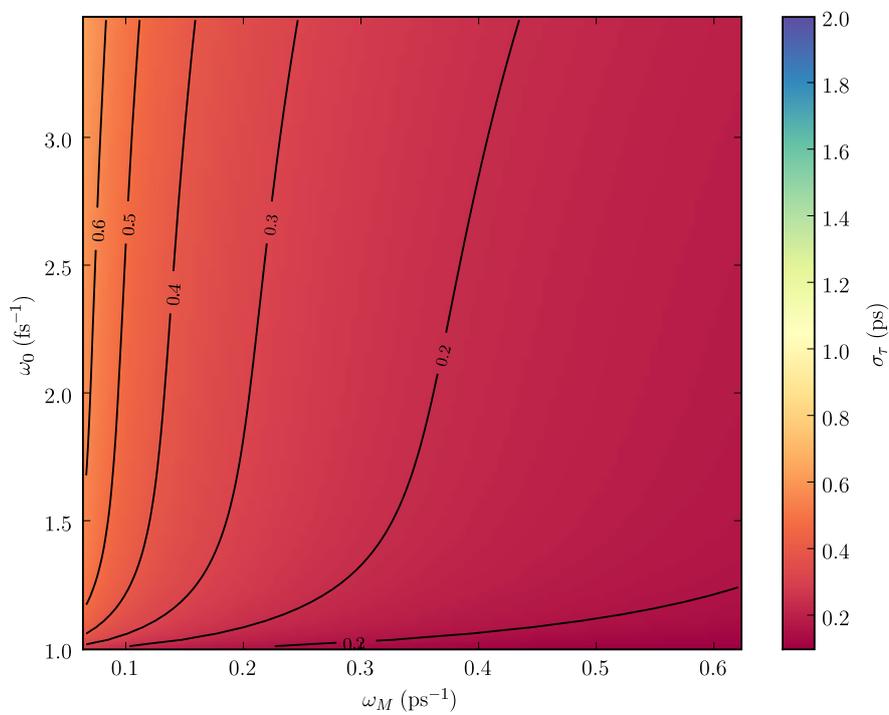
É de especial importância, portanto, durante o projecto de fabrico da lente, conhecer o comportamento da escala da lente em função dos vários parâmetros.

Nos gráficos da Fig. 4.6 está representada a variação da escala da lente temporal EO de $LiNbO_3$ em função da frequência portadora do impulso $\omega_0 = [1, 4] \text{ fs}^{-1}$ ($\lambda = [0.47, 1.9] \mu\text{m}$) e da frequência da micro-onda moduladora $\omega_M = [0, 0.63] \text{ ps}^{-1}$ ($\nu_M = [0, 100] \text{ GHz}$), para dois valores da modulação máxima do índice $\Delta n_0 = \{10^{-6}, 10^{-4}\}$. Da análise dos gráficos, verifica-se que a escala da lente varia dentro do intervalo 200 fs e 1.8 ps, aproximadamente. Uma outra característica que se observa para $\omega_0 > 1.5 \text{ fs}^{-1}$, é que a escala é praticamente independente da frequência portadora do impulso (linhas equi-escala quase verticais). Logo, para a mesma modulação máxima do índice, a frequência da micro-onda moduladora é o parâmetro mais importante na definição do valor da escala da lente.

Um outro parâmetro de particular interesse é o produto $\omega_M \sigma_\tau$, visto ser este parâmetro que determina a grandeza dos coeficientes de aberração definidos na secção 3.3.3. Nos

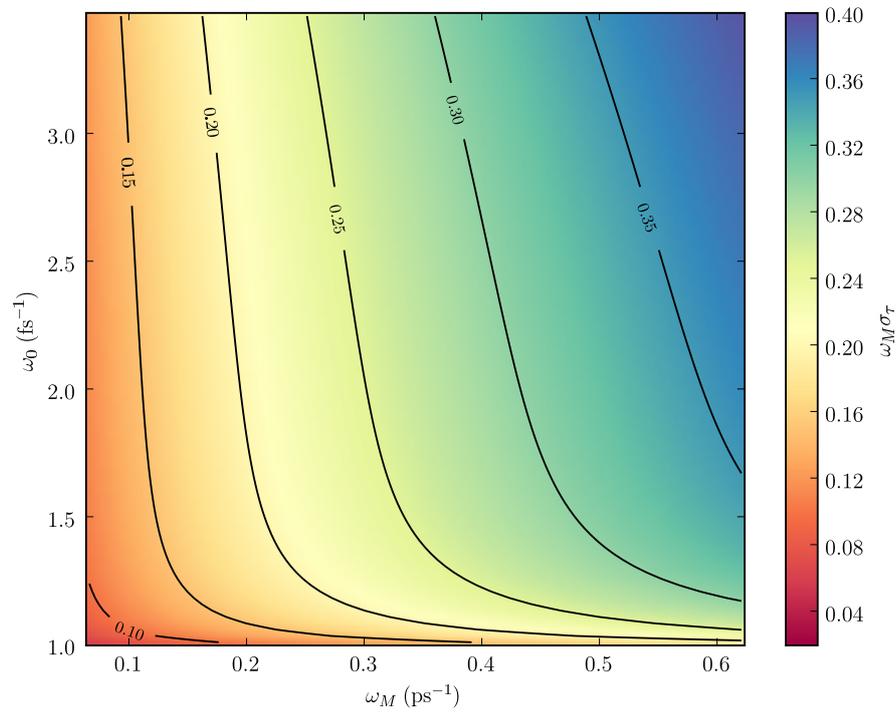


(a)

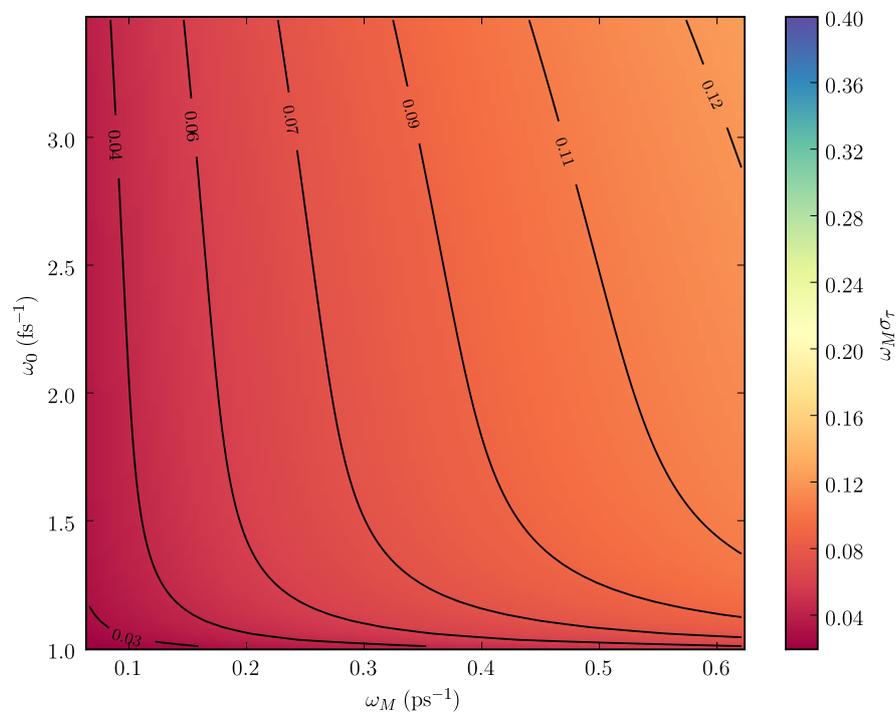


(b)

Figura 4.6: Variação do parâmetro de escala da lente temporal electro-óptica σ_τ em função da frequência da micro-onda moduladora ω_M e da frequência portadora do impulso ω_0 para: (a) $\Delta n_0 = 10^{-6}$; (b) $\Delta n_0 = 10^{-4}$.



(a)



(b)

Figura 4.7: Variação do parâmetro $\omega_M \sigma_\tau$ da lente temporal electro-óptica em função da frequência da micro-onda moduladora ω_M e da frequência portadora do impulso ω_0 para: (a) $\Delta n_0 = 10^{-6}$; (b) $\Delta n_0 = 10^{-4}$.

gráficos da Fig. 4.7 está representado a variação de $\omega_M \sigma_\tau$ em função de ω_0 e ω_M , para o mesmo intervalo de valores dos gráficos de σ_τ . Como se pode verificar, o parâmetro $\omega_M \sigma_\tau$ varia, aproximadamente, entre 0.04 e 0.4 e para $\omega_0 > 1.5 \text{ fs}^{-1}$ é praticamente independente de ω_0 . O estudo da variação dos coeficientes de aberração, realizado na secção 3.3.3, apenas para valores $\omega_M \sigma_\tau < 0.5$ é justificado pelo facto de o valor máximo de $\omega_M \sigma_\tau$ ser da ordem de 0.4.

4.3.2 Lente temporal electro-óptica: Processador de sinal

Como foi explicado no Capítulo 3, a lente temporal electro-óptica ideal não funciona apenas como uma lente. Pode funcionar como um sistema processador de sinal, onde o impulso ao propagar-se na lente sofre, sucessivamente, transformadas de Fourier fraccionárias. Sendo a ordem p da transformada de Fourier fraccionária dada por $p = z/L_F$, em que z é a distância de propagação na lente e L_F a distância de Fourier da lente (Tabela 3.1), a intenção nesta secção é ilustrar este funcionamento.

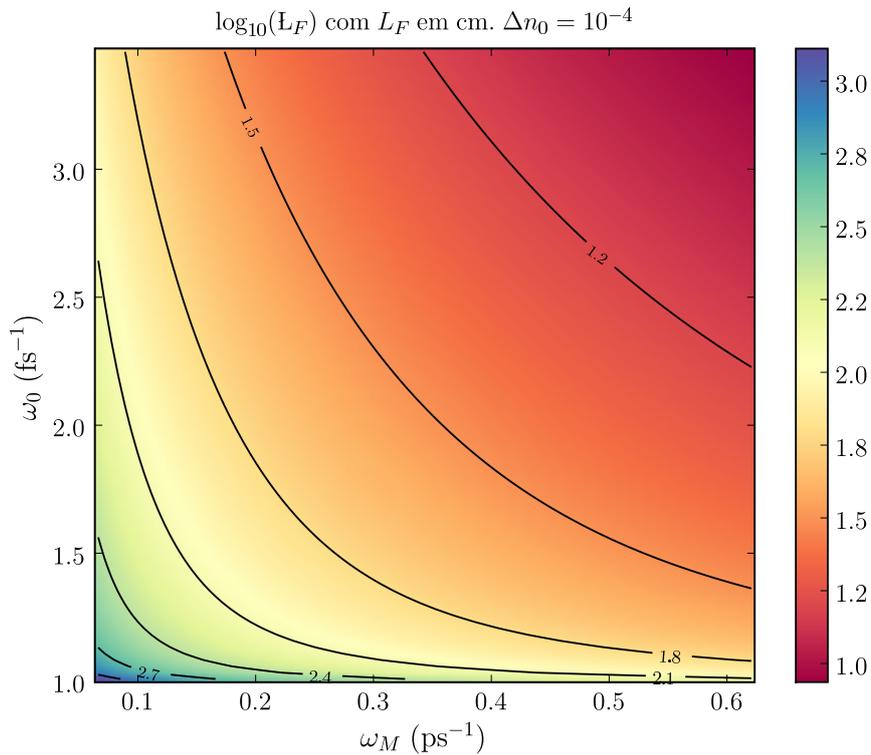


Figura 4.8: Variação do logaritmo da distância de Fourier, $\log_{10}(L_F)$, da lente temporal electro-óptica de LiNbO_3 , em função da frequência da micro-onda moduladora ω_M e da frequência portadora do impulso ω_0 para $\Delta n_0 = 10^{-4}$; L_F em cm.

No gráfico da Fig. 4.8 está representada a variação da distância de Fourier L_F ($\log_{10}(L_F)$), em função da frequência da micro-onda moduladora ω_M e da frequência portadora do impulso ω_0 para $\Delta n_0 = 10^{-4}$, num cristal de $LiNbO_3$. Dentro do intervalo dos valores considerados de ω_M e ω_0 o $\log_{10}(L_F)$ varia, aproximadamente, entre 1 e 3, isto é, L_F pode variar entre 10 e 1000 cm. Para outros valores da modulação máxima do índice Δn_0 , a distância de Fourier pode ser calculada, através da relação

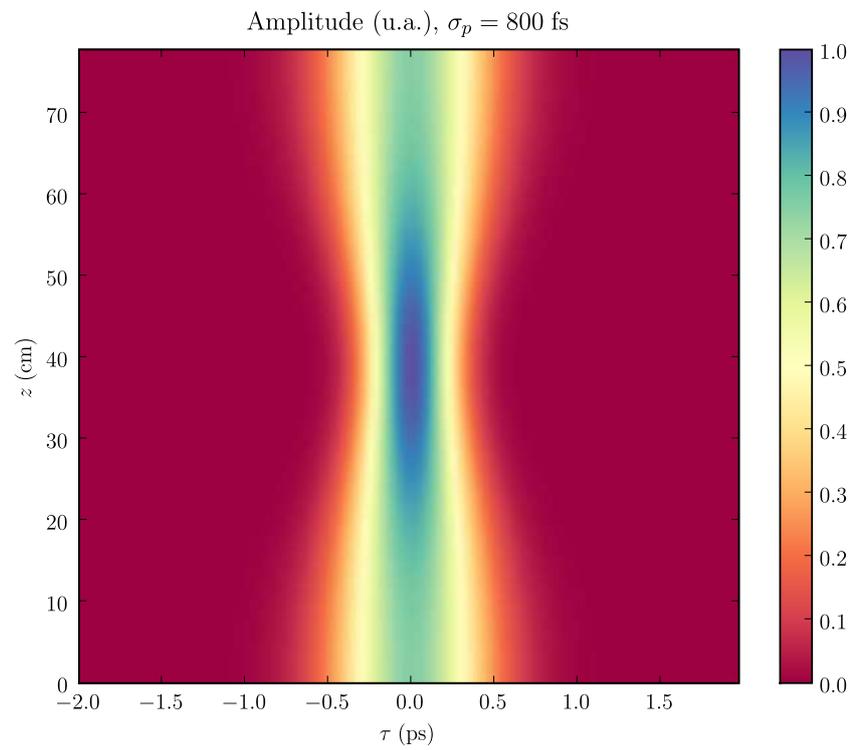
$$\log_{10} \left(L_F^{(2)} \right) = \frac{1}{2} \log_{10} \left(\Delta n_0^{(1)} / \Delta n_0^{(2)} \right) + \log_{10} \left(L_F^{(1)} \right), \quad (4.9)$$

onde se usou a definição de L_F da Tabela 3.1. Por exemplo, para $\Delta n_0 = 10^{-6}$, a distância de Fourier aumenta uma ordem de grandeza relativamente ao seu valor para $\Delta n_0 = 10^{-4}$.

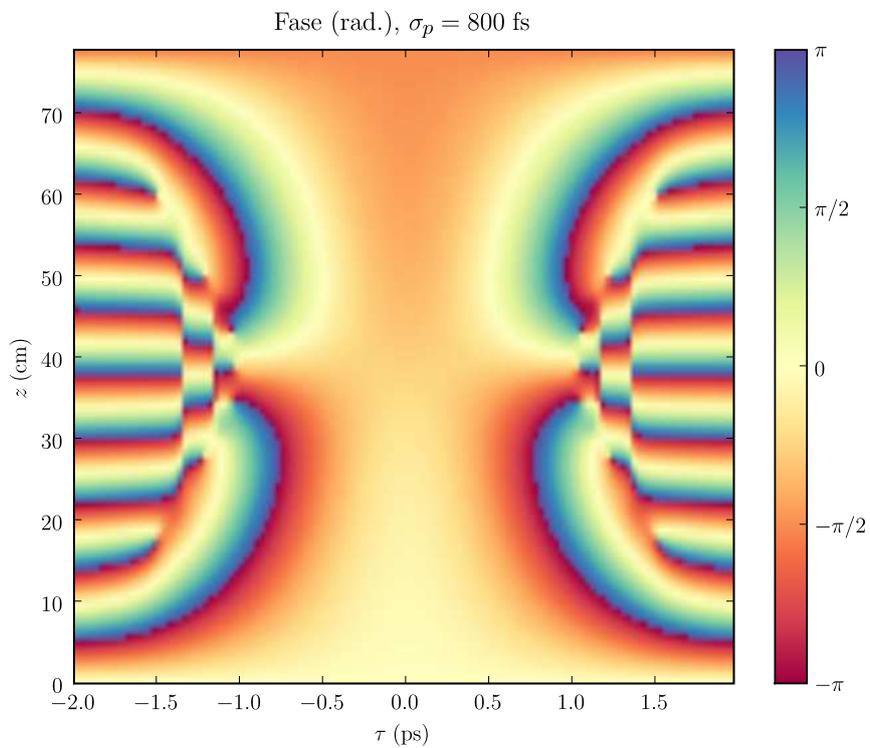
Na prática, poderá ser muito difícil implementar uma lente temporal EO processadora de sinal, visto que, só se consegue valores de L_F práticos (< 10 cm) para valores extremos, quer da frequência da micro-onda moduladora ($\nu_M > 60$ GHz), quer da modulação máxima do índice ($\Delta n_0 \sim 10^{-4}$).

Os gráficos das Figs. 4.9, 4.10 e 4.11 representam a variação da amplitude e fase de três impulsos gaussianos de duração FWHM em amplitude $\sigma_p = \{800, 300, 200\}$ fs durante a propagação numa lente temporal EO de comprimento igual a duas vezes a distância de Fourier, $2L_F$ ($L_F = 38.9$ cm e $\sigma_\tau = 255$ fs para $\omega_0 = 1.88$ fs $^{-1}$, $\nu_M = 50$ GHz e $\Delta n_0 = 10^{-4}$). No plano $z = L_F$, temos a transformada de Fourier do impulso e à saída da lente, $z = 2L_F$, temos uma imagem invertida do impulso de entrada. Nos planos intermédios, temos a transformada de Fourier fraccionária de ordem $p = z/L_F$.

Os gráficos da Fig. 4.12 representam a fase do impulso à entrada e à saída da lente. À parte de uma diferença de fase de $\pi/2$ entre a entrada e a saída, justificada pelo termo de fase constante presente na Eq. (3.60), a fase do impulso de saída é perfeitamente igual à fase do impulso de entrada. Os saltos de π , que se observam nos dois gráficos, resultam da reconstrução do impulso a partir de um número finito de modos HG. Este fenómeno pode ser minimizado, ou até anulado (é o caso do impulso $\sigma_p = 800$ fs), se usar um número maior de modos; no entanto, ocorrem numa região onde praticamente já não existe impulso, não sendo, por isso, um problema a considerar.

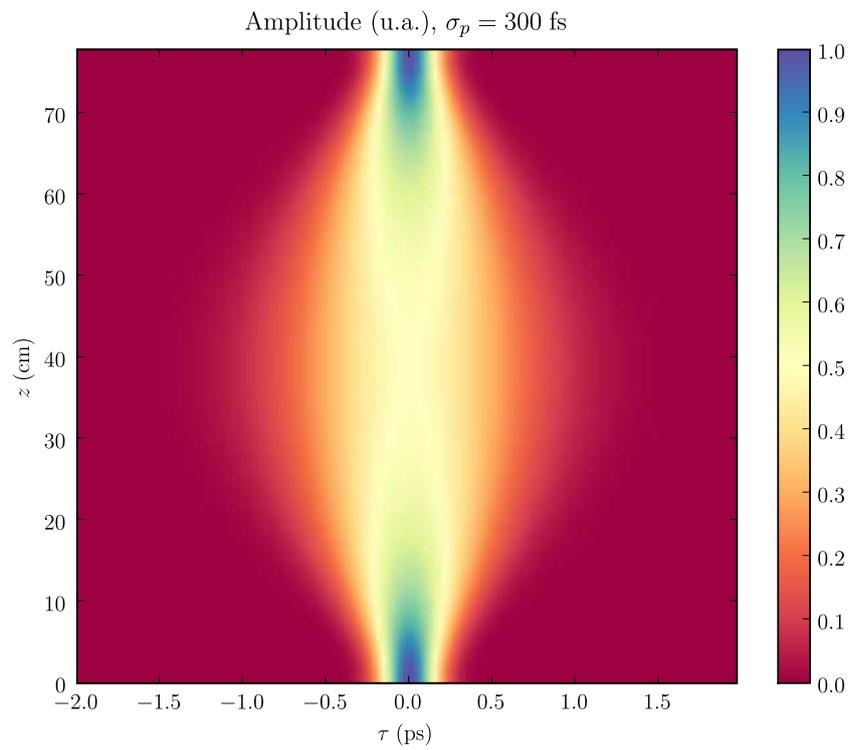


(a)

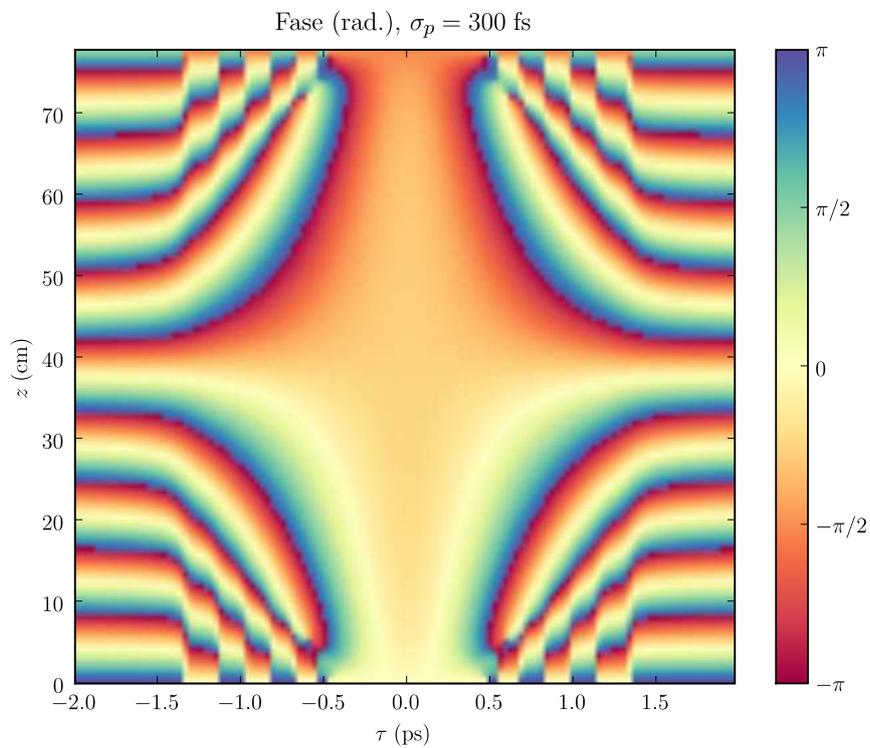


(b)

Figura 4.9: Evolução de um impulso de perfil gaussiano, $\sigma_p = 800$ fs, no interior da lente temporal electro-óptica de comprimento $2L_F$: (a) amplitude, (b) fase.

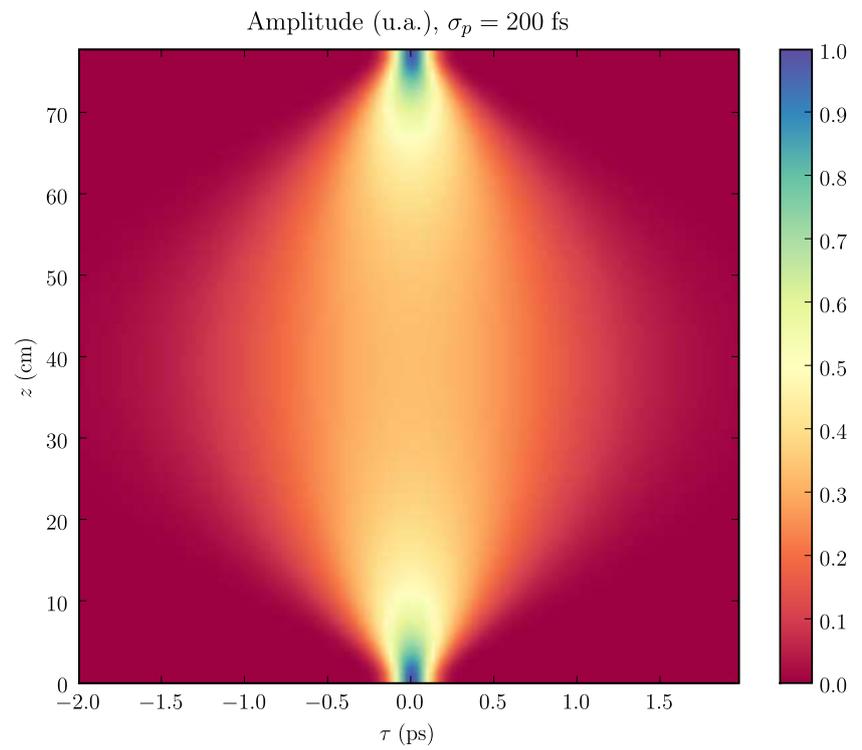


(a)

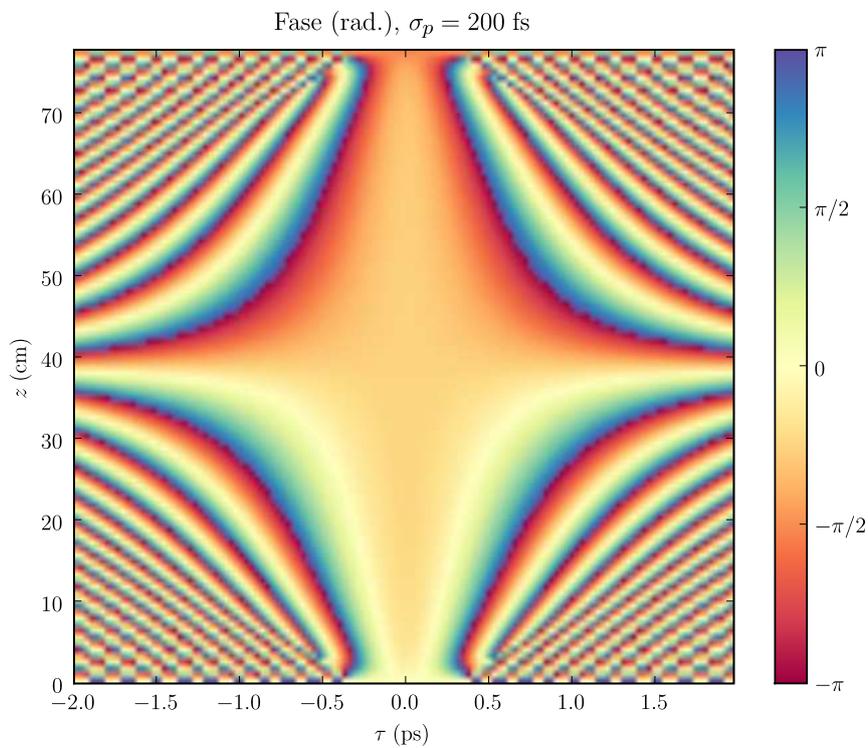


(b)

Figura 4.10: Evolução de um impulso de perfil gaussiano, $\sigma_p = 300$ fs, no interior da lente temporal electro-óptica de comprimento $2L_F$: (a) amplitude, (b) Fase.



(a)



(b)

Figura 4.11: Evolução de um impulso de perfil gaussiano, $\sigma_p = 200$ fs, no interior da lente temporal electro-óptica de comprimento $2L_F$: (a) amplitude; (b) fase.

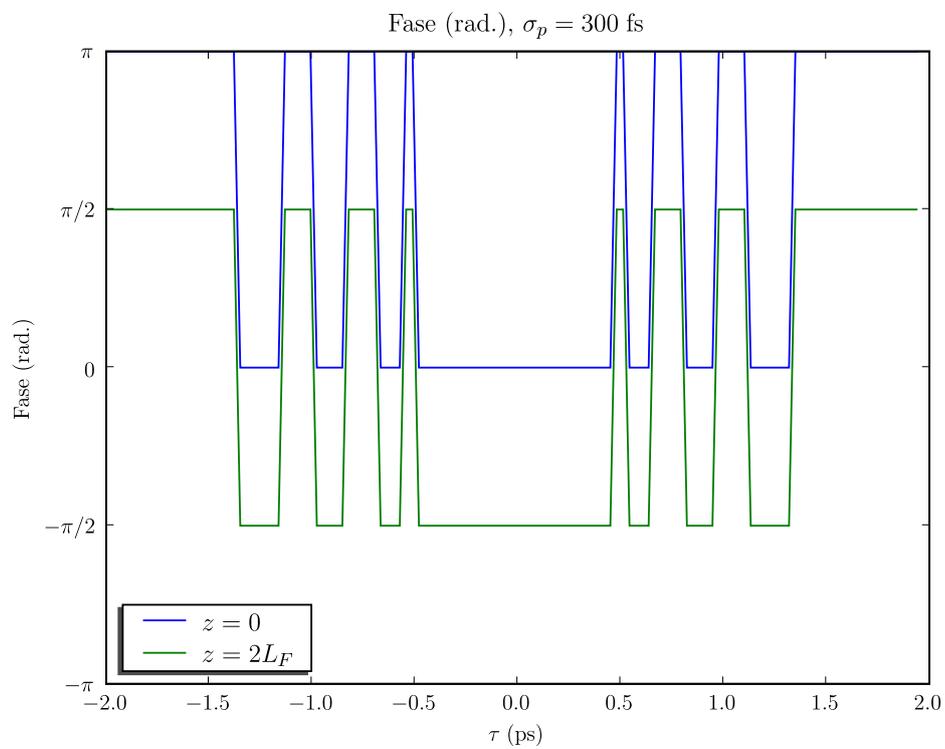
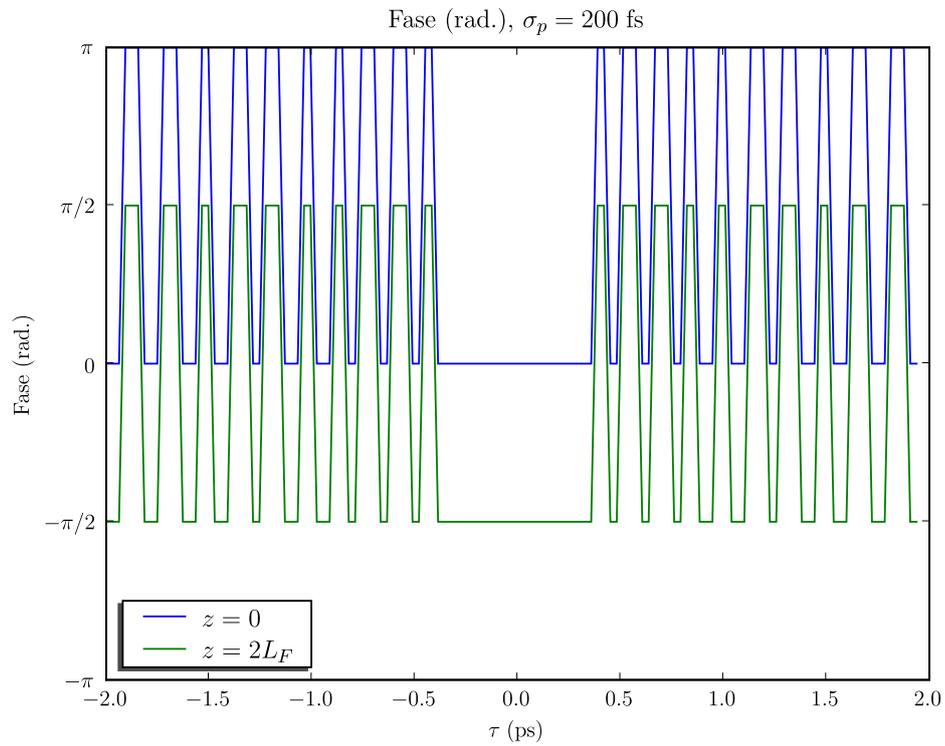


Figura 4.12: Variação da fase do impulso à entrada ($z = 0$) e saída ($z = 2L_F$) da lente temporal electro-óptica, referente às Figs. 4.10-4.11: (a) $\sigma_p = 200$ fs, (b) $\sigma_p = 300$ fs.

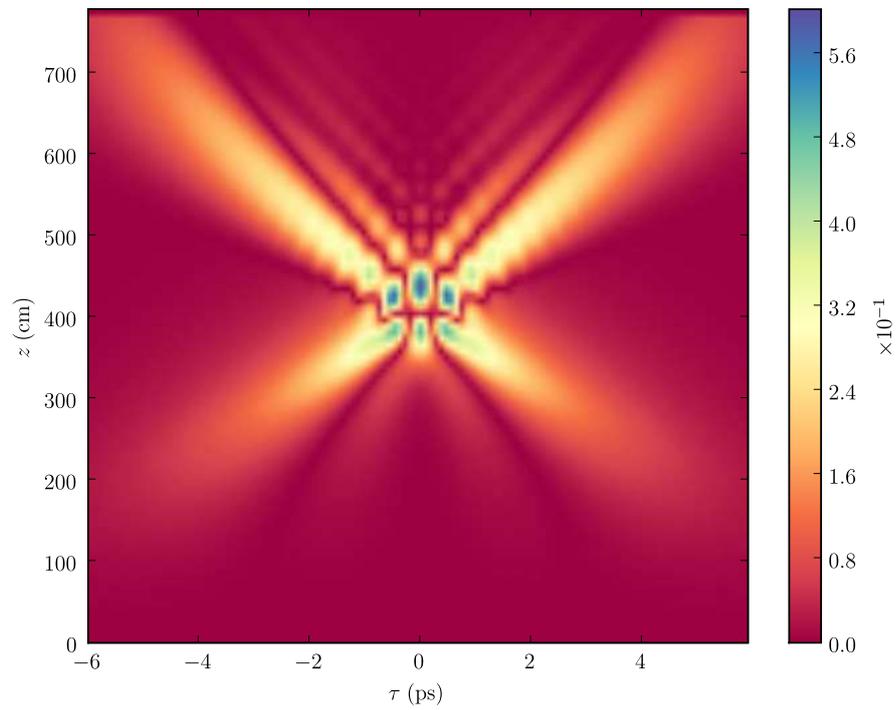
4.3.3 Importância dos coeficientes de aberração

Nesta secção demonstra-se o efeito dos coeficientes de aberração, definidos na secção 3.3.3, na amplitude e fase do impulso. Os valores dos parâmetros da lente temporal EO usados nestas simulações são os mesmos da secção anterior, com a excepção do valor máximo da modulação do índice, $\Delta n_0 = 10^{-6}$. A escolha deste valor de Δn_0 garante um valor de $\omega_M \sigma_\tau$ relativamente grande e consequentemente valores relativamente grandes dos coeficientes de aberração. Os parâmetros da lente EO tomam os valores: $\sigma_\tau = 807$ fs, $L_F = 389$ cm e $\omega_M \sigma_\tau = 0.25$. O perfil parabólico de índice da lente usada nestas simulações tem uma duração de $2/\omega_M = 6.4$ ps. Para se poder visualizar convenientemente o efeito de correcção, em função da duração do impulso, propagou-se um impulso gaussiano de duração FWHM em amplitude, da ordem da abertura da lente EO, $\sigma_p = 6$ ps, e um de duração mais pequena, $\sigma_p = 1$ ps.

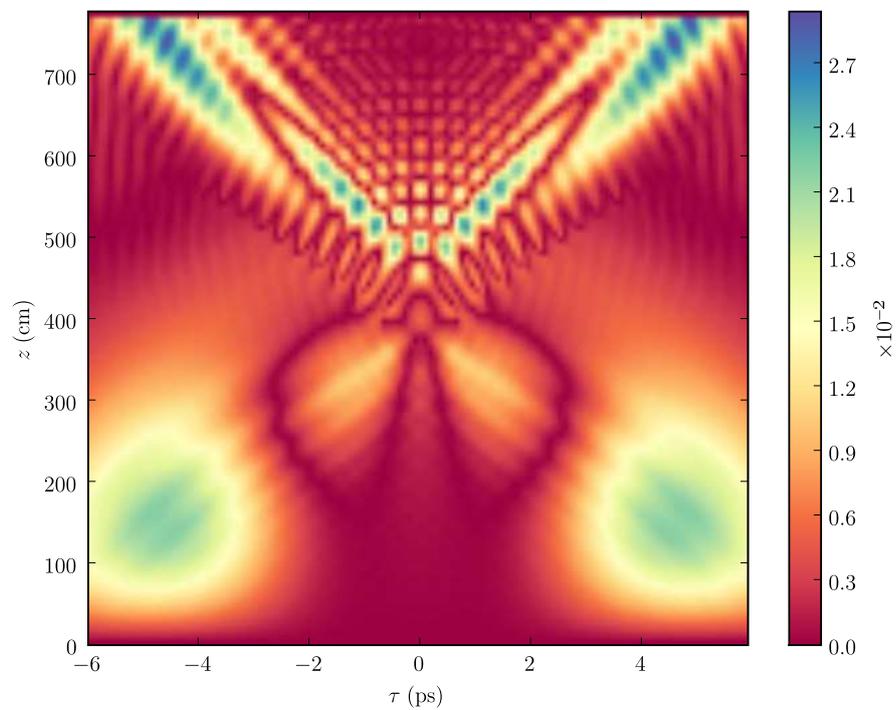
Nos gráficos das Figs. 4.13 e 4.14 estão representadas as variações da diferença na amplitude do impulso, para as três primeiras aproximações do modelo da lente temporal EO da secção 3.3.3, isto é, aproximação parabólica, 1ª ordem e 2ª ordem. Da observação dos gráficos, verifica-se que a diferença máxima na amplitude entre o modelo parabólico e de 1ª ordem, é da ordem de 10^{-1} (10^{-2}) para $\sigma_p = 6$ ps ($\sigma_p = 1$ ps), e é uma ordem de grandeza inferior para a diferença na amplitude, entre os modelos de 1ª ordem e de 2ª ordem. O efeito de correcção no perfil do impulso faz-se sentir mais cedo (menor distância de propagação na lente), como seria de prever, para o impulso de maior duração.

Em termos práticos uma lente temporal EO tem um comprimento da ordem dos 10 cm. Para estas distâncias, os termos de aberração não introduzem qualquer alteração ao perfil de amplitude do impulso. Relativamente à fase introduzida no impulso pela lente EO, pretende-se, na prática, que seja quadrática (fase introduzida por uma lente ideal). Nos gráficos da Fig 4.15 está representada a fase do impulso à saída da lente de comprimento $L = 7.78$ cm, para os três modelos. Verifica-se que a diferença na fase, entre os três modelos, só é significativa nas regiões onde a amplitude do impulso é já muito pequena, sendo esta diferença mais visível para o impulso $\sigma_p = 6$ ps.

Podemos concluir desta análise que os coeficientes de aberração, na prática, não introduzem uma alteração significativa, quer na amplitude quer na fase do impulso. Portanto, o modelo da lente temporal EO na aproximação parabólica é perfeitamente adequado para descrever a propagação de um impulso de duração inferior a 1 ps.

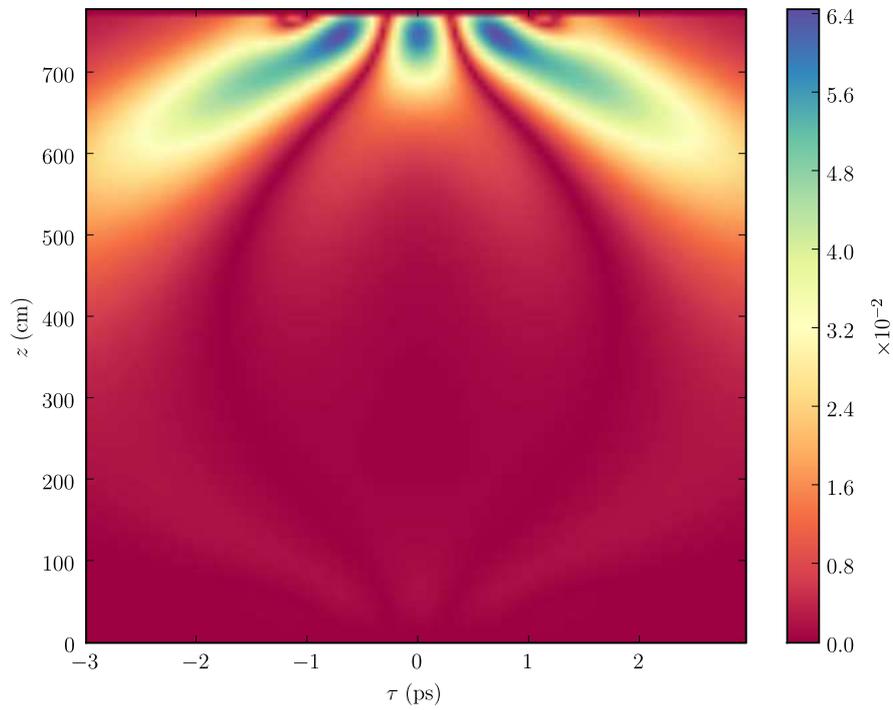


(a)

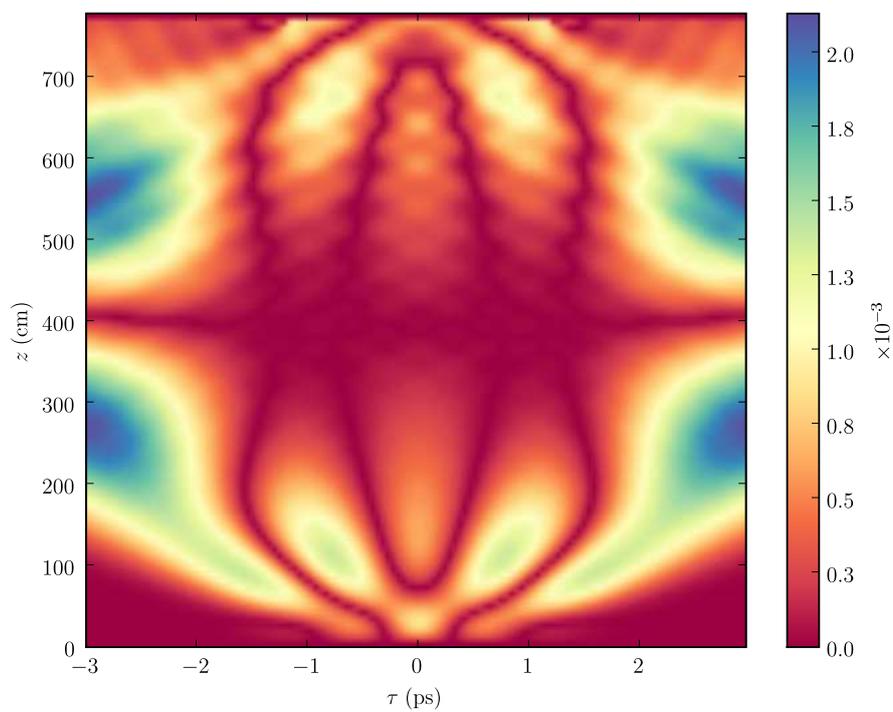


(b)

Figura 4.13: Variação da diferença na amplitude do impulso entre os três modelos de lente temporal electro-óptica para $\sigma_p = 6$ ps: (a) parabólico - 1^a ordem, (b) 1^a ordem - 2^a ordem.



(a)



(b)

Figura 4.14: Variação da diferença na amplitude do impulso entre os três modelos de lente temporal electro-óptica para $\sigma_p = 1$ ps: (a) parabólico - 1^a ordem, (b) 1^a ordem - 2^a ordem.

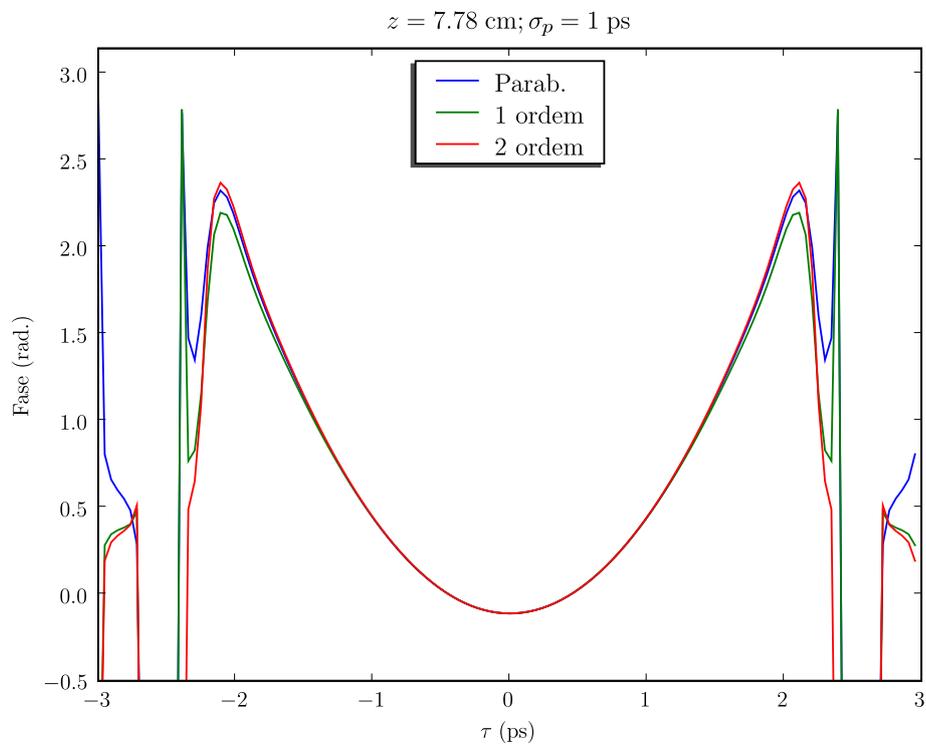
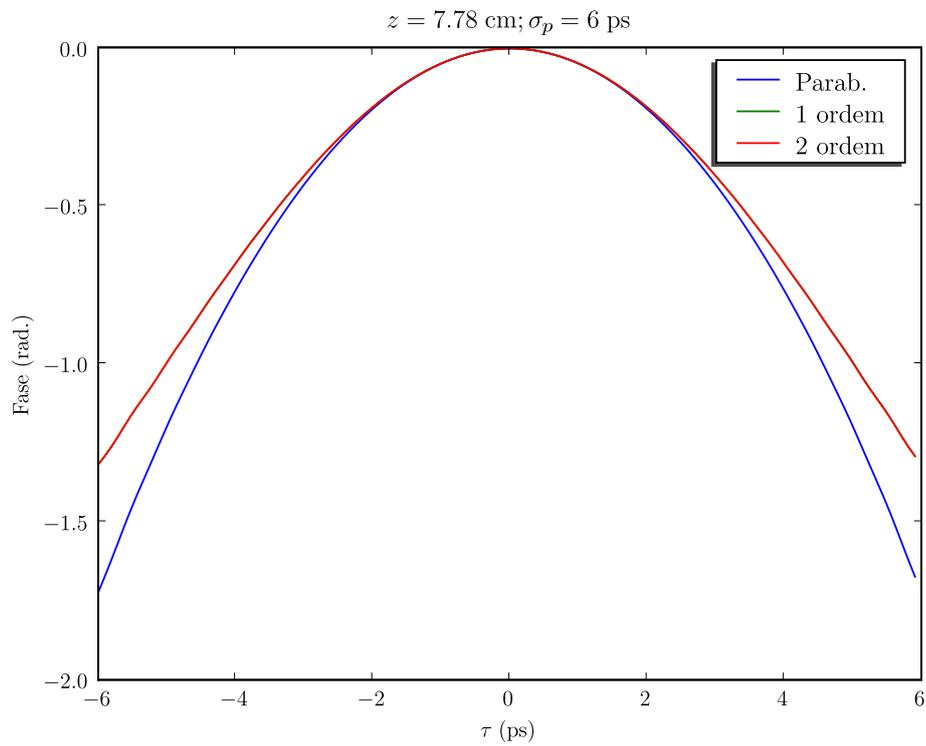


Figura 4.15: Fase do impulso para os três modelos de lente temporal electro-óptica para $z = 7.78 \text{ cm}$: (a) $\sigma_p = 6 \text{ ps}$ (as linhas verde e vermelha são coincidentes), (b) $\sigma_p = 1 \text{ ps}$.

4.3.4 Importância da diferença nas velocidades de grupo do impulso e de fase da micro-onda

Para estudar o efeito da diferença nas velocidades de grupo do impulso v_g e de fase da micro-onda v_M na função da lente, simulou-se a propagação de um impulso gaussiano de FWHM em amplitude $\sigma_p = 500$ fs, $\omega_0 = 1.88$ fs⁻¹ ($\lambda = 1$ μ m) numa lente com escala $\sigma_\tau = 255$ fs ($\Delta n_0 = 10^{-4}$, $v_M = 50$ GHz). Para este impulso, à entrada da lente, o número de modos necessário para o reconstruir são de, aproximadamente, cinco. Da análise da secção 3.3.4, a distância de propagação do impulso na lente a partir da qual o perfil é alterado significativamente, devido à dispersão no cristal, é da Eq. (3.92) com $m = 5$, $L_v = 4.5$ cm. Para esta distância, a previsão, Eq. (3.97), para a diferença máxima nos índices das duas ondas, n_M e n_g , a partir da qual o impulso sofre distorção, é

$$n_M > 1.004n_g. \quad (4.10)$$

A simulação da propagação de um impulso na lente temporal EO, neste caso, apresenta uma dificuldade adicional. A utilização de um número mínimo de modos à entrada da lente para reconstruir o impulso não vai garantir que esse número seja suficiente para reconstruir o impulso à saída da lente. Isto porque, à saída da lente, os modos HG (que acompanham o eixo da lente) vão-se atrasando, relativamente ao impulso. Este atraso, tem de ser compensado com o aumento da duração dos modos HG (só conseguido introduzindo modos de ordem m elevado), logo será necessário um maior número de modos para reconstruir o impulso à saída. Este número é tanto maior quanto maior for a diferença entre as velocidades das duas ondas. A estratégia usada nesta secção, para garantir uma simulação fisicamente correcta da propagação do impulso na lente, foi fazer simulações sucessivas com um número crescente de modos HG, até se conseguir obter uma reconstrução do impulso à saída da lente.

Para justificar o uso do modelo na aproximação parabólica, garantiu-se, antes de efectuar as simulações, que o impulso se mantém sempre dentro da região parabólica da modulação do índice. Na Fig. 4.16 está esquematizada a geometria usada para definir a posição do impulso relativamente à lente EO. Considerou-se que o impulso está dentro da região parabólica desde que se verifique a condição, da Fig. 4.16,

$$1/\omega_M > \alpha L + \sigma_p/2. \quad (4.11)$$

Para os valores dos parâmetros usados nestas simulações, $L = 5$ cm e $n_M = \{1.004, 1.005\}n_g$,

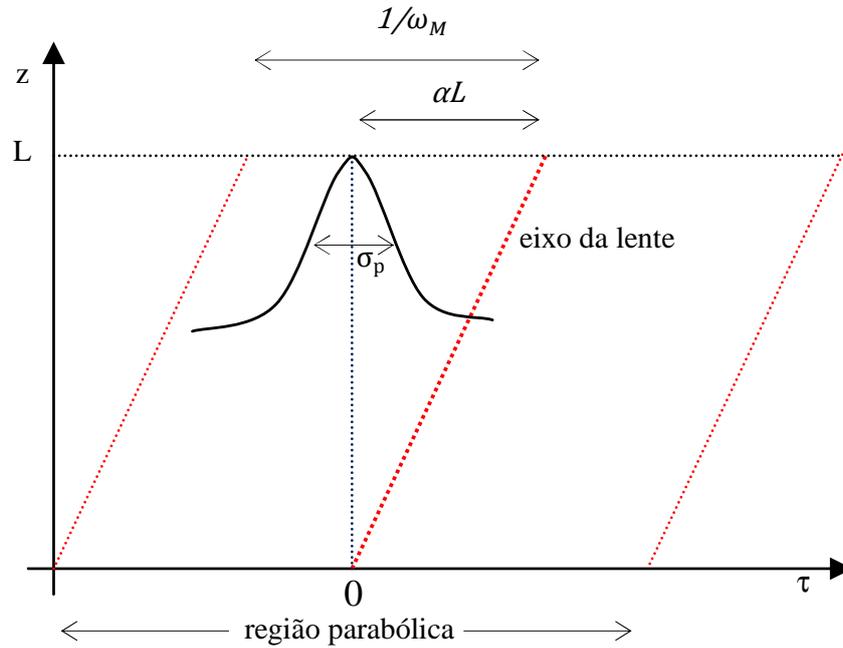


Figura 4.16: Posição do impulso à saída da lente, relativamente ao eixo da lente temporal EO. σ_p - FWHM em amplitude do impulso, α - definido pela Eq. (3.72), L - comprimento da lente e ω_M - frequência de modulação.

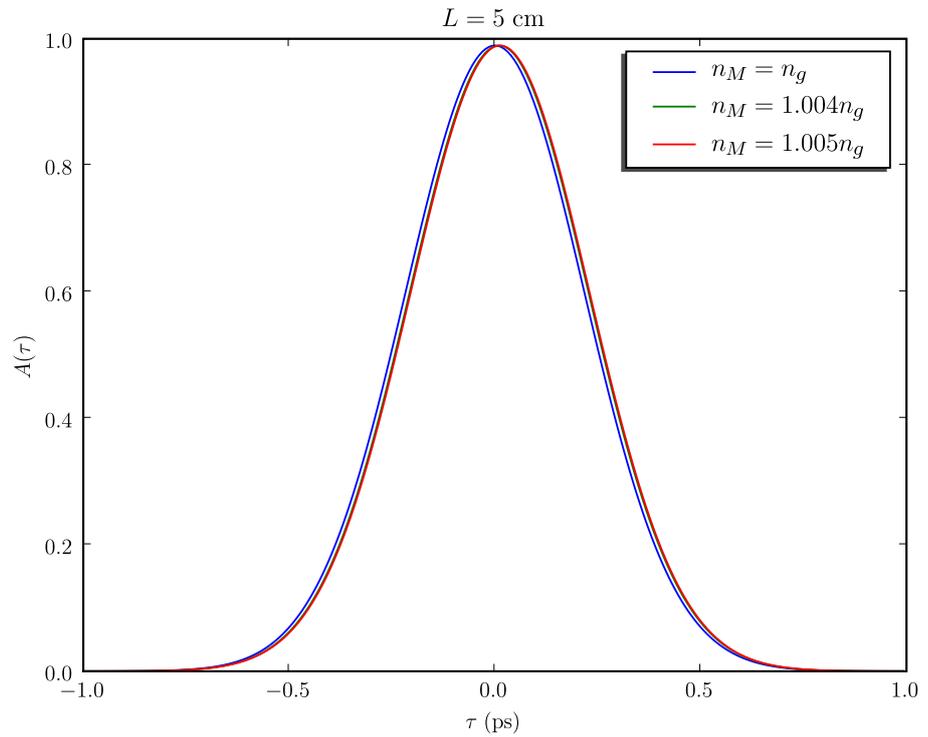
temos $\alpha L = \{1.45, 1.85\}$ ps, $\alpha L + \sigma_p/2 = \{1.7, 2.1\}$ ps e $1/\omega_M = 3.2$ ps, verifica-se a condição da Eq. 4.11 e, portanto, podemos considerar que o impulso se encontra sempre dentro da região parabólica de modulação de índice.

Nos gráficos da Fig. 4.17 estão representadas a amplitude e a fase do impulso à saída de uma lente de comprimento $L = 5$ cm para os dois valores da diferença de índices $n_M = \{1.004, 1.005\}n_g$ e, como referência, para $n_M = n_g$. Da análise dos gráficos, verifica-se que, a alteração na amplitude do impulso devido à diferença nas velocidades, prevista na secção 3.3.4, reflecte-se apenas por um atraso global do impulso relativamente à lente EO ideal; o perfil de amplitude não é portanto distorcido. Isto é, fisicamente, a diferença das velocidades das duas ondas apenas introduz uma correcção à velocidade de grupo do impulso $\beta_{1_{ef}}^{-1} < \beta_1^{-1}$. Verificou-se numericamente que esta correcção à velocidade de grupo do impulso é aproximadamente uma função linear da diferença das velocidades das duas ondas. Relativamente à fase, o perfil parabólico de fase do impulso, introduzida pela lente EO, deixa de estar centrado no impulso, como acontece com a lente EO ideal, encontrando-se adiantado. Este avanço é tanto maior quando maior for a diferença entre as velocidades das duas ondas. Esta situação pode não ser desejada na prática. Normalmente pretende-se que a lente introduza um perfil parabólico de fase centrado no impulso.

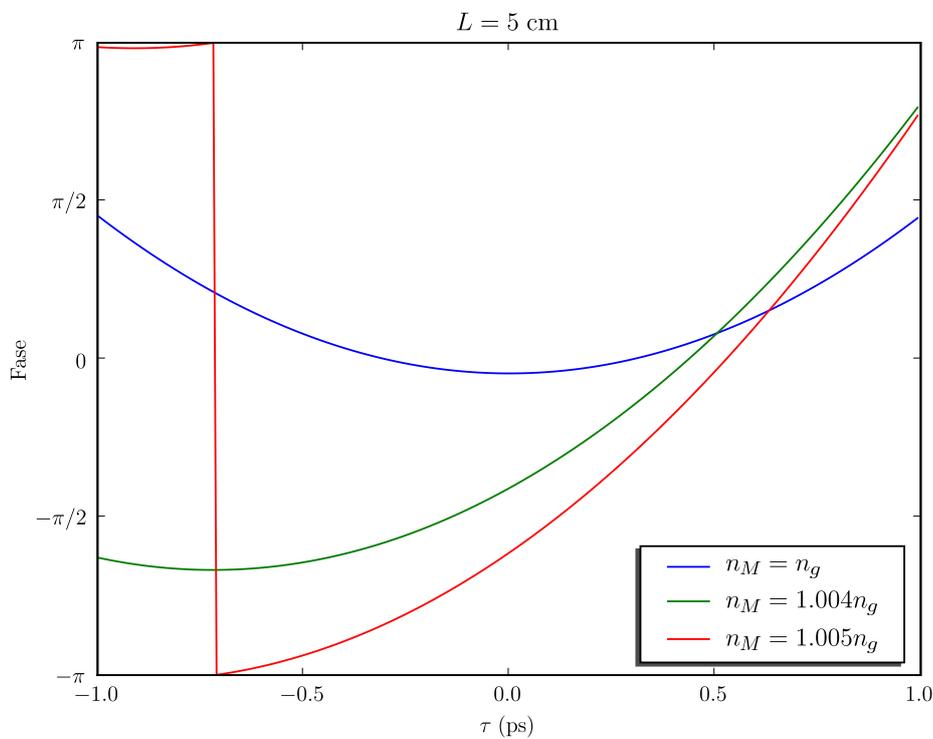
A forma de anular este desfasamento entre os perfis de amplitude e fase é adiantar inicialmente a lente EO, relativamente ao impulso, como demonstram os resultados apresentados na Fig. 4.18. Nos gráficos da Fig. 4.18 estão representadas a amplitude e a fase do impulso à saída de uma lente de comprimento $L = 10$ cm, $n_M = 1.004n_g$ para dois avanços iniciais da lente $\tau_0 = \{-\alpha L/3, -\alpha L/2\}$. Para comparação, estão também representadas a amplitude e a fase do impulso à saída de uma lente EO ideal ($n_M = n_g$ e $\tau_0 = 0$).

Com a introdução de um avanço de $-\alpha L/3$ consegue-se uma velocidade de grupo efectiva igual à velocidade de grupo da lente EO ideal, $\beta_{1ef}^{-1} = \beta_1^{-1}$, o perfil parabólico de fase introduzido pela lente continua descentrado relativamente ao impulso. Com a introdução de um avanço de $-\alpha L/2$ na lente EO consegue-se um alinhamento perfeito entre os perfis de amplitude e fase do impulso, restando apenas uma velocidade de grupo efectiva do impulso superior à da lente EO ideal. Esta velocidade de grupo efectiva deverá ser considerada nas aplicações práticas em que se deseje sincronizar o impulso com elementos ópticos a jusante da lente EO.

Nos gráficos da Fig. 4.19 está representada a distribuição modal dos impulsos à saída da lente, para as várias simulações. Estes gráficos servem para demonstrar que o número de modos HG, usados nas simulações, é suficiente para representar o impulso à saída da lente. Como se observa pelos gráficos, a contribuição dos últimos 10 modos HG para a reconstrução do impulso é praticamente nula.

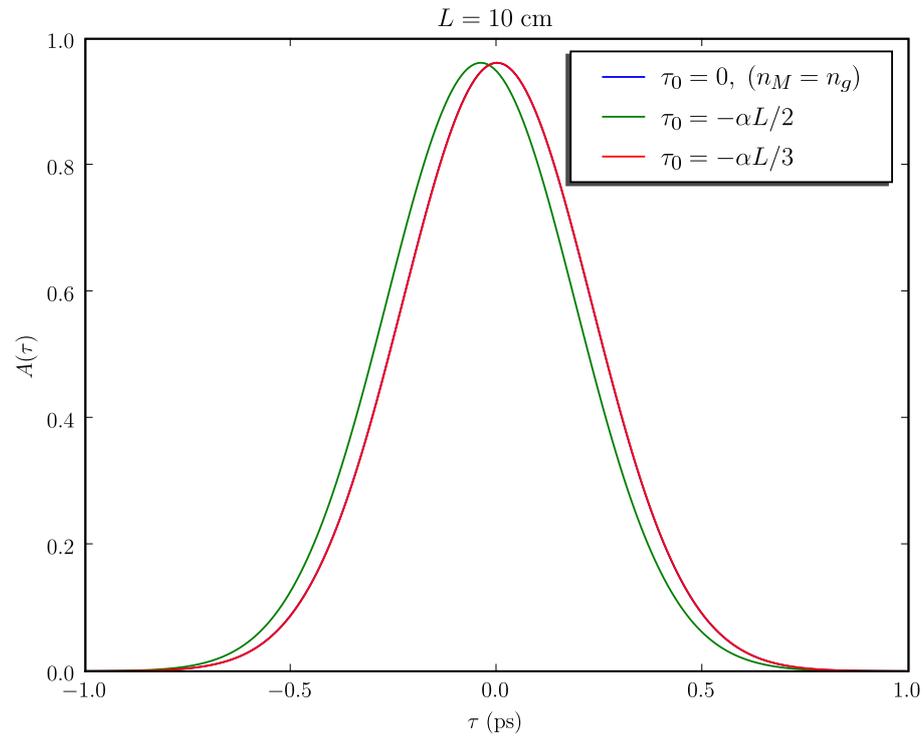


(a)

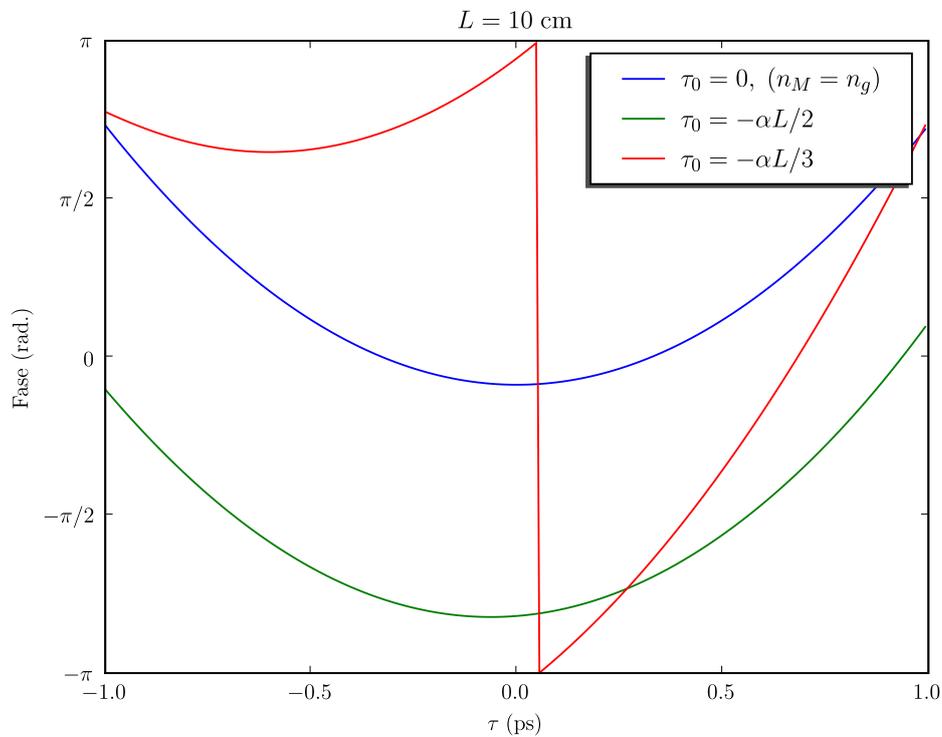


(b)

Figura 4.17: Perfil de amplitude e fase do impulso à saída da lente em função das diferenças nas velocidades para $\sigma_p = 500 \text{ fs}$ e $L = 5 \text{ cm}$: (a) amplitude (no gráfico os perfis vermelho e verde são quase coincidentes), (b) fase.



(a)



(b)

Figura 4.18: Perfil de amplitude e fase do impulso à saída da lente em função do avanço temporal inicial da lente τ_0 para $\sigma_p = 500$ fs, $L = 10$ cm e $n_M = 1.004n_g$: (a) amplitude (no gráfico, os perfis azul e vermelho são coincidentes), (b) fase.

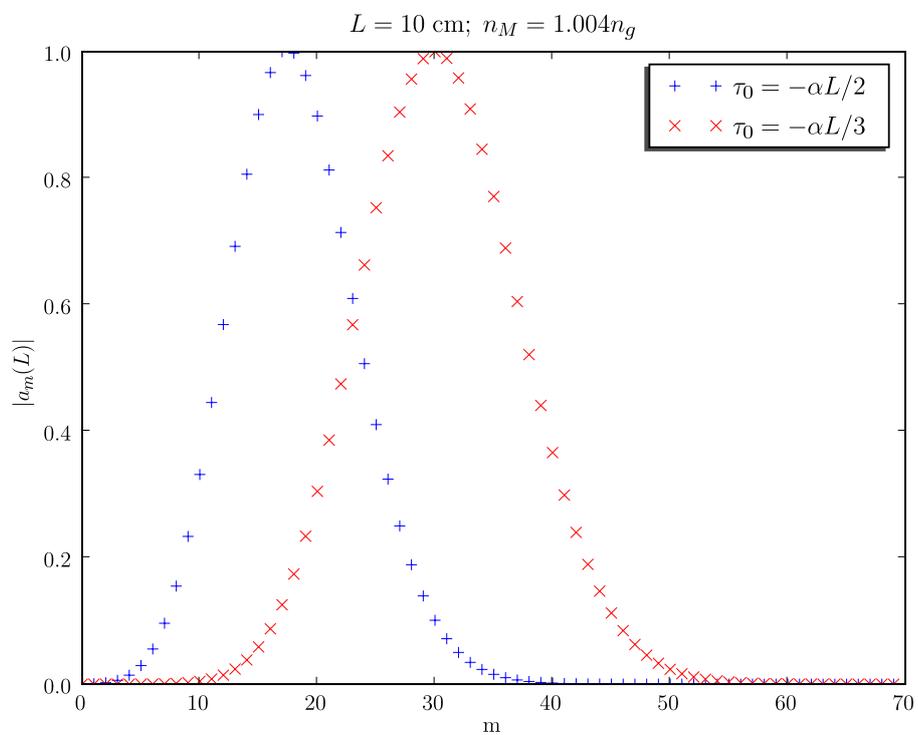
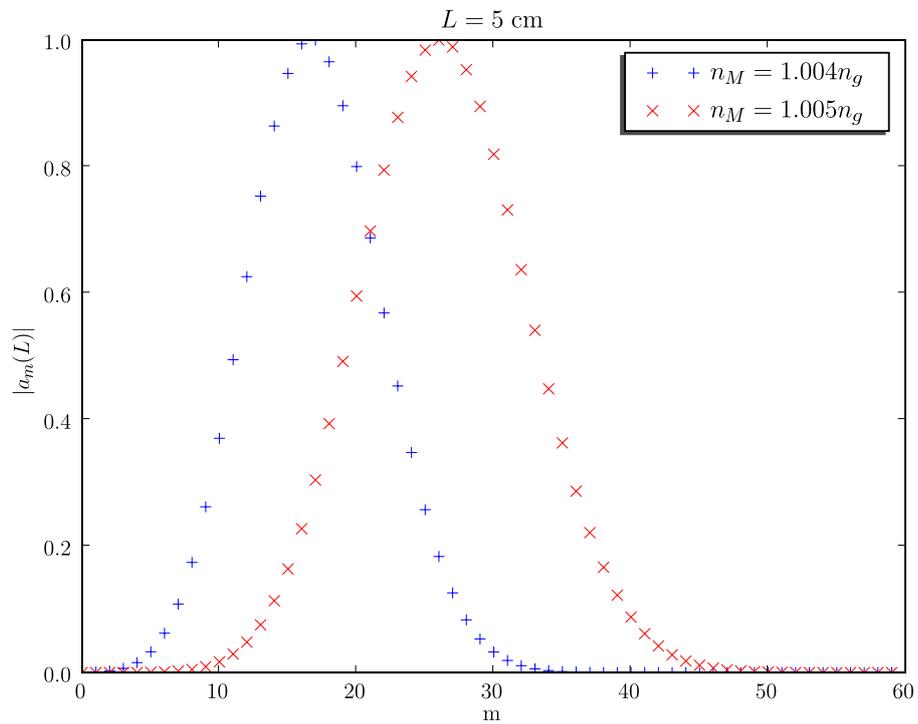


Figura 4.19: Representação modal do impulso à saída da lente; amplitude dos modos usados nas simulações: (a) $L = 5 \text{ cm}$, (b) $L = 10 \text{ cm}$ e $n_M = 1.004n_g$.

4.4 Conclusão

Relativamente à propagação em difracção fora de eixo, os resultados das simulações da secção 4.1 estão qualitativamente de acordo com as previsões da secção 2.4.3.

Demonstrou-se, numericamente, na secção 4.3.3 que a lente temporal EO não ideal comporta-se como uma lente temporal EO ideal; a correcção introduzida pelos coeficientes de aberração da lente EO não são, na prática, relevantes.

O resultado mais significativo deste capítulo revela que, mesmo que exista um desajuste nas velocidades de fase da micro-onda e de grupo do impulso, a lente EO não ideal pode comportar-se como uma lente EO ideal, desde que o impulso se mantenha dentro da região parabólica de modulação do índice. Concluiu-se que, em termos práticos, a implementação de uma lente EO ideal pode conseguir-se apenas por uma sincronização adequada entre a micro-onda e o impulso ao chegar à lente EO. Este resultado é muito importante visto que dispensa a condição de ajuste perfeito entre as velocidades das duas ondas quando se pretende implementar uma lente EO ideal.

Conclusões Finais

Neste trabalho, foi feito um estudo unificado da propagação da luz em dois regimes distintos: a propagação de um sinal no regime de difracção espacial e a propagação de um impulso num meio dispersivo, normalmente conhecido como analogia difracção-espacial/dispersão-temporal ou analogia DEDT. É do conhecimento geral [17] que a primitiva analogia DEDT não era aplicável nos casos em que fosse necessário introduzir a dispersão de ordem superior à 2ª na propagação de impulsos. Nos 50 anos de existência desta, nunca foi apresentada uma solução que resolvesse em definitivo esta limitação.

No Capítulo 2, é apresentada a solução procurada, mostrando-se que existe uma analogia DEDT completa, em que a sua forma primitiva é apenas um caso particular. A analogia é completa no sentido em que existe sempre uma equivalência entre todos os parâmetros que caracterizam a propagação nos dois regimes, seja qual for o nível de aproximação que se introduza na teoria (Fig. 5.1).

A solução deste problema foi conseguida, estudando a propagação em difracção sob um perspectiva mais geral do que a tradicionalmente usada - propagação fora de eixo. Fruto da analogia DEDT completa surgiu um novo conceito em difracção, ao qual se deu o nome de dispersão geométrica $n(k_x)$ que é o análogo no tempo à curva de dispersão do meio $n(\omega)$.

Intimamente ligado à analogia DEDT, está o conceito de lente espacial/temporal. A implementação de uma lente temporal foi pela primeira vez demonstrada experimentalmente nos anos 80 - lente temporal electro-óptica (EO). O modelo matemático da lente temporal EO, existente desde os anos 80, pode ser considerado análogo ao da lente espacial delgada. Como se constatou na secção 3.3, este modelo primitivo não é apropriado para descrever a propagação de impulsos com duração de sub-picosegundos.

Neste trabalho foi apresentado um modelo da lente temporal EO válido para impulsos sub-picosegundo e demonstrou-se que o seu funcionamento é formalmente equivalente

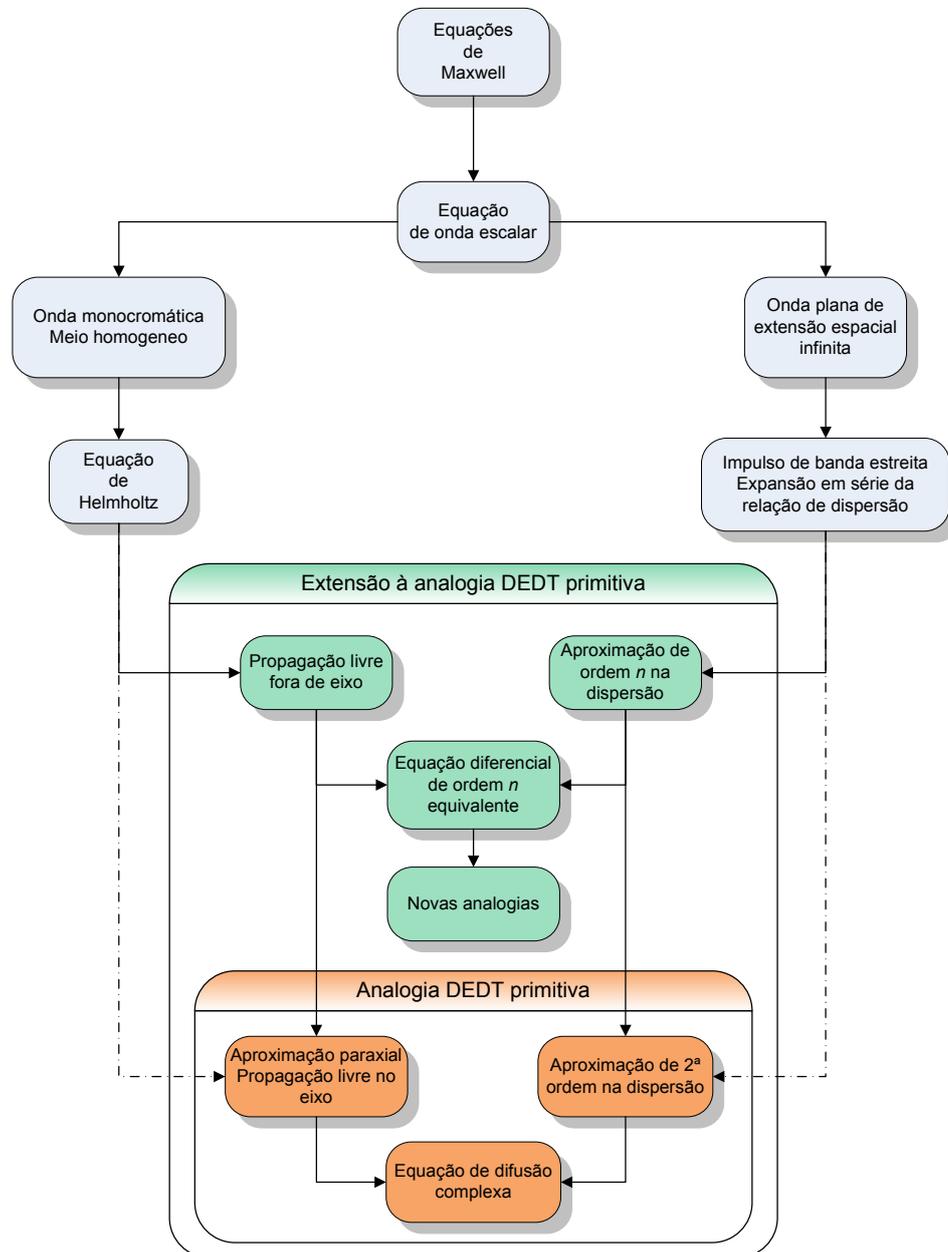


Figura 5.1: Esquema da nova analogia DEDT, representando-se à esquerda as concepções ligadas ao espaço e à direita as que estão relacionadas com o tempo.

à lente espacial GRIN. Este modelo, para além de introduzir novos conceitos no tempo, como a escala e os coeficientes de aberração da lente, permite caracterizar completamente o funcionamento desta. No estudo da lente temporal GRIN considerou-se a propagação do impulso no interior da lente tendo em conta a dispersão de 2ª ordem.

As novas ideias introduzidas por este trabalho - analogia DEDT completa e lente temporal GRIN - abrem novas perspectivas na abordagem dos problemas relacionados com os dois regimes de propagação (espaço/tempo) e facilitam uma abordagem unificadora no estudo dos fenómenos de difracção e dispersão.

5.1 Considerações finais e perspectivas de trabalho

O tema da analogia DEDT, na minha opinião, não está definitivamente resolvido. A analogia DEDT está assente na aproximação SVEA, como tal deixa de ser válida quando os objectos em estudo são impulsos de um só ciclo óptico, isto é, impulsos de duração 1fs ou inferior [11, 125–135]. A questão que agora se pode colocar é: será possível estabelecer uma analogia DEDT para além da aproximação SVEA? Uma resposta a esta questão só um trabalho futuro a poderá dar.

Outro problema de analogia ainda não resolvido é o da lente temporal paramétrica, que a par da lente temporal EO, tem uma implementação prática relativamente simples. O modelo desta lente temporal é análogo ao de uma lente espacial delgada, isto é, não tem em consideração a propagação do impulso no interior da lente. Encontrar uma analogia mais completa entre a lente temporal paramétrica e algum fenómeno da difracção poderia, como no caso da lente temporal EO, revelar novas perspectivas de abordagem, e como consequência poder caracterizar-se completamente o seu funcionamento. A dificuldade em encontrar esta analogia está na natureza do funcionamento da lente paramétrica porque se baseia num processo de soma/diferença de frequências, tratando-se, portanto, de um processo não linear. Tentar encontrar esta analogia é o trabalho que tenho entre mãos.

Uma outra questão em aberto envolve a direcção de propagação do impulso e a da micro-onda na lente temporal EO. O modelo da lente temporal EO da secção 3.3.2 considera que a micro-onda moduladora do índice é co-propagante com o impulso. No caso da micro-onda ser contra-propagante, o impulso vai possivelmente “ver” vários períodos de modulação do índice. Para o caso do modelo da lente temporal EO delgada, secção 3.1.1, o efeito introduzido no impulso pela modulação contra-propagante é nulo, não o sendo se tivermos em conta a propagação do impulso no interior da lente. A aproximação parabólica do modelo da secção 3.3.2 deixa de ser válida neste caso, visto que o impulso “vê” vários períodos

de modulação. Mas o modelo da lente temporal EO da secção 3.3.5, em que as funções HG estão centradas em $\tau = 0$ (embora não tenha sido feito um estudo mais aprofundado) é, em principio, adequado para descrever a propagação de um impulso na lente com uma modulação contra-propagante. Como, neste modelo, a aproximação parabólica à modulação do índice de refração é em torno de $\tau = 0$, isto é, acompanha o impulso independentemente da região de modulação, então, mesmo que o impulso atravessasse a região linear de modulação do índice de refração, a aproximação parabólica continuará a ser válida.

Convenções usadas

Uma onda plana pode ser descrita de duas formas diferentes

$$\exp[i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})], \quad (\text{A.1})$$

ou

$$\exp[-i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})]. \quad (\text{A.2})$$

Neste trabalho optou-se pela primeira forma. Para tal, surgiu a necessidade de usar duas definições para a transformada de Fourier, uma no tempo e a outra no espaço, dadas por

$$g(\omega) = \mathcal{F}\{g(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) \exp(-i\omega t) dt, \quad (\text{A.3})$$

$$g(\mathbf{k}) = \mathcal{F}\{g(\mathbf{r})\} = \iiint_{-\infty}^{+\infty} g(\mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r}, \quad (\text{A.4})$$

e as respectivas transformada inversa

$$g(t) = \mathcal{F}^{-1}\{g(\omega)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} g(\omega) \exp(i\omega t) d\omega, \quad (\text{A.5})$$

$$g(\mathbf{r}) = \mathcal{F}^{-1}\{g(\mathbf{k})\} = \iiint_{-\infty}^{+\infty} g(\mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{k}. \quad (\text{A.6})$$

Faz-se notar que na notação adoptada, neste trabalho, é usado o mesmo símbolo para a função e respectiva transformada de Fourier, a distinção entre elas faz-se através das suas

variáveis, por exemplo

$$g(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} g(\omega) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} g(t).$$

Apêndice **B**

Solução da equação de difusão

A equação diferencial de difusão a uma dimensão nas variáveis (ξ, τ) tem a forma

$$\frac{\partial A(\xi, \tau)}{\partial \xi} - D \frac{\partial^2 A(\xi, \tau)}{\partial \tau^2} = 0, \quad (\text{B.1})$$

em que D é uma constante. Como a equação é de primeira ordem na variável ξ vai tentar-se resolvê-la, aplicando a transformada de Fourier na variável τ [136], isto é,

$$A(\xi, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi, \tau) \exp(-i\omega\tau) d\tau. \quad (\text{B.2})$$

Aplicando, então, a transformada de Fourier à equação de difusão (B.1), resulta a equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{\partial A(\xi, \omega)}{\partial \xi} + \omega^2 D A(\xi, \omega) = 0, \quad (\text{B.3})$$

cuja solução é

$$A(\xi, \omega) = A(0, \omega) \exp(-\omega^2 D \xi). \quad (\text{B.4})$$

A solução geral da equação obtém-se fazendo uso do teorema da convolução

$$\begin{aligned} A(\xi, \tau) &= \mathcal{F}^{-1} \left\{ A(0, \omega) e^{-\omega^2 D \xi} \right\} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} A(0, \tau') \exp \left[-(\tau - \tau')^2 / 4D\xi \right] d\tau' \\ &= \exp(-\tau^2 / 4D\xi) \int_{-\infty}^{\infty} A(0, \tau') \exp(-\tau'^2 / 4D\xi) \exp(\tau\tau' / 2D\xi) d\tau'. \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

A Eq. (B.5) identifica-se facilmente com o integral de propagação de Fresnel. Com $D \equiv i\beta_2/2$, obtém-se a solução da Eq. (2.14), que descreve a propagação de um impulso na aproximação de segunda ordem na dispersão. Com $D = -i/2k_0$, $\tau \equiv \mathbf{r}_\perp$ e $\xi \equiv z$ obtém-se a solução, na aproximação paraxial, da propagação livre na difracção, dada pela Eq. (2.32).

Função Hermite-Gaussiana - Definição e Propriedades

A definição, adoptada neste trabalho, para as funções Hermite-Gaussianas (HG) é

$$\phi_n(\tau) = C_n H_n(\tau/\sigma_\tau) \exp\left(-\frac{\tau^2}{2\sigma_\tau^2}\right) \quad \text{com } n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{C.1})$$

em que H_n é o polinómio de Hermite de grau n , $C_n = (2^n n! \sqrt{\pi} \sigma_\tau)^{-1/2}$ é a constante de normalização e σ_τ é o parâmetro de escala. Com esta definição, as funções HG estão normalizadas

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(\tau) \phi_m(\tau) d\tau = \delta_{nm}. \quad (\text{C.2})$$

Pode demonstrar-se que as funções HG formam um conjunto completo de soluções da equação diferencial [105]

$$\sigma_\tau^2 \frac{\partial^2 \phi_n(\tau)}{\partial \tau^2} + \left[(2n+1) - \frac{\tau^2}{\sigma_\tau^2} \right] \phi_n(\tau) = 0, \quad \text{com } n = 0, 1, 2, \dots \quad (\text{C.3})$$

O uso extensivo, neste trabalho, das funções Hermite-Gaussianas e das suas propriedades, justifica a apresentação neste apêndice de algumas das relações menos conhecidas destas funções [137, 138], que a seguir se indicam

Derivadas

$$\frac{\partial \phi_n(\tau)}{\partial \tau} = \frac{\sqrt{2n}}{\sigma_\tau} \phi_{n-1}(\tau) - \frac{\tau}{\sigma_\tau^2} \phi_n(\tau), \quad (\text{C.4a})$$

$$\frac{\partial^2 \phi_n(\tau)}{\partial \tau^2} = \frac{2\sqrt{n(n-1)}}{\sigma_\tau} \phi_{n-2}(\tau) - \frac{2\tau\sqrt{2n}}{\sigma_\tau^3} \phi_{n-1}(\tau) - \frac{1}{\sigma_\tau^2} \left(1 - \frac{\tau^2}{\sigma_\tau^2}\right) \phi_n(\tau). \quad (\text{C.4b})$$

Integrais com potências de τ

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(\tau) \frac{\tau}{\sigma_\tau} \phi_m(\tau) d\tau = \begin{cases} \sqrt{(m+1)/2} & \text{se } n = m + 1, \\ \sqrt{m/2} & \text{se } n = m - 1. \end{cases} \quad (\text{C.5a})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_n(\tau) \frac{\tau^2}{\sigma_\tau^2} \phi_m(\tau) d\tau = \frac{1}{2} \begin{cases} \sqrt{(m+1)(m+2)} & \text{se } n = m + 2, \\ 2m + 1 & \text{se } n = m, \\ \sqrt{m(m-1)} & \text{se } n = m - 2. \end{cases} \quad (\text{C.5b})$$

Integrais em seno e coseno¹

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\omega\tau) \phi_{m+2j+1}(\tau) \phi_m(\tau) d\tau = \\ & = \frac{(-2)^{-j}}{\sqrt{2}} (\omega\sigma_\tau)^{2j+1} \sqrt{\frac{m!}{(m+2j+1)!}} \exp\left(-\frac{\omega^2\sigma_\tau^2}{4}\right) L_m^{2j+1}\left(\frac{\omega^2\sigma_\tau^2}{2}\right), \end{aligned} \quad (\text{C.6a})$$

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(\omega\tau) \phi_{m+2j}(\tau) \phi_m(\tau) d\tau = \\ & = (-2)^{-j} (\omega\sigma_\tau)^{2j} \sqrt{\frac{m!}{(m+2j)!}} \exp\left(-\frac{\omega^2\sigma_\tau^2}{4}\right) L_m^{2j}\left(\frac{\omega^2\sigma_\tau^2}{2}\right), \end{aligned} \quad (\text{C.6b})$$

Relação assintótica

No limite de n grande os polinômios de Hermite comportam-se na vizinhança da origem da forma

$$H_{2n}(\tau/\sigma_\tau) \sim \frac{4^n n!}{\sqrt{\pi}} \cos(2\sqrt{n}\tau/\sigma_\tau) \quad (\text{C.7})$$

¹ Na referência [138] falta o factor $1/\sqrt{2}$ no valor do integral (C.6a).

Implementação numérica do modelo da lente temporal electro-óptica

A implementação numérica do modelo da lente temporal electro-óptica, Eqs. (3.80), foi realizada no programa *Mathematica*[©]. Como este programa está mais vocacionado para o cálculo simbólico, ele permitiu desenvolver o algoritmo rapidamente, focando a atenção nas questões físicas do problema e deixando para segundo plano as questões específicas da implementação numérica. Comparativamente a uma implementação com outro tipo de software como por exemplo o *Matlab*[©], o preço pago por esta escolha foi uma fraca eficiência numérica.

O algoritmo de propagação de um impulso na lente temporal EO pode ser resumido em cinco passos:

1. Cálculo dos parâmetros físicos da lente temporal EO: σ_τ , α , etc.
2. Cálculo dos coeficientes modais do impulso a_m à entrada da lente temporal EO, projectando o impulso nos modos HG, Eq. (3.34).
3. Construção do sistema de equações diferenciais acopladas, Eqs. (3.80).
4. Resolução numérica do sistema de equações diferenciais.
5. Reconstrução do impulso à saída da lente temporal EO a partir dos coeficientes modais obtidos no passo anterior, Eq. (3.33).

Lente temporal electro-óptica

Definições iniciais

■ Constantes (μm , fs)

Velocidade da luz

$$c = 0.2998;$$

■ Equações de Sellmeier do cristal; λ in μm

$$\begin{aligned} n_{o2}[\lambda_] &:= 4.9048 + 0.11768 / (\lambda^2 - 0.04750) - 0.027169 \lambda^2; \\ n_{e2}[\lambda_] &:= 4.5820 + 0.099169 / (\lambda^2 - 0.04443) - 0.021950 \lambda^2; \\ \lambda_{\max} &= 5.20; \\ \lambda_{\min} &= 0.420; \end{aligned}$$

■ Coeficientes dispersão

$$\begin{aligned} \beta[\omega_] &:= \text{Sqrt}[n_{e2}[2 \pi c / \omega]] \omega / c; \\ \beta_1[\omega_] &:= \text{Evaluate}[\partial_{\omega} \beta[\omega]]; \\ \beta_2[\omega_] &:= \text{Evaluate}[\partial_{\omega} \partial_{\omega} \beta[\omega]]; \\ \beta_3[\omega_] &:= \text{Evaluate}[\partial_{\omega} \partial_{\omega} \partial_{\omega} \beta[\omega]]; \end{aligned}$$

■ Escala da lente temporal electro-óptica

$$\begin{aligned} \text{EOScale}[\omega_0, \omega_m, \Delta n_0] &:= \\ &\left(\frac{\text{Sqrt}[n_{e2}[2 \pi c / \omega_0]] \beta_2[\omega_0]}{\Delta n_0 \beta[\omega_0] \omega_m^2} \right)^{1/4} \end{aligned}$$

■ Distância de Fourier da lente temporal electro-óptica

$$\begin{aligned} \text{FourierLength}[\omega_0, \omega_m, \Delta n_0] &:= \\ \frac{\pi}{2} \left(\beta[\omega_0] \beta_2[\omega_0] \frac{\Delta n_0}{\text{Sqrt}[n_{e2}[2 \pi c / \omega_0]]} \omega_m^2 \right)^{-1/2} \end{aligned}$$

■ Funções Hermite-Gaussian - normalizadas

$$\begin{aligned} \text{HG}[n, x, a] &:= \\ &(a \sqrt{\pi} 2^n n!)^{-1/2} \text{HermiteH}[n, x/a] \text{Exp}[-x^2 / (2 a^2)]; \end{aligned}$$

■ Coeficientes C_m^j

$$\begin{aligned} \text{CCoef}[m, j, x] &:= (\sqrt{2})^{-(j)} x^{(j-2)} \\ &\sqrt{\frac{m!}{(m+j)!}} \text{Exp}[-x x / 4] \text{LaguerreL}[m, j, x x / 2]; \end{aligned}$$

Cálculo dos parâmetros da lente temporal electro-óptica

■ Constantes (μm , fs)

Comprimento de onda e frequência central do impulso

```
 $\lambda_0 = 1;$   
 $v_{e0} = c / \text{Sqrt}[n_{e2}[\lambda_0]]$   
 $v_{o0} = c / \text{Sqrt}[n_{o2}[\lambda_0]]$   
 $\omega_0 = 2 \pi c / \lambda_0$ 
```

Micro-onda moduladora

```
 $\omega_m = 2 \pi / 2 * 10^{-4} (* \text{fs}-1 (50 \text{ GHz}) *)$   
 $\lambda_m = 2 \pi c / \omega_m$   
 $\Delta n_0 = 10^{-4}$ 
```

Escala da lente temporal EO

```
 $\sigma = \text{EOScale}[\omega_0, \omega_m, \Delta n_0]$ 
```

■ Coeficientes de dispersion do cristal

```
{ $\beta[\omega_0], \beta_1[\omega_0], \beta_2[\omega_0], \beta_3[\omega_0], \beta_2[\omega_0] / \beta[\omega_0]$ }  
{ $\beta_1[\omega_0]^{-1}, v_{pm}, \beta_1[\omega_0] - 1 / v_{pm}$ }
```

■ Desajuste nas velocidades das duas ondas - parâmetro α

```
 $n_g = \beta_1[\omega_0] c$   
 $n_m = (1 + 4 / 1000) n_g;$   
 $\alpha = - \frac{1}{c} n_g \left( 1 - \frac{n_m}{n_g} \right)$ 
```

Atraso inicial da lente temporal EO

```
 $\alpha z_{\text{Init}} = 0;$ 
```

Impulso à entrada da lente temporal EO

■ Projecção do impulso à entrada da lente nos modos HG

Número máximo de modos

```
MaxPulseMode = 60;
```

FWHM em amplitude do impulso gaussiano à entrada da lente

```
 $\Delta\tau = 500$   
Pulse = Exp[-4 Log[2] ( $\tau / \Delta\tau$ )2];
```

Cáculo dos coeficientes modais a_m

```
PulseCoefs = Table[NIntegrate[Pulse HG[n,  $\tau - \alpha z_{\text{Init}}$ ,  $\sigma$ ],  
  { $\tau$ , - $\infty$ ,  $\infty$ }, AccuracyGoal  $\rightarrow$  6,  
  MaxRecursion  $\rightarrow$  20], {n, 0, MaxPulseMode}];  
PulseCoefs = Chop[PulseCoefs,  $\frac{1}{10^6}$ ];
```

■ Verificação da reconstrução do impulso a partir dos modos HG

```
PulseRecon =  
  Sum[Chop[PulseCoefs[[n + 1]] HG[n,  $\tau - \alpha z_{\text{Init}}$ ,  $\sigma$ ],  
  {n, 0, MaxPulseMode}];  
MaxPulseValue = PulseRecon /.  $\tau \rightarrow 0$ 
```

```
Plot[{PulseRecon, Pulse}, { $\tau$ , -3  $\Delta\tau$ , 3  $\Delta\tau$ }]  
Plot[{(PulseRecon - Pulse)}, { $\tau$ , -3  $\Delta\tau$ , 3  $\Delta\tau$ }]
```

Erro médio

```
nPoints = 200;  
Sum[Abs[PulseRecon - Pulse],  
  { $\tau$ , -2  $\Delta\tau$ , 2  $\Delta\tau$ , 4  $\Delta\tau / nPoints$ }] / nPoints
```

Propagação na lente temporal EO

■ Parâmetros físicos da lente

```
lf = FourierLength[ $\omega_0$ _,  $\omega_m$ _,  $\Delta n_0$ _] / 104 ; (* cm *)  
Print["Scale: ",  $\sigma$ , "\nFourier Length: ", lf]
```

■ Simulação

■ Parâmetros da simulação

```
MaxMode = MaxPulseMode ;  
cf = 104 ; (* factor de conversão:  $\mu\text{m}^{-1} \rightarrow \text{cm}^{-1}$  *)
```

Comprimento da lente temporal EO

```
zMax = 10 (* cm *)
```

Factores de acoplamento

```
k0 = cf  $\beta$ [ $\omega_0$ ]  $\Delta n_0$  / Sqrt[ne2[ $\lambda_0$ ]]  
k1 = cf  $\alpha$  /  $\sigma$   
k2 = cf  $\beta$ [ $\omega_0$ ]  $\omega_m$   $\sqrt{\frac{\beta^2[\omega_0] \Delta n_0}{\beta[\omega_0] \text{Sqrt}[ne2[\lambda_0]]}}$ 
```

■ Aproximação parabólica

```
a0 = Table[0, {MaxMode}];  
a0 = Join[PulseCoefs, Table[0, {MaxMode - MaxPulseMode}]]  
AVector = Table[a[n, z], {n, 0, MaxMode - 1}];  
CoefMatrix = Table[Switch[n - m,  
0,  $i(-k_2(m + 1/2))$ ,  
1,  $k_1 \sqrt{(m + 1)/2}$ ,  
-1,  $-k_1 \sqrt{m/2}$ ,  
_, 0],  
{m, 0, MaxMode - 1}, {n, 0, MaxMode - 1}];  
EqnsMatrix = CoefMatrix . AVector;  
Eqns =  
Table[ $\partial_z a[n - 1, z] == \text{EqnsMatrix}[[n]]$ , {n, MaxMode}];  
Eqns = Join[Eqns, Table[  
(AVector[[n]] /. z -> 0) == a0[[n]], {n, MaxMode}]];
```

■ Aproximação de 1 ordem

```

a0 = Join[PulseCoefs, Table[0, {MaxMode - MaxPulseMode}]]
AVector = Table[a[n, z], {n, 0, MaxMode - 1}];
CoefMatrix = Table[Switch[n - m,
    0,
    -i k2 (m / 2 + 1 / 4 - CCoef[m, 0, ωm σ] + 1 / (ωm σ)^2),
    1, k1 √(m + 1) / 2,
    -1, -k1 √m / 2,
    2,
    i k2 / 4 (√(m + 1) (m + 2) - 4 CCoef[m, 2, ωm σ]),
    -2,
    i k2 / 4 (√m (m - 1) - 4 CCoef[m, -2, ωm σ]),
    _, 0],
    {m, 0, MaxMode - 1}, {n, 0, MaxMode - 1}];
EqnsMatrix = CoefMatrix . AVector;
Eqns =
    Table[∂z a[n - 1, z] == EqnsMatrix[[n]], {n, MaxMode}];
Eqns = Join[Eqns, Table[
    (AVector[[n]] /. z -> 0) == a0[[n]], {n, MaxMode}]];

```

■ Aproximação de 2 ordem

```

a0 = Join[PulseCoefs, Table[0, {MaxMode - MaxPulseMode}]]
AVector = Table[a[n, z], {n, 0, MaxMode - 1}];
CoefMatrix = Table[Switch[n - m,
    0,
    -i k2 (m / 2 + 1 / 4 - CCoef[m, 0, ωm σ] + 1 / (ωm σ)^2),
    1, -k1 √(m + 1) / 2,
    -1, k1 √m / 2,
    2,
    i k2 / 4 (√(m + 1) (m + 2) - 4 CCoef[m, 2, ωm σ]),
    -2,
    i k2 / 4 (√m (m - 1) - 4 CCoef[m, -2, ωm σ]),
    4, -k2 CCoef[m, 4, ωm σ],
    -4, -k2 CCoef[m, -4, ωm σ],
    _, 0],
    {m, 0, MaxMode - 1}, {n, 0, MaxMode - 1}];
EqnsMatrix = CoefMatrix . AVector;
Eqns =
    Table[∂z a[n - 1, z] == EqnsMatrix[[n]], {n, MaxMode}];
Eqns = Join[Eqns, Table[
    (AVector[[n]] /. z -> 0) == a0[[n]], {n, MaxMode}]];

```

■ Solução do sistema de equações acopladas

```

Sol = NDSolve[Eqns, AVector,
    {z, 0, zMax}, MaxStepFraction -> 1 / 10000,
    WorkingPrecision -> 10, PrecisionGoal -> 6];

```

Impulso à saída da lente temporal EO

```
aOut =  
  Table[a[n, z] /. Sol, {n, 0, MaxMode - 1}] // Flatten;  
  
OutputPulse =  
  Sum[aOut[[n + 1]] HG[n,  $\tau - \alpha$  cf z,  $\sigma$ ], {n, 0, MaxMode - 1}];
```

Matriz da evolução do impulso no interior da lente

```
Delta $\tau$  = 2000;  
N $\tau$  = 128;  
Nz = 100;  
 $\tau$ Table = N[Table[ $\tau$ ,  
  { $\tau$ , -Delta $\tau$  / 2, Delta $\tau$  / 2 - Delta $\tau$  / N $\tau$ , Delta $\tau$  / N $\tau$  }]];  
zTable = N[Table[z, {z, 0, zMax, zMax / Nz }]];  
  
Propagation = Table[OutputPulse, {z, 0, zMax, zMax / Nz },  
  { $\tau$ , -Delta $\tau$  / 2, Delta $\tau$  / 2 - Delta $\tau$  / N $\tau$ , Delta $\tau$  / N $\tau$  }];  
Dimensions[Propagation]
```

Gráficos da propagação do impulso no interior da lente

```
ListDensityPlot[Abs[Propagation],  
  PlotRange  $\rightarrow$  All, Mesh  $\rightarrow$  False, ColorFunction  $\rightarrow$  Hue]
```

Gráficos do impulso à entrada e saída da lente

```
grf1 = ListPlot[Abs[Propagation[[1]]],  
  PlotRange  $\rightarrow$  All, PlotJoined  $\rightarrow$  True]  
grf2 = ListPlot[Abs[Propagation[[Nz]]],  
  PlotRange  $\rightarrow$  All, PlotJoined  $\rightarrow$  True]  
Show[grf1, graf2]  
ListPlot[Abs[Propagation[[Nz]]],  
  PlotRange  $\rightarrow$  All, PlotJoined  $\rightarrow$  True]  
ListPlot[Im[Propagation[[Nz]]],  
  PlotRange  $\rightarrow$  All, PlotJoined  $\rightarrow$  True]  
ListPlot[Re[Propagation[[Nz]]],  
  PlotRange  $\rightarrow$  All, PlotJoined  $\rightarrow$  True]  
ListPlot[Arg[Propagation[[Nz]]],  
  PlotRange  $\rightarrow$  {-Pi, Pi}, PlotJoined  $\rightarrow$  True]
```

■ Guardar resultados da simulação

```
FileName = StringJoin["..\Data\\",  
  "PPz", ToString[IntegerPart[zMax]], "n",  
  ToString[IntegerPart[(nm/ng - 1) * 10000 + 0.5]], ".dat"]
```

```
Export[FileName,  
  Join[{{N[ $\omega$ m], N[ $\Delta n$ 0], N[ $\sigma$ ], N[ $\omega$ 0], N[ $\alpha$ ],  
    N[ $\Delta\tau$ ], N[ $\alpha$  zMax], N[nm/ng]},  
    {MaxPulseMode,  
    zMax, N[Delta $\tau$ ], Nz, N $\tau$ },  
    zTable,  $\tau$ Table},  
  Abs[Propagation], Arg[Propagation]], "Table"]
```

Referências

- [1] A. G. Litvak and V. I. Talanov, “A parabolic equation for calculating the fields in dispersive nonlinear media,” *Izvestiya Vuz. Radiofizika*, vol. 10, no. 4, pp. 539–552, 1967.
- [2] S. A. Akhmanov, A. S. Chirkin, K. N. Drabovich, A. I. Kovrigin, R. V. Khokhlov, and A. P. Sukhorukov, “Nonstationary nonlinear optical effects and ultrashort light pulse formation,” *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. QE-4, pp. 598–605, October 1968.
- [3] S. A. Akhmanov, A. P. Sukhorucov, and A. S. Chirkin, “Nonstationary phenomena and space-time analogy in nonlinear optics,” *Sov. Phys. JETP*, vol. 28, pp. 748–757, April 1969.
- [4] A. Papoulis, “Pulse compression, fiber communications, and diffraction: a unified approach,” *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 11, no. 1, pp. 3–13, 1994.
- [5] B. H. Kolner, “Active pulse compression using an integrated electro-optic phase modulator,” *Applied Physics Letters*, vol. 52, p. 1122, April 1988.
- [6] G. P. Agrawal, *Nonlinear Fiber Optics*. Academic Press, 3rd ed., 2001.
- [7] A. Ishimaru, *Electromagnetic Wave Propagation, Radiation, and Scattering*. Prentice-Hall, 1st ed., 1991.
- [8] J. W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics*. McGraw-Hill, 2nd ed., 1996.
- [9] S. A. Akhmanov, V. A. Vysloukh, and A. S. Chirkin, *Optics of Femtosecond Laser Pulses*. American Institute of Physics, 1992.
- [10] J.-C. Diels and W. Rudolph, *Ultrashort Laser Pulse Phenomena*. Academic Press, 2nd ed., 2006.

- [11] T. Brabec and F. Krausz, “Nonlinear optical pulse propagation in the single-cycle regime,” *Physical Review Letters*, vol. 78, no. 17, pp. 3282–3285, 1997.
- [12] O. E. Martínez, “Matrix formalism for pulse compressor,” *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 24, pp. 2530–2536, December 1988.
- [13] O. E. Martínez, “Matrix formalism for dispersive laser cavities,” *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 25, pp. 296–300, March 1989.
- [14] S. P. Dijaili, A. Dienes, and J. S. Smith, “ABCD matrix for dispersive pulse propagation,” *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 26, no. 6, pp. 1158–1164, 1990.
- [15] A. G. Kostenbauder, “Ray-pulse matrices: A rational treatment for dispersive optical systems,” *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 26, pp. 1148–1157, June 1990.
- [16] M. A. Larotonda and A. A. Hnilo, “Short laser pulse parameters in a nonlinear medium: different approximations of the ray-pulse matrix,” *Optical Communications*, vol. 183, pp. 207–213, September 2000.
- [17] S. Mookherjea and A. Yariv, “Analysis of optical pulse propagation with two-by-two (ABCD) matrices,” *Physical Review E*, vol. 64, p. 016611, June 2001.
- [18] B. H. Kolner and M. Nazaraphy, “Temporal imaging with a time lens,” *Optics Letters*, vol. 14, p. 630, June 1989.
- [19] C. V. Bennett and B. H. Kolner, “Principles of parametric temporal imaging - part I: System configurations,” *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 36, no. 4, pp. 430–437, 2000.
- [20] C. V. Bennett and B. H. Kolner, “Principles of parametric temporal imaging - part II: System performance,” *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 36, no. 6, pp. 649–655, 2000.
- [21] C. V. Bennett, R. P. Scott, and B. H. Kolner, “Temporal magnification and reversal of 100 gb/s optical data with an up-conversion time microscope,” *Applied Physics Letters*, vol. 65, pp. 2513–2515, November 1994.
- [22] C. V. Bennett and B. H. Kolner, “Upconversion time microscope demonstrating 103X magnification of femtosecond waveforms,” *Optics Letters*, vol. 24, pp. 783–785, June 1999.

- [23] B. H. Kolner, "Generalization of the concepts of focal length and f-number to space and time," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 11, no. 12, pp. 3229–3234, 1994.
- [24] M. C. Nuss and R. L. Morrison, "Time-domain images," *Optics Letters*, vol. 20, pp. 740–742, April 1995.
- [25] B. H. Kolner, "The pinhole camera," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 14, pp. 3349–3357, December 1997.
- [26] D. Mendlovic, O. Melamed, and H. M. Ozaktas, "Compact optical temporal processor," *Applied Optics*, vol. 34, pp. 4113–4117, July 1995.
- [27] B. H. Kolner, "Space-time duality and the theory of temporal imaging," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 30, pp. 1951–1963, August 1994.
- [28] A. Yariv, "Steady state repeating optical pulses in a periodic nonlinear fiber," *Journal of Nonlinear Optical Physics & Materials*, vol. 8, no. 1, pp. 165–170, 1999.
- [29] J. van Howe, J. Hansryd, and C. Xu, "Multiwavelength pulse generator using time-lens compression," *Optics Letters*, vol. 29, pp. 1470–1472, July 2004.
- [30] J. Azaña, N. K. Berger, B. Levit, and B. Fischer, "Spectro-temporal imaging of optical pulses with a single time lens," *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 16, pp. 882–884, March 2004.
- [31] M. Hanna, P. A. Lacourt, S. Poinsoot, and J. M. Dudley, "Optical pulse generation using soliton-assisted time-lens compression," *Optics Express*, vol. 13, pp. 1743–1748, Mar. 2005.
- [32] A. M. Weiner, J. P. Heritage, and E. M. Kirschner, "High-resolution femtosecond pulse shaping," *Journal of the Optical Society of America B*, vol. 5, pp. 1563–1572, Aug. 1988.
- [33] L. K. Mouradian, F. Louradour, V. Messenger, A. Barthelemy, and C. Froehly, "Spectro-temporal imaging of femtosecond events," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 36, pp. 795–801, July 2000.
- [34] J. Azaña and M. A. Muriel, "Temporal self-imaging effects: Theory and application for multiple pulse repetition rates," *IEEE Journal on Selected Topics in Quantum Electronics*, vol. 7, no. 4, pp. 728–744, 2001.

- [35] G. Indebetouw, "Necessary condition for temporal self imaging in a linear dispersive medium," *Journal of Modern Optics*, vol. 37, no. 9, pp. 1439–1451, 1990.
- [36] J. Azana and L. R. Chen, "General temporal self-imaging phenomena," *Journal of the Optical Society of America B*, vol. 20, pp. 1447–1458, July 2003.
- [37] N. K. Berger, B. Levit, A. Bekker, and B. Fischer, "Compression of periodic optical pulses using temporal fractional talbot effect," *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 16, pp. 1855–1857, Aug. 2004.
- [38] J. Lancis, J. Caraquitena, P. Andres, and M. A. Muriel, "Temporal self-imaging effect for chirped laser pulse sequences: Repetition rate and duty cycle tunability," *Optics Communications*, vol. 253, pp. 156–163, Sept. 2005.
- [39] J. A. Bolger, P. F. Hu, J. T. Mok, J. L. Blows, and B. J. Eggleton, "Talbot self-imaging and cross-phase modulation for generation of tunable high repetition rate pulse trains," *Optics Communications*, vol. 249, pp. 431–439, May 2005.
- [40] H. Wang, "To measure chirped ultrashort laser pulse by the Talbot effect of a grating," *Optics Communications*, vol. 259, pp. 107–109, Mar. 2006.
- [41] A. W. Lohmann and D. Mendlovic, "Temporal filtering with time lenses," *Applied Optics*, vol. 31, pp. 6212–6219, 1992.
- [42] J. P. Foing, J. P. Likforman, M. Joffre, and A. Migus, "Femtosecond pulse phase measurement by spectrally resolved up-conversion - application to continuum compression," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 28, pp. 2285–2290, Oct. 1992.
- [43] J. Lancis, V. Climent, J. Caraquitena, G. Saavedra, M. Martinez-Corral, and P. Andres, "Analytical evaluation of the temporal focal shift for arbitrary pulse shapes," *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 16, pp. 2245–2247, Oct. 2004.
- [44] D. Dragoman and M. Dragoman, "Wigner-transform implementation in the time-frequency domain," *Applied Optics*, vol. 35, pp. 7025–7030, Dec. 1996.
- [45] D. Dragoman and M. Dragoman, "Integrated optic-devices characterization with the Wigner transform," *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, vol. 2, pp. 181–186, June 1996.
- [46] A. Yariv, *Optical Electronics in Modern Communications*. Oxford University Press, 5th ed., 1997.

- [47] A. E. Siegman, *Lasers*. University Science Books, 1986.
- [48] F. J. Marinho and L. M. Bernardo, “Extended analogies between time-dispersion and space-diffraction propagations,” *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 23, no. 9, pp. 2331–2334, 2006.
- [49] G. P. Agrawal and D. N. Pattanayak, “Gaussian-beam propagation beyond the paraxial approximation,” *Journal of the Optical Society of America*, vol. 69, no. 4, pp. 575–578, 1979.
- [50] M. Couture and P. A. Belanger, “From gaussian-beam to complex-source-point spherical wave,” *Physical Review A*, vol. 24, no. 1, pp. 355–359, 1981.
- [51] G. P. Agrawal and M. Lax, “Free-space wave-propagation beyond the paraxial approximation,” *Physical Review A*, vol. 27, no. 3, pp. 1693–1695, 1983.
- [52] T. Takenaka, M. Yokota, and O. Fukumitsu, “Propagation of light-beams beyond the paraxial approximation,” *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 2, no. 6, pp. 826–829, 1985.
- [53] S. Nemoto, “Nonparaxial gaussian beams,” *Applied Optics*, vol. 29, pp. 1940–1946, May 1990.
- [54] M. A. Porrás, “Non-paraxial vectorial moment theory of light beam propagation,” *Optics Communications*, vol. 127, pp. 79–95, June 1996.
- [55] X. D. Zeng, C. H. Liang, and Y. Y. An, “Far-field radiation of planar gaussian sources and comparison with solutions based on the parabolic approximation,” *Applied Optics*, vol. 36, pp. 2042–2047, Apr. 1997.
- [56] H. Laabs, “Propagation of hermite-gaussian-beams beyond the paraxial approximation,” *Optics Communications*, vol. 147, pp. 1–4, Feb. 1998.
- [57] X. D. Zeng, C. H. Liang, and Y. Y. An, “Far-field propagation of an off-axis gaussian wave,” *Applied Optics*, vol. 38, pp. 6253–6256, Oct. 1999.
- [58] J. L. Kaiser, E. Quertemont, and R. Chevallier, “Light propagation in the pseudo-paraxial Fresnel approximation,” *Optics Communications*, vol. 233, pp. 261–269, Apr. 2004.
- [59] Y. J. Zhang, “Nonparaxial propagation analysis of elliptical gaussian beams diffracted by a circular aperture,” *Optics Communications*, vol. 248, pp. 317–326, Apr. 2005.

- [60] M. X. Shen, S. M. Wang, and D. M. Zhao, "Propagation of flattened gaussian beams passing through a misaligned optical system with finite aperture," *Optik*, vol. 115, no. 5, pp. 193–196, 2004.
- [61] H. L. Jiang, D. M. Zhao, and Z. R. Mei, "Propagation characteristics of the rectangular flattened gaussian beams through circular apertured and misaligned optical systems," *Optics Communications*, vol. 260, pp. 1–7, Apr. 2006.
- [62] D. N. Payne, A. J. Barlow, and J. J. R. Hansen, "Development of low-birefringence and high-birefringence optical fibers," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 18, no. 4, pp. 477–488, 1982.
- [63] A. Wang, A. K. George, J. F. Liu, and J. C. Knight, "Highly birefringent lamellar core fiber," *Optics Express*, vol. 13, pp. 5988–5993, Aug. 2005.
- [64] E. Hecht, *Optics*. Addison Wesley, 4th ed., 2003.
- [65] S. Mookherjea and A. Yariv, "Algebraic and geometric space-time analogies in nonlinear optical pulse propagation," *Optics Letters*, vol. 26, no. 17, pp. 1323–1325, 2001.
- [66] P. Naulleau and E. Leith, "Stretch, time lenses, and incoherent imaging," *Applied Optics*, vol. 34, pp. 4119–4128, 1995.
- [67] C. J. R. Sheppard, P. P. Roberts, and M. Gu, "Fresnel approximation for off-axis illumination of a circular aperture," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 10, pp. 984–986, May 1993.
- [68] C. J. R. Sheppard and Z. Hegedus, "Resolution for off-axis illumination," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 15, pp. 622–624, Mar. 1998.
- [69] C. J. R. Sheppard and I. J. Cooper, "Fresnel diffraction by a circular aperture with off-axis illumination and its use in deconvolution of microscope images," *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 21, pp. 540–545, Apr. 2004.
- [70] C. V. Bennett and B. H. Kolner, "Aberrations in temporal imaging," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 37, pp. 20–32, January 2001.
- [71] J. E. Harvey and R. V. Shack, "Aberrations of diffracted wave fields," *Applied Optics*, vol. 17, pp. 3003–3009, September 1978.

- [72] C. J. R. Sheppard and M. Hrynevych, “Diffraction by a circular aperture: a generalization of Fresnel diffraction theory,” *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 9, pp. 274–281, February 1992.
- [73] V. N. Mahajan, “Aberrations of diffracted wave field. I. Optical imaging,” *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 17, pp. 2216–222, December 2000.
- [74] V. N. Mahajan, “Aberrations of diffracted wave fields. II. diffraction gratings,” *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 17, pp. 2223–2228, December 2000.
- [75] J. E. Harvey, D. Bogunovic, and A. Krywonos, “Aberrations of diffracted wave fields: distortion,” *Applied Optics*, vol. 42, pp. 1167–1174, Mar. 2003.
- [76] V. N. Mahajan, “Strehl ratio of a gaussian beam,” *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 22, pp. 1824–1833, Sept. 2005.
- [77] V. N. Mahajan, “Axial irradiance of a focused beam,” *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 22, pp. 1814–1823, Sept. 2005.
- [78] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*. Pergamon, New York, 6th ed., 1997.
- [79] E. Wolf, “On a new aberration function of optical instruments,” *Journal of the Optical Society of America*, vol. 42, no. 8, pp. 547–552, 1952.
- [80] N. Trappe, J. A. Murphy, and S. Withington, “The gaussian beam mode analysis of classical phase aberrations in diffraction-limited optical systems,” *European Journal of Physics*, vol. 24, pp. 403–412, July 2003.
- [83] A. A. Godill, B. A. Auld, and D. M. Bloom, “Time-lens producing 1.9 ps optical pulses,” *Applied Physics Letters*, vol. 62, no. 10, pp. 1047–1049, 1993.
- [84] M. T. Kauffman, A. A. Godil, B. A. Auld, W. C. Banyai, and D. M. Bloom, “Applications of time lens optical-systems,” *Electronics Letters*, vol. 29, pp. 268–269, Feb. 1993.
- [81] T. Khayim, M. Yamauchi, D. S. Kim, and T. Kobayashi, “Femtosecond optical pulse generation from a cw laser using an electrooptic phase modulator featuring lens modulation,” *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 35, pp. 1412–1418, Oct. 1999.

- [82] V. Torres-Company, J. Lancis, and P. Andres, “Unified approach to describe optical pulse generation by propagation of periodically phase-modulated cw laser light,” *Optics Express*, vol. 14, pp. 3171–3180, Apr. 2006.
- [85] G. P. Agrawal, P. L. Baldeck, and R. R. Alfano, “Temporal and spectral effects of cross-phase modulation on copropagating ultrashort pulses in optical fibers,” *Physical Review A*, vol. 40, no. 9, pp. 5063–5072, 1989.
- [86] F. J. Marinho and L. M. Bernardo, “Graded-index time-lens implementation,” *Optics Letters*, vol. 31, no. 11, pp. 1723–1725, 2006.
- [87] C. V. Bennett, *Parametric Temporal Imaging and Aberration Analysis*. PhD thesis, University of California, 2000.
- [88] E. Arons, E. N. Leith, A.-C. Tien, and R. Wagner, “High-resolution optical chirped pulse gating,” *Applied Optics*, vol. 36, no. 12, pp. 2603–2608, 1997.
- [89] G. Lenz, B. J. Eggleton, and N. Litchinitser, “Pulse compression using fiber grating as highly dispersive nonlinear elements,” *Journal of the Optical Society of America B*, vol. 15, no. 2, pp. 715–721, 1998.
- [90] A. Yariv, *Quantum Electronics*. John Wiley, 3rd ed., 1988.
- [91] C. Gomez-Reino and J. Linares, “Paraxial Fourier transforming and imaging properties of a grin lens with revolution symmetry - grin lens law,” *Applied Optics*, vol. 25, pp. 3418–3424, Oct. 1986.
- [92] C. Gomez-Reino, J. Linares, and E. Larrea, “Imaging and transforming transmission through tapered gradient-index rods - analytical solutions,” *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 3, pp. 1604–1607, Oct. 1986.
- [93] A. W. L. David Mendlovic, Haldun M. Ozaktas, “Graded-index fibers, Wigner-distribution functions, and the fractional Fourier transform,” *Applied Optics*, vol. 33, no. 26, pp. 6188–6193, 1994.
- [94] D. Mendlovic and H. M. Ozaktas, “Fractional Fourier transforms and their optical implementation: I,” *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 10, pp. 1875–1881, 1993.
- [95] D. M. H. M. Ozaktas, “Fractional Fourier transforms an their optical implemetation: II,” *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 10, pp. 2522–2531, 1993.

- [96] D. M. H. M. Ozaktas, “Fourier transforms of fractional order and their optical implementation,” *Optical Communications*, vol. 101, pp. 163–169, 1993.
- [97] J. R. Flores, C. Gomez-Reino, E. Acosta, and J. Linares, “Geometrical optics of gradient index lenses,” *Optical Engineering*, vol. 28, pp. 1173–1179, 1989.
- [98] C. Gomez-Reino, M. V. Perez, and C. Bao, *Gradient index optics: fundamental and applications*. Springer-Verlag, 2002.
- [99] J. Li and S. He, “Broadband optical modulator of fiber type,” *Optics Express*, vol. 13, no. 3, pp. 842–846, 2005.
- [100] R. C. Alferness, “Waveguide electrooptic modulators,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-30, no. 8, pp. 1121–1137, 1982.
- [101] T. Feng, W. Yi-Zun, and Y. Pei-da, “Improved coupled-mode theory for anisotropic waveguide modulators,” *IEEE J. Quantum Electron.*, vol. 24, no. 3, pp. 531–536, 1988.
- [102] W. L. She and W. K. Lee, “Wave coupling theory of linear electrooptic effect,” *Optics Communications*, vol. 195, pp. 303–311, Aug. 2001.
- [103] D. A. Farias and J. N. Eckstein, “Coupled-mode analysis of an electrooptic frequency shifter,” *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 39, no. 2, pp. 358–363, 2003.
- [104] D. A. Farias and J. N. Eckstein, “Dynamic electrooptic frequency shifter for pulsed light signals,” *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 41, pp. 94–99, 2005.
- [105] G. B. Arfken and H. J. Weber, *Mathematical Methods for Physicists*. Academic Press, 5th ed., 2001.
- [106] H. M. Ozaktas, Z. Zalevsky, and M. A. Kutay, *The Fractional Fourier Transform, with Applications in Optics and Signal Processing*. Wiley, 2001.
- [107] T. Alieva, V. Lopez, F. Agullolopez, and L. B. Almeida, “The fractional Fourier-transform in optical propagation problems,” *Journal of Modern Optics*, vol. 41, pp. 1037–1044, May 1994.
- [108] S. Coetmellec, M. Brunel, D. Lebrun, and J. B. Lecourt, “Group velocity dispersion with fractional-order Fourier formalism,” *Journal of Optics A*, vol. 5, pp. 26–30, Jan. 2003.

- [109] M. Brunel and S. Coetmellec, “Fractional-order Fourier formulation of the propagation of partially coherent light pulses,” *Optics Communications*, vol. 230, pp. 1–5, Jan. 2004.
- [110] Y. J. Cai and Q. Lin, “The fractional Fourier transform for a partially coherent pulse,” *Journal of Optics A*, vol. 6, pp. 307–311, Apr. 2004.
- [111] S. Coetmellec, M. Brunel, D. Lebrun, and J. B. Lecourt, “Fractional-order Fourier series expansion for the analysis of chirped pulses,” *Optics Communications*, vol. 249, pp. 145–152, May 2005.
- [112] A. W. Lohmann, “Image rotation, Wigner rotation, and the fractional Fourier transform,” *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 10, pp. 2181–2186, Oct. 1993.
- [113] C. Cuadrado-Laborde, P. A. Costanzo-Caso, R. Duchowicz, and E. E. Sicre, “Pulse propagation analysis based on the temporal Radon-Wigner transform,” *Optics Communications*, vol. 266, pp. 32–38, Oct. 2006.
- [114] E. O. Brigham, *The fast Fourier transform and its applications*. Prentice-Hall, Inc., 1988.
- [115] J. Garcia, D. Mas, and R. G. Dorsch, “Fractional-Fourier-transform calculation through the fast-Fourier-transform algorithm,” *Applied Optics*, vol. 35, pp. 7013–7018, 1996.
- [116] F. J. Marinho and L. M. Bernardo, “Numerical calculation of fractional Fourier transform with a single fast-Fourier-transform algorithm,” *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 15, no. 8, pp. 2111–2116, 1998.
- [117] D. Mas, J. Garcia, C. Ferreira, L. M. Bernardo, and F. Marinho, “Fast algorithms for free-space diffraction patterns calculation,” *Optics Communications*, vol. 164, pp. 233–245, 1999.
- [118] H. M. Ozaktas, O. Ankan, M. A. Kutay, and G. Bozdagi, “Digital computation of the fractional Fourier transform,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 44, pp. 2141–2150, Sept. 1996.
- [119] D. Mendlovic, Z. Zalevsky, and N. Konforti, “Computation considerations and fast algorithms for calculating the diffraction integral,” *Journal of Modern Optics*, vol. 44, pp. 407–414, Feb. 1997.

- [120] A. Bultheel and H. E. M. Sulbaran, “Computation of the fractional Fourier transform,” *Applied and Computational Harmonic Analysis*, vol. 16, pp. 182–202, May 2004.
- [121] X. P. Yang, Q. F. Tan, X. F. Wei, Y. Xiang, Y. B. Yan, and G. F. Jin, “Improved fast fractional-Fourier-transform algorithm,” *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 21, pp. 1677–1681, Sept. 2004.
- [122] B. M. Hennelly and J. T. Sheridan, “Fast numerical algorithm for the linear canonical transform,” *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 22, pp. 928–937, May 2005.
- [123] B. M. Hennelly and J. T. Sheridan, “Generalizing, optimizing, and inventing numerical algorithms for the fractional Fourier, Fresnel, and linear canonical transforms,” *Journal of the Optical Society of America A*, vol. 22, pp. 917–927, May 2005.
- [124] H. M. Ozaktas, A. Koc, I. Sari, and M. A. Kutay, “Efficient computation of quadratic-phase integrals in optics,” *Optics Letters*, vol. 31, pp. 35–37, Jan. 2006.
- [125] M. A. Porras, “Ultrashort pulsed gaussian light beams,” *Physical Review E*, vol. 58, pp. 1086–1093, July 1998.
- [126] M. A. Porras, “Nonsinusoidal few-cycle pulsed light beams in free space,” *Journal of the Optical Society of America B*, vol. 16, pp. 1468–1474, Sept. 1999.
- [127] M. A. Porras, R. Borghi, and M. Santarsiero, “Few-optical-cycle Bessel-Gauss pulsed beams in free space,” *Physical Review E*, vol. 62, pp. 5729–5737, Oct. 2000.
- [128] M. A. Porras, “Diffraction effects in few-cycle optical pulses,” *Physical Review E*, vol. 65, p. 026606, Feb. 2002.
- [129] X. Q. Fu, H. Guo, W. Hu, and S. Yu, “Spatial nonparaxial correction of the ultrashort pulsed beam propagation in free space,” *Physical Review E*, vol. 65, p. 056611, May 2002.
- [130] D. M. Deng, H. Guo, M. W. Lu, H. Tang, Y. L. Qiu, F. H. Yi, and H. J. Kong, “Free-space ultrashort pulsed beam propagation beyond the paraxial approximation,” *Journal of the Korean Physical Society*, vol. 41, pp. 706–709, Nov. 2002.
- [131] D. Q. Lu, W. Hu, Z. J. Yang, and Y. Z. Zheng, “Spectrum-induced changes in non-paraxial property of ultrashort pulsed beam,” *Chinese Physics Letters*, vol. 20, pp. 1729–1732, Oct. 2003.

-
- [132] D. Q. Lu, W. Hu, Y. Z. Zheng, and Z. J. Yang, “Propagation of pulsed beam beyond the paraxial approximation in free space,” *Optics Communications*, vol. 228, pp. 217–223, Dec. 2003.
- [133] S. Akturk, X. Gu, E. Zeek, and R. Trebino, “Pulse-front tilt caused by spatial and temporal chirp,” *Optics Express*, vol. 12, pp. 4399–4410, Sept. 2004.
- [134] X. Gu, S. Akturk, and R. Trebino, “Spatial chirp in ultrafast optics,” *Optics Communications*, vol. 242, pp. 599–604, Dec. 2004.
- [135] S. Akturk, X. Gu, P. Gabolde, and R. Trebino, “The general theory of first-order spatio-temporal distortions of gaussian pulses and beams,” *Optics Express*, vol. 13, pp. 8642–8661, Oct. 2005.
- [136] S. M. Lea, *Mathematics for physicists*. David Harris, 2004.
- [137] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, Inc., 10th ed., 1972.
- [138] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*. Academic Press, inc., 4th ed., 1980.